



**ACCADEMIA PICENO APRUTINA DEI VELATI**

**CORSO DI FORMAZIONE  
“DATI E PREVISIONI  
NELL’INSEGNAMENTO STEAM”**

**Roccaraso, 7-10 aprile 2022**

**APAV**



## PREFAZIONE

“.....la mente non ha bisogno, come un vaso, di essere riempita, ma, come legna da ardere, ha bisogno solo di una scintilla che la accenda, che vi infonda l’impulso alla ricerca e il desiderio della verità” (Plutarco, *Moralia*, De Audiendo)

Nei giorni 07-10 aprile 2022 si è svolto nella cittadina di Roccaraso il corso di formazione per docenti di Scuola secondaria di secondo grado sul tema “Dati e Previsioni nell’insegnamento STEAM”. L’attività, espletata nell’ambito dell’VIII Simposio “Bellezza e fascino della Matematica”, è stata organizzata dall’Accademia Piceno Aprutina dei Velati in Teramo (APAV), Ente accreditato dal MIM per la formazione del personale della scuola ai sensi della Direttiva 179/2016, in collaborazione con l’associazione Mat<sup>Nat</sup> (AQ) e la Federazione Italiana Mathesis. I lavori sono stati coordinati dal Presidente dell’Accademia prof/ssa Renata Santarossa e dal Direttore del Corso prof. Mario I. Mandrone. Come è noto, STEAM è l’acronimo inglese riferito a diverse discipline: Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics, e indica, pertanto, l’insieme delle materie scientifico-tecnologiche e ingegneristiche. L’acronimo è nato negli Stati Uniti a partire dagli anni 2000 per indicare un gruppo di discipline ritenute necessarie allo sviluppo di conoscenze e competenze scientifico-tecnologiche richieste prevalentemente dal mondo economico e lavorativo. L’approccio integrato STEAM tende a potenziare le seguenti competenze (indicate generalmente con il termine “competenze 4C”) ovvero: 1) Critical thinking (pensiero critico); 2) Communication (comunicazione); 3) Collaboration (collaborazione); 4) Creativity (creatività). In questo quaderno, realizzato dall’APAV, sono raccolte le relazioni presentate durante l’attività di formazione sulle seguenti tematiche: 1) Intervalli di confidenza per la media e la deviazione standard di Sergio Schiavone 2) Dimostrazione visiva del Teorema del Limite centrale di Ruben Sabbadini 3) Fenomeni casuali, l’algebra degli eventi e variabili aleatorie speciali; Introduzione all’Analisi Combinatoria; Campioni casuali, stimatori e metodo Monte Carlo di Mauro Cerasoli 4) Simulazione deterministica di una pandemia basata su dati statistici di Josè M. Carcione 5) La probabilità di decadimento radioattivo determinata statisticamente di Sergio Rossano 6) Correlazione e regressione di Maurizio Maravalle. Gli articoli pubblicati intendono far riflettere prevalentemente sui fondamenti didattici e pedagogici dell’insegnamento della matematica in generale, intesa come disciplina universale in grado di sviluppare la capacità di interpretare la realtà, di porsi e risolvere problemi nonché di esporre i fondamenti della teoria della probabilità e le sue principali applicazioni alla teoria degli errori di misura e alla statistica. Occuparsi di didattica delle discipline significa affrontare problemi di grande complessità: da una parte occorre far riferimento al mutamento del clima culturale che caratterizza il nostro tempo, dall’altra bisogna tener conto del dibattito pedagogico che si è andato evolvendo senza trovare -come ben si sa- adeguato spazio nella scuola superiore. Ciò comporta una trasformazione epistemologico-metodologica di grande portata: si tratta di considerare la differenza tra l’insegnamento per schemi e l’insegnamento per problemi, di distinguere la matematica del certo dalla matematica del probabile, di evidenziare i percorsi tesi al conseguimento di verità definitive rispetto a percorsi tesi a elaborare modelli di interpretazione dei fenomeni. In questa dimensione la probabilità e la statistica rappresentano un capitolo della matematica di particolare interesse perché l’introduzione delle suddette tematiche non richiede solo la conoscenza di contenuti nuovi, ma necessita anche di un atteggiamento nuovo nei riguardi della matematica.

Non si può certamente tacere che l’insegnamento della matematica nel nostro Paese ha privilegiato, nel passato, procedimenti di tipo logico-deduttivo mirando all’acquisizione di verità certe ed indiscutibili. Oggi che nella matematica si riconosce lo strumento idoneo non solo ad interpretare e risolvere questioni legate a fenomeni naturali, ma problemi del mondo economico e della vita sociale in genere, si tende a valorizzare e a potenziare, accanto alle tradizionali metodologie deduttive, quelle

di tipo induttivo. Una strategia potenzialmente efficace per l'innovazione didattica dovrebbe essere basata su fusionismo e sul lavoro per progetti interdisciplinari. Difatti, l'approccio fusionista si manifesta particolarmente utile ed opportuno in quanto favorisce l'utilizzazione sinergica di diversi metodi (geometrici, analitici, grafici) mediante l'integrazione di strumenti di tipo diverso. Nel corso dei vari interventi l'attenzione è stata focalizzata sui nuclei fondanti degli argomenti trattati, sui nodi didatticamente problematici e sulle questioni ritenute essenziali che sono alla base del sapere matematico, nonché sulle linee direttrici dello sviluppo storico del pensiero matematico. Storicamente i primi studi sulla teoria della probabilità risalgono al XVII secolo e si devono essenzialmente a Pascal, Fermat e Bernoulli. Inizialmente questi studi furono dedicati alla soluzione di problemi posti dal gioco d'azzardo, dalle assicurazioni e dalla statistica demografica. Lo sviluppo che si ebbe della teoria della probabilità e la vasta applicazione dei suoi risultati e metodi alle scienze della vita, in particolare alla biologia, alla medicina, oltre che alla fisica e alla chimica, dimostrano che la conoscenza dei metodi e delle applicazioni della teoria costituisce un indispensabile bagaglio culturale sia per applicazioni professionali sia per ricerche di laboratorio.

Tutti i docenti impegnati nell'attività formativa hanno adottato una modalità di presentazione delle tematiche scelte strettamente funzionale al carattere didattico del corso stesso, non solo relativamente ai contenuti, secondo quanto previsto dalle Indicazioni nazionali, quanto anche al carattere operativo e laboratoriale degli strumenti e delle tecniche didattiche che sono state presentate. Le modalità di presentazione degli argomenti trattati sono state corroborate da brevi esposizioni teoriche introduttive dei temi trattati a cui sono seguite esercitazioni guidate e attività laboratoriali da cui si è preso spunto per considerazioni e discussioni sui contenuti proposti e sul loro insegnamento. Da quanto detto si evince che un nuovo approccio alle discipline STEAM è un'urgenza sempre più sentita nella scuola e nel contesto attuale. L'acquisizione di competenze fondamentali, quali l'attitudine al pensiero logico e computazionale e alla risoluzione di problemi più o meno complessi, è una delle sfide che la moderna didattica della scienza si trova ad affrontare. L'approccio inter e multi disciplinare, unitamente alla contaminazione tra teoria e pratica, costituisce pertanto il fulcro dell'insegnamento delle discipline STEAM, che risultano particolarmente indicate per favorire negli alunni e negli studenti lo sviluppo di competenze tecniche e creative, necessarie in un mondo sempre più tecnologico e innovativo. L'osservazione dei fenomeni, la proposta di ipotesi e la verifica sperimentale della loro attendibilità possono consentire agli studenti di apprezzare le proprie capacità operative e di verificare sul campo quelle di sintesi. In questo modo si incoraggiano gli studenti a diventare autonomi nell'apprendimento favorendo lo sviluppo di competenze trasversali come la gestione del tempo e la ricerca indipendente. Il lavoro di gruppo consente di valorizzare la capacità di comunicare e prendere decisioni, di individuare scenari, di ipotizzare soluzioni univoche o alternative favorendo anche l'apprendimento collaborativo e la condivisione delle conoscenze. Inoltre, l'utilizzo di risorse digitali interattive, come simulazioni, giochi didattici o piattaforme di apprendimento online, può arricchire l'esperienza di apprendimento degli studenti. I docenti impegnati nell'attività didattica hanno utilizzato i laboratori come spazi di riflessione e condivisione sulle proprie modalità di lavoro pedagogico e didattico, per discutere, argomentare, effettuare ipotesi, progettare e sperimentare nuovi percorsi. Per concludere, mi auguro che questo "quaderno" possa sollecitare discussione e dibattito e che possa soprattutto offrire utili strumenti agli insegnanti di matematica che si trovano a fare i conti con una materia troppo a lungo considerata separata dal contesto delle altre parti del sapere e per questo motivo spesso privata di quel diffuso e riconosciuto interesse intellettuale e culturale che contraddistingue altre discipline.

Il direttore del corso

Mario Innocenzo Mandrone

# *Intervalli di confidenza per la media e deviazione standard*

**Sergio Schiavone<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Liceo "E. Pestalozzi" di San Severo(FG),  
Indirizzo Liceo Scientifico, opzione Scienze Applicate  
Via Adda, 5, 71016, San Severo, Italy  
[sergioschiavone66@gmail.com](mailto:sergioschiavone66@gmail.com)

## **Introduzione**

In questo lavoro vengono presentati alcuni esempi di stima dei parametri come la media, la varianza e la deviazione standard per mezzo dei corrispondenti parametri campionari o statistiche del campione. Vengono proposti aspetti teorici ed esempi di stima puntuale e per intervallo utilizzando la calcolatrice grafica. La teoria dei campioni viene utilizzata per ottenere informazioni riguardanti campioni estratti da una popolazione in modo casuale. L'inferenza statistica si propone, mediante modelli, di applicare e adattare i risultati relativi a campioni estratti da una popolazione alla popolazione stessa. Sono prerogativa della statistica inferenziale la **stima dei parametri** e i **test di ipotesi**. In questo lavoro, viene trattata la stima dei parametri.

In particolare, se la stima di un parametro della popolazione è data da un singolo numero, tale valore è detto **stima puntuale** del parametro. Se invece la stima di un parametro della popolazione fornisce gli estremi di un intervallo fra i quali si può supporre, con un certo grado di fiducia, che il parametro sia compreso, tale stima è detta **stima per intervallo** del parametro. Il valore del parametro da stimare per la popolazione è incognito e ci si chiede se, dopo ripetuti campionamenti, la distribuzione della statistica assume certe proprietà che possono assicurarci che la statistica è vicina al valore incognito del parametro.

Ad esempio, la distribuzione della media campionaria ha la stessa media della popolazione da cui si è ottenuto il campione: ci si aspetta pertanto che, dopo numerosi campionamenti, la media campionaria si avvicini a quella della popolazione. I parametri che normalmente si stimano sono:

- 1) la media  $\mu$  di una popolazione;
- 2) la varianza  $\sigma^2$  di una popolazione;
- 3) la proporzione  $p$  di individui di una popolazione che appartengono a una determinata classe di importanza;
- 4) la differenza fra le medie di due popolazioni  $\mu_1 - \mu_2$ ;
- 5) la differenza fra le proporzioni di due popolazioni  $p_1 - p_2$ .

Le stime puntuali di questi parametri sono:

- 1) la media campionaria  $\bar{x}$  per la media della popolazione  $\mu$ ;
- 2) la varianza campionaria  $s^2$  per quella della popolazione  $\sigma^2$ ;
- 3) la proporzione campionaria  $\hat{p} = \frac{x}{n}$ , per quella della popolazione  $p$ , dove  $x$  rappresenta il numero di individui in un campione appartenenti alla classe di interesse ed  $n$  è l'ampiezza;
- 4) la differenza  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$  fra le medie di due campioni indipendenti per la differenza  $\mu_1 - \mu_2$  di due popolazioni;
- 5) la differenza  $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$  fra le proporzioni di due campioni indipendenti, per quella delle proporzioni  $p_1 - p_2$  di due popolazioni.

Si possono avere più stime puntuali per lo stesso parametro; per esempio se si vuole stimare la media di una popolazione, si potrebbe usare anche la mediana campionaria.

Per decidere quale fra le possibili stime puntuali è preferibile usare, ci basiamo sulla verifica di alcune proprietà che gli stimatori devono possedere per essere giudicati i più adatti.

Una di queste è la proprietà della **correttezza** o **non distorsione**. Pertanto, si dirà che la statistica è uno **stimatore corretto** o **non distorto** del parametro, se la media di una distribuzione campionaria di una statistica è uguale al corrispondente parametro della popolazione.

In pratica, una statistica è uno stimatore corretto se in media i suoi valori uguagliano il parametro che sta valutando. Se due statistiche sono entrambe stimatori corretti di un parametro, la statistica per cui la varianza della sua distribuzione campionaria è minore è detta **stimatore più efficiente**. Poiché è difficile aspettarsi che una stima puntuale coincida esattamente con la quantità che essa deve stimare, è consuetudine usare una stima per intervallo, ossia un intervallo per il quale si può affermare con un certo grado di fiducia che conterrà il parametro della popolazione che si vuole stimare. Queste stime sono dette **intervalli di confidenza**.

## Intervalli di confidenza per la media con varianza nota

Poiché la media campionaria  $\bar{x}$  è una buona stima, corretta ed efficiente, della media  $\mu$  di una popolazione, non si ha comunque la certezza che essa sia uguale a quella della popolazione.

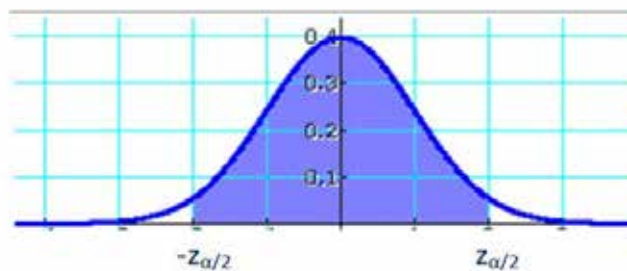
In questo caso converrà stimare  $\mu$ , individuando un opportuno intervallo in cui esso possa trovarsi. Per ottenere una stima intervallare, vengono utilizzate le proprietà delle distribuzioni della media campionaria.

Di norma nell'inferenza statistica si procede induttivamente, cioè ci si basa sui risultati di un solo campione per trarre poi conclusioni sull'intera popolazione. Questo comporta ovviamente il rischio di non giungere sempre a delle conclusioni corrette partendo da un singolo campione.

Poiché nella pratica si estrae un solo campione, e ovviamente non conosciamo la media della popolazione, non possiamo essere certi che le conclusioni a cui si perviene siano corrette. Per risolvere questo problema, ogni stima per intervallo viene calcolata valutando anche la percentuale, detta **grado di fiducia**, dei campioni che dà luogo a conclusioni corrette. Quando una popolazione ha una distribuzione con varianza nota  $\sigma^2$  e media  $\mu$  non nota, allora si estrae da essa un campione di ampiezza  $n$ ; il teorema del limite centrale asserisce che qualunque sia la popolazione considerata, la distribuzione della media campionaria tende a quella normale quando  $n$  tende ad infinito. Se  $\bar{X}_n$  rappresenta la media campionaria di un campione di ampiezza  $n$ , allora la statistica

$$Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

rappresenta una v.a. normale standardizzata.



Pertanto,

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

rappresenta la probabilità che sia soddisfatta la disuguaglianza

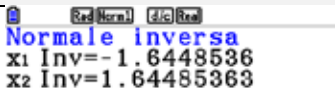
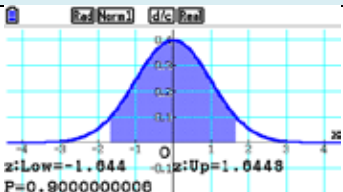
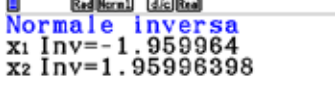
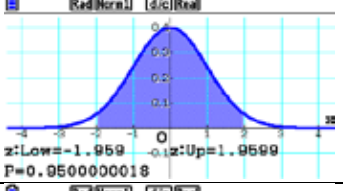
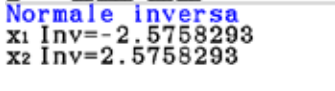
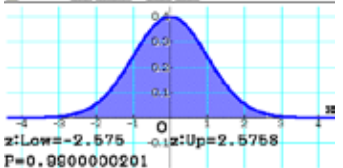
$$-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}$$

ovvero che

$$\bar{X}_n - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Tale intervallo è detto **intervallo di confidenza per la media  $\mu$  con grado di fiducia  $(1-\alpha)\%$**  o con **livello di significatività  $\alpha\%$** .

Si riportano, qui di seguito, i valori critici corrispondenti alle stime intervallari più ricorrenti:

Grado di fiducia (1- $\alpha$ )%	$z_{\frac{\alpha}{2}}$	Valore critico $z_{\frac{\alpha}{2}}$	Rappresentazione grafica
90%	$z_{0.05}$		
95%	$z_{0.025}$		
99%	$z_{0.005}$		

### Esempio 1

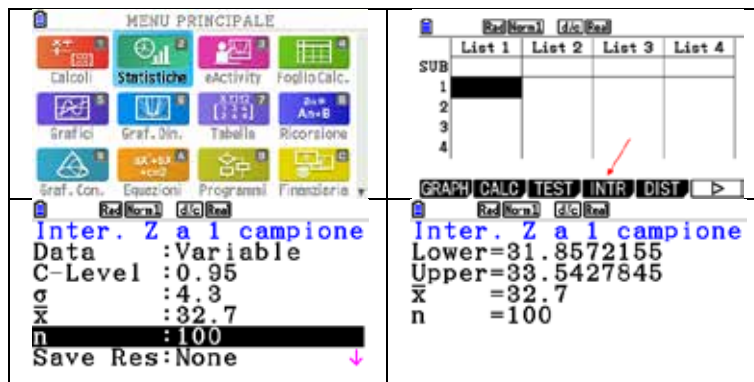
E' assegnato un campione di ampiezza  $n = 100$  estratto da una popolazione avente scarto quadratico medio  $\sigma = 4.3$ ; la media campionaria sia  $\bar{x}=32.7$ . Costruire l'intervallo di confidenza al 95% per la media  $\mu$  della popolazione.

Risulta per  $\alpha=0.05$ :

$$32.7 - 1.96 \cdot \frac{4.3}{\sqrt{100}} < \mu < 32.7 + 1.96 \cdot \frac{4.3}{\sqrt{100}}$$

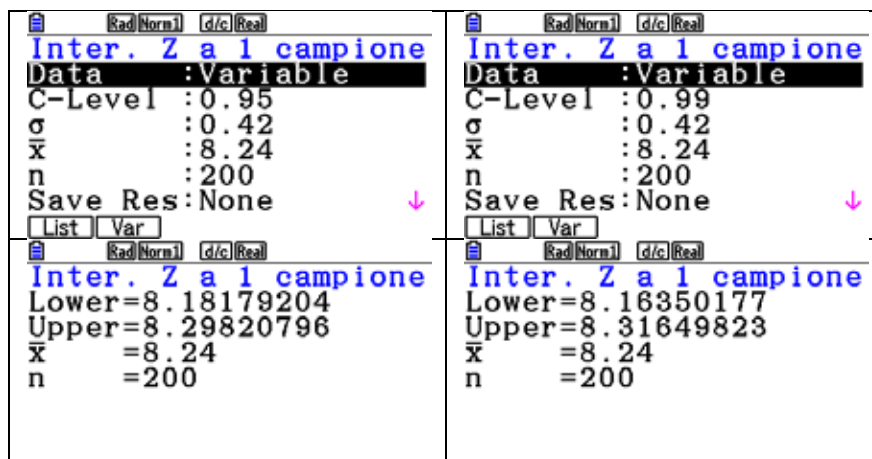
ovvero

$$31.86 < \mu < 33.54$$



### Esempio 2

Le misure dei diametri di un campione casuale di 200 sfere da cuscinetto prodotte da una macchina in una settimana hanno una media campionaria  $\bar{x}=8.24$  mm e una deviazione standard campionaria  $s = 0.42$  mm. Determinare gli intervalli di confidenza per la media della popolazione con grado di fiducia del 95% e del 99%. Seguendo i passaggi dell'esempio precedente, si ha:



A parità di numero di elementi del campione, aumentando il grado di fiducia l'ampiezza dell'intervallo aumenta e la stima è meno precisa.

### Esempio 3

Sia dato un campione di 100 studenti tratto da una popolazione di studenti di sesso maschile iscritti in un ateneo; la tabella sottostante rappresenta la distribuzione di frequenza dei pesi, espressi in chilogrammi, degli studenti. Determinare gli intervalli di confidenza al 95% e al 99% per il peso medio di tutti gli studenti.

SHE	A	B	C	D
1	CLASSI	PESO	N STUD	VAL C
2	60	62	5	61
3	63	65	18	64
4	66	68	42	67
5	69	71	27	70

SHE	C	D	E	F
1	N STUD	VAL C	IxN	
2	5	61	305	
3	18	64	1152	
4	42	67	2814	
5	27	70	1890	

SHE	A	B	C	D
4	66	68	42	67
5	69	71	27	70
6	72	74	8	73
7			100	
8			MEAN	

=CellSum(C2:C6)

SHE	B	C	D	E
4	68	42	67	2614
5	71	27	70	1890
6	74	8	73	584
7		100		6745
8		MEAN		67.45

"MEAN"

SUB	List 1 VAL C	List 2 FREQ	List 3	List 4
1	61	5		
2	64	18		
3	67	42		
4	70	27		

5

1-Variabile	
$\bar{x}$	=67.45
$\Sigma x$	=6745
$\Sigma x^2$	=455803
$\sigma x$	=2.92018835
$sx$	=2.93489971
$n$	=100

Inter. Z a 1 campione	
C-Level	:0.95
$\sigma$	:2.9335
$\bar{x}$	:67.45
$n$	:100
Save Res	:None
Esegui	

Inter. Z a 1 campione	
Lower	=66.8750446
Upper	=68.0249554
$\bar{x}$	=67.45
$n$	=100

Inter. Z a 1 campione	
C-Level	:0.99
$\sigma$	:2.9335
$\bar{x}$	:67.45
$n$	:100
Save Res	:None
Esegui	

Inter. Z a 1 campione	
Lower	=66.6943805
Upper	=68.2056195
$\bar{x}$	=67.45
$n$	=100

## Intervalli di confidenza per la media con varianza non nota

In questo caso, quando una popolazione ha una distribuzione con varianza  $\sigma^2$  non nota, si può dimostrare che lo scarto quadratico medio campionario  $s$  può sostituire quello della popolazione per grandi campioni, ma se il campione è piccolo (in genere,  $n < 30$ ), nell'ipotesi che la popolazione da cui si estrae il campione abbia distribuzione normale, ci si può servire della v.a.

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

che rappresenta una v.a. che ha la distribuzione t di Student con grado di libertà  $\nu = n - 1$ . Analogamente a quanto visto per gli intervalli di confidenza per la media con varianza nota, risulta che:

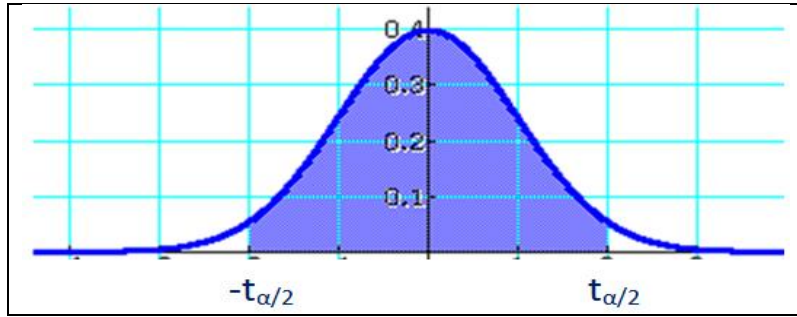
$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} < T < t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

rappresenta la probabilità che sia soddisfatta la disuguaglianza

$$-t_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < t_{\frac{\alpha}{2}}$$

ovvero che

$$\bar{X}_n - t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$



**Esempio 1**

Le misure in kg del peso di un campione di 10 studenti maschi del primo anno di un'università sono

Peso (kg)	60	63	68	61	67	60	70	72	65	69
-----------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Si determini un intervallo di confidenza con grado di fiducia del 99% per il peso medio della popolazione universitaria maschile del primo anno di quella università.

## Intervalli di confidenza per la differenza fra due medie con varianze note

Molto spesso in una ricerca si è interessati a due popolazioni; in particolare, si vuole studiare la differenza fra le medie di due popolazioni: in una indagine, per esempio, si può cercare di stabilire se le medie di due popolazioni sono diverse oppure si vuole stimare la grandezza della differenza fra le medie di due popolazioni. Ovviamente, in queste ricerche è necessario conoscere le proprietà della distribuzione di campionamento della differenza fra due medie. Siano date, ad esempio, due distribuzioni aventi medie rispettivamente  $\mu_1$  e  $\mu_2$  e varianze  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$ . Allora si può utilizzare la proprietà secondo cui per le distribuzioni di due v.a. indipendenti con medie e varianze note la distribuzione della loro differenza ha la media  $\mu_1 - \mu_2$  e la varianza  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ .

Quindi, date due popolazioni aventi distribuzioni normale, si procede all'estrazione da esse di campioni di ampiezza, rispettivamente,  $n_1$  e  $n_2$ ; indicando con  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$  le due medie campionarie, esse hanno entrambe distribuzione normale con medie rispettivamente  $\mu_1$  e  $\mu_2$  e varianze  $\frac{\sigma_1^2}{n_1}$  e  $\frac{\sigma_2^2}{n_2}$ .

Anche per grandi campioni estratti da popolazioni non aventi la distribuzione normale vale lo stesso risultato, almeno approssimativamente. In entrambi i casi, la differenza  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$  ha, almeno approssimativamente, la distribuzione normale e, in base alla precedente proprietà, la media è  $\mu_1 - \mu_2$  e la varianza  $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ . Pertanto, similmente a quanto visto prima, si può considerare la v.a.

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

che ha, approssimativamente, la distribuzione normale standardizzata.

Una volta estratti i campioni di ampiezze  $n_1$  e  $n_2$ , si procede a calcolare le medie  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$ . Risolvendo rispetto alla differenza  $\mu_1 - \mu_2$ , per trovare l'intervallo di confidenza, si ha:

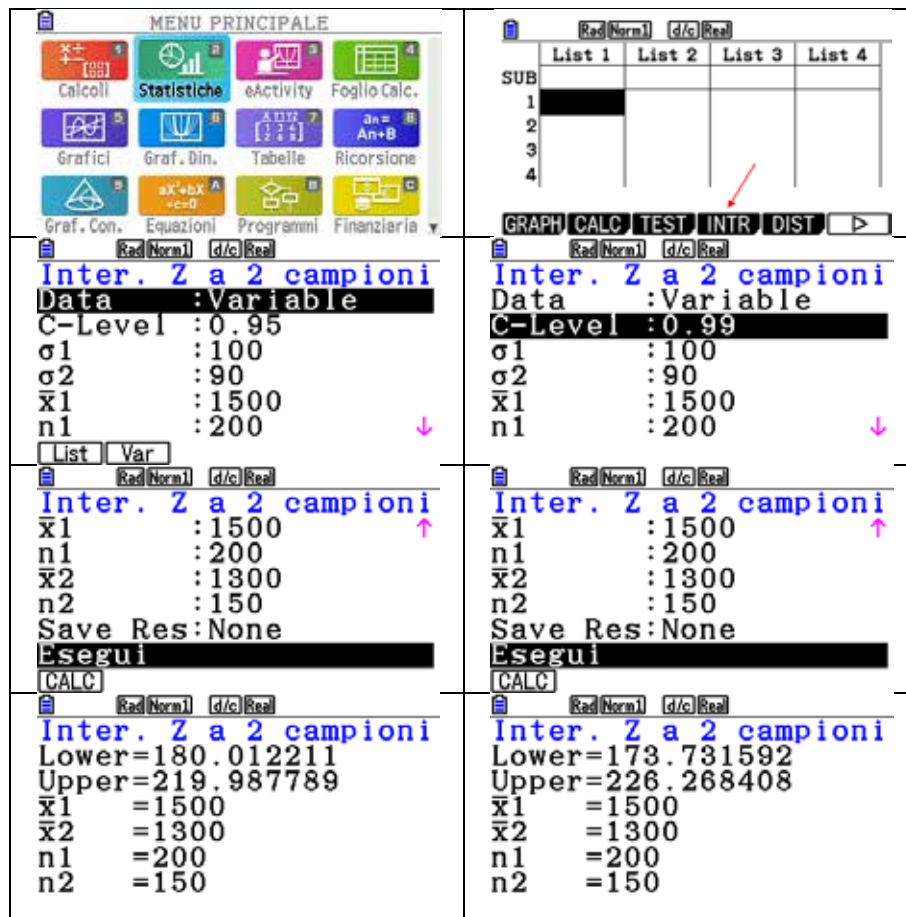
$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

La disuguaglianza precedente vale per popolazioni anche non normali, purché il campione sia grande ( $n \geq 30$ ). Inoltre, qualora le varianze  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  non siano note, nel caso di grandi campioni possono essere sostituite con le varianze campionarie  $s_1^2$  e  $s_2^2$ .

### Esempio 1

Un campione di 200 lampadine della marca A ha mostrato una durata media di 1500 ore ed uno scarto quadratico medio di 100 ore; un campione di 150 lampadine della marca B ha mostrato, invece, una durata media di 1300 ore ed uno scarto quadratico medio di 90 ore. Trovare gli intervalli di confidenza al 95% e al 99% per la differenza di durata di tutte le lampadine delle marche A e B.

Si inseriscono i dati



## Intervalli di confidenza per la differenza fra due medie con varianze non note

Come già detto, se le varianze  $\sigma_1^2$  e  $\sigma_2^2$  non sono note, nel caso di grandi campioni possono essere sostituite con le varianze campionarie  $s_1^2$  e  $s_2^2$ .

Invece, per campioni di piccole dimensioni, per stimare la differenza fra le medie delle due popolazioni si può far ricorso alla distribuzione  $t$ , ma è necessario che siano verificate alcune ipotesi, ammettendo sempre che le due popolazioni abbiano distribuzione normale.

Occorre distinguere due casi:

- le varianze delle due popolazioni sono uguali;
- le varianze delle due popolazioni sono diverse.

per semplicità, sarà trattato solo il caso di due popolazioni normali con la stessa varianza.

Se le due popolazioni normali hanno la stessa varianza (incognita), le due varianze campionarie  $S_1^2$  e  $S_2^2$  che si calcolano dai campioni indipendenti estratti dalle due popolazioni, possono essere considerate come stime della stessa quantità, la varianza comune alle due distribuzioni.

Basandoci su questa osservazione si può ricavare lo **stimatore congiunto (pooled) della varianza** comune, calcolando la media ponderata delle due varianze campionarie con la seguente formula

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

Ovviamente, se i due campioni hanno la stessa ampiezza, lo stimatore congiunto è la media aritmetica delle due varianze campionarie. Se invece hanno ampiezze diverse, la media ponderata è maggiormente influenzata dall'informazione fornita dal campione più grande.

Per piccoli campioni ( $n < 30$ ), nell'ipotesi che le popolazioni da cui si estraggono i campioni abbiano distribuzione normale con la stessa varianza, indicando con  $\bar{X}_1$  e  $\bar{X}_2$  le medie campionarie e con  $S^2$  lo stimatore congiunto della varianza, si può dimostrare che

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{S^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

ha distribuzione  $t$  con grado di libertà  $n_1 + n_2 - 2$ . Quindi, con procedimento analogo, si ottiene il seguente **intervallo di confidenza per la differenza delle medie**  $\mu_1 - \mu_2$ , con **grado di fiducia**  $(1-\alpha)\%$  o con **livello di significatività**  $\alpha\%$ , per **piccoli campioni** estratti da due popolazioni normali con la stessa varianza.

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{\alpha/2} \cdot \sqrt{s^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{\alpha/2} \cdot \sqrt{s^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

### Esempio

Nella tabella sottostante sono riportate le lunghezze in cm di due campioni A e B di oggetti dello stesso tipo, prodotti da due macchine diverse.

Calcolare gli intervalli di confidenza per la differenza fra le medie con grado di fiducia del 95% e del 99%, supponendo che le popolazioni da cui provengono i campioni abbiano distribuzione normale con la stessa varianza.

Procedendo con il calcolo delle medie e varianze campionarie, si stima l'intervallo di confidenza per la differenza tra le medie delle popolazioni

The image shows four screenshots of a TI-84 calculator interface, arranged in a 2x2 grid, illustrating the process of entering data and calculating statistics for two samples, A and B.

**Top Left Screenshot:** Shows the data entry screen for List 1 (SUB A) and List 2 (SUB B). The data points are: A: 8.26, 8.13, 8.35, 8.07; B: 7.95, 7.89, 7.9, 8.14. The calculator is in the '1-Variabile' (1-Variable) mode.

**Top Right Screenshot:** Shows the data entry screen for List 1 (SUB A) and List 2 (SUB B). The data points are: A: 8.07, 8.34, 8.34, 8.07; B: 8.14, 7.92, 7.84, 7.94. The calculator is in the '2-Variabile' (2-Variable) mode.

**Bottom Left Screenshot:** Shows the statistical summary for the 1-Variable mode. The results are:  $\bar{x} = 8.23$ ,  $\Sigma x = 41.15$ ,  $\Sigma x^2 = 338.7275$ ,  $\sigma x = 0.11224972$ ,  $sx = 0.125499$ ,  $n = 5$ .

**Bottom Right Screenshot:** Shows the statistical summary for the 2-Variable mode. The results are:  $\bar{x} = 7.94$ ,  $\Sigma x = 55.58$ ,  $\Sigma x^2 = 441.3598$ ,  $\sigma x = 0.0883176$ ,  $sx = 0.09539392$ ,  $n = 7$ .

<pre> Rad(Norm) d/c Real Inter. T a 2 campioni C-Level :0.95 ↑ x̄1      :8.23 sx1     :0.125499 n1      :5 x̄2      :7.94 sx2     :0.09539392 ↓ </pre>	<pre> Rad(Norm) d/c Real Inter. T a 2 campioni Data    :Variable C-Level :0.99 x̄1      :8.23 sx1     :0.125499 n1      :5 x̄2      :7.94 ↓ </pre>
<pre> Rad(Norm) d/c Real Inter. T a 2 campioni n1      :5 ↑ x̄2      :7.94 sx2     :0.09539392 n2      :7 Pooled  :On Save Res:None ↓ On Off </pre>	<pre> Rad(Norm) d/c Real Inter. T a 2 campioni sx1     :0.125499 ↑ n1      :5 x̄2      :7.94 sx2     :0.09539392 n2      :7 Pooled  :On ↓ On Off </pre>
<pre> Rad(Norm) d/c Real Inter. T a 2 campioni Lower=0.14851757 Upper=0.43148242 df      =10 x̄1      =8.23 x̄2      =7.94 sx1     =0.125499 ↓ </pre>	<pre> Rad(Norm) d/c Real Inter. T a 2 campioni Lower=0.08875742 Upper=0.49124257 df      =10 x̄1      =8.23 x̄2      =7.94 sx1     =0.125499 ↓ </pre>
<pre> Rad(Norm) d/c Real Inter. T a 2 campioni x̄2      =7.94 ↑ sx1     =0.125499 sx2     =0.09539392 sp      =0.10844353 n1      =5 n2      =7 </pre>	<pre> Rad(Norm) d/c Real Inter. T a 2 campioni x̄2      =7.94 ↑ sx1     =0.125499 sx2     =0.09539392 sp      =0.10844353 n1      =5 n2      =7 </pre>

## Intervalli di confidenza per la varianza e per lo scarto quadratico medio

Nel calcolo dell'intervallo di confidenza per la media di un grande campione si è osservato che, se lo scarto quadratico medio della popolazione non è noto, esso può essere sostituito con lo scarto quadratico medio campionario.

In certi casi è però necessario determinare intervalli di confidenza per la varianza o per lo scarto quadratico medio.

Nella maggior parte delle applicazioni pratiche, le stime per intervallo per  $\sigma$  e  $\sigma^2$  sono basate sullo scarto quadratico medio campionario  $s$  e sulla varianza campionaria  $s^2$ .

Si consideri una popolazione avente distribuzione normale, e si estraggano da questa popolazione campioni di ampiezza  $n$ .

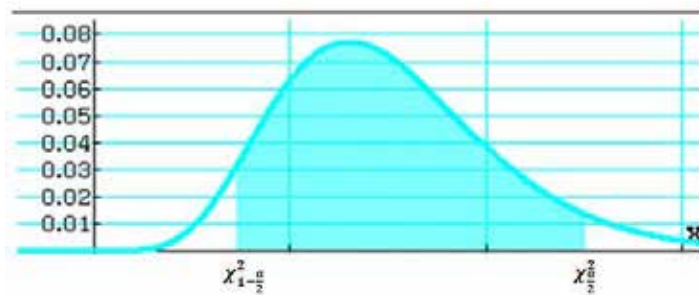
Si può dimostrare che la v.a.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

è distribuita secondo una variabile casuale Chi-quadrato con  $v=n-1$  gradi di libertà.

La distribuzione  $\chi^2$  non è simmetrica; usando code di uguale area e indicando con  $\alpha/2$  l'area di ciascuna coda, si ha che

$$P\left(\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2\right) = 1 - \alpha$$



In altre parole si può asserire con probabilità  $1-\alpha$ , ossia con grado di fiducia  $(1-\alpha)\%$ , che vale la disuguaglianza

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$$

Pertanto, indicando con  $s^2$  la varianza di un campione di ampiezza  $n$  estratto da una popolazione normale, e risolvendo questa disuguaglianza rispetto a  $\sigma^2$  si ottiene l'**intervallo di confidenza per la varianza  $\sigma^2$**  con grado di fiducia  $(1-\alpha)\%$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

Estraendo la radice quadrata di ciascun membro della disuguaglianza, si ottiene l'intervallo di confidenza per lo scarto quadratico medio.

Il metodo descritto per trovare gli intervalli di confidenza per la varianza si applica solo a campioni estratti da popolazioni normali.

L'assunzione che la popolazione abbia distribuzione normale è molto importante; in caso contrario, infatti, i risultati ottenuti possono generare gravi errori.

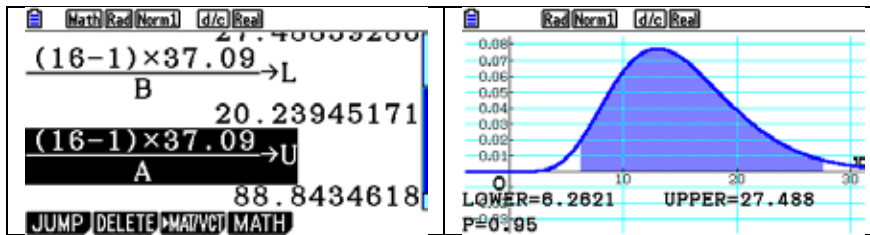
Si può osservare che l'intervallo di confidenza non è simmetrico, come invece accade per gli intervalli di confidenza per la media o per la proporzione; ciò è dovuto al fatto che la distribuzione  $\chi^2$  non è simmetrica.

### Esempio 1

In una scuola è stato scelto a caso un campione di 16 studenti dell'ultimo anno e si è misurata l'altezza di ciascuno di essi. La varianza campionaria della misura delle altezze è  $s^2 = 37.09$  cm. Trovare gli intervalli di confidenza al 95% e al 99% per la varianza della popolazione costituita da tutti gli studenti dell'ultimo anno della scuola.

Si calcolano prima i valori  $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$  e  $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$  con  $\alpha=0.05$  e  $v=15$  df, ovvero  $\chi^2_{0.975,15}$  e  $\chi^2_{0.025,15}$

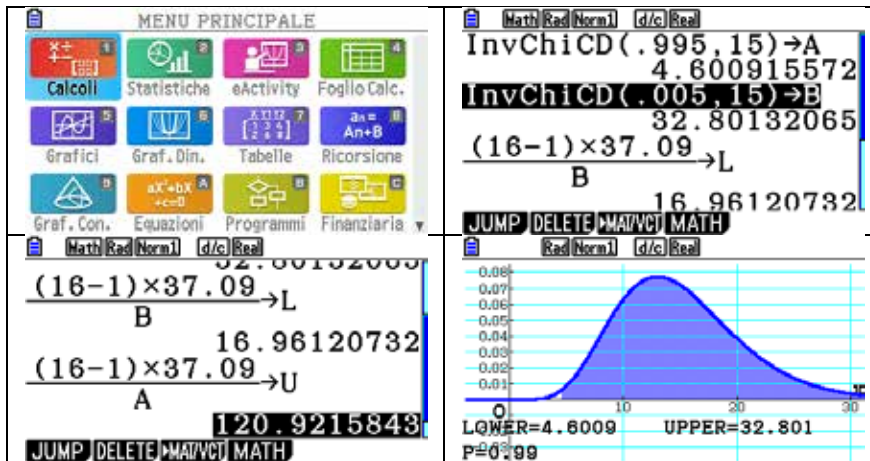




Quindi, risulta con grado di fiducia 95%

$$20.24 < \sigma^2 < 88.84$$

Mentre con grado di fiducia 99%, calcolando prima  $\chi^2_{0.995,15}$  e  $\chi^2_{0.005,15}$ , si ha



e l'intervallo di confidenza per la varianza è

$$16.96 < \sigma^2 < 120.92$$

invece, per la deviazione standard risulta

$$4.12 < \sigma < 11.00$$

## Esempio 2

Le misure della durata in ore di 10 batterie sono le seguenti

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	ORE			
1	140			
2	136			
3	150			
4	144			
				140

	List 1	List 2	List 3	List 4
SUB	ORE			
5	148			
6	162			
7	138			
8	141			
				141

Trovare un intervallo di confidenza al 99% per la varianza e per lo scarto quadratico medio della popolazione.

Procedendo come per l'esempio precedente, risulta

<p>Rad Norm   d/c Real</p> <p><b>1-Variabile</b></p> <p><math>\bar{x}</math> =144.3</p> <p><math>\Sigma x</math> =1443</p> <p><math>\Sigma x^2</math> =208515</p> <p><math>\sigma x</math> =5.3860932</p> <p><math>sx</math> =5.67744073</p> <p>n =10</p>	<p>Math Rad Norm   d/c Real</p> <p><b>InvChiCD(.995,9)→A</b></p> <p>1.734932905</p> <p><b>InvChiCD(.005,9)→B</b></p> <p>23.58935078</p> <p><math>\frac{(10-1) \times sx^2}{B}</math> →L</p> <p>12.29792217</p> <p><b>JUMP   DELETE   MAT/VCT   MATH</b></p>
<p>Math Rad Norm   d/c Real</p> <p><math>\frac{(10-1) \times sx^2}{B}</math> →L</p> <p>12.29792217</p> <p><math>\frac{(10-1) \times sx^2}{A}</math> →U</p> <p>167.2110772</p> <p><b>JUMP   DELETE   MAT/VCT   MATH</b></p>	<p>Math Rad Norm   d/c Real</p> <p>A →U</p> <p>167.2110772</p> <p><math>\sqrt{L}</math></p> <p>3.506839342</p> <p><math>\sqrt{U}</math></p> <p>12.93101223</p> <p><b>JUMP   DELETE   MAT/VCT   MATH</b></p>

In conclusione

$$12.30 < \sigma^2 < 167.21$$

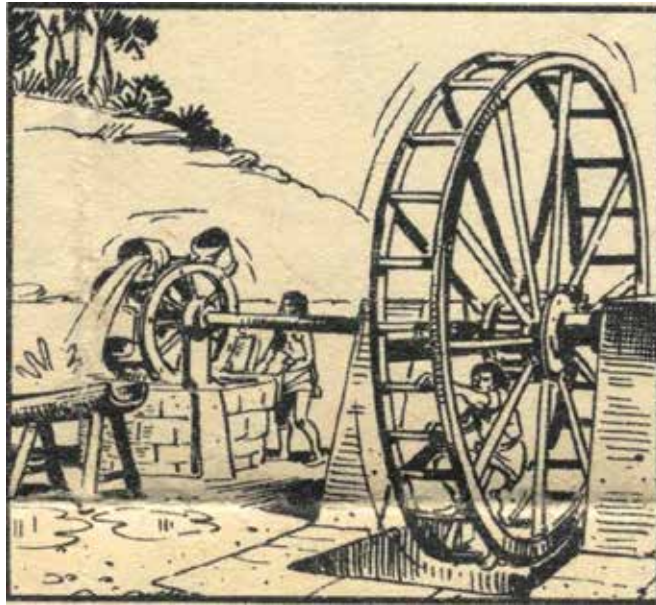
e

$$3.51 < \sigma < 12.93$$

## Bibliografia

M. Garetto, Statistica - Lezioni ed esercizi, Dipartimento di Matematica-Università di Torino  
(Gli esempi sono tratti dal testo e adattati o modificati)





## Dimostrazione visiva del Teorema del Limite centrale (una scusa per parlare di noi)

Ruben Sabbadini

**Riassunto** Gli studenti di oggi, come di ieri, sono perlopiù “visivi”, ovvero il loro apprendimento passa per la vista. I loro insegnanti, invece, sono quasi tutti “uditivi” (sul perché dovremo un giorno ragionare) e non li capiscono se non, addirittura, li considerano inadeguati. Inadeguata, invece, è la nostra didattica che non tiene conto degli stili di apprendimento dei più. Qui viene proposto un percorso didattico che mostra *le basi del pensare razionalmente ai fenomeni aleatori*: si discute come avvicinarsi al *Teorema del Limite centrale*, di De Moivre-Laplace, partendo da problemi della realtà.

**Abstract** Today's students, like yesterday, are mostly "visual", that is, their learning passes through sight. Their teachers, on the other hand, are almost all "auditory" (about why we will have to think one day) and do not understand them if they do not even consider them inadequate. Inadequate, however, is our teaching that does not take into account the learning styles of most. Here an educational path is proposed that shows the bases of rationally thinking about random phenomena: we discuss how to approach the central limit theorem, by De Moivre-Laplace, starting from problems of reality.

**Ruben Sabbadini**

Docente di matematica e fisica – Liceo Scientifico “Farnesina”, Roma  
email: [rusabba@tin.it](mailto:rusabba@tin.it)

Oggi parliamo di un'esperienza molto comune: fortuna, sfortuna, ecc.. Di che si tratta? Che significano queste parole? Sembra scontato perché non si pensa come, in realtà, siano un nostro modo (ingenuo?) di governare la complessità, di mettere ordine nel *caos*, Abbiamo il terrore dell'*imprevedibile* e vale la pena indagare, meglio, il perché; soprattutto nelle aule scolastiche.

Nel tentativo di governare l'incerto cerchiamo di "raggruppare" gli eventi possibili in classi: per esempio quelli buoni e quelli cattivi (fortuna/sfortuna). Quelli né buoni, né cattivi? Normalmente li dimentichiamo, per "sovraccarico" (non possiamo stare attenti a tutto!).

Ma ricordiamoci la brutta notizia: siamo animali (e che piante?) e di cosa ci ricordiamo? del *more solito*? No, delle stranezze! Ci ricordiamo dell'*insolito*: delle stranezze, appunto! Per il ricordo dei *pericoli* di un tempo: dei predatori, per esempio. La questione è diventata centrale nell'indagine scientifica e è sembrato naturale indagare un nostro "*parente*", questo:



Si chiama *Aplysia* è una chiocciola di mare ed è stata protagonista di un Nobel: il Nobel allo scienziato Eric Kandel nel 2000.

Vediamo la sua ricerca su *Aplysia* che, in qualche modo, siamo noi, sebbene in *miniatura*. Il suo cervello ha 8 gangli (raggruppamenti) neuronali; è elementare ... ma



non troppo! Infatti se la "punciate" qui, reagisce ritraendosi, ma ... dopo un po' di volte a vuoto, non reagisce più, non ci fa più caso; Perché dimentica? No! Perché non dimentica l'inutilità della sua reazione.

L'esperimento di Kandel conferma quanto detto prima su di noi che (1) ricordiamo; (2) annotiamo le coincidenze; (3)

dimentichiamo il *more solito*.

Pensiamo, per esempio, alla globalizzazione che associamo ad imprevedibilità, incetezza; è *more solito*? No, è una sfida continua e, per di più, ad *ultravelocità*. Non siamo abituati, il nostro cervello non è fatto per questo; e, quindi, come ci si attrezza per affrontare un futuro complesso? Imparando a governare l'incertezza, le stranezze, appunto! Imparando quelle che mi piace chiamare le *regole del caso*. Quelle proprietà, quei teoremi che, in ogni caso, sono intrinseci anche ai fenomeni aleatori, in cui domina l'incertezza. La materia dovrebbe essere obbligatoria e centrale nel *curriculum* ma così non è nella nostra scuola e la grande maggioranza degli insegnanti italiani non ha né conoscenze né competenze didattiche in merito<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Dal 26 Febbraio al 26 di Marzo 2022 si è svolto, fisicamente in Cile, all'Università de Los Lagos, ma allargandosi sul *web*, il *Primer Congreso Internacional de Didáctica de la Matemática*. Le direttrici fondamentali sono state sette (Riflessione del docente sulla sua pratica didattica; Esperienza didattica pratica degli insegnanti ce insegnano matematica senza formazione specifica; Modellizzazione matematica; Neuromatemática; L' inferenza statistica e il suo insegnamento a livello elementare, medio e superiore; Transizione alla scuola secondaria e alla

Questo piccolo intervento vorrebbe stimolare l'interesse per un semplice percorso didattico che potrebbe introdurre l'argomento mostrando un teorema fondamentale in modo semplice e, spero, accattivante.



Qual è la più bella trasmissione Tv? i pacchi!

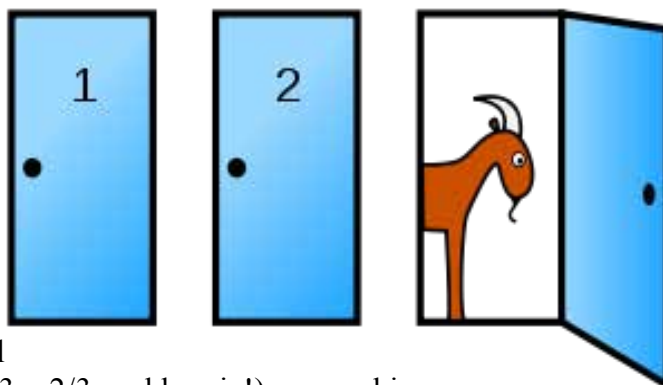
Bella per più motivi, per primacosa può insegnare come gestire il *caso*, ottimizzando le probabilità di successo; ma anche come esperimento sociologico: permette, cioè, di osservare come non si sa gestire *il caso* (la coincidenza tra il numero del pacco e il numero caro al nonno non aumenta le probabilità!).

Il gioco è una variante di questo gioco televisivo degli anni '50: il gioco della *capra*, il cui nome ufficiale era del Monty Hall, che così

funzionava:

si poteva scegliere tra tre porte, dietro una c'è un premio (ai tempi una *Mustag* Crysler) dietro le altre una *capra*. Qui c'è poi un piccolo espediente scenico: dopo che il concorrente ha scelto la porta, il conduttore ne apre un'altra dietro la quale c'è una capra e chiede al concorrente se vuole cambiare tra la precedentemente scelta o la restante. Pochi calcoli

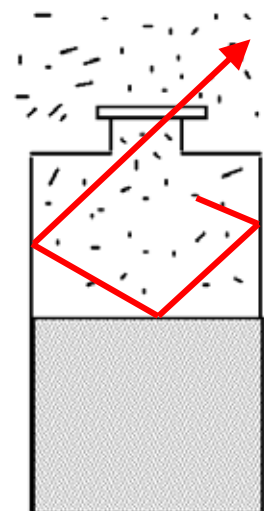
permettono di verificare la convenienza del cambio (cambiando la probabilità passa da  $1/3$  a  $2/3$ , raddoppia!) ma pochi accettano lo scambio per ignoranza e scarsa dimestichezza con le *regole del caso* (anche nel gioco dei *pacchi* vengono inserite situazioni simili).



Continuiamo ora il nostro percorso didattico considerando una nuova protagonista: una bottiglietta di profumo che schematizziamo così, come a destra.



Chiediamoci: cosa fa una singola molecola? Per esempio segue il percorso in figura e esce. Potrebbe seguire il percorso inverso e una molecola all'esterno entrare nella bottiglietta? Certamente! Le leggi della Meccanica sono reversibili, non definiscono nessuna direzione privilegiata, però ... se tutte, o molte, dall'esterno ritornassero nella



bottiglietta ci stupiremmo non poco, non lo riterremmo un

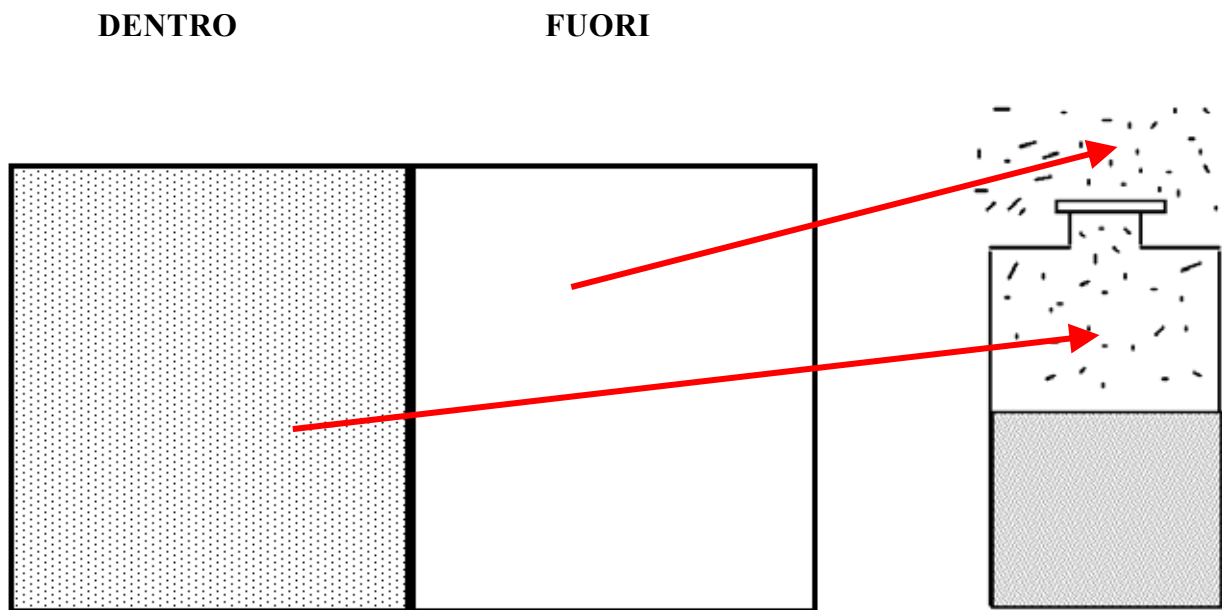
università: risoluzione di problemi, tecnologia e inclusione; Tecnologia Cabri (software di geometria dinamica) nella investigazione educativa. L'America Latina ha deciso di dare priorità all'insegnamento della Probabilità e Statistica a partire dalla scuola elementare per insegnare ai cittadini di domani ad affrontare con decisioni razionali le condizioni di incertezza!

fenomeno strano, inconsueto, impossibile.

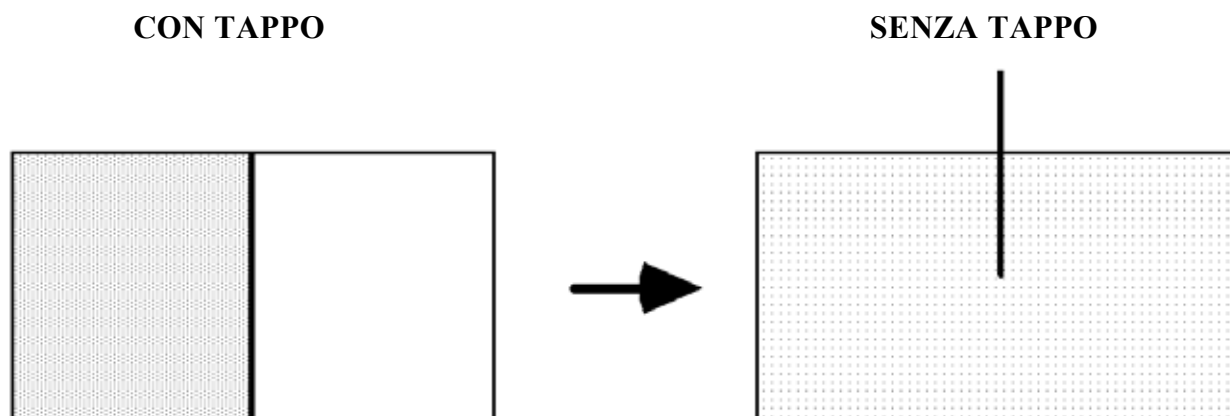
Così come ognuno di noi è libero di fare come crede (per esempio di mettersi una camicia azzurra!), ma se tutti si mettessero, nello stesso momento, una camicia azzurra ne cercheremmo immediatamente il motivo. Cercavo di spiegare ai genitori dei miei alunni che, ognuno di loro, può avere giustificati motivi per assentarsi da scuola ma se sono tutti, o buona parte, assenti ... si sono messi d'accordo! È difficile convincere di questo ancora per la scarsa dimestichezza con le *regole del caso*. Non è facile capire perché siamo individui liberi ... che facilmente si omologano!

Ma continuiamo il nostro percorso e vediamo se ci avviciniamo al perché.

Vi propongo un mio modello della bottiglietta di profumo:



Se c'è il tappo le molecole sono tutte dentro (a sx), senza il tappo le molecole si distribuiscono *uniformemente* tra dentro e fuori; il processo di togliere il tappo porta a questo:



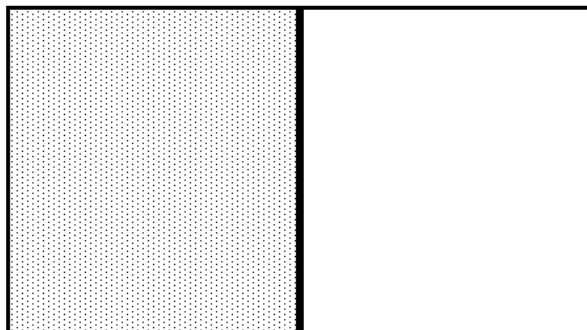
Perché?

Le molecole sono in numero finito, sono tante, ma, in via teorica, possiamo numerarle:  $1, 2, 3, \dots, n$ . Ora se la molecola  $k$  sta *dentro*, gli assegniamo il valore  $0$  se sta *fuori*, gli assegniamo il valore  $0$ . Nel nostro modello se la molecola  $k$  sta a sinistra

si ha  $0$ , invece se sta a destra, si ha  $1$ :

**DENTRO**  
STATO =  $0$

**FUORI**  
STATO =  $1$



Possiamo fare una bella tabella e chiederci, per es., come si può dire che tutte le molecole sono a sinistra (sx)?

<u>n.mol.a dx</u>	m(1)	m(2)	m(3)	...	...	...	m(n-2)	m(n-1)	m(n)
0	0	0	0	...	...	...	0	0	0
1	1	0	0	...	...	...	0	0	0
1	0	1	0	...	...	...	0	0	0
...									
1	0	0	0	...	...	...	0	0	1
2	1	1	0	...	...	...	0	0	0
2	1	0	1	...	...	...	0	0	0
...									
...									
2	0	0	0	...	...	...	0	1	1
...									
...									
...									
...									
n	1	1	1	...	...	...	1	1	1

e tutte a sx e solo una a destra (dx)?

n.mol.a dx	m(1)	m(2)	m(3)	...	...	...	m(n-2)	m(n-1)	m(n)
0	0	0	0	...	...	...	0	0	0
1	1	0	0	...	...	...	0	0	0
1	0	1	0	...	...	...	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
1	0	0	0	...	...	...	0	0	1
2	1	1	0	...	...	...	0	0	0
2	1	0	1	...	...	...	0	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2	0	0	0	...	...	...	0	1	1
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	1	1	1	...	...	...	1	1	1

Cosa si nota subito? che ci sono  $n$  diverse maniere di mettere una molecola a dx, si può mettere a destra la molecola 1, o la 2, ..., o la numero  $n$ , mentre c'è una sola di metterle tutte a sx. questo  $n$  è il valore della *molteplicità* dello stato 1 (una sola molecola a destra),  $W_1$ , e 1 è la molteplicità dello stato 0,  $W_0$

E lo stato 2 (solo 2 molecole a destra) che molteplicità avrà? la risposta non è intuitiva, ma forse ci possiamo arrivare facilmente.  $n$  amici festeggiano insieme il Capodanno. Quanti brindisi alla mezzanotte? Ciascuno degli  $n$  brinda con gli altri  $(n-1)$  amici, quindi  $n(n-1)$  brindisi? Per non contare due volte lo stesso brindisi (coinvolge due persone) bisogna dividere per 2, quindi:

$$W_2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Ma perché è così importante questa *molteplicità*? Perché è legata alla probabilità che uno stato si verifichi: *Molteplicità alta = Probabilità alta*. Già si vede che lo stato 0 ha bassa probabilità, si dice che è *praticamente impossibile*; come vincere al Superenalotto, *praticamente impossibile*! Giochereste 1 euro ad un gioco che: (1) dà 75 centesimi allo Stato; (2) e il resto ad un signore/a, per es. di Catania, o di Piacenza, che neanche conoscete? C'è differenza tra "qualcuno vince" e ..."io vinco"? O no? ("qualcuno vince" è quasi certo ... "io vinco" *praticamente impossibile*).

numero tot. particelle nella scatola  
**N = 10**

numero particelle a sx  
**N<sub>sx</sub> = 9**

numero particelle a dx  
**N<sub>dx</sub> = 1**

Spostare le particelle fuori o dentro la scatola (a dx o a sx) e valutare la molteplicità e la probabilità di ciascuno stato

S1 = 1	S6 = 1
S2 = 1	S7 = 1
S3 = 1	S8 = 1
S4 = 0	S9 = 1
S5 = 1	S10 = 1

molteplicità dello stato

$$W = \binom{N}{N_{dx}} = 10$$

Probabilità [W/2^N]

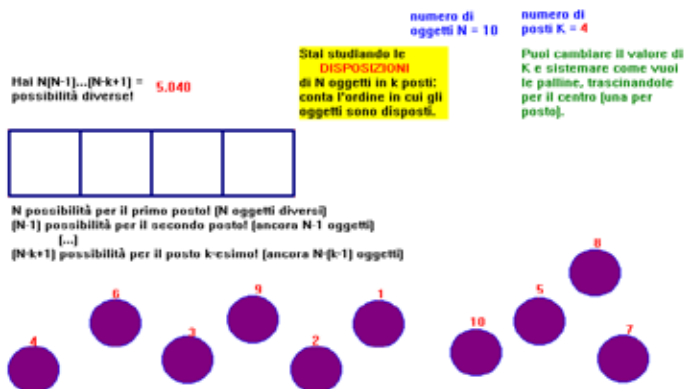
**P = 0,01**

D1 = 0	D6 = 0
D2 = 0	D7 = 0
D3 = 0	D8 = 0
D4 = 1	D9 = 0
D5 = 0	D10 = 0

Questa *applicazione Cabri*, tratta dal mio libro *FisiCabri*, Principato 2005 , calcola le

molteplicità  $W$ , per un “gas” di 10 molecole per i vari stati.

Ora cerchiamo di generalizzare il ragionamento per calcolare la molteplicità dello stato  $k$ ,  $k$  molecole a dx (e  $n-k$  a sx); questo è equivalente a sistemare  $n$  oggetti in  $k$  posti. In quante maniere diverse le possiamo sistemare? Nel primo posto  $n$  persone nel secondo altre  $n-1$ , nel terzo altre  $n-2$  e così via ... Visivamente:



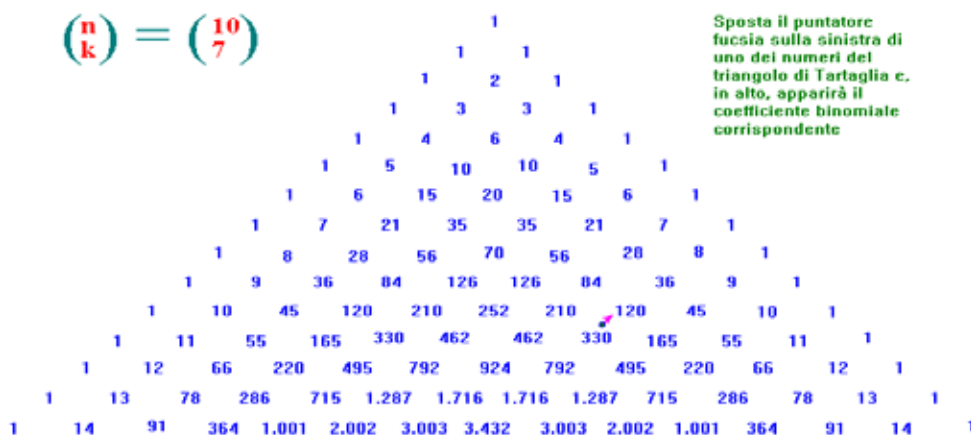
Cioè possiamo sistemare  $n$  oggetti in  $k$  posti in:

$$n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n(n-1)...(n-k+1)(n-k)...2 \cdot 1}{(n-k)(n-k-1)...2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

maniere diverse. Per ottenere  $W_k$ , analogamente ai brindisi, bisogna dividere per tutti i possibili scambi (*permutazioni*) di  $k$  oggetti (calcolo che è facile fare dalla formula precedente mettendo 0 al posto di  $k$  e  $k$  al posto di  $n$ ) e, ricordando che  $0! = 1$ , abbiamo:

$$W_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

numero che ha un simbolo e nome particolari,  $\binom{n}{k}$  e che è detto *coefficiente binomiale*.  $W_k$  può sembrare complicato, ma meno di quanto possiamo credere, questo numero è, in realtà, molto familiare. Chi ricorda del buon vecchio Triangolo di Tartaglia?

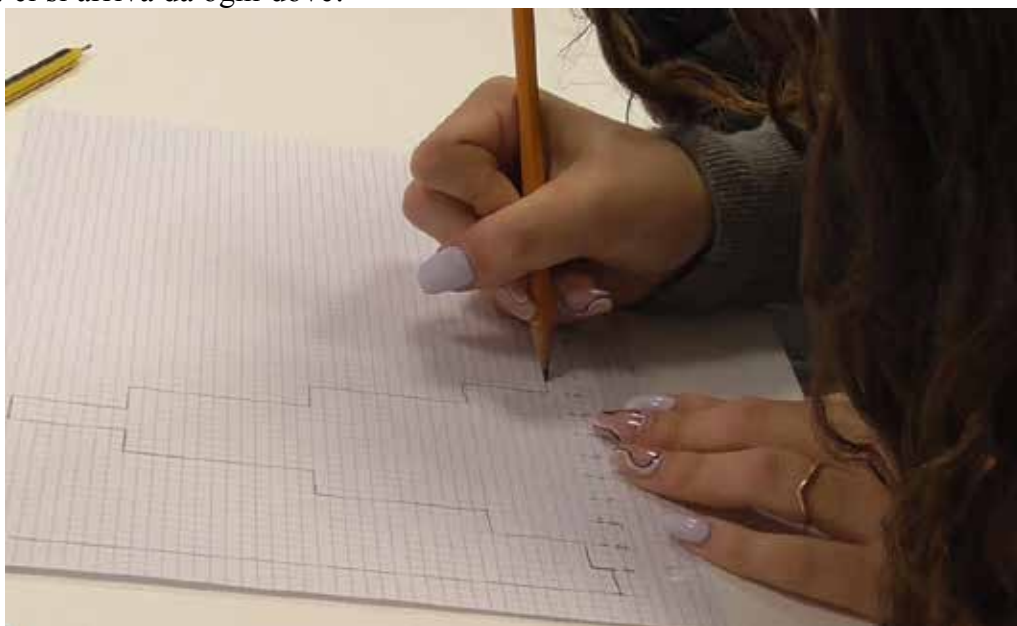


Tutta **la matematica di cui abbiamo bisogno sta qui!** Come anche il Teorema oggetto di questo saggio, una delle più importanti *regole del caso*. Praticamente l’avevamo sotto gli occhi!

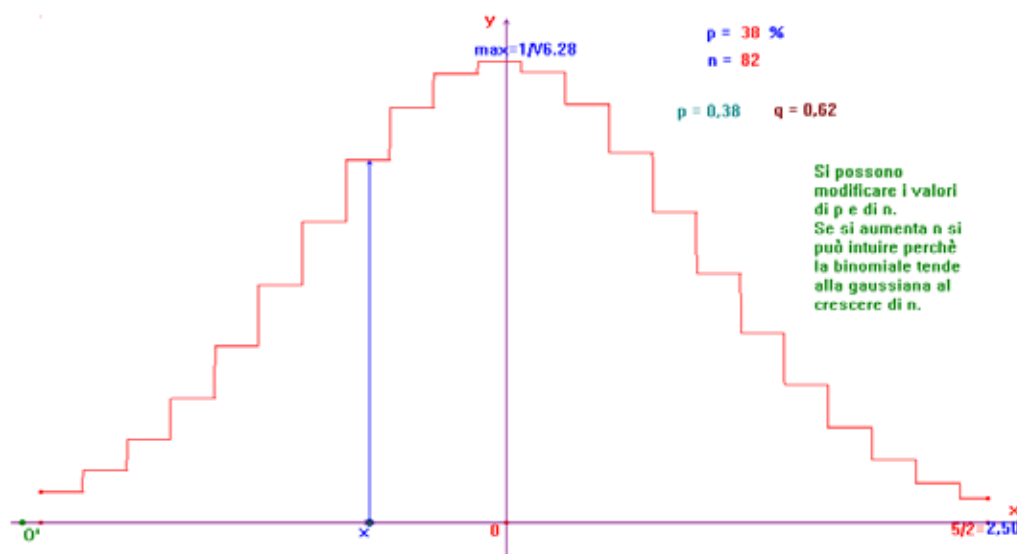
Prendiamo un po’ di confidenza col nostro triangolo. Ci credereste che il numero 120 indicato con una freccetta in figura, come pure ogni altro numero nel triangolo, corrisponde al numero di percorsi distinti per raggiungere quella posizione con un percorso che scende sempre, da una riga alla sottostante? È facile dimostrarlo: si può giungere a quel 330 arrivando solo dai

soprastanti 84 e 36 (e  $84 + 36 = 120$ ), e questa è proprio la regola con la quale è costruito il triangolo.

È palese che, in ogni riga, i valori più alti sono quelli centrali (e quelli più bassi si trovano alle estremità laterali, dx e sx). I valori centrali corrispondono a stati in cui  $k$  è molto prossimo al valore mediano, alla cosiddetta *media* (come per i voti di *inglese* si sommano e si divide per il loro numero; qui il primo, 0 e l'ultimo  $n$  diviso 2, ovvero  $n/2$ ), ovvero *gli stati più probabili sono quelli di una quasi equidistribuzione tra le particelle* e gli altri stati saranno tanto di più bassa probabilità quanto più sono asimmetrici. “io vinco!” o “metà classe assente oggi!” non sono fenomeni naturali! E si capisce anche perché c'è più traffico in centro che in periferia: ci si arriva da ogni dove!



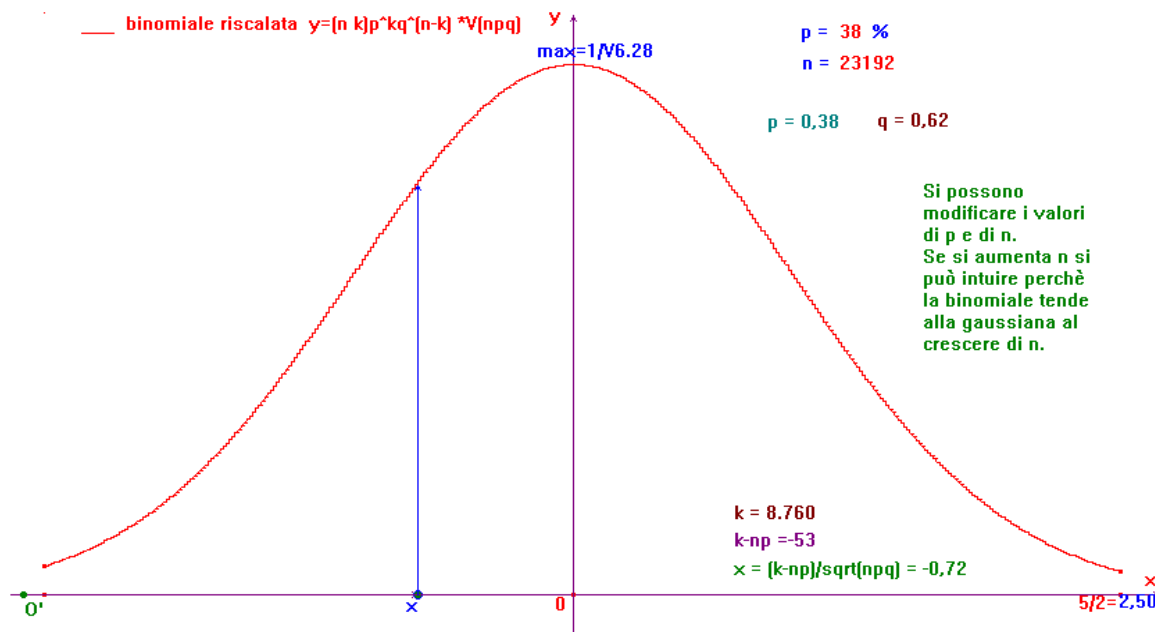
Molto utile far disegnare agli studenti un grafico in cui ad ogni valore da 0 a  $n$  si fa corrispondere il  $k$ -esimo (ricordate che si parte da 0 e si finisce ad  $n$ ) valore presente nel triangolo alla riga  $n$ -esima. Ad ogni studente può essere affidato il grafico di una riga. Qui ho affidato il calcolo al computer per la riga  $n=82$ :



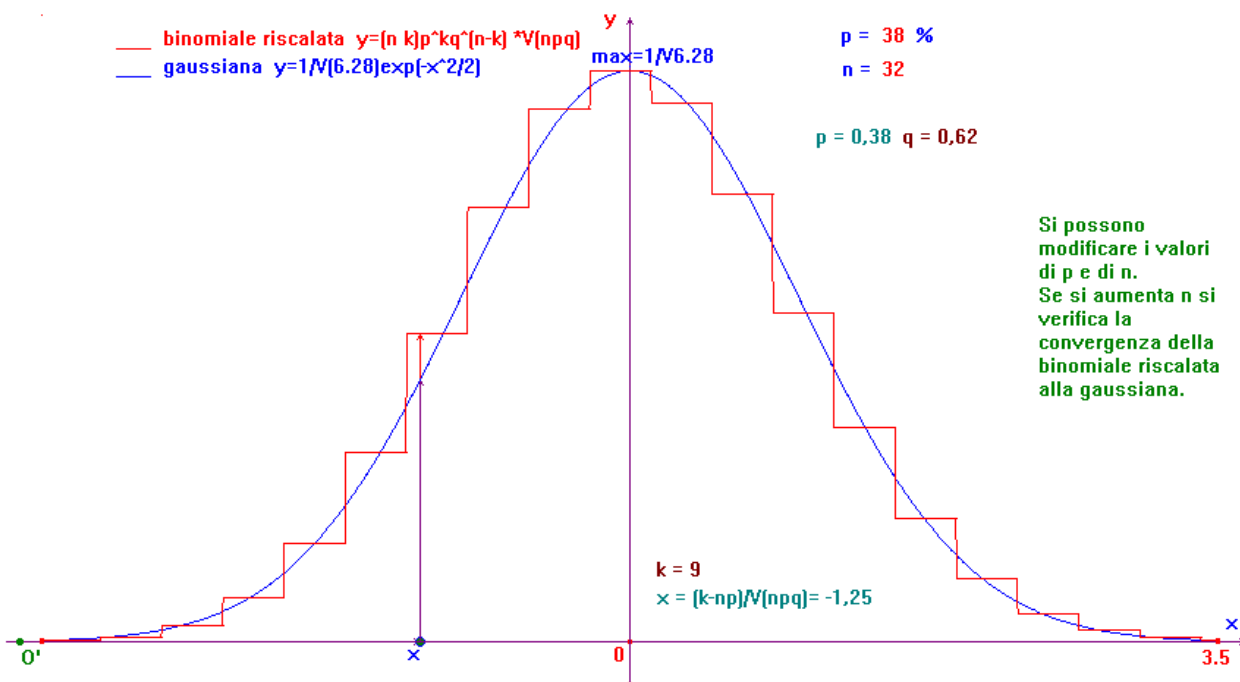
(un'altra mia applicazione da *FisiCabri*). In questi grafici si sono effettuate una traslazione a sx per posizionare la *media*, nel valore 0 e il valore massimo sempre nello stesso punto, dividendo

per  $\sqrt{\frac{2\pi n}{4}} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$ , ciò corrisponde a considerare, invece di  $k$ , la variabile *standard*,  $x = \frac{k - n/2}{2n/4}$ , o *normalizzata* che ha il notevole pregio di permettere un'agevole confronto tra i grafici di ciascuna riga.

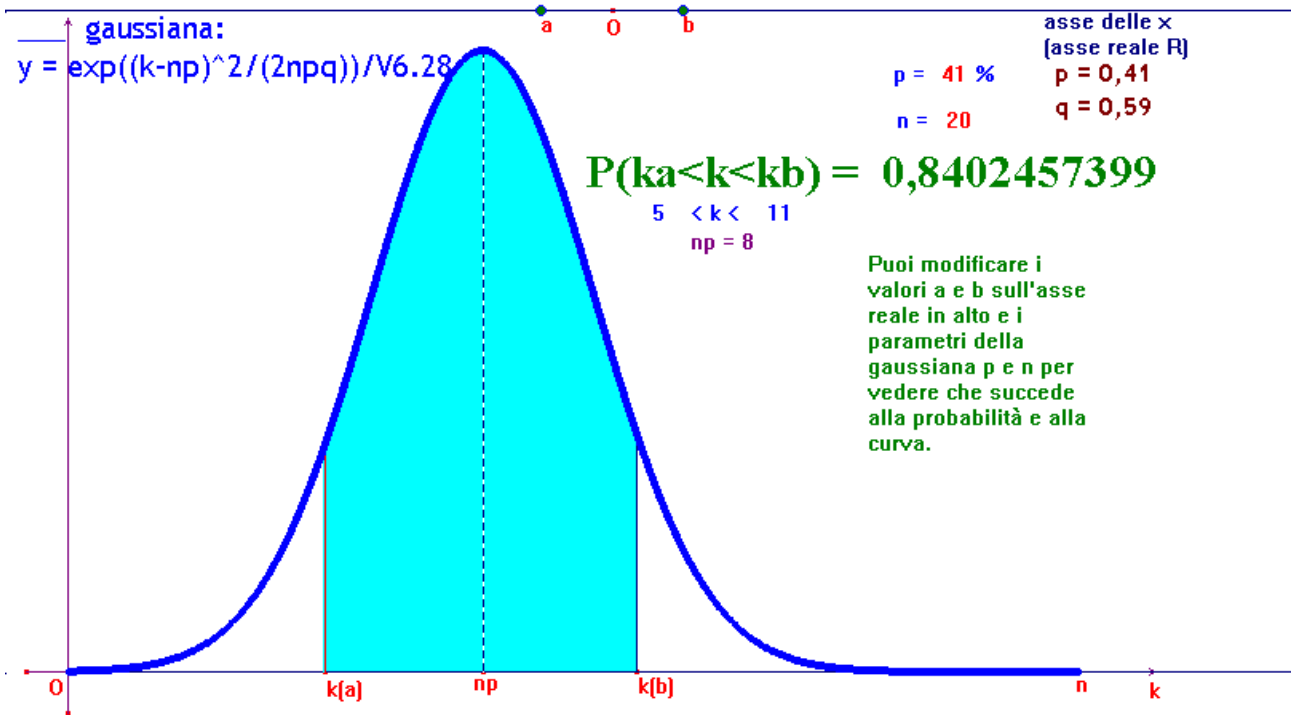
Questa curva è ancora un po' "rozza": sembra una piramide Maja! Se  $n$  cresce si "ingentilisce" un po'.



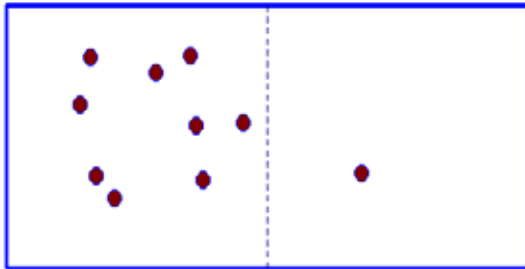
“Vediamo” in diretta ora uno dei più importanti teoremi della matematica moderna il Teorema del limite centrale. Sì, dico vediamo perché la matematica non si fa solo con i numeri. Il Teorema afferma che il grafico dell' $n$ -esima riga opportunamente normalizzato, tende a quello di una curva teorica, detta *Curva di Gauss* dalla classica forma a campana.



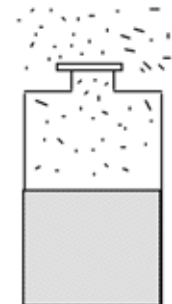
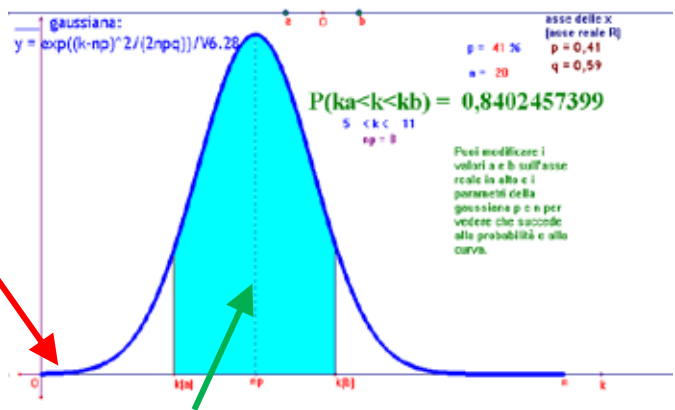
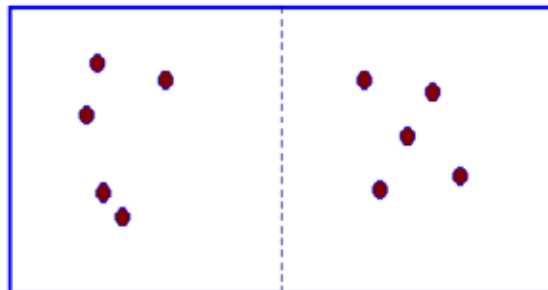
Conviene allora capire meglio la Curva di Gauss, visto che è soggiacente a tutti quei fenomeni che coinvolgono sistemi della più varia natura costituiti da molti oggetti (molti quanti? già per 30, gli studenti di una classe, la *Curva di Gauss* costituisce una buona approssimazione!)



L'area centrale colorata (tra i due flessi, per stare nel tecnico, a distanza  $\sigma$  dalla media, tanto per andare ancor più sul tecnico usando il gergo della Probabilità o Statistica) raccoglie una probabilità dell'84%. I casi particolari risiedono nelle *code*, dx o sx, della distribuzione:



e sono, quindi, di bassissima probabilità. Questo, invece, è di alta probabilità:



Se tutte le molecole rientrassero nella bottiglia? Ci stupiremmo molto! Avrebbero raggiunto uno stato ...impossibile!

## 1. Fenomeni casuali, l'algebra degli eventi e variabili aleatorie speciali

Il concetto primitivo fondamentale della teoria delle probabilità è quello di *fenomeno casuale* o *prova*, *esperimento*. Esso non viene definito ma possiamo dire, intuitivamente, quanto segue: un fenomeno casuale è un fenomeno che si può osservare ma di cui è impossibile predire l'esito in modo certo. A seconda dei casi useremo, invece dell'aggettivo casuale, il termine *aleatorio* (dal latino *alea* = *dado*) o *stocastico* (dal greco  $\sigma\tau\omicron\chi\omicron\varsigma$  = *bersaglio*, *mira*, *congettura*). Diamo alcuni esempi particolari di fenomeni casuali:

- a) il gesso che cade (in quanti pezzi si farà?). Lasciando cadere un gesso sul pavimento, non possiamo predire (indovinare) a priori in quanti pezzi si frantumerà;
- b) il lancio di una moneta (che faccia uscirà?); se la moneta ha una faccia *c* (= croce) ed un'altra *t* (= testa), il suo lancio è un fenomeno casuale (non sappiamo che faccia uscirà); se però la moneta ha due facce *c*, oppure due facce *t*, il suo lancio non è più un fenomeno casuale: sappiamo che faccia uscirà.
- c) il lancio di un dado (che faccia uscirà?); se il dado ha sei facce diverse il lancio è un fenomeno casuale; non lo è se il dado ha tutte le facce uguali.

Per questi fenomeni casuali possiamo descrivere lo spazio  $\Omega$ , cioè l'*insieme* di tutti i possibili risultati o *esiti* dell'esperimento. Nel lancio di una moneta,  $\Omega = \{\text{croce, testa}\}$  o più brevemente  $\{c, t\}$ ; nel lancio di un dado usuale  $\Omega = \{., :., ::, :::, :::, \dots\}$ .

Questo insieme viene chiamato *spazio campione* del fenomeno casuale. Si badi che fenomeni casuali diversi possono avere lo stesso spazio campione. Se ne deduce che la teoria degli insiemi è utile per lo studio delle probabilità. Un sottoinsieme, o *parte*, dello spazio campione, viene detto *evento*. Ad esempio, nell'estrazione di una carta da un mazzo di carte napoletane, l'insieme costituito dai sette e dalla matta (il re di denari) è un evento: è quello a cui pensa il giocatore in attesa di ricevere la prima carta dal mazziere quando gioca a 7 e mezzo. Per una migliore comprensione della teoria della probabilità conviene conoscere bene le regole dei giochi da cui essa è nata: dadi, scopa, tresette, briscola, poker, tombola, lotto, roulette, bridge, ecc. Un altro concetto fondamentale della teoria delle probabilità è quello di variabile aleatoria. Una *variabile aleatoria*  $X$  è una funzione da  $\Omega$  verso l'insieme  $\mathbf{R}$  dei numeri reali. In altre parole è una variabile che, in seguito ad una prova, assume un valore numerico che non si può stabilire in anticipo. Ogni volta che ci poniamo una domanda la cui risposta è un numero, che non si può calcolare matematicamente, che nessuno conosce, abbiamo una variabile aleatoria. Sono esempi: a) il numero di pezzi in cui si fa il gesso caduto; b) il numero di teste uscite nel lancio di una moneta; il punto uscito nel lancio di un dado; d) il valore di una carta nel gioco della briscola (o del tresette); e) il punto raggiunto in un tiro al bersaglio; f) il numero di chiamate giornaliere in una centrale telefonica; g) il peso di un chicco di grano scelto a caso; h) l'altezza di una persona scelta a caso, ecc.

Finora abbiamo introdotto i concetti di fenomeno casuale e di spazio campione in modo intuitivo. Da un punto di vista didattico, a questo punto, conviene procedere andando al particolare e specificare subito quali sono gli spazi campione fondamentali, ovvero quelli più importanti sia dal punto di vista teorico che applicativo. Il caso vuole, fortunatamente, che in un primo approccio alla probabilità si possa limitare il discorso a cinque spazi fondamentali

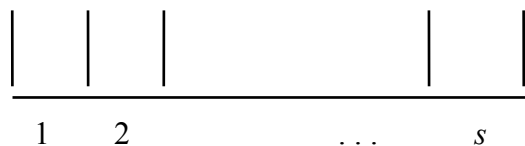
che indicheremo con  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$ . Facendo un'analogia con la geometria, volendo parlare di poligoni, si può dire che fissiamo prima la nostra attenzione su triangoli, quadrati, rettangoli, trapezi, pentagoni, esagoni, soprattutto regolari, poi parleremo di altri poligoni (se necessario!). Un po' perché le mattonelle più vendute sono quelle di questa forma, a parte i pentagoni. L'espressione *a caso* sarà chiarita quando introdurremo il concetto di *misura di probabilità*.

## 1.2 Spazio finito $\Omega_1$

L'esperimento consiste nell'estrarre a caso un elemento da un insieme finito di  $s$  soggetti  $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s\}$   $s \geq 2$ .

Fenomeni casuali modellati con  $\Omega_1$  sono:

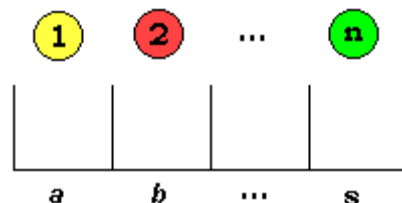
- a) lancio di una moneta:  $\{c, t\}$ ,  $s = 2$
- b) lancio di un dado:  $\{., :., \cdot, \cdot, \cdot, \cdot\}$ ,  $s = 6$
- c) estrazione di una carta napoletana,  $s = 40$ , o di una carta francese,  $s = 52$
- d) estrazione di un numero al gioco del lotto:  $\{1, 2, \dots, 90\}$ ,  $s = 90$ ;
- e) si getta a caso una biglia in una scatola, scelta fra le  $s$ ;



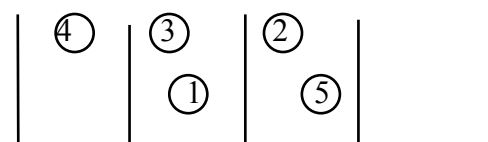
f) si estrae a caso una pallina fra le  $s$  che sono nell'urna;



L'alea di base è il *dado*  $D$  così definito:  $D(\omega_k) = k$ . La scrittura  $(D=k)$  indica l'*evento*: "è uscito l'elemento  $\omega_k$ ". Più in generale si gettano a caso  $n$  biglie distinguibili in  $s$  scatole, sempre distinguibili, o si formano *parole (disposizioni)* lunghe  $n$  con un *alfabeto* di  $s$  lettere (le scatole). In tal caso  $\Omega_1$  ha  $s^n$  elementi.



Come esempio consideriamo la seguente disposizione di 5 biglie in 4 scatole  $a, b, c, d$ . La prima e la terza biglia cadono nella scatola  $b$ , la seconda e la quinta in  $c$ , la quarta in  $a$ .

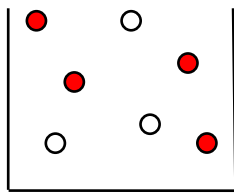


---

$a \quad b \quad c \quad d$

A tale disposizione corrisponde la parola  $bcbac$  ottenuta scrivendo le lettere (scatole) nell'ordine in cui la prima, la seconda,  $\dots$ , la  $n$ -esima biglia vi cadono. L'alea numero di occupazione della  $i$ -esima scatola, per  $i = 1, 2, \dots, s$ , è il numero  $\Theta_i$  di biglie che cadono in quella scatola; la scrittura  $(\Theta_i = k)$  indica l'evento "nella  $i$ -esima scatola cadono  $k$  biglie". Esso è l'insieme di tutte le distribuzioni di  $n$  biglie in  $s$  scatole, con  $k$  biglie nella  $i$ -esima scatola.

Nel modello di *Polya-Engerberger* si estraggono  $n$  palline da un'urna avente  $s$  palline di cui  $r$  rosse e le altre bianche.



Ci sono due modi differenti in cui l'estrazione può avvenire: con rimessa *caso binomiale* e senza rimessa *caso ipergeometrico*. Le variabili aleatorie fondamentali  $X_i$  associate a questo esperimento sono così definite:

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{se esce pallina bianca} \\ 1 & \text{se esce pallina rossa} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

alla  $i$ -esima estrazione. L'evento  $(X_i = 0)$  indica che alla  $i$ -esima estrazione è uscita la pallina bianca mentre  $(X_i = 1)$  indica che è uscita la pallina rossa.

### 1.3 Spazio di Bernoulli $\Omega_2$

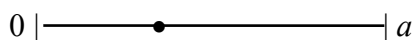
L'esperimento consiste nel lanciare una moneta infinite volte; lo spazio campione  $\Omega_2$  è l'insieme delle successioni infinite di  $c$  (= croce) e  $t$  (= testa). Le alee fondamentali associate a questo esperimento sono così definite:

$$I_n = \begin{cases} 0 & \text{se esce croce} \\ 1 & \text{se esce testa} \end{cases}$$

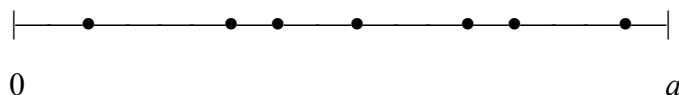
all' $n$ -esimo lancio.  $I_n$  conta il numero di teste uscite all'  $n$ -esimo lancio (0 oppure 1). Ad esempio:  $I_4(cctcttc\dots) = 0$ ,  $I_7(cctcttc\dots) = 1$ . L'evento  $(I_n = 1)$  indica che all'  $n$ -esimo lancio è uscita testa. Analogamente  $(I_n = 0)$  indica che all'  $n$ -esimo lancio è uscita croce.

### 1.4 Spazio uniforme (probabilità geometrica) $\Omega_3$

L'esperimento consiste nello scegliere a caso un punto su un segmento di lunghezza  $a$  (tiro al bersaglio).



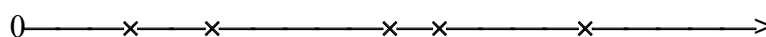
Lo spazio campione è l'intervallo chiuso  $[0, a]$  della retta reale. La variabile aleatoria fondamentale associata a questo fenomeno è  $U =$  "ascissa del punto scelto in  $[0, a]$ ". Fissato un numero reale  $x$  dell'intervallo  $[0, a]$ , la scrittura  $(U \leq x)$  indica l'evento "il punto estratto ha ascissa non superiore ad  $x$ ". Si può realizzare questo fenomeno casuale (*simulazione*) con un mazzo di carte, con una moneta o con un computer. Nel computer, o in uno smartphone, basta attivare la funzione *random*. Con un mazzo di carte italiane si può scegliere un numero reale a caso nell'intervallo  $[0, 1]$  nel modo seguente. Si sceglie una carta a caso e si segna il numero corrispondente: 0 per un *re*, 1 per un *asso*, 2 per un *due*, fino a 8 per un *fante* e 9 per un *cavallo*. Fatta la prima scelta, si rimette la carta nel mazzo, si mischia molto bene e si ripete un'altra estrazione. Si continua così finché si vuole. Supponiamo che siano usciti i numeri 3, 3, 3, 1, 4, 3, 5, 8, 0, 1 ... ecc. Allora è stato estratto il numero 0,3331435801... Più in generale, si scelgono a caso  $n$  punti ( $n = 7$  in figura),



Questo fenomeno casuale dà luogo allo spazio uniforme  $\Omega_3$  di parametri  $n$  e  $a$ .

### 1.5 Spazio di Poisson $\Omega_4$

Lo spazio  $\Omega_4$  è l'insieme delle successioni *rada* sulla semiretta  $[0, \infty[$ . Una *successione rada* è un insieme di punti  $\times$  in  $[0, \infty[$  tale che ad ogni intervallo limitato appartenga un numero finito dei suoi punti. Nello spazio uniforme  $\Omega_3$ , dato l'intervallo  $[0, a]$  si scelgono a caso  $n$  punti. Poi si fanno tendere all'infinito  $n$  e  $a$  in modo che  $n/a$  resti costante, per esempio uguale ad  $\alpha$ . Il parametro  $\alpha > 0$  è la *densità* del fenomeno casuale.



I punti  $\times$  di una successione rada sono detti *arrivi*. In altre parole l'esito  $\omega$  è una successione rada se risulta  $|\omega \cap [c, d]| < \infty$  per ogni intervallo  $[c, d]$  di  $\mathbb{R}$  (le barrette  $|$  indicano la cardinalità dell'insieme). Fissato  $t > 0$ , la variabile di Poisson associata è  $N(\alpha, t) =$  "numero di arrivi nell'intervallo  $[0, t]$ ". Esempi di variabili di Poisson sono il numero di:

- a) pesci pescati in quell'intervallo di tempo;
- b) incidenti stradali su un fissato tratto di strada in un giorno;
- c) arrivi e/o partenze ad una stazione di autobus, di treni, di aerei, ecc;
- d) clienti che arrivano a un servizio (edicola, poste, banca, casello autostrada);
- e) particelle emesse da una sostanza radioattiva;
- f) nati (o morti) in quell' intervallo di tempo, ecc.

La scrittura  $(N(\alpha, t) = k)$  indica l'evento "nell'intervallo  $[0, t]$  sono avvenuti  $k$  arrivi".

### 1.6 Spazio di Wiener-Levy (moto browniano) $\Omega_5$

Nel piano cartesiano un oggetto si muove a caso (Orazio: *Ibam forte Via Sacra*, passavo per caso per la Via Sacra) sull'asse verticale, partendo dall'origine. Sia  $X(\sigma, t)$  la

“posizione (ordinata) dell’oggetto al tempo  $t$ ” sull’asse, dove  $\sigma > 0$  è un parametro che caratterizza l’ambiente (dipende da) in cui è l’asse. La traiettoria dell’oggetto viene visualizzata da una curva continua di equazione  $y = f(t)$ . Lo spazio campione  $\Omega_5$  di tale fenomeno casuale è l’insieme delle funzioni continue  $f(t)$  per  $t \geq 0$  con  $f(0) = 0$ . E’ chiamato spazio di Wiener -Levy. Fissato un numero reale  $x$ , la scrittura  $(X(\sigma, t) \leq x)$  indica l’evento “al tempo  $t$  la posizione dell’oggetto ha un’ordinata non superiore ad  $x$ ”.

## 1.7 Eventi

Consideriamo le variabili aleatorie fondamentali introdotte nei cinque spazi campione:

$\Omega_1: D =$  “numero estratto tra  $\{1, 2, \dots, s\}$ ”

$\Omega_2: I_n =$  “numero di teste uscite all’  $n$ -esimo lancio di una moneta  $\{c, t\}$ ”

$\Omega_3: U =$  “ascissa del punto estratto in un segmento lungo  $a$ ”

$\Omega_4: N(\alpha, t) =$  “numero di arrivi nell’intervallo di tempo  $[0, t]$ ”

$\Omega_5: X(\sigma, t) =$  “posizione dell’oggetto al tempo  $t$ ”.

Fissati il numero naturale  $k$  ed il numero reale  $x$ , possiamo pensare alle seguenti parti di ciascuno spazio campione:

- 1)  $(D = k) =$  “il numero estratto è  $k$ ”, con  $k \in \hat{s} = \{1, 2, \dots, s\}$
- 2)  $(I_n = k) =$  “all’  $n$ -esimo lancio escono  $k$  teste”, con  $k \in \{0, 1\}$
- 3)  $(U \leq x) =$  “il punto estratto ha ascissa non superiore ad  $x$ ”, con  $x \in \mathbb{R}$ ;
- 4)  $(N(\alpha, t) = k) =$  “avvengono  $k$  arrivi nell’intervallo  $[0, t]$ ”, con  $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ;
- 5)  $(X(\sigma, t) \leq x) =$  “la posizione dell’oggetto al tempo  $t$  non supera  $x$ ”, con  $x \in \mathbb{R}$  fissato.

Tali parti dello spazio campione vengono chiamati *eventi generatori*.

*Un evento di uno spazio campione  $\Omega$  è una sua parte ottenuta dagli eventi generatori con le operazioni booleane di unione, complemento e intersezione.*

Se  $A$  è un evento, il suo *complemento* è indicato con  $A^c$ . L’esempio del gioco del 7 e  $\frac{1}{2}$  con le carte italiane ci suggerisce il seguente fatto che avviene in tutti i giochi tra due persone o tra il banco e un giocatore. Se il giocatore che sta ricevendo la carta pensa all’evento  $A =$  “esce un sette o la matta”, il banco a sua volta pensa all’evento complemento  $A^c =$  “non esce un sette o la matta”. Questo modo naturale di avere un insieme e il suo complemento non capita in geometria, per esempio, dove se  $A$  è il cerchio di raggio unitario nel piano, difficilmente viene da pensare al suo complemento che è il piano con un buco. Infatti talvolta converrà trattare più con il complemento  $A^c$  che con lo stesso evento  $A$ .

Dati due eventi  $A$  e  $B$ , la loro *unione* è  $A \cup B$  e l’*intersezione* è  $A \cap B$ . Elenchiamo qui di seguito alcune formule della teoria degli insiemi utili per la teoria della probabilità.

$$1) (A^c)^c = A, \quad \Omega^c = \emptyset, \quad \emptyset^c = \Omega$$

$$2) A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

$$3) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$4) A \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots) = (A \cap A_1) \cup (A \cap A_2) \cup \dots$$

$$5) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

leggi di De Morgan.

Gli eventi  $A$  e  $B$  sono detti *incompatibili* se  $A \cap B = \emptyset$ .

Se  $X$  e  $Y$  sono due variabili aleatorie, l'evento intersezione  $(X = i) \cap (Y = k)$  dei due eventi  $(X = i)$  e  $(Y = k)$  viene scritto nella forma più semplice  $(X=i, Y=k)$ . Analogamente la scrittura  $(X \leq x, Y \leq y)$  indicherà l'intersezione degli eventi  $(X \leq x)$  ed  $(Y \leq y)$ . La notazione si estende in modo ovvio a più di due eventi. Nel seguito, quando parleremo di eventi o di variabili aleatorie, ci riferiremo ai cinque spazi fondamentali di cui abbiamo parlato fino ad ora, anche se le definizioni e i teoremi valgono per situazioni molto più generali.

### 1.8 Misure di probabilità speciali

Abbiamo presentato i cinque spazi campione fondamentali, ora assegniamo una probabilità  $P$ . Essa chiarisce il significato del termine *a caso*. La *probabilità*  $P(A)$  misura la possibilità del verificarsi dell'evento  $A$ . E' sempre, per assioma,  $P(\Omega) = 1$ .

#### $\Omega_1$ (spazio di Maxwell-Boltzmann, $n$ biglie in $s$ scatole)

Se  $\omega \in \Omega_1$  si definisce la probabilità dell'evento  $\{\omega\}$  (scritto più semplicemente  $\omega$ ),  $P(\omega) = 1/s^n$  essendo  $s^n$  il numero di disposizioni, cioè il numero di modi di mettere  $n$  biglie in  $s$  scatole o il numero di parole lunghe  $n$  costituite da un alfabeto di  $s$  lettere. Se  $n = 1$  risulta  $P(\omega) = 1/s$  (*misura simmetrica di equiprobabilità, o di Salomone*).

#### $\Omega_2$ (spazio di Bernoulli)

Fissato un numero reale  $p$  tale che  $0 < p < 1$ , definiamo la probabilità che all'  $n$ -esimo lancio esca testa come  $P(I_n=1) = p$  e quella che all'  $n$ -esimo lancio esca croce come  $P(I_n = 0) = q = 1 - p$  per ogni valore di  $n$ ;  $p$  è il *trucco* o *parametro* della moneta. Inoltre per le  $I_n$  vale il seguente *assioma di Bernoulli* (*o di indipendenza*): la probabilità dell'intersezione di eventi del tipo  $(I_n=1)$ ,  $(I_n=0)$ , per ogni numero  $n$  di lanci, è il prodotto delle singole probabilità. Ad esempio:  $P(I_3 = 1, I_{14} = 0, I_{134} = 1) = pqp = p^2q$  è la probabilità che esca testa al terzo lancio, croce al 14° lancio e testa al 134°.

#### $\Omega_3$ (spazio uniforme)

Consideriamo l'evento  $(U \leq x) =$  "il punto scelto ha ascissa non superiore ad  $x$ ". Allora si pone per definizione

$$P(U \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x/a & \text{se } 0 \leq x \leq a \\ 1 & \text{se } x > a \end{cases}$$

dove con  $P(U \leq x)$  si indica la probabilità che il punto scelto a caso ha ascissa non superiore ad  $x$ . Si noti che questa probabilità è una funzione  $F(x)$  di variabile reale definita per ogni

reale  $x$ . Essa è un primo esempio di *funzione di distribuzione*. Se  $U_1, U_2, \dots, U_n$  sono  $n$  punti scelti a caso, si pone, sempre per definizione,

$$P(U_1 \leq x_1, U_2 \leq x_2, \dots, U_n \leq x_n) = \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{a^n}$$

Per  $n = 2$  l'evento  $(U_1 \leq x_1, U_2 \leq x_2)$ , cioè “il primo punto scelto cade a sinistra di  $x_1$  ed il secondo punto scelto cade a sinistra di  $x_2$ ”, viene rappresentato dal rettangolo scuro in fig. 1. La sua probabilità vale

$$P(U_1 \leq x_1, U_2 \leq x_2) = \frac{x_1 x_2}{a^2} = \frac{\text{area rettangolo}}{\text{area del quadrato}}.$$

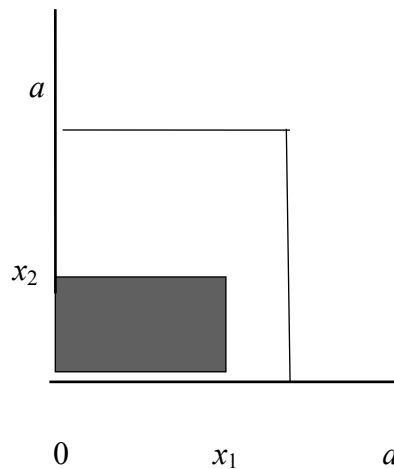


fig. 1.

Per  $n = 3$  si ha un evento analogo nello spazio  $\mathbf{R}^3$

$$P(U_1 \leq x_1, U_2 \leq x_2, U_3 \leq x_3) = \frac{x_1 x_2 x_3}{a^3} = \frac{\text{volume parallelepipedo}}{\text{volume del cubo}}.$$

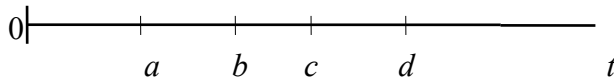
#### $\Omega_4$ (spazio di Poisson)

All'evento  $(N(\alpha, t) = k)$  = “nell'intervallo  $[0, t]$  cadono  $k$  arrivi”, si assegna la probabilità

$$P(N(\alpha, t) = k) = \frac{(\alpha t)^k e^{-\alpha t}}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

dove  $e$ , il numero di Nepero, vale circa 2,718... . Si assumono infine i seguenti assiomi:

a) *assioma di omogeneità*



Se  $b - a = d - c$ , la probabilità che  $k$  punti cadano in  $[a, b]$  è uguale a quella che  $k$  punti cadano in  $[c, d]$ .

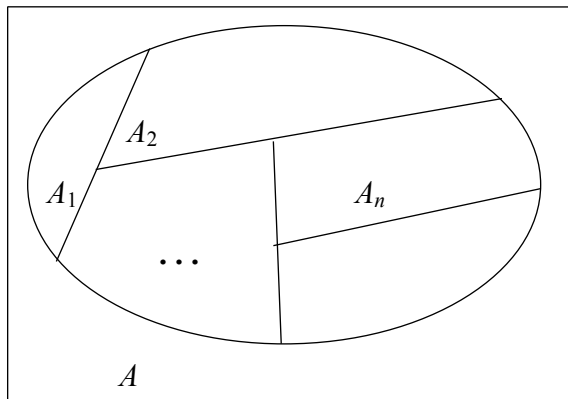
b) *assioma di indipendenza*

Se  $[a, b]$  e  $[c, d]$  sono disgiunti, la probabilità che  $k$  punti cadano in  $[a, b]$  e  $j$  punti cadano in  $[c, d]$  è il prodotto delle rispettive probabilità per ogni  $k, j$  naturali.

### 1.9 Assiomi di Kolmogorov (1933)

La probabilità  $P(A)$  di un evento  $A$  viene definita e calcolata esprimendo  $A$  mediante gli eventi generatori e applicando i seguenti assiomi di Kolmogorov (1933). La *misura di probabilità*  $P$  è una funzione che assegna ad un evento  $A$  un numero reale  $P(A)$  tale che:

- 1)  $P(A) \geq 0$ ,  $P(\Omega) = 1$
- 2) Se  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  è una successione di eventi incompatibili a due a due,  $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ ,



$\Omega$

Allora  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$

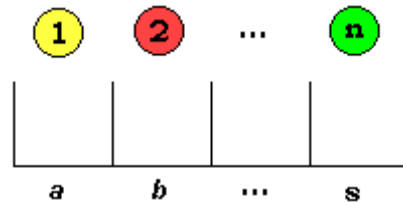
Questo assioma è noto come *assioma della completa* (o  $\sigma$ -*additività*). Meglio sarebbe chiamarlo *assioma del boscaiolo*. Esso vuol dire: quando devi calcolare la probabilità di un evento  $A$  troppo complicato, fallo a pezzi  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  come il boscaiolo fa a pezzi un albero molto grande, per farne legna da ardere, e portare a valle; calcola le probabilità dei singoli pezzi  $A_i$  e infine fai la somma. Da questi tre assiomi è facile dimostrare le seguenti formule:

- a)  $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$
- b)  $P(A^c) = 1 - P(A)$ ,  $P(\emptyset) = 0$
- c) Se  $A \subseteq B$  allora  $P(A) \leq P(B)$
- d)  $0 \leq P(A) \leq 1$  per ogni evento  $A$
- e)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

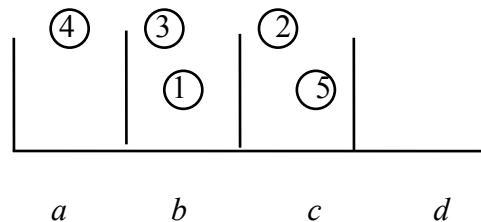
## 2. Introduzione all'Analisi Combinatoria

### 2.1 Il modello (spazio) di Maxwell-Boltzmann

Si gettano a caso  $n$  biglie distinguibili in  $s$  scatole, sempre distinguibili, o si formano *parole (disposizioni)* lunghe  $n$  con un *alfabeto* di  $s$  lettere (le scatole).



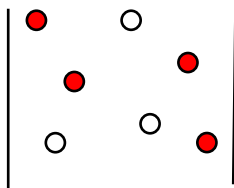
Come esempio consideriamo la seguente disposizione di 5 biglie in 4 scatole  $a, b, c, d$ . La prima e la terza biglia cadono nella scatola  $b$ , la seconda e la quinta in  $c$ , la quarta in  $a$ .



A tale disposizione corrisponde la parola  $bcbac$  ottenuta scrivendo le lettere (scatole) nell'ordine in cui la prima, la seconda, ..., la  $n$ -esima biglia vi cadono. Il numero di modi di collocare  $n$  biglie in  $s$  scatole è  $s^n$ .

### 2.2 Spazio di Polya-Engerberger

Si estraggono  $n$  palline da un'urna che ne contiene  $s$  di cui  $r$  rosse e le altre bianche.



Ci sono due modi differenti in cui l'estrazione può avvenire: con rimessa (*caso binomiale*) e senza rimessa (*caso ipergeometrico*). Si suppongono poi noti i seguenti fatti: la cardinalità dell'unione d'insiemi disgiunti è la somma delle cardinalità degli insiemi (*principio della somma*); la cardinalità del prodotto cartesiano di più insiemi è il prodotto delle cardinalità dei singoli insiemi (*principio del prodotto*).

### 2.3 Coefficienti binomiali

Dati due numeri naturali  $n$  e  $k$ , definiamo il numero  $\binom{n}{k}$  (leggi  $n$  su  $k$ ), chiamato *coefficiente binomiale*, come il numero di parti di  $k$  elementi ( $k$ -parti) contenute in un insieme di  $n$  elementi ( $n$ -insieme). Esso è anche il numero di modi di collocare  $n$  biglie in due scatole così che in una scatola ci siano  $k$  biglie e nell'altra ce ne siano  $n - k$ . Le seguenti proprietà sono quindi ovvie per definizione

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

in quanto sono unici, come parti, l'insieme vuoto e tutto l'insieme. Poiché ogni parte di  $k$  elementi ha un complementare di  $n - k$  elementi, deve essere

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

L'insieme delle parti di un insieme di  $n$  elementi può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle parole lunghe  $n$  sull'alfabeto  $\{0,1\}$  che sono  $2^n$ . Per ogni elemento dell' $n$ -insieme basta scrivere 0 se non è nella parte e 1 se c'è. Pertanto vale l'identità:

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Calcoliamo il numero di modi  $\binom{n+1}{k}$  di mettere  $n+1$  biglie in due scatole così che la prima abbia  $k$  biglie e la seconda  $n+1-k$ . Fissata una biglia  $\alpha$ , contiamo diversamente questi modi distinguendo quelli in cui la biglia non va nella prima scatola: sono  $\binom{n}{k}$  da quelli in cui ci va: sono  $\binom{n-1}{k-1}$ . Ora basta fare la somma per ottenere la formula di Stiefel

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Questa ci permette di scrivere la tabella seguente come appare nel **Gioco del Lotto**

giocati	Estratto	Ambo	Terno	Quaterna	Cinquina
1	1				
2	2	1			
3	3	3	1		
4	4	6	4	1	
5	5	10	10	5	1

<b>6</b>	6	15	20	15	6
<b>7</b>	7	21	35	35	21
<b>8</b>	8	28	56	70	56
<b>9</b>	9	36	84	126	126
<b>10</b>	10	45	120	210	252

Questa tabella è la più famosa della matematica quando la si continua a scrivere per numeri maggiori di dieci: in Italia si chiama *Triangolo di Tartaglia*, in Francia di Pascal, in Inghilterra di Silvester, nei paesi arabi di Omar Kayam, e in tanti altri stati semplicemente Triangolo Aritmetico. *Blaise Pascal* nel 1653 scrisse il *Traité du Triangle Arithmétique*. Le sue proprietà e applicazioni sono così tante che ci vorrebbero vari volumi per elencarle.

Le proprietà fondamentali dei coefficienti binomiali sono state dimostrate ignorando la formula che permette di calcolarli direttamente e che dimostreremo tra poco. E' un po' come accade in goniometria alla scuola media superiore: vengono presentate e dimostrate le varie formule che legano  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\tan x$ , senza mai menzionare e dimostrare gli sviluppi di Taylor di queste funzioni, cioè le formule che danno i loro valori numerici.

Calcoliamo pertanto il numero di  $k$ -parti ( $k > 0$ ) di un  $n$ -insieme che hanno un elemento come particolare. Ad esempio, da un insieme di  $n$  individui, diciamo studenti, si vuole scegliere una  $k$ -parte per costituire una commissione di  $k$  studenti, compreso un presidente. La scelta può essere fatta in due modi diversi:

- a) si scelgono prima i  $k$  elementi ( $\binom{n}{k}$  possibilità) e poi tra questi si sceglie il presidente ( $k$  possibilità). Così il totale delle scelte è  $k\binom{n}{k}$ ;
- b) si sceglie prima il presidente ( $n$  possibilità) e poi tra i restanti si scelgono i  $k-1$  elementi che servono per completare la  $k$ -parte ( $\binom{n-1}{k-1}$  scelte). Ora il totale delle scelte è  $n\binom{n-1}{k-1}$ .

Ne risulta  $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$  e quindi l'identità combinatoria fondamentale

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

Quando  $k > 0$ , si ha per induzione

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

dove  $k! = k(k-1)(k-2)\dots 3 * 2 * 1$

La formula è valida per  $k > 0$  ma sappiamo già che risulta  $\binom{n}{0} = 1$  per  $k = 0$ . Essa ci permette di calcolare direttamente il valore del coefficiente binomiale. Si vede subito che vale anche l'identità

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ma questa formula serve solo quando si studiano limiti per  $n$  e  $k$  che tendono all'infinito e si sostituiscono quindi i fattoriali con la formula di approssimazione di Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

ad esempio nella dimostrazione del teorema centrale. Una *formula caratteristica* dei coefficienti binomiali è la seguente:

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{r}{k} \binom{s-r}{n-k} = \binom{s}{n}$$

chiamata *formula di Van der Monde*. Si dimostra supponendo di avere un insieme di  $s$  elementi, di cui  $r$  sono di un tipo particolare, ad esempio rossi e gli altri  $s-r$  sono bianchi. Il secondo membro è il numero di  $n$ -parti di questo insieme. Nel primo membro tale numero viene calcolato stabilendo quanti elementi rossi sono nella  $n$ -parte. Possono esserci  $k$  elementi rossi (da scegliersi in  $\binom{r}{k}$  modi) e quindi  $n-k$  bianchi (da scegliersi in  $\binom{s-r}{n-k}$  modi). Moltiplicando queste possibilità e sommando su tutti i valori di  $k$  si ha la formula di Van der Monde.

Che cosa accade se invece di sommare su  $k$ , cioè in basso, si somma su  $r$ , cioè in alto? Si ottiene la formula duale

$$\sum_{0 \leq r \leq s} \binom{r}{k} \binom{s-r}{n-k} = \binom{s+1}{n+1}$$

Di cui tralasciamo la dimostrazione.

## 2.4 Calcolo simbolico

Sia dato l'insieme  $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  composto di tre elementi detti *biglie*. Scriviamo simbolicamente l'espressione

$$g(A; x) = (1+x^\alpha)(1+x^\beta)(1+x^\gamma)$$

dove  $x$  è un puro *simbolo*, variabile formale o indeterminata. Moltiplicando i tre binomi come se fossero numeri naturali, si ottiene lo sviluppo

$$1+x^\alpha + x^\beta + x^\gamma + x^{\alpha+\beta} + x^{\alpha+\gamma} + x^{\beta+\gamma} + x^{\alpha+\beta+\gamma}$$

Questo polinomio può essere interpretato nel modo seguente: il numero 1 corrisponde all'insieme vuoto; le potenze  $x^\alpha$ ,  $x^\beta$ ,  $x^\gamma$  corrispondono ai singoletti  $\{\alpha\}$ ,  $\{\beta\}$ ,  $\{\gamma\}$ ; le potenze  $x^{\alpha+\beta}$ ,  $x^{\alpha+\gamma}$ ,  $x^{\beta+\gamma}$  corrispondono alle parti  $\{\alpha, \beta\}$ ,  $\{\alpha, \gamma\}$ ,  $\{\beta, \gamma\}$ ; infine  $x^{\alpha+\beta+\gamma}$  corrisponde all'insieme  $A$ . In altri termini, il polinomio formale  $g(A; x)$  genera l'insieme delle parti di  $A$  nel senso che l'esponente di  $x^S$  è il sottoinsieme  $S$  di  $A$  quando i segni  $+$  sono sostituiti con le virgole e il tutto viene racchiuso tra parentesi graffe. E' ovvio che si può considerare anche un insieme generico  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  di  $n$  elementi, ed il suo *polinomio generatore*

$$g(A; x) = (1+x^{\alpha_1})(1+x^{\alpha_2}) \dots (1+x^{\alpha_n})$$

Per l'insieme vuoto poniamo  $g(\emptyset, x) = 1$ . E' immediata la seguente proprietà di questo polinomio per due insiemi disgiunti  $A$  e  $B$ . Infatti, se  $A \cap B = \emptyset$  allora

$$g(A \cup B; x) = g(A; x)g(B; x)$$

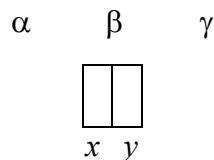
Riprendiamo l'insieme  $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  e questa volta scriviamo un nuovo polinomio nelle due variabili formali  $x$  e  $y$ :

$$g(A; x, y) = (x^\alpha + y^\alpha)(x^\beta + y^\beta)(x^\gamma + y^\gamma)$$

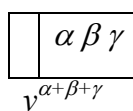
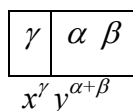
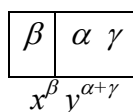
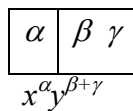
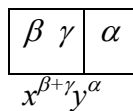
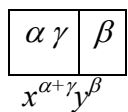
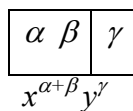
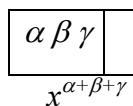
ottenendo, dopo aver sviluppato il prodotto,

$$x^{\alpha+\beta+\gamma} + x^{\alpha+\beta}y^\gamma + x^{\alpha+\gamma}y^\beta + x^{\beta+\gamma}y^\alpha + x^\alpha y^{\beta+\gamma} + x^\beta y^{\alpha+\gamma} + x^\gamma y^{\alpha+\beta} + y^{\alpha+\beta+\gamma}$$

A tutta questa espressione può essere dato un bel significato combinatorio nel modo seguente. Immaginiamo che  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  siano delle *biglie* e che i simboli  $x$  e  $y$  siano delle *scatole*:



Le possibili disposizioni delle tre biglie nelle due scatole  $x$  e  $y$  sono:



Il monomio, o *potenza*,  $x^\alpha$  (scritto anche  $x^\wedge\alpha$ ) significa: la *biglia*  $\alpha$  va nella *scatola*  $x$ . Il significato combinatorio del polinomio  $g(A; x, y)$ , in termini di *biglie nelle scatole*, è ora evidente: gli esponenti  $S$  di  $x$  e  $T$  di  $y$  del monomio  $x^S y^T$  rappresentano rispettivamente la parte  $S$  di  $A$  che va nella scatola  $x$  e la parte complementare  $T$  di  $A$  che va nella scatola  $y$ ,

quando i segni + sono cambiati in virgole e il tutto è messo tra parentesi graffe. Anche in questo caso possiamo generalizzare la questione. Vediamo come. Consideriamo un insieme  $A$  di  $n$  elementi o biglie  $\alpha_i$ . Il polinomio generatore è ora

$$g(A;x,y) = (x^{\alpha_1} + y^{\alpha_1})(x^{\alpha_2} + y^{\alpha_2}) \dots (x^{\alpha_n} + y^{\alpha_n})$$

Vediamo che cosa succede quando poniamo  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1$ . Si ottiene la potenza  $(x + y)^n$ . Ricordando che  $\binom{n}{k}$  è il numero di modi di mettere  $n$  biglie (gli elementi di  $A$ ) in due scatole ( $x$  e  $y$ ), così che  $k$  biglie siano nella scatola  $x$  ed  $n-k$  siano nella scatola  $y$ , deve valere l'identità:

$$(x+y)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad (\text{formula binomiale})$$

Si badi che  $x$  ed  $y$  non sono numeri ma puri simboli, ad esempio  $x = c$  sta per croce (o maschio) e  $y = t$  sta per testa (o femmina). Se  $n = 3$  possiamo considerare tre lanci di una moneta e il polinomio

$$(c+t)^3 = c^3 + 3c^2t + 3ct^2 + t^3$$

con i suoi coefficienti ci dice che c'è un solo modo di uscire tre croci (tre maschi), tre modi di uscire due croci e una testa (due maschi e una femmina), tre modi di uscire una croce e due teste (un maschio e due femmine), un modo di uscire tre teste (tre maschi). Nello sviluppare il polinomio  $g(A;x,y)$  abbiamo tacitamente ammesso la *commutatività* delle indeterminate, cioè che  $xy = yx$ . Che cosa succede se questa ipotesi viene a mancare? Consideriamo il caso particolare  $n = 2$  biglie e tre scatole, cioè il polinomio generatore

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yx + xz + zx + yz + zy$$

I termini dello sviluppo sono tutte le *parole* lunghe 2 dell'alfabeto  $\{x, y, z\}$ . In questo modello le scatole diventano *lettere* o *simboli* di un *alfabeto* e le biglie diventano *posti* (o caselle).

### 3. Campioni casuali, stimatori e metodo Monte Carlo

Le distribuzioni di probabilità più importanti e studiate da noi sono state:  
 la distribuzione simmetrica di parametro  $s$  (estrazione a caso di una pallina da una scatola che ne contiene  $s$ )  
 la distribuzione di Bernoulli di parametro  $p$   
 la distribuzione uniforme di parametro  $a$   
 la distribuzione di Poisson di parametro  $\lambda$   
 la distribuzione normale di parametri  $\mu$  (media) e  $\sigma$  (deviazione standard).

I parametri  $s, p, a, \lambda, \mu$  e  $\sigma$  sono stati supposti noti ma la realtà spesso è un'altra: sono sconosciuti. Come si possono stimare, ovvero come si può trovare un valore approssimato? Più in generale, come si stima un parametro sconosciuto  $\theta$ ? Un *campione casuale* di dimensione  $n$  è un vettore  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  di  $n$  variabili aleatorie indipendenti ed equidistribuite. Si suppone che una volta effettuato l'esperimento e quindi osservati gli esiti

delle variabili, la  $X_1$  abbia assunto il valore  $x_1$ , la  $X_2$  abbia assunto il valore  $x_2$  ecc. e infine la  $X_n$  abbia assunto il valore  $x_n$ . Pertanto i numeri  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono i dati ottenuti nelle  $n$  prove. Ad esempio,

3, 4, 6, 3, 5, 2, 3, 4, 6, 5, 2, 4, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 5

potrebbero essere i risultati di 20 lanci di un dado ( $n = 20$ ). Fissati un parametro  $\theta$  e un campione casuale  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  si definisce *stimatore* di  $\theta$  una qualsiasi variabile aleatoria  $T_n$  tale che

$$T_n = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

ottenuta dalle variabili del campione con una funzione (o trasformazione)  $g$ . Una volta effettuato l'esperimento ed ottenuti i dati  $x_1, x_2, \dots, x_n$  si calcola il numero

$$\hat{t} = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

che sarà assunto come *stima* del parametro sconosciuto  $\theta$ . Esempi fondamentali di stimatori sono:

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

(*somma campionaria*)

$$M_n = S_n/n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$$

(*media aritmetica campionaria*)

$$S^2 = \sum_k (X_k - M_n)^2 / (n-1)$$

(*varianza campionaria*)

( $S$  è la *deviazione standard campionaria*),

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

( $X_{(k)}$  è la  $k$ -esima *statistica d'ordine*)

$$T = (M_n - \mu) \sqrt{n} / S$$

( $T$  di *Student*)

$$\chi^2 = \sum_k [(X_k - M_n) / \sigma]^2$$

(*chi-quadrato di Pearson*)

### Metodo Monte Carlo

Nicholas Metropolis racconta la nascita del metodo ad opera di Enrico Fermi: *had invented, but of course non named, the present Monte Carlo method when he was studying the moderation of neutrons in Rome*. Roger Eckhardt ricorda come poi Ulam abbia avuto l'idea del metodo: "I primi pensieri e attenzioni nel mettere in pratica il metodo Monte Carlo mi vennero nel 1946, mentre ero in ospedale per curare una infezione al cervello, e giocavo dei solitari per passare il tempo. La domanda che mi ponevo era: qual è la probabilità che *il solitario di Canfield*, giocato con 52 carte, riesca? Dopo aver perso molto tempo nel cercare

la soluzione con metodi combinatori, mi chiesi se era più pratico un metodo sperimentale giocando centinaia di solitari e osservare la frequenza dei successi, cioè stimare statisticamente tale probabilità teorica di riuscita”. Ulam tentò di risolvere un problema che non aveva risposta, nel senso che nessuno era stato in grado di calcolare la probabilità di riuscita del solitario di Canfield. Ai matematici si presentano spesso problemi che sono di tre tipi:

- 1) la soluzione c'è e la formula che la esprime è semplice,
- 2) la soluzione c'è ma la formula che la esprime è talmente complicata da considerarsi inutile,
- 3) la soluzione non c'è (DSLS: Dio solo la sa!).

Il problema del *solitario di Canfield*, gioco che da sempre si trova gratis nei computer, appartiene alla terza categoria. In tal caso chi non è addetto ai lavori, può reclamare, esprimendo qualche dubbio sull'attendibilità della stima proposta da Ulam, giocando più volte il solitario. Racconto allora un esempio di stima, veramente accadutomi, per un problema del primo tipo. Un semplice esempio di utilizzo di questo metodo mi fu rivelato infatti a proposito del *problema del collezionista*:

*un album ha s caselle che vanno riempite con figurine che acquistiamo, una al giorno. Se non è consentito scambiare i doppioni con gli amici, quanti giorni ci vogliono per riempirlo?*

In verità ci vorranno almeno  $s$  giorni, ma il numero esatto nessuno lo sa, potrebbe essere  $s + 3$  come  $s + 100$  o  $s$  più mille se sei sfortunato e ti escono sempre doppioni. Il numero di giorni richiesto è una *variabile aleatoria*. Durante un convegno tenuto nel 1986 a Cala Gonone in Sardegna, sulla Didattica della Probabilità e della Statistica nelle scuole medie, al termine della mia conferenza fui avvicinato da un docente. Mi rivelò che in classe, con i suoi 25 studenti si era divertito a lanciare un dado fino a quando uscivano tutte le facce. Ogni studente aveva ripetuto l'esperimento venti volte per cui, dopo 500 prove, avevano ottenuto un valore medio di tiri, necessari a vedere uscire tutte le facce, pari a 14,7. “Che razza di numero è 14,7? Esiste qualche formula per spiegarlo?” mi chiese l'insegnante desideroso di sapere. Era il problema del collezionista se le sei facce del dado sono considerate alla pari delle caselle dell'album. Quando si lancia il dado esce una faccia e quella è la figurina acquistata. “Sì, esiste una formula” risposi, mentre mi avvicinavo alla lavagna, e quando scrissi

$$6(1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/6) = 14,7$$

i sui occhi si illuminarono d'immenso rivelando tutta la sua meraviglia. Un risultato sorprendente! Abbiamo inoltre una interessante interpretazione della divergenza della *serie armonica*, mediante la snervante attesa del poverino che non riesce a trovare la figurina del feroce Saladino! Due modi diversi di sentire l'*infinito*. La formula può essere verificata sperimentalmente per piccoli valori di  $s$  col metodo proposto da Ulam. La tabella seguente fornisce alcuni valori fino a 6.

Variabile aleatoria	Media
2 <i>Moneta</i>	$2(1+1/2) = 3$

3 <i>Triangolo</i>	$3(1+1/2+1/3) = 5,5$
4 <i>Tetraedro</i>	$4(1+1/2+1/3+1/4) = 8,3$
5 <i>Pentagono</i>	$5(1+1/2+1/3+1/4+1/5) = 11,41\bar{6}$
6 <i>Dado</i>	$6(1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6) = 14,7$

Chi avrebbe mai detto che il *cubo* oltre a tutte le sue costanti geometriche (numero di vertici, spigoli, facce, area totale, volume ecc.) avesse la costante 14,7?

Un altro problema che si può simulare con un mazzo di carte, è quello delle concordanze o di Montmort (detto anche *solitario del treize* perché giocato con le tredici carte francesi). Si prendono le tredici carte di cuori

**A♥ 2♥ 3♥ 4♥ 5♥ 6♥ 7♥ 8♥ 9♥ 10♥ J♥ Q♥ K♥**

e si mischiano per bene. Poi, a caso, si dispongono una alla volta in riga dicendo man mano: asso, uno, due, ..., dieci, Jack, Regina, Re. Il solitario riesce se non sbuca mai una carta coincidente col nome detto. Ad esempio, giocando con solo tre carte 1, 2, 3, si hanno le seguenti sei possibili uscite

123, 132, 213, **231**, **312**, 321

e solo **231** e **312** fanno riuscire il solitario. In tal caso la probabilità che riesca è 1/3. Con quattro carte si hanno le permutazioni

1234, 1324, 2134, 2314, 3124, 1243, 1342, **2143**, **2341**, **3142**, 3241, 1423, 1432, **2413**,  
2431, **3412**, **3421**, 3214, **4123**, 4132, 4213, 4231, **4312**, **4321**

con nove casi favorevoli e probabilità di riuscita  $9/24 = 37,5\%$ , ecc. Si dimostra che la probabilità di riuscita del solitario del 13 è

$$1/2! - 1/3! + 1/4! - \dots + 1/12! - 1/13!$$

Per  $n$  uguale a 10 si ha un valore approssimato di circa 36,78794%, che è quasi  $1/e$ .

Ma torniamo al Metodo Monte Carlo. In verità, prima di Fermi e di Ulam era stato Laplace a dire, nel 1812, che con la *legge dei grandi numeri*, il teorema di matematica su cui si fonda il metodo, applicata al problema dell'ago di Buffon, era possibile stimare  $\pi$ . Il problema consiste nel calcolare la probabilità che un ago, gettato a caso su un pavimento infinito, su cui sono disegnate rette parallele alla stessa distanza, non intersechi alcuna delle rette (primo problema di *probabilità geometrica*?). Se la lunghezza dell'ago è  $l$  e la distanza tra le rette è  $d$ , allora per  $l < d$  la probabilità è  $2l/(\pi d)$ . Pertanto, se su  $n$  prove si sono avuti  $k$  successi, cioè l'ago non ha intersecato una delle rette, la stima  $k/n \approx 2l/(\pi d)$  fornisce il valore approssimato  $2ln/(dk)$  di  $\pi$ . La tabella seguente riporta i dati relativi alle prove sperimentali fatte per stimare  $\pi$  dal problema di Buffon:

Sperimentatore	Anno	$n$	Stima
Wolf	1850	5000	3,1596
Smith	1855	3204	3,1553
Fox	1894	1120	3,1419
Lazzarini	1901	3408	3,141592

Nasce spontanea una domanda: quante prove  $n$  bisogna fare per avere una *stima* affidabile della probabilità cercata? Bisogna fissare quante cifre dopo la virgola si vogliono stimare (una o due) e con quale probabilità (*confidenza*) si vuole essere certi della verità statistica del risultato. La seguente tabella dà la risposta per confidenze del 95, 99 e 99,9%:

<i>confidenza</i>	95%	99%	99,9%
$n$ per una cifra	385	664	1.083
$n$ per due cifre	38.416	66.564	108.241

I tre esempi su riportati appartengono alla categoria dei problemi del primo tipo: la formula c'è e si può utilizzare. Questo ci porta a credere nel metodo Monte Carlo senza avere le conoscenze di Statistica e di Matematica, cioè senza dimostrazioni. Per i problemi del secondo tipo: la formula c'è ma non serve a niente, come il mortaio di un'antica favola che mi raccontava la mia cara nonna paterna. Il primo esempio che riporto è il *problema della rovina di un giocatore*:

*un giocatore al tavolo della roulette gioca sempre sul rosso una puntata unitaria, ad esempio un euro. Se quando inizia a giocare possiede  $z$  euro, qual è la probabilità che si rovini, cioè perda tutto, all' $n$ -esima partita?*

Se indichiamo con  $p$  la probabilità di vincere in una partita e con  $q$  quella di perdere, con  $a-z$  il capitale del banco, allora la probabilità di rovina  $u_{z,n}$  è data dalla formula di Lagrange, come riporta Feller:

$$u_{z,n} = a^{-1} 2^n p^{(n-z)/2} q^{(n+z)/2} \times \sum_{1 \leq k \leq a-1} \cos^{n-1}(k\pi/a) \sin(k\pi/a) \sin(k\pi z/a)$$

Il secondo esempio è il problema dell'estinzione delle casate reali di Galton-Watson del 1874:

*siano  $p_0, p_1, p_2, \dots$  le probabilità che un uomo ha di avere rispettivamente 0, 1, 2, ... figli maschi, così pure per i propri, nipoti ecc. Qual è la probabilità che il cognome si estingua dopo  $n$  generazioni e, più in generale, che ci siano  $k$  discendenti alla  $n$ -esima generazione?*

La risposta è data in termini della funzione generatrice della successione  $p_k$  cioè di

$$f(t) = \sum_{k \geq 0} p_k t^k$$

Se  $f_n(t) = f(f(f(\dots(t))))$  allora la probabilità  $p_{n,k}$  che alla  $n$ -esima generazione ci siano  $k$  discendenti è data dalla formula di Galton-Watson

$$p_{n,k} = D^k f_n(0)/k!$$

cioè dalla derivata  $k$ -esima di  $f_n(t)$  divisa per  $k!$  e valutata in 0. Già per il caso Bernoulliano lineare  $f(t) = 1 - p + pt$  il problema di trovare  $p_{n,k}$  praticamente non si risolve, figuriamoci per funzioni generatrici un po' più complicate. Altro problema

*Alla cassa di una banca i clienti arrivano secondo un processo di Poisson di parametro  $\lambda$  e vengono serviti con un altro processo di Poisson, indipendente, di parametro  $\mu$ . All'apertura non ci sono clienti in coda e i servizi avvengono con la regola: si fa la fila e chi prima entra viene servito (FIFO). Quanti clienti ci saranno in media in fila al tempo  $t$ ?*

Per risolvere il problema (come ad esempio in Medi p. 286) si trova l'equazione alle differenze

$$(s + \lambda + \mu)f_n(s) = \lambda f_{n-1}(s) + \mu f_{n+1}(s)$$

per la trasformata di Laplace  $f_n(s)$  della probabilità di avere  $n$  persone in fila al tempo  $t$ . Si passa alla trasformata inversa e *by taking recourse to ingenious and somewhat complicated algebraic manipulations* si ottiene il seguente risultato. Siano

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

la funzione gamma di Eulero,

$$I_n(x) = \sum_{k \geq 0} (x/2)^{2k+n} / [k! \Gamma(k+n+1)]$$

la funzione di Bessel, poniamo

$$A_n(t) = n \int_0^t (\lambda/\mu)^{n/2} e^{-(\lambda+\mu)t} [I_n(2t\sqrt{(\lambda\mu)})] / t dt$$

$$p_n(t) = A_n(t) - A_{n+1}(t)$$

e finalmente abbiamo il numero medio  $m$  di clienti in fila al tempo  $t$

$$m = \sum_{n \geq 0} n p_n(t)$$

Ora, se i parametri sono  $\lambda = 3,14$  e  $\mu = 2,718$ , dopo  $t = 25$  minuti quanti clienti stanno facendo la fila? Per rispondere c'è bisogno del computer e allora perché non usare Monte Carlo fin dall'inizio?

A proposito di come risolvere problemi di questo tipo voglio ricordare quanto ha scritto l'ingegnere David Martini, della fabbrica Magnetek di Terranuova Bracciolini, società che finanziò il primo Convegno Nazionale "Matematica, Formazione scientifica e nuove tecnologie" tenuto a Montevarchi (AR) dal 29 novembre al 1° dicembre 2001.

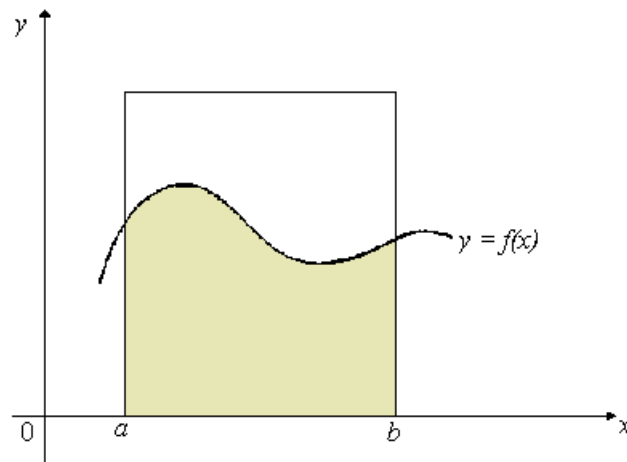
"Sono fermamente convinto che per ogni tecnico (ingegneri in particolar modo, ma non solo) lo studio della matematica (con i suoi teoremi e dimostrazioni) sia fondamentale e insostituibile. E' bene tuttavia ricordare che per il tecnico che si trova a progettare apparati elettronici (com'è il caso dell'azienda che io rappresento) non è indispensabile ricordare alla perfezione

tutte le dimostrazioni dell'analisi matematica, dell'analisi numerica e della statistica imparate negli anni a scuola, ma è fermamente necessario tenere presente *a cosa servono* le branche della disciplina sopra citate. Occorre cioè saper usare nel modo giusto i formidabili strumenti che la matematica ci mette a disposizione. Per chiarire meglio il concetto porterò due esempi.

E' noto che un circuito elettronico (contenente induttanze, capacità, resistenze ma anche transistor) è descrivibile matematicamente con equazioni di tipo differenziale; la risoluzione di equazioni differenziali è oggi molto semplice con un software che gira su normali personal computer. Tuttavia la risoluzione di equazioni differenziali è, sì, un ottimo strumento di analisi quando il circuito è stato progettato, ma non è di facile uso in fase di progettazione. Infatti, semplicemente osservando le equazioni e le soluzioni è difficile prevedere come la variazione di uno o più componenti si ripercuota sul funzionamento del circuito.

Il secondo esempio riguarda la ricerca della robustezza di un progetto soprattutto al variare della temperatura e delle tolleranze costruttive dei componenti, caratteristiche fondamentali per immettere un prodotto di qualità sul mercato. La risoluzione delle equazioni del circuito per ogni singolo valore di temperatura e/o componente è lunga (impossibile direi) in circuiti con diverse migliaia di componenti. Molto utili sono invece tecniche di tipo statistico (metodo Monte Carlo), che facendo variare in maniera casuale (ovviamente entro limiti impostati) trovano più facilmente la soluzione".

Sia  $f(x)$  una funzione continua e positiva sull'intervallo  $[a,b]$ . Vogliamo calcolare l'area della regione racchiusa dalla curva di equazione  $y = f(x)$ , dall'asse delle ascisse, e dalle rette verticali passanti per  $a$  e  $b$  (rettangoloide). A questo scopo consideriamo un rettangolo di base  $[a,b]$  e altezza  $h$  non inferiore al massimo di  $f(x)$  in  $[a,b]$ .



Scegliamo un punto a caso nel rettangolo. Ciò equivale a prendere in considerazione le sue coordinate, cioè le variabili aleatorie

$$X = a + (b - a)R_1, \quad Y = hR_2$$

essendo  $R_1$  ed  $R_2$  numeri random, cioè variabili uniformi su  $[0,1]$ , indipendenti. Definiamo quindi la variabile  $I_1$  ponendo  $I_1 = 0$  se si verifica l'evento  $(Y > f(X))$ ; altrimenti  $I_1 = 1$ . In altri termini,  $I_1$  prende il valore 0 se il punto scelto a caso ha un'ordinata  $Y$  superiore a  $f(X)$ , cioè cade fuori del rettangoloide, mentre assume il valore 1 in caso contrario, cioè se il punto

cade nel rettangoloide. Pertanto  $I_1$  è una variabile aleatoria indicatrice di Bernoulli di parametro

$$p = (\text{area del rettangoloide})/(\text{area del rettangolo}) \\ = \lambda /[(b-a)h]$$

Se ora si estraggono  $n$  punti a caso nel rettangolo, cioè si considerano  $n$  indicatori  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , tutte indipendenti tra loro ed equidistribuite con  $I_1$ , la frequenza  $S_n/n$ , dove  $S_n$  è la somma delle  $n$  indicatori, tende ad assumere un valore vicino a  $p$ , quando  $n$  è molto grande o tende all'infinito, in virtù della legge dei grandi numeri. Tutto ciò porta a scrivere l'approssimazione  $S_n/n \sim \lambda /[(b-a)h]$  cioè  $\lambda \sim [(b-a)h S_n] /n$ . A questo punto si determina l'intervallo di confidenza per il parametro incognito  $\lambda$ .

Per concludere, riportiamo alcune frasi del matematico Gaetano Fichera, dette nella famosa conferenza *Il calcolo infinitesimale alle soglie del duemila*, tenuta il 13 marzo 1993 all'Accademia dei Lincei e pubblicata sui Rend. Suppl. Acc. Lincei (1993) 60-86:

*Questa capacità dei computer porta a modificare profondamente, se non addirittura a stravolgere, il concetto di “problema più semplice di un altro” e, quindi, il significato da dare alla frase: risolvere un problema. Domani, quando per calcolare un'area sarà molto più rapido e conveniente usare un metodo Monte Carlo anziché, ad esempio, calcolare un integrale, la definizione di area sarà sempre quella di Peano-Jordan (o anche di Lebesgue) o non, piuttosto, quella che può darsi mediante una interpretazione probabilistica del concetto di area*

## Bibliografia

- Kenneth Baclawski, Mauro Cerasoli, Gian Carlo Rota, *Introduzione alla probabilità*, 2a Edizione della Unione Matematica Italiana, Pitagora Editore, 1990
- George Boole, *Investigazioni sulle leggi del pensiero*, Einaudi, 1976
- Mauro Cerasoli, *Problemi risolti di calcolo delle Probabilità*, CEA Milano, 1991
- Mauro Cerasoli, *Elementi di probabilità*, Explora Edizioni, 2022
- Bruno de Finetti, *Teoria delle Probabilità*, Einaudi, 1970
- William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol.I, J. Wiley & Sons, 1970
- Andrej. N. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea, New York, 1950
- Giorgio Letta, *Probabilità elementare*, Zanichelli, 1993.

## Simulazione deterministica (e gestione) di una pandemia basata su dati statistici

José M. Carcione

Istituto Nazionale di Oceanografia e di Geofisica Sperimentale

(INOGS)e-mail: jcarcione@inogs.it

**Riassunto:** Nel 2020, una pandemia causata da un nuovo coronavirus si è diffusa in tutto il mondo con un forte tasso di contagio e mortalità. Proponiamo un modello SEIR per calcolare la popolazione infetta e il numero di vittime in funzione del tempo. Il modello include il tasso di mortalità ed è calibrato con il numero delle vittime e non con i contagi che sono in gran parte incerti dato il numero di infezioni asintomatiche non diagnosticate. La simulazione tenta di fornire una procedura semplice e completa per modellare la diffusione del virus sulla base dei decessi.

Presentiamo un tipico caso ipotetico di epidemia e il caso reale che riguarda l'epidemia della Regione Lombardia (Italia), iniziata il 24 febbraio (prima ondata mondiale dopo quella di Wuhan, Cina), utilizzando in questo caso una procedura di inversione per ottenere le proprietà dell'epidemia. Il picco si verificò il giorno 37 (31 marzo) circa, con un numero di riproduzione  $R_0 = 3$  inizialmente, 1,36 al giorno 22 e 0,8 dopo il giorno 35. Il bilancio delle vittime previsto fu di circa 15600 vittime, con 2,7 milioni di individui infettivi alla fine dell'epidemia. Il periodo di incubazione

è di 4,25 giorni e il periodo infettivo è di 4 giorni, con un tasso di mortalità di 0,00144/giorno [valori basati sul numero (ufficiale) riportato di vittime]. Il tasso di mortalità (o fatalità) per infezione (IFR) è 0,57%, mentre quello dell'influenza stagionale è minore di 0.1%. Tuttavia, questi tassi dipendono dagli individui inizialmente esposti.

L'analisi proposta in questo lavoro mostra come le misure di isolamento, il distanziamento sociale e la conoscenza delle condizioni di diffusione ci aiutino a comprendere la dinamica dell'epidemia. Da qui l'importanza di quantificare il processo per verificare l'efficacia del lockdown. Nell'appendice si allega un codice Fortran 77 per simulare la pandemia con il modello SEIR.

## Introduzione

Le specie più abbondanti in natura sono i virus, che sono parassiti, poiché non possono replicarsi fra di loro. Alcuni virus causano gravi malattie infettive nell'uomo e/o animali e sono importanti dal punto di vista medico, sociale ed economico (Spinney, 2017). Una di queste specie è il coronavirus. Un focolaio di polmonite causata da un nuovo coronavirus (COVID-19) è iniziato (ufficialmente) il 24 febbraio 2020, nel Nord Italia. Il grave pericolo rappresentato dal COVID-19 si riflette nell'elevato numero di casi di trasmissione a operatori sanitari. L'esperienza in Cina ha mostrato che l'uso di misure di isolamento relativo estremo in combinazione con una diagnosi rapida ha un forte impatto sulla dinamica dell'epidemia; da qui l'importanza di comprendere e quantificare il processo per verificare l'efficacia delle misure di isolamento. C'è una lunga storia di modelli matematici in epidemiologia, che risale al Settecento. Bernoulli (1760) usava un metodo matematico per valutare l'efficacia delle tecniche di vaiolizzazione. La maggior parte dei modelli sono modelli compartimentali, con la popolazione divisa in classi e ipotesi sul tasso di trasferimento da una classe all'altra. Consideriamo un modello SEIR (Suscettibili- Esposti-Infettivi-Rimossi) per descrivere la diffusione del virus e calcolare il numero di individui infettivi e morti, sulla base del numero di contatti, probabilità di trasmissione della malattia

periodo di incubazione, tasso di guarigione e tasso di mortalità. (e.g., Carcione et al., 2021; Santos et al., 2021; Savioli et al., 2021). Il modello della malattia epidemica prevede un picco giornaliero di individui infettivi e morti in funzione del tempo, e presuppone che nascite e morti naturali siano bilanciate in una ondata, poiché si tratta di un periodo di tempo breve. Le equazioni sono risolte con uno schema di Eulero alle differenze finite.

## Teoria ed equazioni differenziali

Quando il vaccino non è disponibile, l'isolamento degli infettivi e il distanziamento sociale sono le uniche misure di controllo disponibili. Consideriamo un modello epidemico SEIR. La popolazione totale (iniziale),  $N_0$ , è classificata in quattro classi, vale a dire, suscettibili,  $S(t)$ , esposti,  $E(t)$ , infettivi,  $I(t)$  e guariti (rimossi),  $R(t)$ , dove  $t$  è la variabile temporale. Le equazioni differenziali sono

$$\begin{aligned} S' &= \Lambda - \mu S - \beta S \frac{I}{N}, \\ E' &= \beta S \frac{I}{N} - (\mu + \varrho) E, \\ I' &= \varrho E - (\gamma + \mu + \alpha) I, \\ R' &= \gamma I - \mu R, \end{aligned} \tag{1}$$

dove  $N = S + E + I + R \leq N_0$  in questo caso, ed un punto sopra una variabile denota la differenziazione temporale. Le equazioni (1) sono soggette alle condizioni iniziali  $S(0)$ ,  $E(0)$ ,  $I(0)$  e  $R(0)$ . I parametri sono definiti come:

$\Lambda$ : tasso di natalità pro capite.

$\mu$ : tasso di mortalità naturale pro capite.

$\alpha$ : tasso di mortalità indotto dal virus.

$\beta$ : probabilità di trasmissione della malattia per tempo di contatto (adimensionale).

Il numero di contatti per unità di tempo.

$\varrho$ : tasso di progressione da esposto a infettivo (il reciproco è il periodo di incubazione).

$\gamma$ : tasso di guarigione degli individui infettivi (il reciproco è il periodo infettivo).

Lo schema è illustrato nella Figura 1. La scelta  $\Lambda = \mu = 0$  e  $\varrho = \infty$  fornisce il modello SIR classico, mentre se  $\Lambda$  e  $\mu$  non sono zero, il modello è chiamato modello SIR endemico. Tuttavia, il modello SIR non ha uno stadio latente (nessun individuo esposto) e quindi è inappropriato per malattie con un  $\varrho$  come quella del COVID-19. Chiariamo meglio il significato di ciascuna grandezza.  $N$  è il numero totale di esseri umani vivi nel sistema all'istante  $t$ .  $S$  è il numero di esseri umani suscettibili all'esposizione e  $E$  è il numero di individui esposti (una classe in cui la malattia è latente, sono infetti ma non infettivi); le persone vanno da  $S$  a  $E$  a seconda del numero di contatti con individui  $I$ , moltiplicato per la probabilità di infezione ( $\beta$ ) (vedi Figura 1, dove  $\beta I/N$  è il numero medio di contatti con infezione per unità di tempo di un soggetto suscettibile). Gli altri processi che avvengono all'istante  $t$  sono: gli esposti ( $E$ ) diventano infettivi ( $I$ ) con un tasso  $\varrho$  e rimossi (guariti) ( $R$ ) con un tasso  $\gamma$ . Guarito significa individuo che non rientra nella classe  $S$ , si presume l'immunità. I reciproci  $\varrho^{-1}$  e  $\gamma^{-1}$  sono rispettivamente i periodi medi di incubazione della malattia e di infezione.

$\Lambda$  è il tasso di natalità e  $\mu$  è il tasso naturale di morte, entrambi per unità di tempo. Il reciproco  $\mu^{-1}$ , interpretato come la normale aspettativa di vita (es. 80 anni), si riferisce a decessi normali

medi (es. decessi naturali, per influenza normale, incidenti, etc.), non correlati alla malattia. Queste grandezze descrivono un modello con dinamiche vitali (modello endemico), che ha un afflusso di nascite nella classe  $S$  al tasso  $\Lambda$  e di decessi nelle altre classi con tassi  $\mu S$ ,  $\mu I$  e  $\mu R$  (vedi Figura 1). Se  $\Lambda = \mu N$ , i decessi bilanciano i neonati. Il numero di persone vive al momento  $t$  è  $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ , che può essere inferiore o superiore a  $N_0$  a seconda del valore di  $\Lambda$  e  $\mu$ . Nel nostro caso, è inferiore a  $N_0$ .

Uno dei parametri chiave, oltre a  $\beta$ , è  $\alpha$  che rappresenta il tasso di mortalità correlato alla malattia. In una pandemia molto veloce, possiamo presumere che non ci siano nascite e decessi normali (si bilanciano,  $\Lambda = \mu N$ ), ma decessi dovuti al tasso di mortalità della malattia. Questo tasso è una media, perchè il modello non tiene conto dell'età (una quota molto più alta di anziani muore a causa della malattia rispetto ai giovani), le condizioni preesistenti dei pazienti e la qualità dell'assistenza sanitaria.

In sintesi, le persone in classe  $S$  entrano nella classe  $E$  con un tasso proporzionale a  $\beta$  e rimangono per un periodo medio di incubazione  $\varrho^{-1}$ . Quelli già infettati dalla malattia ma non in grado di trasmetterla sono nella classe  $E$  e progrediscono verso la classe  $R$ , passando per la classe  $I$ , con tasso  $\gamma$  e muoiono con tasso  $\alpha$ . È importante ricordare che gli individui della classe  $E$  non hanno i sintomi della malattia, perché la stanno incubando. Avranno sintomi quando passeranno alla classe  $I$ . Gli individui della classe  $I$  potrebbero non avere sintomi (asintomatici), ma sono infettivi, mentre quelli della classe  $E$  non lo sono. Inoltre, gli individui in classe  $E$  possono passare a  $R$  senza mostrare sintomi, ma saranno infettivi quando sono in classe  $I$ .

Le morti in funzione del tempo sono date da  $D(t) = N_0 - N(t)$ , mentre la curva dei morti per unità di tempo è:

$$\dot{D}(t) = -\dot{N}(t) = -(\dot{S} + \dot{E} + \dot{I} + \dot{R})(t) \quad (2)$$

Un altro approccio è il modello SEIRD, dove dobbiamo aggiungere:

$$\dot{D}(t) = \alpha I(t) \quad (3)$$

alle equazioni (1). Si può facilmente dimostrare che le equazioni (2) e (3) sono equivalenti se nascite e morti naturali compensano.

### Numero di riproduzione

Il numero di riproduzione,  $R_0$ , è la classica misura epidemiologica associata con il potere riproduttivo della malattia. Per il modello SEIR,

$$R_0 = \frac{\beta \varrho}{(\varrho + \mu)(\gamma + \alpha + \mu)} \quad (4)$$

Fornisce il numero medio di casi secondari di infezione generato da un individuo infetto. Pertanto, viene utilizzato per stimare la crescita dell'epidemia.  $R_0$  fornisce una soglia. Quando  $R_0 < 1$ , l'amalattia si estingue; quando  $R_0 > 1$ , si verifica un'epidemia.

### Tassi di mortalità per infezione e di letalità

Il tasso di mortalità per infezione (IFR) si basa su tutta la popolazione che è stata infettata, cioè compresi gli individui non rilevati e asintomatici. In termini di recupero e tassi di mortalità, abbiamo

$$\text{IFR (\%)} = 100 \cdot \frac{D_\infty}{R_\infty + D_\infty}, \quad (5)$$

poiché il totale degli esseri umani che sono stati infettati è la somma degli individui guariti e morti, dove il pedice si riferisce alla fine dell'epidemia ( $t \rightarrow \infty$ ). Si può facilmente dimostrare che usando l'ultima equazione (1) e l'equazione (3), otteniamo

$$\text{IFR (\%)} = 100 \frac{\alpha I_\infty}{(\alpha + \gamma)I_\infty - \mu R_\infty} \approx 100 \cdot \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \approx 100 \cdot \frac{\alpha}{\gamma}, \quad (6)$$

poiché il termine contenente  $\mu$  è molto più piccolo, perché  $\mu \ll \alpha \ll \gamma$ , e l'equazione (6) vale approssimativamente in ogni momento, non solo alla fine dell'epidemia. D'altra parte, il tasso di letalità (CFR) considera il numero di decessi relativi agli individui diagnosticati, ed è sempre

$\text{CFR} > \text{IFR}$ , poiché il numero di individui diagnosticati è inferiore al denominatore dell'equazione (5). Il CFR dipende dal tempo ed è il valore solitamente riportato.

### Effetto della vaccinazione

L'effetto della vaccinazione può essere introdotto nel modello SEIR come termine aggiuntivo nelle prima e quarta equazioni (1):

$$\dot{S} = \Lambda - \mu S - \beta S \frac{I}{N} - \zeta S, \quad (7)$$

$$\dot{R} = \gamma I - \mu R + \zeta S$$

(Thäther et al., 2018), dove  $0 \leq \zeta(t) \leq 1$  ( $1/T$ ) è il tasso di vaccinazione, assumendo che gli individui vaccinati siano immuni. In sostanza, la classe dei soggetti suscettibili diminuisce di numero con il procedere della campagna di vaccinazione. In questo lavoro, consideriamo esempi senza vaccinazione ( $\zeta = 0$ ).

### Algoritmo numerico

Risolviamo le equazioni differenziali utilizzando uno schema alle differenze finite di Eulero (Carcione, 2014), discretizzando la variabile tempo come  $t = ndt$ , dove  $n$  è un numero naturale e  $d$

il passo temporale. Le equazioni (1) e (2) diventano, dopo la discretizzazione:

$$\begin{aligned}
 S^{n+1} &= S^n + dt \left( \Lambda - \mu S^n - \beta S^n \frac{I^n}{N^n} \right), \\
 E^{n+1} &= E^n + dt \left( \beta S^n \frac{I^n}{N^n} - (\mu + \rho) E^n \right), \\
 I^{n+1} &= I^n + dt [\rho E^n - (\gamma + \mu + \alpha) I^n] \\
 R^{n+1} &= R^n + dt (\gamma I^n - \mu R^n), \\
 \dot{D}^n &= -(\dot{S}^n + \dot{E}^n + \dot{I}^n + \dot{R}^n)(t),
 \end{aligned} \tag{8}$$

dove  $\dot{D}^n$  è il numero di persone morte solo nel giorno specifico  $n$ . Questo algoritmo produce soluzioni positive e il sistema converge ad un equilibrio, cioè  $S^n + R^n + D^n = S_\infty + R_\infty + D_\infty = N$  per  $t \rightarrow \infty$ .

### Esempio ipotetico

Consideriamo i seguenti parametri di base come esempio:  $N_0 = 10$  milioni,  $\alpha = 0,006/\text{giorno}$ ,  $\beta = 0,75/\text{giorno}$ ,  $\gamma = (1/8)/\text{giorno}$ ,  $\rho = (1/3)/\text{giorno}$ ,  $\Lambda = \mu N$  (equilibrio delle nascite e delle mortinaturali); e condizioni iniziali:  $S(0) = N_0 - E(0) - 1$ ,  $E(0) = 20000$ ,  $I(0) = 1$  e  $R(0) = 0$ . Questi dati indicano un'incubazione media della malattia (periodo di latenza) di 3 giorni e un periodo infettivo di 8 giorni. I dati corrispondono a nessuna condizione di isolamento tra gli individui e ad una situazione epidemica (alto  $\beta$ ,  $R_0 = 5,72 > 1$ ). Il passo temporale dello schema di Eulero per risolvere le equazioni discretizzate (8) è  $dt = 0,01$  giorno.

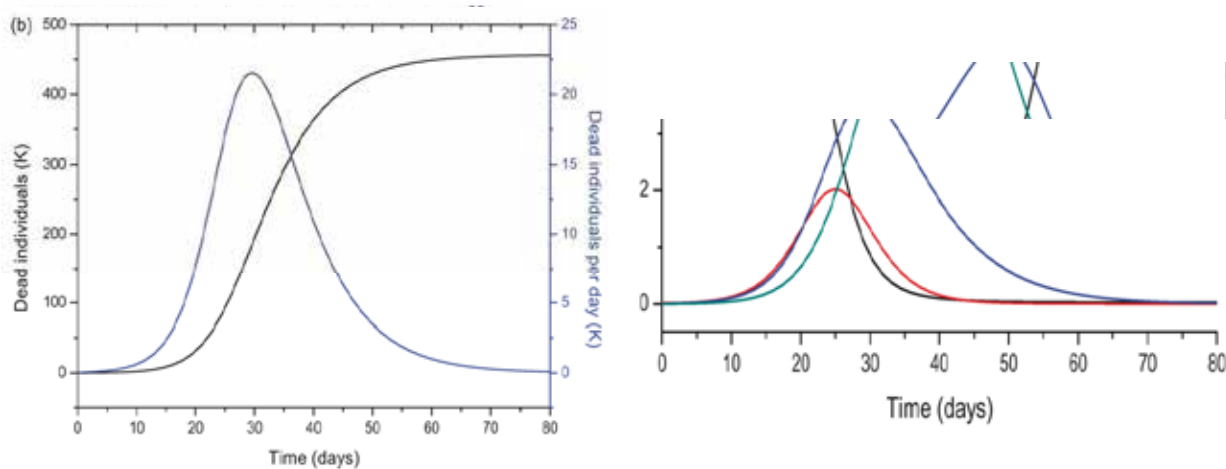


Figura 2: Numero di esseri umani nelle diverse classi (milioni) (a), e numero totale di decessi (curva nera) e numero di decessi per giorno specifico (in migliaia, curva blu) (b). Il numero di persone esposte a  $t = 0$  è 20000 e c'è un individuo infetto iniziale,  $I(0) = 1$ . Il valore di  $R_0 = 5,72$  significa misure di isolamento imperfette. Suscettibili,  $S$  (susceptibles), esposti,  $E$  (exposed), infettivi,  $I$  (infected) e guariti (rimossi),  $R$  (recovered). M: milioni; K: migliaia.

La Figura 2 mostra il numero di individui nelle diverse classi (a), il numero totale di morti ( $D$ ) e il numero di morti per giorno specifico ( $\dot{D}$ ) (b). Come si può vedere, il picco di decessi giornalieri

viene raggiunto al giorno 30. I valori elevati nella Figura 2b non considerano il completo isolamento domiciliare e le misure di distanziamento sociale. Il numero massimo di persone contagiate è di quasi 4 milioni. Secondo i dati provenienti dalla Cina, circa il 5% delle persone risultate positive al COVID-19 presenta sintomi gravi e richiede il ricovero in un'unità di terapia intensiva, in questo caso quasi 200 mila persone. Quindi, il sistema sanitario sarebbe completamente sopraffatto da tassi di mortalità molto elevati e dall'impossibilità di fornire cure intensive. Una parziale strategia di "mitigazione" che comporti il distanziamento sociale (isolamento domiciliare dei casi sospetti e distanziamento sociale degli anziani) non sarebbe sufficiente ed è necessario un severo lockdown per ridurre  $R_0$  possibilmente a valori meno di 1.

## Esempio reale. Il caso Lombardia

Successivamente, tentiamo di modellare l'epidemia in Lombardia (Italia) (prima ondata, 2020). I dati si trovano in <https://github.com/pcm-dpc/COVID-19>. Le incertezze sono legate al parametro  $\beta$  che varia nel tempo, mentre si presume che gli altri parametri si trovino tra determinati limiti e contribuiscano anche all'errore di inversione. Le previsioni relative dell'andamento delle curve richiedono un'analisi dei dati, in particolare per definire la variazione di  $\beta$  e  $R_0$  nel tempo. Non assumiamo una specifica funzione continua, ma una partizione in periodi discreti,  $[t_0, t_1]$ ,  $[t_1, t_2]$  ...  $[t_{L-1}, \infty]$ , guidata dalle misure prese dallo Stato e dal comportamento della popolazione. In questo caso,  $t_0 =$  giorno 1,  $t_1 =$  giorno 22 e  $t_2 =$  giorno 35, ovvero  $L = 3$ , poiché dopo  $t_1$  (16 marzo), l'isolamento domiciliare, il distanziamento sociale e il blocco parziale della Nazione hanno iniziato ad essere efficaci, come indicato da un punto di svolta nella curva delle vittime giornaliere (vedi Figura 3). Osserviamo anche che a  $t_2$  (29 marzo), la curva inizia a decrescere e raggiunge un picco.

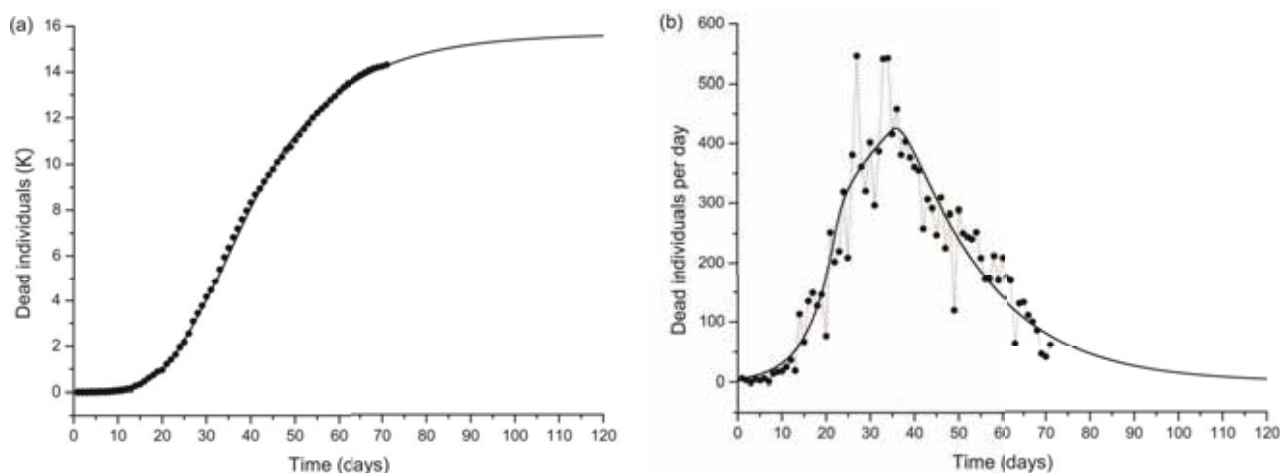


Figura 3: La casistica Lombarda. Individui morti (a) e numero di decessi giornalieri (b), dove i punti neri rappresentano i dati forniti dal governo. La linea continua corrisponde ai dati della tabella. Il picco si verifica al giorno 37 (31 marzo), che coincide con un punto d'inflexione in (a).

Le persone infette segnalate non possono essere utilizzate per la calibrazione, perché questi dati non sono attendibili. I ricoveri non possono essere considerati rappresentativi del numero di persone contagiate ed era in gran parte sconosciuto il numero di infezioni asintomatiche non diagnosticate. Tuttavia, siamo consapevoli che anche l'utilizzo del numero delle vittime è incerto, poiché può esserci una sottostima dei decessi, ma questa non può variare tanto quanto l'errore relativo ai soggetti contagiati.

Per realizzare il fitting dei dati, utilizziamo un algoritmo di ricottura simulato (simulated annealing) sviluppato da Goffe et al. (1994). Il codice Fortran può essere trovato in:

<https://econwpa.ub.uni-muenchen.de/econ-wp/prog/papers/9406/9406001.txt>.

Il fitting si basa sulla norma  $L^2$  e restituisce  $\alpha$ ,  $\beta_1$  (prima di  $t_0$ ),  $\beta_2$  (dopo  $t_0$ ),  $\beta_3$  (dopo  $t_1$ ),  $\rho$ ,  $E(0)$  e  $\gamma$  dall'inizio dell'epidemia (giorno 1, 24 febbraio) al giorno 72 (5 maggio), ovvero sette parametriliberi. Usiamo il numero totale di decessi per la calibrazione.

La tabella mostra i vincoli, i valori iniziali e i risultati per il caso considerato. L'ultima colonna non corrisponde a una variabile ma indica gli individui contagiati al termine dell'epidemia, ovvero  $I_\infty = R_\infty + D_\infty \approx R_\infty$  e il giorno dell'ultimo contagiato (la fine dell'epidemia in teoria). I risultati sono molto sensibili alle variazioni del parametro  $\beta_3$  e di conseguenza a quelli di  $R_0$ , principalmente per l'impatto delle strategie di intervento eseguite.

Tabella. Vincoli e valori iniziali-finali dell'algoritmo di inversione per ottenere le proprietà dell'epidemia in Lombardia (prima ondata).

int.	variabile →	$\alpha$ (g. <sup>-1</sup> )	$\beta_1$ (g. <sup>-1</sup> )	$\beta_2$ (g. <sup>-1</sup> )	$\beta_3$ (g. <sup>-1</sup> )	$\rho^{-1}$ (g.)	$\gamma^{-1}$ (g.)	$E(0)$	$I_\infty$ (M) $L$ (g.) $D_\infty$
	limite inferiore	$10^{-5}$	0.5	$10^{-6}$	$10^{-6}$	3	3	$10^3$	
	limite superiore	$10^{-1}$	0.9	$10^3$	$10^3$	6	6	$2 \times 10^5$	
	valore iniziale	0.006	0.75	0.5	0.5	5	5	$10^4/10^5$	
1	valore finale	0.00144	0.75	0.34	0.2	4.25	4.02	11460	2.69
2	IFR	0.57%							262–Nov 11
3	$R_0$		3.00	1.36	0.80				15652

$I(0) = 1000$ .

I valori di  $\beta$  si riferiscono ai periodi (in giorni): [1, 22], [22, 35] e [35,  $\infty$ ].

$I_\infty$  (in milioni) indica il totale di infettivi alla fine dell'epidemia.

$L$  indica il giorno dell'ultimo individuo infettivo ( $I < 1$ ).

$D_\infty$  è il bilancio delle vittime alla fine dell'epidemia.

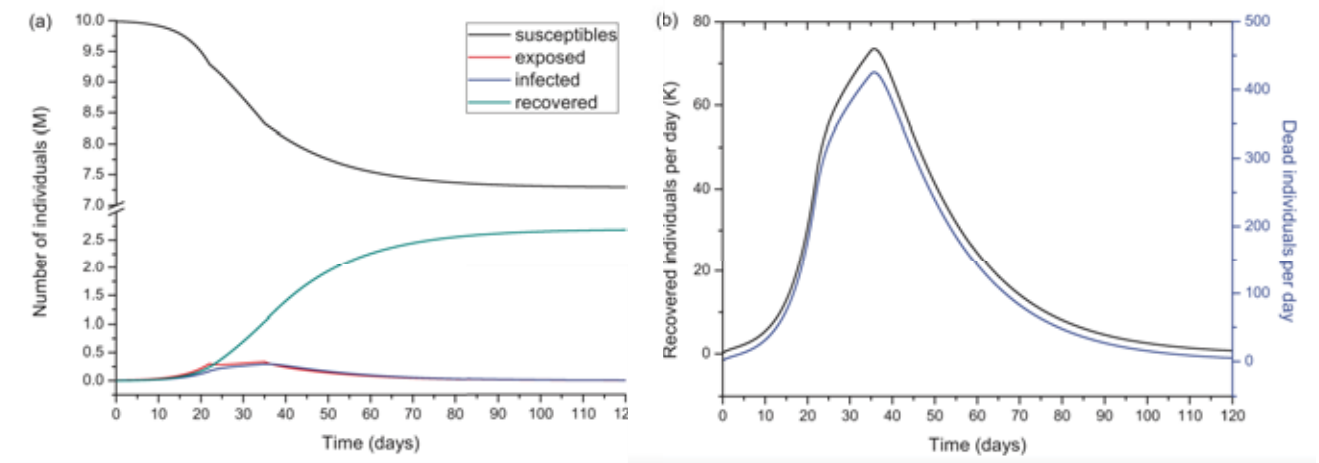


Figura 4: Numero di esseri umani nelle diverse classi (milioni) (a); e individui guariti al giorno ( $\dot{R}$ , linea nera) rispetto ai decessi al giorno (linea blu) (b) per il caso mostrato nella Figura 3. Si

noti che è dato in migliaia.

$\dot{R}$

La Figura 3 mostra le curve e i dati (punti neri), con  $IFR = 0,57\%$  e  $R_0$  decrescente da 3 a 0,8 alla fine dell'epidemia [Campbell e Gustaffson (2021) hanno ottenuto, per una popolazione con

l'età e la ricchezza dell'Unione Europea, un IFR tra 0,51% e 0,67%]. Gli ultimi individui infettivi sono 2,69 milioni (vedi Figura 4a e tabella). Il valore di picco della classe I è 0,3 M o 300 mila individui. Se il 5% di queste persone richiede il ricovero in un reparto di terapia intensiva (ICU), si tratta di 15000 individui, che superano di molto la capacità della Lombardia, che era di circa 1000 ICU al 16 marzo. La Figura 4b confronta gli individui infettivi e morti (al giorno) e, come previsto, le due curve sono sincrone, poiché una proporzione  $\alpha$  di individui infettivi muore. Il punto d'inflessione al giorno 22 (Figura 3b) indica che le misure di isolamento hanno iniziato a essere efficaci. Non è stato possibile ottenere un isolamento rigoroso al giorno 22 a causa di diverse ragioni e vi fu un ritardo di alcuni giorni prima che potesse essere attuato (giorno 35). Il numero totale di vittime è di circa 15600 e la durata effettiva dell'epidemia è di circa 100 giorni. L'ultima colonna indica il giorno in cui l'ultimo individuo è stato infettato, ottenuto con la condizione  $I < 1$ . Dati recenti rivelano che la durata effettiva dell'epidemia di Wuhan è stata di quasi 60 giorni, un periodo più breve favorito dalle misure di isolamento molto rigide applicate in quella città.

Altre scelte del set di parametri potrebbe anche fornire un buon fitting dei dati, ma alcuni dei risultati potrebbero non essere realistici. Pertanto, un'accurata determinazione del tasso di mortalità e delle caratteristiche dell'epidemia è soggetta alla conoscenza dei limiti precisi (o vincoli) dei parametri (vedi Carcione et al., 2020).

## Gestione della pandemia sulla base dei dati

Lo scoppio di una pandemia può avere conseguenze catastrofiche, non solo dal punto di vista delle vittime, ma anche economico. Pertanto, è fondamentale evitarle assolutamente adottando al momento opportuno le misure necessarie, cosa che non è stata realizzata in Italia e nel resto del mondo. Secondo questi calcoli, le misure efficaci sono il distanziamento sociale e l'isolamento domiciliare, poiché non esiste un sistema sanitario progettato per gestire una pandemia, quando i soggetti contagiati crescono in modo esponenziale. Come si può vedere, la pandemia può svilupparsi in pochi giorni e il numero di vittime può essere estremamente alto se il tasso di mortalità e la contagiosità della malattia sono elevati. Solo pochi giorni di anticipo per agire possono fare una grande differenza nella prevenzione di questo disastro. La pandemia e le sue conseguenze sono state previste nell'ottobre 2019 da un gruppo di esperti:

[<https://www.politico.com/news/magazine/2020/03/07/coronavirus-epidemic-prediction-policy-advice-121172>],

ma gli Stati hanno ignorato il fatto e la natura transnazionale della minaccia, ritardando le misure necessarie per evitare il disastro, minimizzando in molti casi i pericoli per le proprie popolazioni ed economie. Inoltre, in meno di tre settimane, il virus ha sovraccaricato il sistema sanitario del nord Italia, in particolare della Lombardia, dove il sistema non può supportare questo tipo di emergenza e le autorità non erano preparate ad affrontare l'epidemia.

Diversi errori sono stati dovuti alla mancanza di un vero piano pandemico, in gran parte per motivi politici. Le quattro ondate principali, indicando la data del picco dei decessi sono:

- Prima ondata (31 marzo 2020): il lockdown totale (iniziato il 22 marzo) doveva cominciare al meno un mese prima, considerata l'esperienza di Wuhan (Cina), ed evitare migliaia di decessi. In Cina, il lockdown era cominciato il 23 gennaio 2020 ed il picco dei decessi si era verificato il 12 febbraio.
- Seconda ondata (6 dicembre 2020): non era stata prevista, e si verificata più fatale della prima. Il lockdown (parziale) è iniziato in ritardo (24 ottobre 2020), di un mese circa.
- Terza ondata (13 aprile 2021): campagna di vaccinazione errata (vedi sotto).
- Quarta ondata (4 febbraio 2023): obbligo vaccinale (over 60/65) ritardato di 1 anno.

Tracciamento: l'app Immuni non ha funzionato, per diversi motivi, uno dei quali la presunta violazione della privacy, un'atteggiamento in parte egoistico che ha fatto sì che l'80% degli italiani non abbia scaricato l'applicazione.

La campagna di vaccinazione: Da precedenti pandemie era ben noto che il rischio di morte aumenta come una curva gaussiana dall'età di 60 (o 65 anni) in poi. Decessi per Covid per età (ottobre 2021): il picco si trova nella fascia 80-89 anni con circa 52 mila morti. Da 60 anni in su ce ne sono circa 125 mila, la stragrande maggioranza. Da 60 anni in giù: 6300 persone. Con il vaccino a disposizione, era d'obbligo forzare la vaccinazione almeno per gli over 65 fin dall'inizio (Febbraio 2021), e questo avrebbe evitato decine di migliaia di vittime. Invece, gli esperti hanno consigliato la vaccinazione per rischio di contagio (le cosiddette categorie) e non per rischio di morte. Fino a Maggio 2021 erano stati vaccinati 10,2 milioni di persone, di cui 7 milioni under 65.

Matematici italiani (Faranda et al., 2021) hanno calcolato i decessi in più derivanti da mancate vaccinazioni usando il modello SEIR. Le conclusioni sono che i morti in eccesso sono circa 2500 se si vaccina con un ritardo di 30 giorni. Sarebbe bastato vaccinare tutti gli over 65 e la pandemia sarebbe fermata. Se da gennaio 2021 si fosse proceduto in fretta, 500 mila vaccinati al giorno, 15 milioni in 30 giorni, si sarebbe potuta vaccinare la fascia over 65 in un mese, ed evitare la strage. Solo a febbraio e marzo 2020 ci sono stati 15 mila morti, in media 250 decessi al giorno, La matematica alla base di questi calcoli è semplice e nota a uno studente delle superiori.

La demonizzazione del vaccino (siero, droga, microchips, etc) dai media, politici, etc, si esemplifica con il caso AstraZeneca. Ci sono stati 7 morti per trombosi su 18 milioni di persone vaccinate con AstraZeneca a fronte di oltre 100 trombosi venose profonde a settimana su tale popolazione, senza vaccino. Difficile provare il nesso causa-effetto. Comunque, se così fosse, la probabilità di morte sarebbe di 1 su 2,5 milioni, mentre la probabilità (in 80 anni) di essere colpiti da un meteorite sarebbe di 1 su 1,6 milioni; in un incidente d'auto, 1 su 90; in un incendio, 1 su 250; da un tornado, 1 su 60 mila, o da un fulmine, 1 su 100 mila.

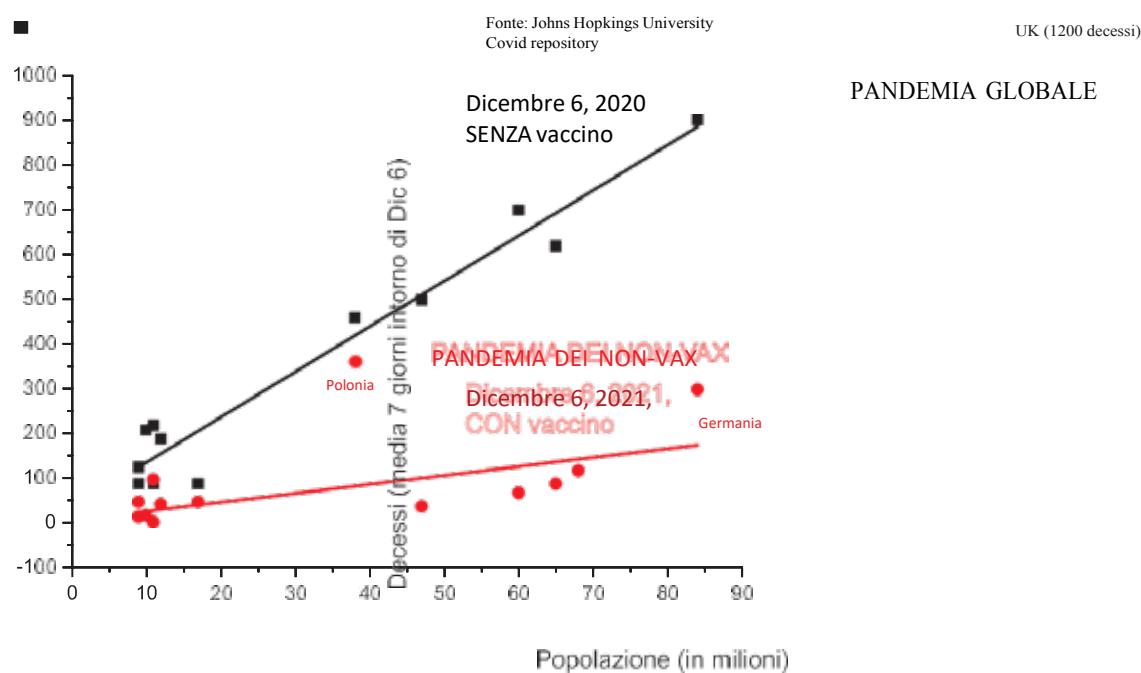


Figura 5: Numero di persone decedute in una media di 7 giorni intorno al 6 dicembre 2020 (nessun vaccino, quadrati e linea neri) e intorno al 6 dicembre 2021 (con vaccino, punti e linea rossi) in funzione della popolazione totale (in milioni di persone).

Il problema no-vax: la Figura 5 mostra il numero di persone decedute in una media di 7 giorni intorno al 6 dicembre 2020 (nessun vaccino, quadrati e linea neri) e intorno al 6 dicembre 2021 (con vaccino, punti e linea rossi) in funzione della popolazione totale (in milioni di persone). Ogni simbolo corrisponde a un paese europeo. I decessi oggi colpiscono principalmente alla popolazione di no-vax, un piccolo paese nel grande paese. In Italia c'erano 10 milioni di no-vax, di cui circa

2-3 milioni over 60. Paradossalmente, il certificato verde (green pass) protegge i no-vax, perché impedisce loro (in teoria) di stare in luoghi affollati, e indirettamente protegge l'intera popolazione perché evita l'aumento dei pazienti Covid in terapia intensiva.

Falsità: in alcuni "talk-show" si diceva siccome il 67% dei ricoverati (in terapia intensiva e deceduti) sono no-vax e il 33% sono vaccinati, questo dimostrerebbe che il vaccino non funziona in 1 persona su 3. Bisogna tenere conto che i no-vax sono il 10% della popolazione contro un 90% di vaccinati. Quindi, il virus agisce su 54 milioni di vaccinati e 6 milioni di no-vax. Pertanto, il rapporto di 1 a 3 va pesato con un fattore  $90\%/10\% = 9$  e il dato reale è che il vaccino non funziona su 1 persona su 27, considerando oltretutto che molti decessi tra i vaccinati sono dovuti a malattie pregresse.

## Conclusioni

Un numero elevato di infezioni da COVID-19 può verificarsi quando un individuo infetto viene

introdotto in una comunità. È fondamentale simulare in anticipo il processo di infezione (e morte), applicare adeguate misure di controllo e mitigare il rischio di diffusione del virus. Uno degli algoritmi matematici più utilizzati per descrivere la diffusione di una malattia epidemica è il modello SEIR, che abbiamo applicato per calcolare il numero di individui infetti, guariti e morti sulla base del numero di contatti, probabilità di trasmissione della malattia, periodi di incubazione e infezione e tasso di mortalità.

I modelli possono essere utilizzati per prevedere e comprendere come si diffonde una malattia infettiva nel mondo e come vari fattori influenzano le dinamiche. È stato chiaro agli scienziati per molti decenni fino ad oggi che la quarantena, il distanziamento sociale e l'adozione di misure di sicurezza molto rigorose sono fondamentali per fermare la diffusione di un virus. La quarantena è stata utilizzata anche in epoca medievale per combattere la peste nera prima di conoscere l'esistenza dei virus. Una pandemia ha dei precisi comportamenti statistici, la cui gestione compete ai matematici e ai fisici (e.g., Brauer, 2017), perché richiede l'uso della teoria delle equazioni differenziali e di modelli stocastici, e non ai medici (virologi, etc.) che devono occuparsi delle cure e del vaccino. Si poteva evitare la morte di migliaia di persone con una corretta campagna di vaccinazione. In questo senso, la pandemia rivela il fallimento dei decisori politici, dal momento che è ben noto, sulla base di risultati di modellazione, che, anticipando tali misure si possono salvare migliaia di vite. L'interfaccia tra scienza, società e politica è ancora debole, anche nei paesi altamente sviluppati, e rivelano un disprezzo per i metodi scientifici. Inoltre, una delle conseguenze è che alcuni di questi Paesi non investono a sufficienza in ricerca e sviluppo.

## Appendice. Codice Fortran 77 per simulare una pandemia con il modello SEIR

Il seguente programma riproduce la Figura 2 dell'articolo. Una versione di compilatore Fortran77 per Windows si può scaricare gratuitamente dalla rete (il Force 2.0.9), per esempio, dal sito [http://www.download.com/Force/3000-2212\\_4-10067832.html](http://www.download.com/Force/3000-2212_4-10067832.html). I risultati si possono plottare online, se scritti come un archivio csv, in <https://huygens.science.uva.nl/PlotTwist/>

c \_\_\_\_\_  
c Codice per modello  
SEIRc Eq. (8)

c \_\_\_\_\_  
parameter (nd=1000000, nrig=10000, ncol=5)  
dimension S(nd),E(nd),R(nd),C(nrig,ncol)  
real I(nd)

```

real Id,Im,N0,N,Lam,mu
c
c archivio dei risultati
open(2,file='out.dat')
open(3,file='out.csv'
) f3=1.e+3
f6=1.e+6
c dati nel sistema MKS
giorno=24.*3600.
c popolazione iniziale
N0=10.e+6
c probabilita' di trasmissione
beta=0.75/giorno
c tasso di guarigione
gam=(1./8.)/giorno
c tassi di natalita' e mortalita' naturale
Lam=0.
mu=0.
c tasso di mortalita'
alpha=0.006/giorno
c tasso di progressione da E a I
eps=(1./3.)/giorno
c condizioni iniziali
E(1)=20000.
S(1)=N0-1.-
E(1)I(1)=1.
R(1)=0.
c tempo massimo
tmax=80.*giorno
dt=0.01*giorno
nt=tmax/dt+1
c numero di riproduzione
R0=beta*eps/(gam+alpha+mu)/(eps+mu)
print *, 'R0 ', R0
N=N0
c loop
do j=1,nt
t=(j-1)*dt/giorno
c Eq. (8)
t1=beta*S(j)*I(j)/N
Sd=Lam-mu*S(j)-t1
Ed=t1-
(mu+eps)*E(j)
Id=eps*E(j)-
(gam+mu+alpha)*I(j)
Rd=gam*I(j)-mu*R(j)
c
S(j+1)=S(j)+dt*Sd
E(j+1)=E(j)+dt*Ed
I(j+1)=I(j)+dt*Id
R(j+1)=R(j)+dt*Rd
N=R(j+1)+I(j+1)+E(j+1)+S(j
+1) D=N0-N
c decessi al giorno
Dd=-
(Sd+Ed+Id+Rd)*giorno c
conversione in milioni
Sm=S(j)/f
6
Em=E(j)/f
6

```

```

        Im=I(j)/f6
        Rm=R(j)/f
        6
c risultati
        write(2,*)t,Sm,Em,Im,Rm,D/f3,Dd/f3
c
        C(j,1)=t
        C(j,2)=Sm
        C(j,3)=Em
        C(j,4)=Im
        C(j,5)=Rm
c
        end do
c
c risultati in archivio excel (Figura
2a)do j=1,nt
        write (3,“(5(f0.6,’,’,:))”) C(j,:)
        end do
c
        stop
        end

```

## Riferimenti bibliografici

- Bernoulli, D. (1760). Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir, Mémoires de Mathématiques et de Physique, Académie Royale des Sciences, Paris, 1–45.
- Brauer, F. (2017). Mathematical epidemiology: Past, present, and future, *Infect. Dis. Model.*, 2(2), 113–127.
- Campbell, H., Gustafson, P. (2021). Inferring the COVID-19 infection fatality rate in the community-dwelling population: a simple Bayesian evidence synthesis of seroprevalence study data and imprecise mortality data, *Epidemiology and Infection*, 149, 1–14.
- Carcione, J. M. (2014). Wave fields in real media. Theory and numerical simulation of wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media, 3rd edition, Elsevier.
- Carcione, J. M., Santos, J. E., Bagaini, C., Ba, J. (2020). A simulation of a COVID-19 epidemic based on a deterministic SEIR model, *Frontiers in Public Health*, 8, Article 230. <https://doi.org/10.3389/fpubh.2020.00230>.
- Faranda, D., Alberti, T., Arutkin, M., Lembo, V., Lucarini, V. (2021). Interrupting vaccination policies can greatly spread SARS-CoV-2 and enhance mortality from COVID-19 disease: The AstraZeneca case for France and Italy, *Chaos* 31, 041105 (2021). <https://doi.org/10.1063/5.0050887>.
- Goffe, W. L., Ferrier, G. D., Rogers, J. (1994). Global optimization of statistical functions with simulated annealing, *J. Econometrics*, 60(1-2), 65–99.
- Santos, J. E., Carcione, J. M., Savioli, Gauzellino, P. M. (2021). An SEIR epidemic model of fractional order to analyze the evolution of the COVID-19 epidemic in Argentina, In *Analysis of Infectious Disease Problems (Covid-19) and Their Global Impact*, book chapter, 539–557.

Savioli, G. B., Carcione, J. M., Santos, J. E., Gauzellino, P. M., Ravecca, A., Moras, A. (2021). A numerical simulation of the COVID-19 epidemic in Argentina using the SEIR model, *Lat. Am. Appl. Res.*, 51(3), 179–184.

Spinney, L. (2017). *Pale rider: The Spanish flu of 1918 and how it changed the world*. Jonathan Cape, London.

Thäter, M., Chudej, K., Pesch, H. J. (2018). Optimal vaccination strategies for an SEIR model of infectious diseases with logistic growth, *Math. Biosci. Eng.*, 15(2), 485-505.

## La probabilità di decadimento radioattivo determinata statisticamente

Prof. Sergio ROSSANO

Liceo Scientifico A. Labriola di Napoli

### Introduzione

Richard Phillips Feynman, fisico e divulgatore scientifico statunitense, Premio Nobel per la fisica nel 1965 per *l'elaborazione dell'elettrodinamica quantistica*, introduceva le forze elettriche nel mio libro dell'università in questo modo.

“Pensate ad una forza simile alla gravitazione, che varia essenzialmente come l'inverso del quadrato della distanza, ma che sia all'incirca un miliardo di miliardi di miliardi di miliardi di volte più forte.

Grazie a questa forza, se vi trovaste a 1 m di distanza da un'altra persona ed entrambe aveste l'1 % in più di elettroni che di protoni la forza di repulsione sarebbe incredibile.

Quanto grande? Non equivalente a quella necessaria per sollevare l'Empire State Building!

Non equivalente a quella necessaria per sollevare il Monte Everest!

La repulsione sarebbe abbastanza grande per sollevare un peso uguale a quello dell'intera terra”

Se confrontiamo infatti la legge di gravitazione universale di Newton con la legge di Coulomb notiamo sia le evidenti similitudini ma anche la macroscopica differenza che esiste tra i valori numerici espressi nel S.I. delle costanti di proporzionalità elettrica  $K$  ( $9 \times 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2$ ) e di gravitazione universale  $G$  ( $6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 / \text{kg}^2$ )

Ciò significa che la forza elettrica è incommensurabilmente più intensa della forza gravitazionale malgrado sia l'unica che esperiamo ogni giorno.

Però c'è un'apparente contraddizione: in un modello estremamente semplificato di atomo gli elettroni carichi negativamente ruotano attorno al nucleo carico positivamente attratti dalla forza di Coulomb.

Nel modello atomico di Bohr l'elettrone (carica  $-e = -1.6 \cdot 10^{-19}$  Coulomb, massa  $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$  kg) descrive attorno al nucleo (carica  $+e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Coulomb, massa  $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$  kg) un'orbita circolare di raggio  $r = 5.3 \times 10^{-11}$  m. Nell'ipotesi che la massa sia indipendente dalla velocità la forza di attrazione  $F$ , che si esercita tra il nucleo e l'elettrone, vale :

$$F = K e^2 / r^2 = 8 \times 10^{-8} \text{ N}$$

La forza di attrazione gravitazionale tra elettrone e protone è assolutamente trascurabile rispetto alla forza elettrostatica. Il rapporto tra le due è dell'ordine di  $10^{-40}$

Teniamo in conto che le dimensioni del nucleo sono quasi  $10^{-5}$  volte quelle dell'orbita elettronica.

Per capirne meglio le proporzioni consideriamo che se un atomo si estendesse occupando uno stadio da calcio (100 m) il suo nucleo avrebbe le dimensioni di una piccola pastiglia (qualche mm).

Il nucleo contiene quasi tutta la materia dell'atomo: la densità di materia all'interno del nucleo è dell'ordine di  $10^{17} \text{ kg/m}^3$  !! Una enormità se confrontata con le densità di aria, acqua e ferro


$$d_{\text{aria}} \sim 1.0 \text{ kg/m}^3 \text{ (a } 20^\circ\text{C e } 1 \text{ Atm)}; \quad d_{\text{acqua}} \sim 1000 \text{ kg/m}^3; \quad d_{\text{ferro}} \sim 8000 \text{ kg/m}^3$$

arrivando alla conclusione che la materia è formata soprattutto di spazio quasi vuoto e che i protoni all'interno del nucleo sono spaventosamente vicini gli uni agli altri.

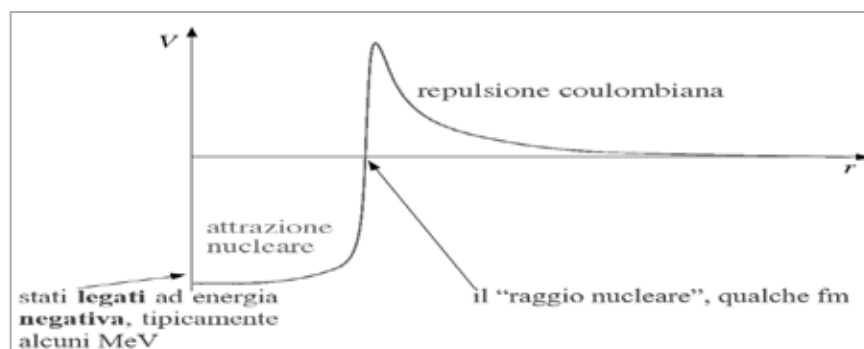
### Ma i protoni non si respingono?

Nel nucleo ci sono  $Z$  protoni molto vicini tra loro ( $r \sim 10^{-15}$  m). Essi risentono delle seguenti forze reciproche la forza gravitazionale  $F_G$  (attrattiva) e la forza elettrica  $F_E$  (repulsiva)

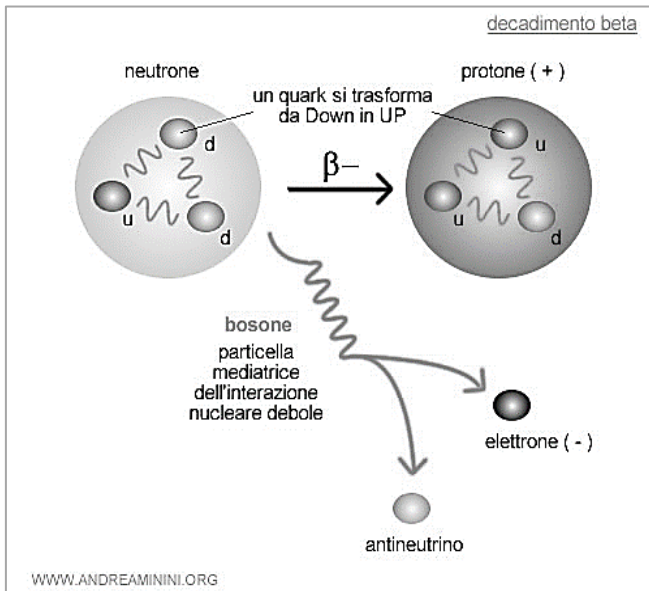
attrazione gravitazionale	$F_G = -G \frac{m_p m_p}{r^2} = -6.67 \cdot 10^{-11} \frac{(1.67 \cdot 10^{-27})^2}{(10^{-15})^2} = -2 \cdot 10^{-34} \text{ N}$
repulsione elettrostatica	$F_E = + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_p q_p}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{(10^{-15})^2} = 230 \text{ N}$



la cui risultante è enormemente repulsiva e miliardi di volte maggiore di quella esistente tra elettrone e nucleo. In base alle forze che conosciamo (gravitazionale ed elettromagnetica) i protoni dovrebbero **respingersi** violentemente, queste forze dovrebbero distruggere i nuclei atomici, o impedirne la formazione. Ci dev'essere un'altra forza attrattiva a tenere insieme i nuclei. Per fortuna, all'interno dei nuclei atomici si manifesta una, anzi due, nuove forze d'attrazione, capaci di "incollare" tra loro i protoni vincendo la loro repulsione coulombiana. La Forza Nucleare Forte: molto intensa, sempre attrattiva, che si manifesta solo a distanze di circa  $10^{-15}$  m (dimensioni nucleari) ed agisce solo tra protoni e neutroni. La Forza Nucleare Debole: che si manifesta solo a distanze di circa  $10^{-16}$  m, che agisce su protoni e neutroni, ma anche elettroni ( $e^-$  /  $e^+$ ) e neutrini ( $\nu$ ). La presenza di tali forze e dei neutroni che fungono da "collante" rende possibile l'esistenza dei nuclei atomici a più particelle. Come si evince dalla figura il potenziale tra i protoni all'interno del nucleo per via della forza nucleare è attrattivo fino a circa  $10^{-15}$  m ma a distanze maggiori prevale la repulsione coulombiana. I nuclei non sono infatti dei posti tranquilli e statici; al loro interno forze molto intense si contrappongono e tutte le reazioni cercano di rendere quanto più stabile possibile l'equilibrio tra protoni e neutroni. In certe configurazioni, infatti, alcuni nuclei trasformano protoni in neutroni o viceversa emettendo contestualmente un elettrone o un positrone ad alta energia, ma ... come è possibile? L'interazione debole è alla base del fenomeno di decadimento radioattivo.



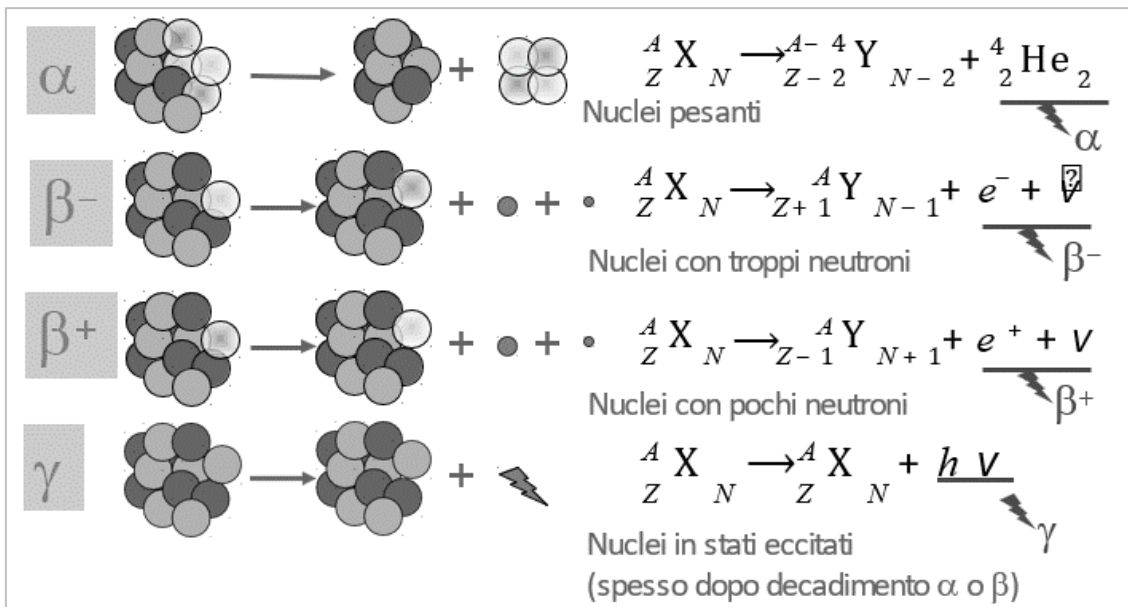
In realtà sono i quark presenti all'interno dei protoni e dei neutroni a trasformarsi sotto l'azione della Forza Nucleare Debole emettendo un Bosone (particella messaggera) ; a sua volta, il bosone intermedio decade in un positrone o elettrone e in un neutrino o antineutrino, a seconda del processo di decadimento  $B^+$  o  $B^-$ .



Pertanto, il bosone intermedio è un vettore intermedio della forza di interazione debole che consente ai nuclei atomici di tendere verso un equilibrio stabile. I nucleoni sono in continuo movimento e si scambiano continuamente energia. A seguito di questi casuali scambi di energia, può accadere che qualche nucleone acquisti **energia cinetica sufficiente** a sfuggire dal nucleo.

Per far questo, bisogna che l'energia acquistata sia sufficiente a vincere la **barriera di potenziale** nucleare generata dall'interazione nucleare forte. I

principali meccanismi con cui un nucleo decade sono i seguenti :



In natura esistono circa 270 nuclei stabili e circa 1000 nuclei instabili

### La probabilità del decadimento radioattivo

Mentre la probabilità di sopravvivenza di un uomo è influenzata dalla sua storia precedente, cioè dall'intervallo di tempo trascorso dalla sua nascita, in ogni istante della vita di un elemento radioattivo la probabilità di sopravvivenza a un decadimento alfa o beta rimane sempre la stessa. In altre parole, per gli esseri viventi "è più probabile

morire vecchi che giovani", mentre un nucleo radioattivo ha la stessa probabilità di morire qualunque sia la sua età (il decadimento spontaneo di un nucleo è un processo puramente casuale).

Si consideri un sistema di particelle di una sostanza radioattiva, e sia  $N_0$  il loro numero all'istante  $t = 0$ .

La probabilità che un atomo decada nell'intervallo di tempo  $dt$  è proporzionale a  $dt$  moltiplicato per una costante  $\lambda$ , detta costante o probabilità di decadimento.  $\lambda$  ha le dimensioni dell'inverso di un tempo, risulta indipendente dall'età dell'atomo ed è caratteristica della sostanza e del tipo di decadimento. Questa legge si applica indifferentemente a ogni tipo di decadimento radioattivo:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , cattura elettronica, fissione spontanea

Nell'istante in cui la particella decade essa scompare e il numero delle particelle radioattive diminuisce di una unità.

Ci chiediamo quante particelle restano dopo un intervallo di tempo  $t$ ?

Osservando che tipicamente il numero di particelle che si considera è decisamente grande (dell'ordine del numero di Avogadro), possiamo approssimare questo numero con una variabile continua e quindi siamo autorizzati a servirci del calcolo differenziale. In formule, se  $N(t)$  è il numero di particelle radioattive all'istante  $t$ , nell'intervallo  $dt$  decadranno, in media,  $\lambda N(t) dt$  particelle che è esattamente la quantità  $dN$  di cui diminuisce il numero di quelle che non sono ancora decadute. Potremo allora scrivere:

$$dN = -\lambda N dt \quad \text{ovvero} \quad dN/N = -\lambda dt$$

o ancora

$$d(\ln N) = -\lambda dt$$

Integrando

$$\ln N - \ln N_0 = -\lambda t, \quad \ln N = \ln N_0 - \lambda t$$

infine

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (1)$$

Questa è la *legge esponenziale del decadimento radioattivo* da cui si ricava che il numero medio delle particelle di una sostanza radioattiva che non sono decadute (sono sopravvissute) al tempo  $t$  ha una distribuzione esponenziale; ovvero tale legge non implica che nell'intervallo di tempo  $dt$  si disintegra sempre esattamente un numero  $-dN = \lambda N dt$  di nuclei, essa dà, invece, solo il numero più probabile dei nuclei che si disintegrano.

La legge esponenziale (1) può essere interpretata come la probabilità di decadimento di una singola particella radioattiva di decadere nell'intervallo di tempo  $dt$  attorno al tempo  $t$ .

Indicando con  $p(t)$  questa distribuzione, tenendo conto che deve essere normalizzata, si ottiene:

$$p(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad \left( \text{infatti } \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 \right) \quad (2)$$

La distribuzione di probabilità (2) è detta esponenziale e descrive molti fenomeni fisici oltre al quello del decadimento radioattivo

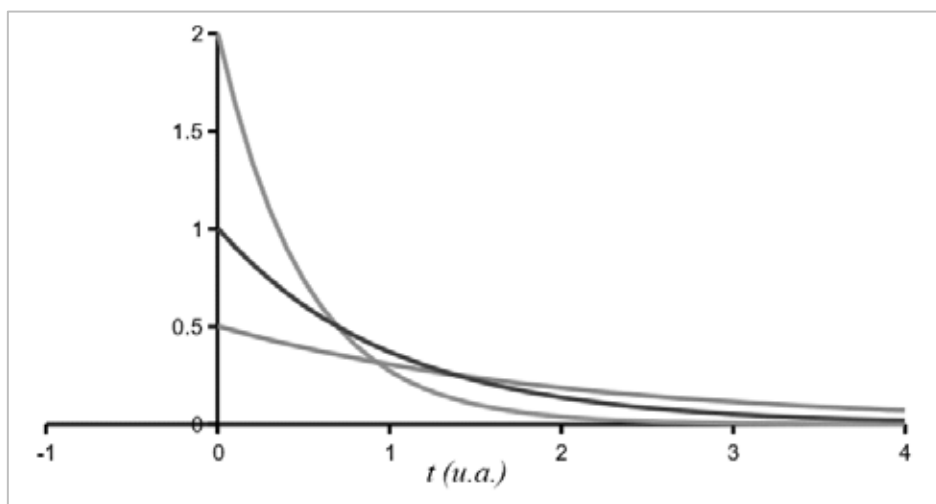
Alle volte in luogo del parametro  $\lambda$  nell'espressione della distribuzione esponenziale si utilizza il suo inverso, generalmente indicato con

$$\tau = 1/\lambda$$

Con il parametro  $\tau$  la (2) assume la forma

$$p(t) = \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}$$

Nella figura seguente è mostrata la *distribuzione esponenziale per tre valori del parametro  $\tau = 2, 1$  e  $0.5$  u.a.*



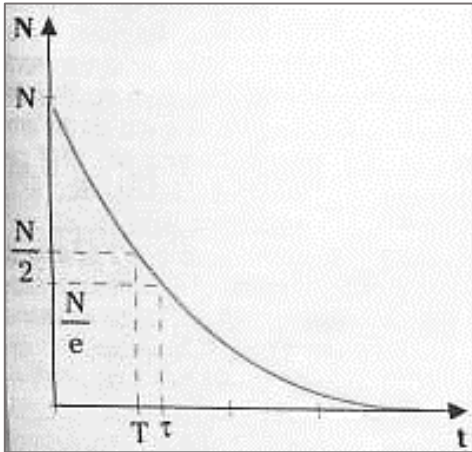
Quando si considera un decadimento radioattivo oppure una particelle subnucleare instabile e in generale tutte le volte che la variabile  $t$  rappresenta un tempo il valore medio viene detto *vita media* (del livello radioattivo, della particella, . . . )

$$\tau = \int_0^{\infty} t p(t) dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

Tale vita media coincide anche con l'intervallo di tempo in cui un dato numero  $N$  di diminuisce di un fattore  $1/e$

Molto più usata in fisica è il **tempo di dimezzamento**  $t_{1/2}$  che è il tempo necessario perché un certo numero  $N_0$  di nuclei si dimezzi ovvero dalla (1) si ricava:

$$t_{1/2} = (\ln 2) / \lambda = (\ln 2) \tau = 0,693 \tau$$



Nella figura al lato abbiamo la rappresentazione del numero  $N$  di atomi non ancora decaduti in funzione del tempo. Sono indicati il periodo di dimezzamento  $T$ , cioè il tempo dopo il quale il numero iniziale di atomi si è ridotto alla metà, e la vita media  $\tau$ , cioè il tempo necessario affinché il numero di atomi dell'isotopo originario si sia ridotto alla frazione  $1/e = 0,368$ , del valore iniziale.

Una grandezza importante nello studio della radioattività è la cosiddetta **attività** che indica il numero di decadimenti di una data sorgente nell'unità di tempo e si misura in numero di decadimenti al secondo (Becquerel).

Molto usato ancora è il Curie (Ci) =  $3,7 \cdot 10^{10}$  Bq circa l'attività di un grammo di  $^{226}\text{Ra}$

Il numero dei decadimenti,  $\Delta N$ , osservati nell'intervallo di tempo  $t, t + \Delta t$  si ottiene dalla (1) come:

$$\Delta N = N(t) - N(t+\Delta t) = N_0 e^{-\lambda t} (1 + e^{-\Delta \lambda t})$$

Per cui l'attività sarà data dalla seguente espressione:

$$A(t) = N_0 \lambda e^{-\lambda t} = \lambda N(t)$$

Ne segue perciò che l'attività di una sorgente diminuisce nel tempo seguendo una legge esponenziale analoga a quella del numero delle particelle non ancora decadute (1).

## **Bibliografia**

- 1) R.P.Feynman , R.B. Leighton M. Sands – La fisica di Feynman – Inter European Editions 1975
- 2) U. Amaldi. Fisica delle Radiazioni. Boringhieri 1975.
- 3) Wilson Buffa Fisica volume 2
- 4) Walker Dalla meccanica alla fisica moderna, volume 3
- 5) Giambattista Richardson Richardson Fisica generale
- 6) [http://materia.fisica.unimi.it/manini/dida/Metodi\\_Fisici\\_Biotecnologie/](http://materia.fisica.unimi.it/manini/dida/Metodi_Fisici_Biotecnologie/)
- 7) [http://www.matefilia.it/arturnet/numero2/boom\\_nucleare/par2\\_3.htm](http://www.matefilia.it/arturnet/numero2/boom_nucleare/par2_3.htm)
- 8) <https://www.andreaminini.org/fisica/interazione-debole>
- 9) <https://userswww.pd.infn.it/~vitturi/Radiazioni>
- 10) [https://www.phys.uniroma1.it/DipWeb/web\\_disp/d4/dispense/PROSPERI-191-2](https://www.phys.uniroma1.it/DipWeb/web_disp/d4/dispense/PROSPERI-191-2)
- 11) [https://moodle2.units.it/pluginfile.php/294926/mod\\_forum/attachment/23645/6a\\_Lez\\_MGV\\_FNSN\\_2020](https://moodle2.units.it/pluginfile.php/294926/mod_forum/attachment/23645/6a_Lez_MGV_FNSN_2020)

# Correlazione e regressione

## Maurizio Maravalle

Quando le componenti di una coppia di variabili ( $X$  e  $Y$ ) sono entrambe quantitative è possibile utilizzare una misura esplicita che permetta di misurare il loro eventuale legame, il coefficiente di correlazione lineare di Pearson. Come si vedrà questo coefficiente misura solo un particolare tipo di legame statistico, quello di tipo lineare, cioè esprimibile mediante una relazione di primo grado tra le grandezze  $X$  e  $Y$ . Tuttavia, il suo studio è preliminare ed importante rispetto a qualsiasi altro tipo di eventuale legame tra grandezze quantitative. La discussione sviluppata mira alla costruzione di uno specifico indicatore statistico; tuttavia, essa deriva in modo “naturale” dal ragionamento comune e dalle deduzioni razionali delle scienze fisiche, economiche, sociali, etc. In tutti i settori, infatti, l’investigazione comincia con la rappresentazione grafica dei risultati ottenuti dalla rilevazione di due variabili per le stesse unità statistiche, allo scopo di avere “un’idea” circa l’eventuale legame che potrebbe sussistere tra tali variabili: ciò ha una funzione descrittiva, inferenziale, interpretativa e previsiva come evidenziano gli esempi seguenti:

- Registrando la velocità  $X$  e lo spazio di frenata  $Y$  di  $n$  autoveicoli sottoposti a collaudo, ci si attende che al crescere della velocità aumenti lo spazio di frenata.
- Nella rilevazione tra redditi  $X$  e consumi  $Y$  di  $n$  famiglie ci si attende una relazione crescente perché l’esperienza comune e la teoria economica concordano sul fatto che, entro certi limiti e con necessari margini di variabilità, i consumi familiari crescano in funzione del reddito disponibile.

Il modello di regressione deve la sua importanza alla semplicità concettuale e ad una formalizzazione rigorosa che consentono, sulla base di assunzioni verificabili, di derivare dai dati osservati (o all’interno di una teoria scientifica coerente) una relazione statistica tra una variabile dipendente  $Y$  ed una o più variabili esplicative ( $X_1, X_2, \dots, X_p$ ). In ambito statistico, la terminologia concernente la regressione è oggi molto diffusa, al punto che modello di regressione è divenuto sinonimo di relazione funzionale tra variabili, ottenuta con metodi statistici e la frase “regredire  $Y$  su ( $X_1, X_2, \dots, X_p$ ).” significa ricercare una relazione tra  $Y$  e le ( $X_1, X_2, \dots, X_p$ ). verificabile su base sperimentale. Tuttavia, trattandosi di un particolare modello statistico, si riserverà la dizione di modello di regressione alla relazione statistica di tipo lineare che, nel seguito, verrà approfondita in modo particolare nel caso di una sola variabile dipendente e di una sola variabile esplicativa. Verranno poi elencate alcune delle sue possibili applicazioni sottolineandone pregi ed eventuali criticità. Infine un esplicito riferimento ad un software *Open Source* che permette di elaborare in maniera estremamente semplice ed efficace queste grandezze.

## PROFILI BIOGRAFICI DEI RELATORI

### 8° Symposium 2022 - Corso di Formazione per Docenti

#### *Dati e Previsioni nell'insegnamento STEM*

**Roccaraso 7/10 aprile 2022**

#### **Profili biografici dei relatori**

**José M. Carcione** è nato a Buenos Aires, dove ha conseguito la laurea “Licenciado in Ciencias Físicas” nel 1978, Nel 1984 ha conseguito la laurea “Dottore in Fisica” presso l'Università di Milano e nel 1987 il dottorato di ricerca in Geofisica presso l'Università di Tel-Aviv. Con altri tre ricercatori dell'Istituto Nazionale di Oceanografia e di Geofisica, per il 2019 è stato inserito nella prestigiosa rivista americana “PLOS Biology”, tra gli scienziati più influenti al mondo. Dal 1981 al 1987 è stato impiegato come geofisico ricercatore presso la “Yacimientos Petrolíferos Fiscales”, l'azienda petrolifera nazionale argentina. Attualmente è affiliato all'Istituto Nazionale di Oceanografia e di Geofisica Sperimentale (OGS) di Trieste. Ha ricevuto la borsa di studio Alexander von Humboldt per un post-dottorato all'Università di Amburgo, dove ha soggiornato dal 1987 al 1989. Nel 2007 ha ricevuto il premio EAGE Anstey a Londra e il premio EAGE Conrad Schlumberger 2017 a Parigi. Carcione ha pubblicato più di 350 articoli su riviste sulla modellazione numerica acustica ed elettromagnetica, con applicazioni all'esplorazione petrolifera e alla geofisica ambientale. È autore del libro “Wave Fields in Real Media” (Elsevier, tre edizioni) e "Seismic Exploration of Hydrocarbons in MHeterogeneous Reservoirs (Elsevier). Carcione è stato membro della commissione GEV04 per la valutazione della ricerca italiana nel campo delle scienze della terra (ANVUR) nel periodo 2004-2014 ed ha coordinato molti progetti finanziati dall'UE e da società private.

#### **Mauro Cerasoli** – [maurocerasoli@gmail.com](mailto:maurocerasoli@gmail.com)

Nato a Roma nel 1945, è vissuto quasi sempre a L'Aquila dove si è diplomato al Liceo Classico, laureato in Matematica e ha prestato servizio militare negli alpini. E' stato Professore Associato di Calcolo delle Probabilità, presso la Facoltà di Scienze M. F. N, insegnando anche Algebra Lineare, Statistica e Matematica Discreta. In altre università ha tenuto corsi di Matematica Generale (Chieti-Pescara), Analisi Matematica (Matera), Probabilità e Statistica (Potenza, Salerno e Cosenza), Processi Stocastici (Roma 3). Ha scritto una dozzina di libri di testo per la scuola media superiore e per l'Università con vari collaboratori. Allievo di Gian Carlo Rota, dopo aver fatto ricerca in Probabilità, Analisi Combinatoria e Didattica della Matematica, con oltre 90 pubblicazioni, negli ultimi anni i suoi interessi sono stati rivolti alla divulgazione della Matematica (come direttore della rivista Ipotesi) e all'organizzazione di convegni e gare matematiche. Ha realizzato il Parco della Matematica e tenuto conferenze, seminari, relazioni e corsi d'aggiornamento per docenti in varie scuole. Su YouTube è possibile vedere nove suoi Racconti di un Matematico.

#### **Sergio Rossano** – [sergiorossano@libero.it](mailto:sergiorossano@libero.it)

è laureato in Fisica nel 1989 ed ha ottenuto il dottorato presso Dipartimento di Scienze della Terra, presso l'Università Federico II di Napoli. Dal 1993 è docente di ruolo di Matematica e Fisica a Napoli. Nel 1994 inizia la sua attività anche come fisico medico e da allora riesce a conciliare la

passione per l'insegnamento con quella per la radioprotezione. Dal 1997 è iscritto nell'elenco degli Esperti Qualificati per la radioprotezione presso il Ministero del Lavoro e delle Politiche Sociali ricevendo numerosi incarichi sia in ambito sanitario che ambientale tra i quali l'Istituto Pascale l'ARPAC , l'ASL NA1 , Trenitalia e l'Agenzia delle Dogane.

**Ruben Sabbadini** - [rusabba@tin.it](mailto:rusabba@tin.it)

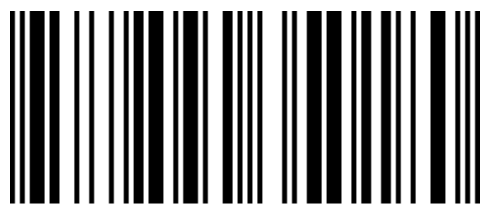
Attualmente è docente di scuola secondaria di II grado. Da quasi venti anni è attivo nella didattica della Matematica, Fisica, Calcolo delle Probabilità e Statistica utilizzando i software di geometria dinamica in particolare Cabri. Negli ultimi anni ha approfondito tematiche di Storia della Scienza ed in particolare la geometria dei greci ellenistici e i suoi riverberi sulla scienza moderna ("La calcolatrice geometrica"). Negli ultimi mesi si è interessato di grafico di funzioni polinomiali di grado qualunque usando solamente la geometria della riga e del compasso e di soluzioni geometriche di equazioni di secondo e terzo grado. Quanto qui si presenta costituisce una rielaborazione del suo testo FisiCabri (Principato 2005)

**Sergio Schiavone** - [sergioschiavone66@gmail.com](mailto:sergioschiavone66@gmail.com)

E' docente di Matematica e Fisica presso il Liceo "E. Pestalozzi" di San Severo (FG) nell'indirizzo Liceo scientifico –opzione Scienze applicate. Laureato in matematica all'Università degli Studi dell'Aquila nel 1991, da molti anni collabora con Casio Italia come formatore a livello nazionale nell'innovazione didattica e metodologica.

## INDICE

<b>Intervalli di confidenza per la media e deviazione standard</b> <i>Sergio Schiavone</i>	<b>Pag 3</b>
<b>Dimostrazione visiva del Teorema del Limite centrale (una scusa per parlare di noi)</b> <i>Ruben Sabbadini</i>	<b>Pag 17</b>
<b>Fenomeni casuali, l'algebra degli eventi e variabili aleatorie speciali</b> <i>Mauro Cerasoli</i>	<b>Pag 27</b>
<b>Introduzione all'Analisi Combinatoria</b> <i>Mauro Cerasoli</i>	<b>Pag 35</b>
<b>Campioni casuali, stimatori e metodo Monte Carlo</b> <i>Mauro Cerasoli</i>	<b>Pag 40</b>
<b>Simulazione deterministica (e gestione) di una pandemia basata su dati statistici</b> <i>Josè M. Carcione</i>	<b>Pag 49</b>
<b>La probabilità di decadimento radioattivo determinata statisticamente</b> <i>Sergio Rossano</i>	<b>Pag 63</b>
<b>Correlazione e regressione</b> <i>Maurizio Maravalle</i>	<b>Pag 70</b>
<b>Profili biografici dei relatori</b>	<b>Pag 71</b>



9788894350180