



ACCADEMIA PICENO APRUTINA DEI VELATI

**CORSO DI FORMAZIONE
“DATI E PREVISIONI
NELL’INSEGNAMENTO STEAM”**

Roccaraso, 7-10 aprile 2022

APAV



**Accademia
Piceno - Aprutina
dei Velati in Teramo**

ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola
(Decreto del 24/07/2009 e Direttiva 170/2016)

Serie Quaderni dell'Apav n. 7 ISBN 978-88-943501-8-0

Dati e previsioni nell'insegnamento STEAM

***Corso di Formazione APAV per il personale docente
della scuola secondaria di II grado***

Roccaraso, 7 - 10 Aprile 2022

Presidente dell'APAV: *Renata Santarossa*

Curatori del volume: *Antonio Maturo, Mario Mandrone*

Copertina: *Fabio Manuppella*



9788894350180



Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo

ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola
(Decreto del 24/07/2009 e Direttiva 170/2016)

Editore: Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo (APAV)

Siti web: www.apav.it; www.eiris.it

La didattica della matematica: dati e previsioni nell’insegnamento STEAM

Mario Innocenzo Mandrone¹

Vice Presidente dell’Accademia Piceno Aprutina dei Velati

Vice Presidente Federazione Nazionale “Mathesis -Sannio-Irpinia” di Benevento

e- mail: almavit@libero.it

“Come espressione della mente umana la matematica riflette la volontà attiva, la ragione contemplativa e il desiderio di perfezione estetica. I suoi elementi fondamentali sono la logica e l’intuizione, l’analisi e la costruzione, la generalità e l’individualità. Tradizioni diverse potranno mettere in evidenza aspetti diversi, ma è soltanto la reazione di queste forze antitetiche e la lotta per la loro sintesi che costituiscono la vita, l’utilità e il valore supremo della scienza matematica.” (R. Courant- H. Robbins – Che cos’è la matematica” Universale Bollati Boringhieri)

Abstract

In questo lavoro viene presentato il corso di formazione per docenti delle scuole di ogni ordine e grado “Dati e previsioni nell’insegnamento STEAM”, organizzato dall’APAV nell’ambito dell’VIII Simposio della Matematica “Bellezza e fascino della matematica”, che si è tenuto a Roccaraso dal 07 al 10 Aprile 2022. Le attività di formazione hanno seguito il particolare approccio educativo alle materie scientifiche, denominato STEAM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics), che consiste nell’integrazione di queste discipline all’interno di una nuova filosofia educativa, basata su applicazioni reali ed autentiche. Questo nuovo approccio, finalizzato al “problem solving” e ad una “didattica laboratoriale”, differenzia lo studio STEAM da quello delle materie scientifiche intese in senso tradizionale. L’attenzione è stata focalizzata sui nuclei fondanti degli argomenti trattati, sui nodi didatticamente problematici e sulle questioni ritenute essenziali che sono alla base del sapere matematico, nonché sulle linee direttrici dello sviluppo storico del pensiero matematico.

Parole Chiave: probabilità, statistica descrittiva, statistica inferenziale, approccio classico, approccio bayesiano, teoria delle decisioni, didattica STEAM, problem solving, cooperative learning, competenze chiave.

¹ Direttore del corso di formazione “Dati e Previsioni nell’insegnamento STEAM”

1. L'attività di formazione

“.....la mente non ha bisogno, come un vaso, di essere riempita, ma, come legna da ardere, ha bisogno solo di una scintilla che la accenda, che vi infonda l'impulso alla ricerca e il desiderio della verità”
(Plutarco, Moralia, De Audiendo)

Nei giorni 7-10 aprile 2022 si è svolto nella cittadina di Roccaraso (AQ) il corso di formazione rivolto ai docenti delle scuole di ogni ordine e grado “Dati e Previsioni nell'insegnamento STEAM”. L'attività, espletata nell'ambito dell'VIII Simposio “Bellezza e fascino della Matematica”, è stata organizzata dall'Accademia Piceno Aprutina dei Velati in Teramo (APAV), ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola ai sensi della Direttiva 170/2016, in collaborazione con l'associazione Mat[^]Nat (AQ) e la Federazione Italiana Mathesis. Hanno contribuito all'iniziativa le associazioni ‘Mathesis "A. Morelli” di Napoli’, ‘Mathesis Abruzzo’ e ‘Gli amici della matematica’ Camerino (MC), con il patrocinio dell'Università del Sannio (Dip. DEMM) e del Comune di Roccaraso (AQ). I lavori sono stati coordinati dal Presidente dell'Accademia prof/ssa Renata Santarossa e dal Direttore del Corso prof. Mario Innocenzo Mandrone.

Il Corso di Formazione risponde ad un unico obiettivo formativo: far acquisire ai docenti una nuova dimensione culturale, quella delle discipline STEAM. Sono proposti nuovi strumenti metodologici, strumenti utili per aiutare i docenti a programmare e progettare. Ciò si identifica nell'acquisizione di una metodologia didattica che sia in grado di attraversare le discipline dell'area scientifico-tecnologica, tenendole insieme e quindi centrando la didattica sull'unità del sapere .

Le discipline Science, Technology, Engineering, and Mathematics, cosiddette STEAM, favoriscono l'acquisizione e lo sviluppo di competenze trasversali funzionali alla crescita personale degli studenti: il problem-solving, il pensiero divergente, la flessibilità, la capacità di lavorare in squadra, l' active learning, l' abilità in ambito digitale, nonché le competenze chiave per l'apprendimento di base.

Gli argomenti affrontati durante il corso sono stati suddivisi in quattro sessioni di lavoro con l'obiettivo di sviluppare, in modo il più possibile completo ed esaustivo i percorsi di insegnamento sul tema in oggetto, alla luce della normativa vigente.

I lavori sono stati, pertanto, strutturati nelle seguenti sessioni:

1. I contenuti essenziali del calcolo delle probabilità e la loro ricaduta didattica;
2. Cenni storici sul Calcolo della Probabilità;
3. Modelli matematici su analisi statistiche;
4. Giochi, paradossi e indagini statistiche

Negli interventi succedutisi durante la prima sessione sono stati illustrati i concetti base della Teoria della Probabilità, alcune tematiche di carattere elementare che sono essenziali per lo studio della “Matematica dell’incerto”, quali i concetti di media, indici di variabilità ed analisi combinatoria. Le medie classiche (aritmetica, aritmetica ponderata, geometrica, armonica), le medie di posizione (mediana, moda) e gli indici di variabilità (scarto semplice, varianza, scarto quadratico medio) sono gli elementi su cui costruire la matematica dell’incerto.

Sono state affrontate anche problematiche riguardanti concetti di logica e probabilità, in vista di un’introduzione efficace alla probabilità soggettiva, con numerosi esempi che dimostrano come l’impostazione soggettiva del Calcolo delle Probabilità è, rispetto ad altre impostazioni, meno dipendente dal calcolo, evidenziando, così, gli aspetti logici del ragionamento probabilistico.

Si è discusso anche dell’uso didattico della distribuzioni binomiale, geometrica e di Poisson con l’ausilio della calcolatrice grafica, ormai entrata a pieno titolo come strumento di lavoro nella scuola italiana. Ampio spazio è stato dedicato alle tecniche di analisi dei dati: vengono esaurientemente trattate l’interpolazione statistica, la correlazione, la regressione e, successivamente, allo studio delle variabili casuali (discrete e continue). Le relazioni presentate sono state corredate da esercitazioni di laboratorio con l’ausilio di strumenti informatici. Tali esercitazioni svolgono un duplice ruolo: da una parte permettono di acquisire la necessaria pratica senza doversi impegnare in calcoli spesso lunghi, dall’altra consentono di simulare situazioni reali senza dover svolgere indagini o esperimenti di notevole complessità.

La seconda sessione è stata dedicata al calcolo della probabilità da un punto di vista storico ed epistemologico, discutendo dell’interesse mostrato, tra la fine dell’Ottocento e l’inizio del Novecento, dai matematici italiani, per le ricerche probabilistiche e per i problemi connessi con la casualità. Difatti, numerosi furono gli articoli pubblicati in quegli anni sul tema in oggetto e sulle esplicite connessioni esistenti tra gli studi di Cesaro e di Bruno de Finetti.

Si è argomentato anche sulle origini del Calcolo della Probabilità evidenziando come l’inizio della teoria della probabilità, chiamata all’epoca la “dottrina della sorte”, avvenne nel XVII secolo in risposta a due classi di problemi legati ai giochi di azzardo e alle assicurazioni. La data di inizio ufficiale del Calcolo delle Probabilità, su cui concorda la maggioranza degli storici, è il 1654, anno in cui si svolse un interessante scambio epistolare tra Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1642) per risolvere due problemi, posti a Pascal da un famoso giocatore d’azzardo il Cavalier de Meré, che sono ormai entrati nella storia del calcolo della probabilità. Lo studio dei fondamenti storici del calcolo delle probabilità, oltre a mettere in evidenza la genesi della disciplina e la sua evoluzione nei secoli, offre l’opportunità di confrontare le diverse concezioni trasmettendo un importante messaggio: “la matematica è la più grande avventura dello spirito umano”.

Molto interessante è risultata la terza sessione, dedicata ai modelli matematici su analisi statistiche. L'elaborazione di un modello matematico richiede, in generale, l'uso di metodi statistici (analisi dei dati) per mettere in evidenza le variabili significative. Oltre alle tecniche usuali, molto importante risulta la "cluster analysis", che permette di suddividere i soggetti in gruppi (clusters) omogenei in base a prefissati parametri.

Si tratta di modelli non deterministici. Pertanto, essi non possono fornire con certezza un risultato ma solo indicare con quale probabilità quel risultato può verificarsi. Tali modelli trovano applicazione in moltissimi settori delle attività umane: produzione aziendale, amministrazione pubblica e privata, agricoltura, medicina, scienze sociale, scienze sperimentali e, in generale, tutti i tipi di ricerche che hanno a che fare con la manipolazione di un'alta quantità di dati. In tutte queste situazioni non si può avere la certezza del risultato, per cui i modelli impiegati sono, per loro natura, affetti da un errore che le metodologie statistiche tendono a rendere il più piccolo possibile. L'obiettivo è stato quello di introdurre un approccio sperimentale alla Matematica e proporre un possibile itinerario didattico per una educazione alla modellizzazione rivolta a tutti gli studenti, indipendentemente dalle scelte future. L'intento è stato quello di delineare:

- a) un insegnamento più aperto alla innovazione tecnologica, fornendo un ampio ventaglio di modelli (per il cui sviluppo è indispensabile il ricorso alle nuove tecnologie);
- b) un insegnamento aperto all'innovazione didattica, proponendo un percorso di educazione alla modellizzazione.

Educare alla modellizzazione comporta un modo diverso di proporre lo studio della matematica, rivolto alla descrizione e comprensione del mondo reale. Punto centrale della proposta è una interazione dinamica tra mondo reale e mondo matematico al fine di evidenziare, anche, che il percorso matematico non si sviluppa nel vuoto, ma nell'interazione con le altre discipline scientifiche, con le altre esperienze culturali, con il contesto sociale, in un gioco di suggerimenti e condizionamenti reciproci.

La sessione dedicata al tema: "Giochi, paradossi e indagini statistiche ha visto la presentazione di alcuni quesiti e problemi legati alla nozione di probabilità condizionata quali: estrazioni da un'urna con o senza reintroduzione, lancio iterato del dado o della moneta e il problema di Monty Hall. Sono stati illustrati, anche, alcuni paradossi ed antinomie della teoria della probabilità tra i quali il paradosso di Simpson, il paradosso di Carlo V e il paradosso delle due bombe, soffermandosi, in modo particolare, sul significato dei termini "paradosso" e "antinomia" e sul problema dei tre arcieri, un problema di calcolo delle probabilità basato sul teorema di Bayes con le sue varie interpretazioni, (più o meno lecite), che ne modificano significativamente lo svolgimento ed il risultato.

2. Qualche considerazione didattica

Non si può certamente tacere, però, che l'insegnamento della matematica nel nostro Paese ha privilegiato, nel passato, procedimenti di tipo logico-deduttivo mirando all'acquisizione di verità certe ed indiscutibili. Ma, accanto ad una matematica del "certo" esiste anche una matematica del "probabile". Esistono, infatti, problemi e fenomeni per i quali non si possono fornire soluzioni "sicure", ma si possono utilizzare delle metodologie che consentono, comunque, di fare delle previsioni e dare una accettabile valutazione dell'incertezza. Oggi che nella matematica si riconosce lo strumento idoneo non solo ad interpretare e risolvere questioni legate a fenomeni naturali, ma anche problemi del mondo economico e della vita sociale in genere, si tende a valorizzare ed a potenziare le metodologie di tipo induttivo accanto alle tradizionali metodologie deduttive. Il metodo induttivo comporta necessariamente "approssimazione e "provvisorietà" dei risultati conseguiti, oltre ad una certa dose di soggettivismo nell'interpretazione, concetti e attitudini questi non solo trascurati nell'insegnamento tradizionale ma, in qualche misura, assolutamente rifiutati.

La situazione descritta ha prodotto l'affermarsi di una metodologia di insegnamento anche nelle discipline scientifiche, in particolar modo della matematica, per schemi piuttosto che per problemi. Occorre, quindi, un capovolgimento del metodo tradizionale e un passaggio deciso all'approccio per problemi. Una strategia potenzialmente efficace per l'innovazione didattica dovrebbe essere basata sul fusionismo e sul lavoro per progetti interdisciplinari. Da un lavoro interdisciplinare è possibile trarre i problemi interessanti e significativi da affrontare, utilizzando anche le capacità offerte dai mezzi informatici (analisi di dati complessi, simulazione). La scelta di problemi significativi in un certo campo applicativo e interessanti per gli strumenti usati nella soluzione, facilita la sedimentazione delle nozioni sia di tipo metodologico che legate all'applicazione.

La Probabilità e la Statistica costituiscono lo strumento principe per affrontare problemi applicativi significativi secondo lo schema galileiano:

- 1) Osservazione;
- 2) Costruzione di un modello interpretativo;
- 3) Calcolo delle previsioni;
- 4) Rilevazione di nuovi dati adeguati;
- 5) Confronto con le previsioni.

L'approccio fusionista è particolarmente opportuno nell'ambito degli strumenti matematici mediante l'utilizzazione sinergica di diversi metodi (geometrici, analitici, grafici) che possano via via risultare utili nella soluzione di un determinato problema mediante l'integrazione di strumenti di tipo diverso.

È opportuno porsi, quindi, in un'ottica diversa e vedere la Probabilità e la Statistica non più come materie specialistiche, ma come modi di pensare che oggi, più che mai, hanno assunto una grande importanza dal momento che il nostro quotidiano è pervaso dalle

loro applicazioni, che ritroviamo in molte discipline ed anche all'interno della stessa matematica. Si tratta, pertanto, di superare quella tendenza all'isolamento che i temi di Probabilità e Statistica hanno rispetto agli altri temi della matematica sia perché temi relativamente nuovi, sia perché meno conosciuti dai docenti. È importante, d'altra parte, presentare i contenuti essenziali di Probabilità e Statistica con tutta la profondità concettuale che necessita loro, anche se non sembra opportuno, a questi livelli, scendere eccessivamente in dettagli tecnici, non disdegnando però, nello stesso tempo, di sottolinearne la portata storica. È altresì evidente che, attraverso un approccio storico, si riesce a diffondere una conoscenza scientifica critica e non tecnicistica e si rivaluta il sapere scientifico come un dato culturale e non solo strumentale.

Oltre a ragioni di carattere culturale, esistono anche ragioni di carattere didattico in quanto l'approccio storico indubbiamente contribuisce a superare ostacoli epistemologici connessi con l'apprendimento, ed a consolidare lo spirito critico e la flessibilità.

In quanto direttore del Corso di Formazione mi preme sottolineare anche che tutti i docenti formatori hanno adottato una modalità di presentazione delle tematiche scelte strettamente funzionale al carattere didattico del corso stesso, non solo relativamente ai contenuti secondo quanto previsto dalle Indicazioni Nazionali, quanto anche al carattere operativo e laboratoriale degli strumenti e delle tecniche didattiche che sono state presentate. Le modalità di presentazione degli argomenti trattati sono state corroborate da brevi esposizioni teoriche introduttive a cui sono seguite esercitazioni guidate e attività laboratoriali da cui si è preso spunto per considerazioni e discussioni sui contenuti proposti e sul loro insegnamento.

3. La complessità sociale e le competenze chiave

“Trascurare la matematica è un'offesa al sapere, poiché chi la ignora non può conoscere le altre scienze o le cose del mondo”. (R. Bacon).

La società nella quale viviamo è in continua trasformazione. Le nuove scoperte e la tecnologia hanno cambiato le nostre abitudini e influenzato il mondo del lavoro, la scuola, il tempo libero, la politica e i rapporti sociali. Al cittadino di oggi sono richieste nuove competenze per poter affrontare la complessità e adattarsi ai futuri cambiamenti. Per effetto della nuova civiltà tecnologica, oggi, è quanto mai sentita l'esigenza di una scuola nuova rinnovata nella didattica, nei metodi, nei contenuti, nell'organizzazione. Siamo tutti consapevoli che occorre ripensare a fondo il modo di essere della scuola e garantire, in uno scenario mutato, anche dal punto di vista demografico, più solide competenze ai nostri giovani. Ciò a partire dalla padronanza della lingua italiana, dalle capacità di argomentare e di risolvere problemi, dall'incontro con il nostro patrimonio storico, artistico e ambientale, dalle sempre più indispensabili competenze digitali.

La didattica della matematica: dati e previsioni nell'insegnamento STEAM

Il sistema scolastico italiano assume come orizzonte di riferimento verso cui tendere, il quadro delle competenze-chiave per l'apprendimento permanente definite dal Parlamento europeo e dal Consiglio dell'Unione europea. Il Parlamento europeo ha individuato otto competenze-chiave (22/05/2018) che rappresentano la cornice e lo sfondo per tutti i saperi.

Esse sono:

1. Competenza alfabetica funzionale
2. Competenza multi-linguistica
3. Competenza matematica e competenza in scienze, tecnologie e ingegneria
4. Competenza digitale
5. Competenza personale, sociale e capacità di imparare ad imparare
6. Competenza in materia di cittadinanza
7. Competenza imprenditoriale

Sono chiamate appunto “competenze-chiave” perché sono delle “meta-competenze”, cioè delineano strumenti culturali, metodologici, relazionali che permettono alle persone di partecipare e incidere sulla realtà. Elementi quali il pensiero critico, la risoluzione di problemi, il lavoro di squadra, le abilità comunicative e negoziali, le abilità analitiche, la creatività e le abilità interculturali sottendono a tutte le competenze chiave. In tale scenario bisogna offrire agli studenti occasioni di apprendimento dei saperi e dei linguaggi culturali di base, promuovere la capacità di elaborare metodi e categorie che siano in grado di fare da guida negli itinerari personali, favorire l'autonomia di pensiero degli studenti, orientando la propria didattica alla costruzione di saperi a partire da concreti bisogni formativi. Nell'insegnamento per competenze, quindi, risulta essere di fondamentale importanza:

1. la centralità dell'alunno e del processo di apprendimento;
2. la flessibilità didattica: metodo induttivo, peer-tutoring, laboratorialità, approccio collaborativo;
3. la valorizzazione dell'esperienza;
4. l'attenzione ai processi metodologici e strategici e alla dimensione relazionale;
5. l'attenzione agli aspetti affettivo-emotivi dell'apprendimento;
6. l'attribuzione di autonomia e responsabilità all'allievo attraverso i compiti significativi.

In particolare, la competenza matematica “contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri. In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e

sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte. Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo." (Indicazioni Nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione).

Imparare a pensare in modo scientifico e matematico significa coltivare specifiche abilità quali la curiosità, l'intuizione, il pensiero logico e spaziale, l'astrazione, il rigore nella ricerca delle cause di un fatto e nella spiegazione delle sue conseguenze, il ragionare in modo analitico e rigoroso, lo sviluppo di un'attitudine alla valutazione critica e una capacità ad elaborare decisioni sulla base di elementi verificati, la capacità di affrontare una qualsiasi situazione problematica valutando costi e benefici delle diverse soluzioni e scegliendo la strategia più adeguata.

In questa prospettiva, la problematizzazione svolge una funzione insostituibile: sollecita gli alunni a individuare problemi, a sollevare domande, a mettere in discussione le conoscenze già elaborate, a trovare appropriate piste d'indagine, a cercare soluzioni originali." Fondamentale si rivela a tale scopo la didattica cooperativa. L'apprendimento cooperativo, che rappresenta niente altro che l'evoluzione scientifica e pedagogica del classico lavoro di gruppo, permette una reale cooperazione attraverso l'interdipendenza positiva (nessuno studente può svolgere il compito da solo; il compito può essere svolto se tutti forniscono il loro contributo), una responsabilità individuale da parte di tutti i componenti attraverso attività diversificate, un clima piacevole e accogliente attraverso attività ripetute nel tempo su singole abilità sociali (l'accoglienza, l'empatia, l'aiuto reciproco, la responsabilità e la gestione delle divergenze...), l'apprendimento di competenze sociali.

La matematica ha, quindi, non solo una sua intrinseca valenza didattica, ma possiede anche una profonda valenza formativa in quanto induce a:

- 1) riflessione critica
- 2) acquisizione di metodo;
- 3) analisi per la ricerca di soluzioni a problemi;
- 4) sintesi e semplificazione delle conclusioni;
- 5) limpidezza di linguaggio;
- 6) facoltà di astrazione;
- 7) deduzione logica.

I contenuti dell'insegnamento sono il prodotto dello stato attuale delle conoscenze scientifiche e l'insieme delle conoscenze socialmente riconosciute. Il sapere trasmesso dall'insegnante è qualcosa che non può essere identificato né con il primo (Sapere = *La cultura*) né con il secondo (Sapere organizzato). Le concezioni che l'alunno ha costruito anche fuori dell'ambito educativo rappresentano un altro sapere (Sapere sociale)

suscettibile di entrare in contraddizione con quello sviluppato dall'Insegnante (Sapere insegnato). Quello che è certo è che l'educazione matematica contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti: di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo e quindi di verifica o smentita.

4 . L'attività per problemi - la tecnica del problem solving

“La matematica alberga nel cuore dell'uomo perché essa traduce quel bisogno di chiarezza, di certezza, di rigore e di coerenza che è tipico di ogni uomo che voglia conoscere”.(G. Melzi -Perché la matematica)

Nel linguaggio comune il termine “problema” viene adoperato spesso in luogo di parole come “difficoltà”, “ostacolo”, “dubbio”, ecc. Per Duncker (1973) il problema sorge quando un essere umano ha una meta e non sa come raggiungerla. Per la psicologia della gestalt (Kanizsa,1973) un problema sorge quando un essere vivente, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un'attività istintiva o attraverso un comportamento appreso. Per Polya (1979) “Avere un problema significa: cercare coscientemente un'azione appropriata per ottenere uno scopo chiaramente concepito ma non immediatamente ottenibile”.

L'attività di risoluzione di problemi è di fondamentale importanza nella didattica della matematica. Ma la risoluzione di problemi è molto di più. È un processo che teoricamente non si conclude mai perché ogni soluzione, insieme ad altri elementi, può determinare una nuova situazione problematica. Dunque “il problem solving” è un atteggiamento mentale o un'attività del pensiero che un individuo mette in atto per raggiungere una condizione desiderata partendo da una condizione data. Più propriamente esso è l'insieme di tutti i metodi e le tecniche di soluzione dei problemi e delle relative strategie da mettere in atto per la loro trattazione. Il problem solving attiva una sequenza di azioni riflessive, orientate verso uno scopo che non è raggiungibile attraverso un procedimento di routine. Le peculiarità del problem solving sono:

1. Affrontare compiti reali e autentici;
2. Risolvere problemi non ordinari, affrontare situazioni non di routine;
3. Adottare strategie di soluzione originali;
4. Saper integrare diverse competenze/conoscenze;
5. Attivare processi cognitivi di livello superiore

I processi implicati nel Problem Solving secondo Polya riguardano tre ambiti:

1. Conoscenze: comprendere la natura del problema individuando le informazioni a disposizione;

2. Strategie:
 - a) definire il problema identificandone gli aspetti critici e le interrelazioni;
 - b) costruire o applicare rappresentazioni di supporto;
 - c) elaborare strategie risolutive.

3. Metacognizione: valutare, giustificare e comunicare ad altri la soluzione

La tecnica del problem solving è spesso caratterizzata dalle seguenti fasi:

1. Analisi quantitativa e qualitativa del problema
2. Soluzione del problema posto
3. Applicazione della soluzione
4. Estensione della soluzione
5. Processo di controllo

Gli aspetti centrali del processo di *problem solving* nelle varie fasi che abbiamo indicato sono di fatto le seguenti:

- 1) acquisizione della capacità di visione d'insieme, per cogliere i collegamenti e le interdipendenze tra le parti o tra i componenti del fenomeno indagato;
- 2) predisposizione di un metodo di analisi, distinguendo tra aspetti e tecniche conosciute e non, ai fini di acquisire nuova conoscenza;
- 3) apprendimento, impiego e determinazione della metodologia di analisi;
- 4) raccolta di informazioni finalizzate alla suddetta metodologia;
- 5) sintesi delle informazioni;
- 6) confronto tra scenari di soluzione, impiegando tecniche creative ed intuitive;
- 7) sperimentazione e valutazione dei risultati.

Il problem solving, quindi, tende alla ricerca di una risposta da dare ad un problema che non è necessariamente di tipo numerico (problemi di determinazione): si può, infatti, cercare un oggetto geometrico (problemi di costruzione) o la dimostrazione di una certa proprietà (problemi di dimostrazione), oppure, semplicemente, risolvere problemi complessi che la vita reale ci pone. Gli approcci alla risoluzione di un problema possono essere di vario tipo (intuitivo, sistematico, algoritmico, parziale per tentativi, per esclusione, ecc.); un alunno può manifestare una propensione per alcune tipologie di approccio piuttosto che per altre e, in relazione alla specificità del problema, un approccio può rivelarsi più idoneo e fruttuoso di un altro. Questa visione multi-approccio a giochi e problemi si contrappone alla vecchia logica dell'algoritmo predefinito, del "come si fa", e favorisce l'attivazione di facoltà e di inclinazioni diverse e complementari tra loro: intuito, comprensione degli schemi, progettualità, analicità, tendenza ad algoritmizzare, ecc.

A livello didattico, quindi, è importante da un lato valorizzare e potenziare gli stili e le propensioni individuali e dall'altro arricchire e diversificare il bagaglio di ciascuno, aiutando gli allievi a mettersi in gioco con le proprie competenze. Risolvere i problemi è

una questione di abilità vera e propria e qualunque abilità può essere acquisita con l'imitazione e l'esercizio; si impara a risolvere i problemi soprattutto ... risolvendoli. La capacità degli studenti di risolvere problemi che si presentano in contesti di vita reale rappresenta un obiettivo educativo strategico.

A tal proposito l'OCSE richiama l'attenzione sul fatto che, nelle applicazioni del Problem Solving, anche in contesti diversi, è necessario tener presente le seguenti tre indicazioni:

1. riconoscere e analizzare schemi ricorrenti, stabilire analogie fra situazioni note e situazioni nuove (affrontare la complessità);
2. percepire le situazioni, discernere fra aspetti rilevanti e non (dimensione percettiva);
3. scegliere i mezzi più appropriati per raggiungere un fine proposto, valutare le alternative offerte, formulare giudizi e agire di conseguenza (dimensione normativa).

Nella strategia risolutiva del "Problem Solving" fondamentale è, quindi, l'utilizzo del modello matematico, dove per modello matematico deve intendersi la rappresentazione formale di idee e conoscenze relative ad un fenomeno. Questa definizione contiene una descrizione completa delle caratteristiche che deve avere un modello matematico e che possono essere raccolte in tre punti fondamentali, non separabili l'uno dall'altro:

1. un modello matematico è la rappresentazione di un fenomeno;
2. tale rappresentazione non è descrittiva, discorsiva o a parole, ma formale, espressa cioè in linguaggio matematico;
3. non esiste una via diretta dalla realtà al modello matematico. In altri termini il fenomeno studiato non determina la sua rappresentazione matematica; ciò che invece si fa è di tradurre in formule, idee e conoscenze relative al fenomeno.

Detto in altri termini, non esiste una via diretta ed unica che porta dalla complessità della realtà alla sua descrizione matematica. Peraltro, tenendo presente che le finalità della scuola sono finalità essenzialmente formative, l'azione educativa e didattica deve mirare soprattutto alla formazione di competenze in termini di conoscenze, di capacità e di atteggiamenti. In tale prospettiva occorre quindi privilegiare una didattica formativa, una didattica che miri, non solo alla trasmissione dei saperi, ma anche e soprattutto ai processi della loro riscoperta, ricostruzione, reinvenzione attraverso i quali si realizza sia l'acquisizione delle conoscenze sia la formazione delle capacità e degli atteggiamenti.

Inoltre, l'utilizzo di nuove tecnologie e nuovi strumenti informatici consente la creazione di situazioni di apprendimento che sviluppano le abilità caratterizzanti i processi propri dell'indagine scientifica inducendo una metodologia di indagine e di scoperta guidata preliminarmente dal docente e successivamente sollecitata dagli alunni stessi. In questo modo, l'alunno, riflettendo su quello che fa, impara a lavorare in modo

critico, a confrontarsi con i compagni e l'eventuale errore contribuisce a sviluppare capacità di inferenza, a riformulare ipotesi errate, a costruire nuova conoscenza da condividere con altri. (Riflessione e consapevolezza).

La dimensione sociale della conoscenza, nell'imparare dagli altri e con gli altri, valorizza, inoltre, i processi di apprendimento e la condivisione dei saperi. (Apprendimento collaborativo).

4. Conclusioni

“L'incertezza è come una margherita che non si finisce mai di sfogliare” (Mario Vargas Llosa)

Lo studio della probabilità e del calcolo delle probabilità è una conquista relativamente recente del pensiero matematico. Si pensi infatti che nell'antichità i matematici greci disconoscevano del tutto questo tipo di calcolo, che durante il medioevo non ci fu alcuna applicazione di rilievo. Solo nel seicento fu sviluppato questo tipo di calcolo, ma associato ad un contesto prevalentemente ludico (riuscita delle scommesse, aspettative di vincita). Nel settecento, il secolo dei lumi, abbiamo l'affermarsi di una mentalità in netto contrasto con le moderne idee sulla probabilità. A tal riguardo basta ricordare che, per i filosofi illuministi appunto, il corso degli eventi era rigidamente fissato, l'ordine della natura veniva considerato perfetto e nessuna azione umana poteva modificarlo. Infatti, il determinismo si affermò soprattutto con le teorie di Newton, che portarono ad una concezione del mondo imperniata sull'ordine e la regolarità.

Per gli illuministi, difatti, era scientifico ciò che si basava sulla certezza, scarsamente scientifico ciò che si basava sulla probabilità. Una prima rara eccezione a questi concetti si ha nella seconda metà del Seicento con i lavori dell'inglese J. Groust che fonda l'“aritmetica politica” la quale porterà agli sviluppi recenti della moderna statistica, uno dei più validi strumenti di conoscenza e di previsione dei fenomeni sociali ed economici. Non si possono dimenticare in questo contesto i “padri fondatori”, ovvero Pascal e Fermat.

Il grande progresso di questa teoria si ha nella seconda metà del XIX secolo per l'uso crescente che ne viene fatto nelle scienze sperimentali ed in molte attività pratiche. Nella società attuale, ricca di profondi cambiamenti che investono tutte le sfere del tessuto sociale, la formazione matematica risulta essere di fondamentale importanza poiché contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti (di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo...).

Inoltre essa tende a sviluppare, in maniera particolare, concetti, metodi e atteggiamenti utili a produrre le capacità di ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà e a formare le abilità necessarie per interpretarla e per intervenire consapevolmente su di essa. La matematica, come è noto, è passata da un livello per

così dire ingenuo a un livello rigoroso, che è stato chiamato dapprima ipotetico-deduttivo e poi assiomatico, indicando con questa espressione l'atteggiamento scientifico che conduce a chiarire con precisione i punti di partenza di ogni teoria, ad indicare chiaramente il significato dei termini che si impiegano, a dedurre rigorosamente. Il passaggio dal livello *ingenuo* al livello rigoroso costituisce sicuramente una delle più affascinanti avventure del pensiero umano. Pertanto, se uno degli obiettivi fondamentali della scuola è quello di educare al pensiero critico, oltre che istruire, è innegabile considerare importanti anche quei fenomeni di tipo probabilistico e statistico e ricordarsi che, accanto ad una matematica del "certo", esiste anche una matematica del "probabile". Esistono, infatti, problemi e fenomeni per i quali non si possono fornire soluzioni "sicure", ma è possibile, d'altra parte, utilizzare delle metodologie che consentono, comunque, di fare delle previsioni e dare un'accettabile valutazione dell'incertezza.

Sapere interpretare i dati statistici che vengono trasmessi quotidianamente attraverso i mass media è diventata una necessità culturale per comprendere fenomeni sociali ed economici a volte complessi che si presentano in tutti i rami delle scienze naturali, sociali, economiche e, in particolare, in quelle riguardanti l'istruzione, il commercio, l'industria, l'agricoltura, il turismo e così via.

Bibliografia

- B. De Finetti - Il saper vedere in matematica, Loescher, 1967
- G. Polya - Come risolvere i problemi di matematica, Feltrinelli, Milano, 1983
- G. Polya - La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi, Feltrinelli, Milano (nuova edizione UTET Università di Torino, 2016)
- Stabler E.- Il pensiero matematico, Universale scientifica Boringhieri, Torino, 1990
- Devlin K- Dove va la matematica, Bollati Boringhieri, Torino, 2000
- Eugeni F. La matematica discreta attraverso i problemi, pp. 84-102, in “Cento Anni di Matematica” Atti del Convegno “Mathesis Centenario 1895-1995”, Palombi Editori, Roma, 1996.
- Gagnè R.- Le condizioni dell'apprendimento, A. Armando, Roma, 1973.
- Kleinmuntz B. - Problem solving. Ricerche, modelli, teoria, A. Armando, Roma, 1976.
- Mialeret G.- L'apprendimento della matematica. Saggio di psicopedagogia, Roma, Armando, 1969.
- Pellerey M. -Apprendere a pensare matematicamente: Resnick L.B. & Ford, W.W., Psicologia della matematica e apprendimento scolastico, Sei, Torino, 1991
- Popper K.- Logica della scoperta scientifica, Einaudi editore, 1970
- Scozzafava R.- Introduzione alla probabilità, Zanichelli, Bologna, 2010
- Cerasoli M.- Elementi di Probabilità, Explora Edizioni, L'Aquila, 2022
- Mandrone M.I.-Probabilità e Statistica per gli esami di Stato- V.S. Grafica, Pietrelcina, 2018

Il “Gioco del calcio” per l’educazione all’incerto: retta di regressione e minimi quadrati

Ferdinando Casolaro¹

Mario Cristiani²

¹Direttore di Redazione “Periodico di Matematica”
ferdinando.casolaro@gmail.com

²Dottorando in Economia Aziendale, Università di Roma Tor Vergata
mariocristiani31@gmail.com

Sunto

Si presenta uno studio di “Teoria delle decisioni” sulla previsione dei risultati ai campionati del mondo di calcio 2014. L’obiettivo è quello di far vedere come un’analisi dei dati abbastanza profonda conduce a risultati molto vicini a quelli che si verificheranno realmente all’atto del verificarsi dell’evento.

Parole chiave: Prevedere, Decidere, regression, minimi quadrati

1. Introduzione

Il gioco del Calcio rappresenta oggi uno dei fenomeni sociali più seguiti ad ogni livello (F. Casolaro, 2014). Le analisi statistiche ci dicono che “fare il calciatore” è la prima aspirazione della maggioranza dei ragazzi!

Unitamente a questa aspirazione si sta diffondendo, anche tra i più giovani, una forte passione per il giornalismo sportivo in ragione della quale i ragazzi sono portati a considerare le vicende e gli eventi con un occhio molto più critico. In particolare, negli anni in cui si svolgono le finali dei Campionati del Mondo, le vicende vengono seguite anche da coloro che non sono appassionati di calcio in quanto, attraverso i media, la manifestazione entra in tutte le case.

Campionato del mondo 2014: l’Italia, contro qualsiasi previsione, esce al primo turno con 3 punti! È stato un caso o era errata l’analisi statistica nelle previsioni?

Nei vari commenti di tecnici, esperti, giornalisti ed opinionisti, sulla *débacle* della nostra Nazionale nell’immediato, si lesse esclusivamente delle responsabilità del CT Prandelli a cui vennero imputati gravi errori nell’impostazione tattica (F. Casolaro 2014).

È doveroso però interrogarsi su quali fossero le risorse tecniche a disposizione di Prandelli in un Campionato (quello 2013/2014) in cui il 68% dei titolari erano giocatori stranieri e la maggior parte del rimanente 32% militava nelle squadre di medio-bassa classifica.

Se non consideriamo i sei titolari della Juventus (Buffon, Barzagli, Bonucci, Chiellini, Pirlo e Marchisio, arrivati a quel Mondiale logorati dalle fatiche di tre competizioni - Campionato, Champion's League, Coppa Italia - che li impegnarono fino ad Aprile 2014), gli altri 17 convocati giocavano quasi tutti nelle squadre di metà classifica, ed erano quindi ritenuti, all'epoca dei fatti, non idonei a partecipare alle grandi competizioni internazionali per squadre di club.

Di seguito riportiamo l'indicazione delle squadre di club nelle quali militavano gli altri 17 componenti della rosa azzurra presentatisi al Mondiale brasiliano:

- La Roma, squadra seconda classificata nel campionato italiano 2013/2014, prestò il solo De Rossi, in quanto 8/11 dei titolari erano di nazionalità straniera.
- Il Napoli, che in quel campionato (nel quale si classificò al terzo posto) scendeva in campo con una rosa titolare composta quasi esclusivamente da giocatori stranieri, prestò il solo Insigne;
- La Fiorentina, quarta classificata aveva solo tre titolari italiani su undici. Di questi il solo Aquilani fece parte della spedizione azzurra.
- L'Inter, quinta classificata, non aveva giocatori italiani titolari.

Dalla sesta classificata in poi (quindi a metà classifica) troviamo gli altri giocatori.

È lecito domandarsi, a questo punto, se un altro allenatore avrebbe potuto fare di più. Per rispondere alla domanda ci avvarremo di un modello di regressione lineare semplice (Casolaro Cristiani, 2019).

2. La variabile indipendente x: motivazione, abilità ed esperienza dei calciatori

La Coppa del Mondo è la competizione che ogni bambino, ogni uomo amante del calcio vorrebbe giocare ed è, al contempo, il grande obiettivo degli strapagati professionisti dell'universo calcistico.

Il Mondiale è quindi una manifestazione nella quale le motivazioni rivestono un peso notevolissimo e sono in grado di aggregarsi in un sistema olistico, dando vita a risultati a volte straordinari che sconfiggono le previsioni dei migliori esperti.

Quello che intendiamo fare, con il nostro modello, è fornire delle linee guida frutto di ragionamenti pragmatici. Ragionamenti totalmente estranei alla magia di 11 uomini che, lanciando il cuore oltre l'ostacolo, superano i loro limiti. Noi ci terremo entro quei limiti con una eccezione che chiariremo più avanti.

Il risultato raggiunto da una Nazionale in un Mondiale dipende ovviamente dall'abilità dei calciatori che compongono la rosa.

Il Gioco del calcio per l'educazione all'incerto: retta di regressione e minimi quadrati

Un buon indicatore delle capacità dei calciatori può essere il numero delle presenze collezionate dagli stessi nelle manifestazioni internazionali per club (Champion's League, Europa League, Copa Libertadores etc.).

Maggiori saranno le presenze in queste competizioni, maggiori saranno presumibilmente le abilità dei giocatori e l'abitudine degli stessi ad affrontare competizioni di alto livello come un Mondiale.

Avvalendoci dei dati forniti dal sito "Soccerway", abbiamo individuato, per ogni calciatore delle diverse Nazionali, il numero delle presenze nelle maggiori competizioni internazionali per club nelle 4 stagioni calcistiche che hanno preceduto il Mondiale in Brasile (2014):

- Champion's League (CHL) ed Europa League (EUL) per l'Europa;
- Copa Libertadores (COL) e Coppa Nazionale Sudamericana (CNS) per il Sud-America;
- Caf Champion's League (CCL) per l'Africa;
- AFC Champion's League (ACL) per l'Asia;
- Concacaf Champion's League (CCC) per il Nord e Centro America.

Le presenze, però, devono essere opportunamente pesate: una presenza nella Coppa Campioni Europea dovrà valere di più di una presenza nell'Europa League o nella Concacaf (Coppa Campioni nord e centro americana). Questo perché a seconda delle manifestazioni cambia il valore delle squadre partecipanti.

Di seguito riportiamo le nostre valutazioni concernenti l'importanza delle manifestazioni ed il loro peso nel modello da noi costruito:

- Una presenza nella Champion's League (CHL) varrà 1 punto;
- Una presenza nell'Europa League (EUL) varrà 0,7 punti;
- La Copa Libertadores (COL) è la Champion's League Sudamericana. Una presenza in questa competizione varrà 0.8 punti (0.2 in meno della Champion's League, in quanto i più forti calciatori sudamericani giocano in Europa);
- La Coppa nazionale Sudamericana (CNS) è l'equivalente dell' Europa League in Sudamerica; una presenza in questa coppa varrà 0.56 punti;
- La AFC Champion's League (ACL) è la maggiore competizione internazionale per club del continente asiatico. Una presenza in questa manifestazione varrà 0.3 punti. Nell'edizione del 2013, a trionfare nella manifestazione fu il Guangzhou Evergrande, allora allenato da un personaggio storico del nostro calcio: l'ex CT Marcello Lippi che nel 2006 vinse la Coppa del Mondo con l'Italia;
- La Concacaf Champion's League (CCC) è la Coppa dei Campioni per i club del Centro e Nord America. La CAF Champion's League (CCL) è la Coppa dei Campioni Africana. Una presenza in queste competizioni varrà 0.3 punti.

Con i pesi assegnati strutturiamo geometricamente il nostro modello.

Immaginiamo di avere, in una Nazionale, giocatori con un totale di presenze nelle su elencate competizioni così ripartito: 40 Champion's League (peso 1), 50 Europa League (peso 0,7), 30 Copa Libertadores (peso 0,8).

Step1 -Moltiplichiamo le presenze per i pesi ed effettuiamo la somma dei prodotti $40 \times 1 + 50 \times 0,7 + 30 \times 0,8 = 99$.

Step2 –Dividiamo il valore della somma (99) per 23 (numero dei giocatori di ciascuna Nazionale): $99/23 = 4,3$.

Quello che abbiamo ottenuto è la media delle presenze pesate dei giocatori della Nazionale nelle maggiori manifestazioni internazionali per club. Nel nostro modello essa indica la forza della squadra e da essa viene fatto dipendere il risultato raggiunto dalla Nazionale nel Mondiale. È la variabile indipendente ed è indicata con la lettera x (M. Squillante et. al 2016).

3. La variabile dipendente y: il punteggio ottenuto dalle Nazionali nel Mondiale

Ad ogni squadra è assegnato un punteggio sulla base dei risultati ottenuti nella competizione:

- 3 punti per la vittoria nei tempi regolamentari;
- 1 punto per il pareggio nei tempi regolamentari;
- 1 punto per la vittoria nei tempi supplementari;
- 0,3 punti per il pareggio nei tempi supplementari;
- 0 per la sconfitta;
- 0,2 punti per la vittoria ai rigori.

I punti sono ridotti ad un terzo per la finale 3° /4° posto.

Così, ad una Nazionale che ha passato il girone con 6 punti ed è stata eliminata agli ottavi di finale ai calci di rigore sarà assegnato un punteggio calcolato nel modo seguente:

$6 + 1$ (pareggio nei tempi regolamentari degli ottavi) $+ 0,3$ (pareggio nei tempi supplementari degli ottavi) $= 7,3$.

Questo punteggio è la nostra variabile dipendente e sarà indicata con la lettera y.

Riassumiamo brevemente il percorso delle 30 Nazionali nel Mondiale 2014:

- Olanda: Supera il girone con 9 punti. Supera gli ottavi di finale ai tempi regolamentari. Vince i quarti di finale ai calci di rigore. Viene eliminata alle semifinali ai calci di rigore. Vince la finale per il terzo/quarto posto ai tempi regolamentari;
- Belgio: Supera il girone con 9 punti. Supera gli ottavi di finale ai tempi supplementari. Viene eliminato ai quarti nei tempi regolamentari;
- Svizzera: Supera il girone con 6 punti. Viene eliminato agli ottavi nei tempi supplementari;
- Germania: Supera il girone con 7 punti. Supera gli ottavi ai tempi supplementari. Supera i quarti nei tempi regolamentari. Vince le semifinali nei tempi regolamentari. Vince la finale nei tempi supplementari;

Il Gioco del calcio per l'educazione all'incerto: retta di regressione e minimi quadrati

- Russia: Viene eliminata nel girone con 2 punti;
- Bosnia: Viene eliminata nel girone con 3 punti;
- Inghilterra: Viene eliminata nel girone con 1 punto;
- Grecia: Supera il girone con 4 punti. Viene eliminata agli ottavi ai calci di rigore;
- Croazia: Viene eliminata nel girone, con 3 punti;
- Portogallo: Viene eliminato nel girone con 4 punti;
- Francia: Supera il girone con 7 punti. Vince gli ottavi nei tempi regolamentari. Viene eliminata nei quarti nei tempi regolamentari;
- Brasile: Supera il girone con 7 punti. Vince gli ottavi ai calci di rigore. Supera i quarti nei tempi regolamentari. Viene eliminato alle semifinali nei tempi regolamentari. Perde la finale terzo/quarto posto nei tempi regolamentari;
- Argentina: Supera il girone con 9 punti. Supera gli ottavi ai tempi supplementari. Vince i quarti nei tempi regolamentari. Supera le semifinali ai calci di rigore. Perde la finale ai tempi supplementari;
- Colombia: Supera il girone con 9 punti. Vince gli ottavi nei tempi regolamentari. Viene eliminata ai quarti nei tempi regolamentari;
- Cile: Supera il girone con 6 punti. Viene eliminato agli ottavi ai calci di rigore;
- Ecuador: Viene eliminato nel girone con 4 punti;
- Messico: Supera il girone con 7 punti. Viene eliminato agli ottavi nei tempi regolamentari;
- Uruguay: Supera il girone con 6 punti. Viene eliminato agli ottavi nei tempi regolamentari;
- Honduras: Viene eliminato nel girone con 0 punti;
- Stati Uniti: Superano il girone con 4 punti. Vengono eliminati agli ottavi nei tempi supplementari;
- Costa Rica: Supera il girone con 7 punti. Vince gli ottavi ai calci di rigore. Viene eliminata nei quarti ai calci di rigore;
- Costa D'avorio: Viene eliminata nel girone, con 3 punti;
- Nigeria: Supera il girone con 4 punti. Viene eliminata agli ottavi nei tempi regolamentari;
- Camerun: Viene eliminato nel girone con 0 punti;
- Algeria: Supera il girone, con 4 punti. Viene eliminata agli ottavi nei tempi supplementari;
- Ghana: Viene eliminato nel girone con 1 punto;
- Giappone: Viene eliminato nel girone con 1 punto;
- Iran: Viene eliminato nel girone con 1 punto;
- Corea del Sud: Viene eliminata nel girone con 1 punto;
- Australia: Viene eliminato nel girone con 0 punti.

4. Dall'insieme delle osservazioni alla retta di regressione

Nella Tabella 1 vengono riportati, per ognuna delle 30 Nazionali, il punteggio assegnato con la modalità che abbiamo visto in precedenza sulla base del percorso della squadra nella manifestazione, le presenze dei giocatori nelle maggiori competizioni internazionali per club e la media per giocatore delle presenze pesate:

| National Team | Score (y) | Attendance | Average Attendance (x) |
|---------------|-----------|---|------------------------|
| OLANDA | 15,8 | CHL=167; EUL=199 | 13,32 |
| BELGIO | 11 | CHL=255; EUL=224 | 17,9 |
| SVIZZERA | 7 | CHL=184; EUL=166 | 13,05 |
| GERMANIA | 17 | CHL=546; EUL=105 | 26,93 |
| RUSSIA | 2 | CHL=169; EUL=207 | 13,65 |
| BOSNIA | 3 | CHL=61; EUL=141; ACL=7 | 7,03 |
| INGHILTERRA | 1 | CHL=226; EUL=94 | 12,7 |
| GRECIA | 5,3 | CHL=162; EUL=133 | 11,09 |
| CROAZIA | 3 | CHL=273; EUL=159 | 16,7 |
| PORTOGALLO | 4 | CHL=282; EUL=250 | 19,87 |
| FRANCIA | 10 | CHL=316; EUL=110 | 17,087 |
| BRASILE | 11,5 | CHL = 370; EUL=96; COL=162; CNS = 13 | 24,96 |
| ARGENTINA | 16,5 | CHL = 260; EUL = 131; COL = 96; CNS = 18; CCC = 24 | 19,38 |
| COLOMBIA | 12 | CHL= 74; EUL= 115; COL= 111; CNS=41 | 11,57 |
| CILE | 7,3 | CHL= 71; EUL= 90; COL =151; CNS= 155 | 14,85 |
| ECUADOR | 4 | CHL = 36; EUL = 31; COL = 206; CNS = 149; ACL =14; CCC=54 | 14,19 |
| MESSICO | 7 | CHL =37; EUL = 38; COL = 77; CCC = 111 | 6,89 |
| URUGUAY | 6 | CHL = 117; EUL = 189; COL = 41; CNS = 17; ACL = 6 | 12,76 |

| | | | |
|-------------|-----|---|-------|
| HONDURAS | 0 | CHL =36; EUL = 18; CCC = 112 | 3,57 |
| STATI UNITI | 5 | CHL = 19; EUL = 80; CCC = 72 | 4,2 |
| COSTA RICA | 9,8 | CHL = 39; EUL = 82; CCC = 88 | 5,34 |
| C. D'AVORIO | 3 | CHL = 104; EUL = 147; CCL = 6 | 9,07 |
| NIGERIA | 4 | CHL = 81; EUL = 53; CCL = 5 | 5,2 |
| CAMERUN | 0 | CHL= 176; EUL =97; CCL = 8 | 10,71 |
| ALGERIA | 5 | CHL 38; EUL = 62; CCL = 13; ACL = 21 | 3,98 |
| GHANA | 1 | CHL = 138; EUL =81; CCL=3; ACL=12 | 8,66 |
| GIAPPONE | 1 | CHL = 58; EUL = 72; ACL = 98 | 5,99 |
| IRAN | 1 | ACL = 217; CCC = 1; EUL =7 | 3,056 |
| SUD COREA | 1 | CHL = 24; EUL = 19; ACL = 167 | 3,8 |
| AUSTRALIA | 0 | CHL = 11; EUL = 13; ACL = 97 | 2,14 |

Tabella 1 Fonte: Elaborazione propria

4.1 Descrizione della tabella

Dalle osservazioni abbiamo eliminato la Spagna presentatasi in Brasile da campione in carica. Dal Mondiale del 2002 a quello del 2014 tre volte su quattro la squadra campione in carica è uscita al primo turno: la Francia in Corea e Giappone (2002), l'Italia in Sudafrica (2010), e proprio la Spagna nel 2014. A queste bisogna aggiungere la Germania presentatasi al Mondiale disputato in Russia nel 2018 da Campione del Mondo ed eliminata ai gironi.

L'andamento della variabile motivazionale è quindi, in questo caso e limitatamente a questo aspetto, facilmente prevedibile e lo è ancora di più per il fenomeno "Spagna" che oltre al Mondiale del 2010 aveva conquistato gli Europei del 2008 e del 2012.

Riportato in un sistema di assi cartesiani l'insieme delle osservazioni assume la forma di una nuvola di punti che prende il nome di diagramma di dispersione (figura 1).

Ogni punto rappresenta una delle 30 Nazionali: l'ascissa è la media per giocatore delle presenze pesate, l'ordinata è il punteggio ottenuto.

Il diagramma è una fotografia di quanto è realmente accaduto:

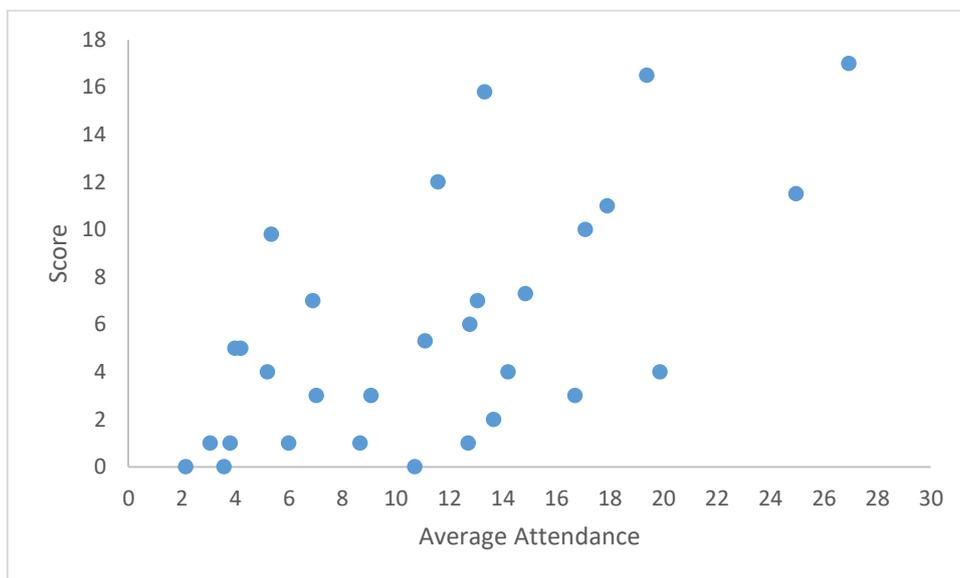


Figura 1: Diagramma di dispersione Fonte: Elaborazione propria

La nostra retta di regressione ha equazione: $y = 0,28 + 0,48x$

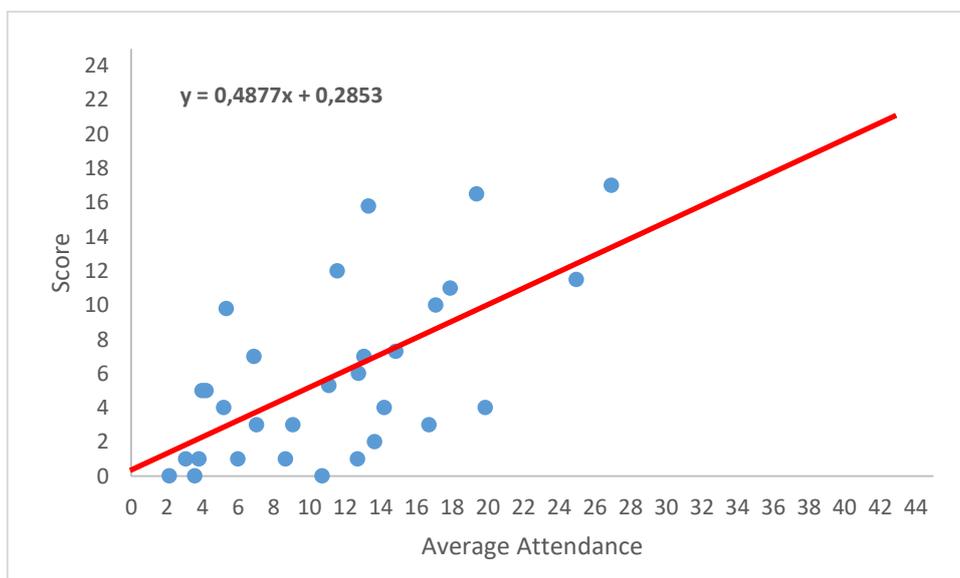


Figura 2: La retta di regressione Fonte: Elaborazione propria

Il Gioco del calcio per l'educazione all'incerto: retta di regressione e minimi quadrati

La retta di regressione (figura 2) è quella che meglio interpola i punti del diagramma di dispersione. È quella, cioè, che minimizza la somma dei quadrati delle distanze dei punti dalla retta (F. Casolaro, A. Fontana 2018).

Il punteggio massimo raggiungibile da una Nazionale è 21 (vittoria di tutte le partite nei tempi regolamentari). Il punteggio sarà ottenuto, secondo la nostra retta, da una squadra con una x (media per giocatore delle presenze pesate) di 42,5. Con una x uguale o superiore a 42,5 il punteggio ottenuto sarà sempre 21. La x non potrà mai assumere valori negativi. Il coefficiente angolare di 0,49 indica che per un aumento della media delle presenze di 1 si ha una crescita del punteggio di 0,5. L'intercetta verticale di 0,28 indica che una Nazionale con la media delle presenze nelle maggiori manifestazioni per Club di 0 nel nostro modello raggiunge un punteggio di 0,28 punti.

A questo punto, inserendo nell'equazione della retta il valore della x della nazionale italiana (13,65), calcoliamo il punteggio che secondo il nostro modello essa avrebbe dovuto ottenere (figura 3):

$$y = 0,28 + (0,48)(13,65) \Rightarrow y = 6,94$$

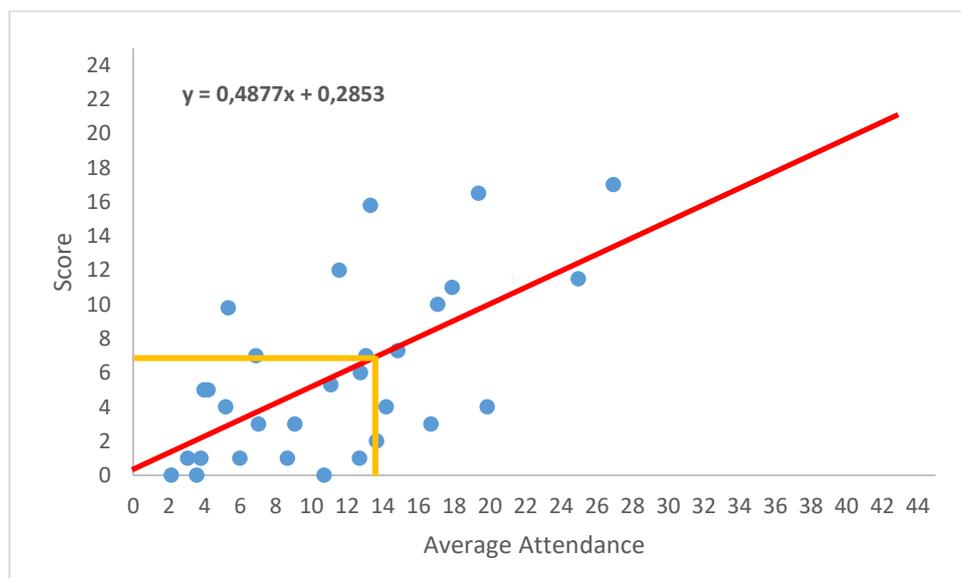


Figura 3: Il caso dell'Italia Fonte: Elaborazione propria

Quindi l'Italia avrebbe dovuto ottenere un punteggio di 7 (arrotondato per eccesso). A questo punteggio si associano combinazioni di risultati diversi, sicuramente migliori di quelli ottenuti dalla nostra Nazionale, ma che in nessun caso vanno al di là di un complicato approdo ai quarti di finale.

Solo in una circostanza gli Azzurri avrebbero potuto superare i quarti, ma questo caso risulta essere talmente fortunoso e rocambolesco che riteniamo giusto, considerato anche l'arrotondamento per eccesso, escluderlo.

Può essere utile considerare il punteggio raggiunto dalle Nazionali che avevano una media delle presenze simili a quella dell'Italia.

Accanto all'Olanda ($x=13,32$) che raggiunse un risultato davvero ragguardevole venendo eliminata in semifinale ai calci di rigore per poi battere il Brasile nella finale per il 3°/4° posto ($y=15,8$) e alla Russia ($x=13,65$) che invece venne sorprendentemente eliminata ai gironi con 2 punti ($y=2$) troviamo la Svizzera ($x=13,05$) che superò i gironi con 7 punti per poi essere eliminata agli ottava dall'Argentina nei tempi regolamentari ($y=7$). Lo score della Svizzera è perfettamente uguale a quello che, nel nostro modello, avrebbe dovuto raggiungere l'Italia e volendo fare una media aritmetica degli score delle tre Nazionali il punteggio che si ottiene è 8,2, quindi molto vicino al 7 da noi stimato per la Nazionale di Prandelli.

La scelta della retta come funzione di riferimento è del tutto discrezionale.

La retta è il modello più semplice ed intuitivo ed è, soprattutto per questo, il più utilizzato nelle applicazioni didattiche. Non è assolutamente detto, però, che sia una relazione di tipo lineare quella meglio in grado di approssimare il legame tra le variabili prese in considerazione nella nostra analisi (A. Maturo, R.M. Contini 2010).

Il coefficiente di determinazione:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 0,4$$

indica, secondo la nostra opinione, un buon adattamento della funzione lineare ai dati osservati.

5. Conclusioni

Come si può constatare, la previsione formulata negli articoli pubblicati prima della manifestazione si discosta solo in maniera non significativa dal risultato effettivamente raggiunto.

Con riferimento all'aspetto motivazionale non è superfluo sottolineare come, in continuità con i risultati dei Campionati del Mondo dal 2002 al 2014 dove in ben tre occasioni su quattro la squadra campione in carica era stata eliminata al primo turno, anche nella manifestazione del 2018, successiva a quella presa in considerazione nell'analisi, la Germania (squadra vincitrice nel 2014 e data tra le favorite anche nei Mondiali in Russia) è stata eliminata ai gironi.

Come chiarito nel lavoro, il pragmatismo del nostro modello limita la considerazione delle motivazioni a questo unico aspetto che risulta però fondamentale nel raggiungimento del nostro risultato statistico; pertanto riteniamo opportuno aggiungere anche motivazioni di carattere sociologico tra i pre-requisiti delle analisi decisionali. (F. Casolaro, L. Paladino 2012).

E proprio gli aspetti sociali e psicologici sono risultati fondamentali nella presentazione del modello a numerosi convegni aventi ad oggetto l'insegnamento della Matematica. Anche i risvolti retorici che sempre vengono individuati negli eventi sportivi sono

risultati fondamentali nell'attirare l'attenzione di studenti e docenti.

Mentre gli studenti sono rimasti affascinati dalla possibilità di usare la Matematica per l'analisi di fenomeni interessanti e parti integranti delle loro passioni, i professori hanno intravisto nello studio la possibilità di presentare argomenti anche complessi attraverso strumenti più coinvolgenti nella loro semplicità.

Miglioramenti del modello sono realizzabili mediante la considerazione di altre variabili indipendenti sulla base delle quali determinare il valore del punteggio delle Nazionali. Questo potrebbe essere fatto dipendere ad esempio non solo dalla media delle presenze dei giocatori nelle manifestazioni internazionali per Club, ma anche dai risultati raggiunti dalle Nazionali nelle più recenti manifestazioni (potrebbero essere considerato il Mondiale precedente o l'ultima coppa Continentale alla quale il team ha preso parte). Si andrebbe però così a finire nel campo della regressione multi-variata con tutte le complicazioni correlate ad uno studio di questo tipo. Avendo il modello finalità prettamente didattiche e non essendo orientato all'elaborazione di una statistica con finalità previsionali, miglioramenti di questo tipo dovrebbero essere apportati solo successivamente ed a seguito di un'attività di discussione che coinvolga attivamente gli studenti i quali, una volta appresi i rudimenti della regressione bivariata, potrebbero poi successivamente approcciarsi all'analisi multivariata.

Bibliografia

Casolaro F. (2004) Dispensa del corso di Statistica tenuto alla Facoltà di Scienze (Laurea in Scienze Ambientali) dell'Università del Sannio nel periodo 2004-2007.

Casolaro F., Paladino L. (2012), “Didactics of Statistics in Sociology”. First International Conference on Recent Trends in Social Sciences: Qualitative Theories and Quantitative Models (RTSS) - Iași (Romania), 2012. Pagg. 228-241.

Giambò A., Giambò R. (2009), *Matematica per la Scuola Superiore*, Ed. Armando Scuola.

Casolaro F. (2018), Un approccio didattico all'insegnamento della Statistica, Scuola Estiva per docenti della Scuola secondaria “La matematica dell'incerto”. Castellammare di Stabia luglio 2018, pagine 73-84.

Casolaro F. Cristiani M., (2019), *Statistics for a Football Coach Scienze&Phylosophy*, vol. VII, jube 2019, pagine 109-120.

Casolaro F. Cristiani M. (2020) *The Volkswagen Case: Analysis of a “Scandalous. Decision Making in Social Sciences: Between Traditions and Innovations, 2020.”* Growth, pagine 503-513.

Le origini del Calcolo delle probabilità: Pierre de Fermat e Blaise Pascal

Nicla Palladino¹

¹Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia.
nicla.palladino@unipg.it

Sunto

Il tardivo costituirsi del “calcolo delle probabilità” è tanto più singolare in quanto alcuni concetti che poi entreranno a far parte di questa disciplina trovano dei precedenti già nell’antichità. La data di inizio ufficiale del Calcolo delle Probabilità su cui concorda la maggioranza degli storici è il 1654, anno in cui si svolge un interessante scambio epistolare tra Fermat e Pascal.

Keywords: Fermat, Pascal, lettere, origini probabilità

1. Le origini

Il tardivo costituirsi del calcolo delle probabilità è tanto più singolare in quanto alcuni concetti che poi entreranno a far parte di questa disciplina (media, teoria degli errori, ecc.) trovarono dei precedenti già nell'antichità, specialmente in campo artistico, giuridico, astronomico.

L'intuizione che negli eventi governati dal caso, come ad esempio nei giochi d'azzardo, fosse soggiacente una legge matematica sembra comparire per la prima volta in un commento del 1477 alla "Divina Commedia" relativo ad una terzina del Purgatorio:

"Quando si parte il gioco de la zara, colui che perde si riman dolente repetendo le volte, e tristo impara..." (Quando si conclude il gioco della zara [con i giocatori che abbandonano il tavolo da gioco], colui che perde resta amareggiato, ripetendo le giocate [i tiri dei dadi], e, deluso, impara [per poter vincere in futuro]). In Arabo, zar significa dado; il gioco consiste nel puntare sulla somma dei numeri ottenuti come risultato del lancio di tre dadi.

Il commentatore di Dante, Benvenuto d'Imola, analizza le possibili uscite della somma 3 e della somma 4 con tre dadi ed afferma che queste somme possono entrambe venire fuori in un solo modo. Pare infatti che non si potesse puntare sui risultati 3, 4, 17, 18 che nascevano in un unico modo (sarebbe stato troppo il tempo d'attesa): $3 = 1+1+1$; $4 = 1+1+2$; $17 = 5+6+6$; $18 = 6+6+6$ (anche se i casi favorevoli alle uscite sono diversi: uno per 3 e 18, 3 per 4 e 17).

Di fronte a diverse affermazioni si può parlare di alcune più probabili e di altre meno probabili, a seconda della loro plausibilità, o possibilità. Il termine probabilità viene quindi usato come misura del grado di plausibilità di una affermazione, ovvero del "verificarsi di un certo evento".

L'origine della parola probabilità, dal latino *probabilis*, da *probare* (provare), sta ad indicare ciò che è "degnò di approvazione", "verosimile", "accettabile", "credibile", "ammissibile in base ad argomenti abbastanza sicuri". Essa contrasta con "probatus" (provato) riferito ad affermazioni per le quali è accertato il contenuto di verità (vero o falso). Nel mondo antico, il concetto di probabilità era essenzialmente conosciuto in termini filosofici, rimanendone del tutto ignoti i risvolti matematici. Il motivo per cui questi ultimi furono trascurati risiede presumibilmente nella forma assunta da uno dei primi strumenti di gioco d'azzardo, gli astragali, i quali avevano forme talmente diverse tra loro che l'elevata arbitrarietà dei risultati ottenibili con i lanci non permise di evidenziare alcun tipo di regolarità meritevole di considerazione da parte dei matematici.

L'inizio della teoria delle probabilità, chiamata all'epoca la "dottrina della sorte", avviene nel XVII secolo, come risposta a due classi di problemi legate ai giochi d'azzardo e alle assicurazioni. Nel primo caso si trattava di valutare la probabilità di vincere scommettendo sul verificarsi di un certo evento. Questi problemi possedevano

una caratteristica comune: si trattava di spiegare la discrepanza tra le previsioni teoriche, sostenute da semplici calcoli, e la frequenza con cui nella pratica si registrava un certo evento.

Nel secondo caso si rendeva necessaria per i banchieri la stima della probabilità di morte di un individuo di una certa età, ossia la probabilità che egli potesse sopravvivere un determinato numero di anni dalla stipula del contratto riguardante una qualche forma di assicurazione sulla vita, oppure che un certo carico di merce arrivasse indenne alla sua destinazione.

Questi due diversi contesti hanno dato luogo a due diversi metodi per valutare la probabilità, o, come si usa ancora dire, a due “definizioni” di probabilità viste talvolta in contrapposizione fra di loro: la “matematica” e la “sperimentale” (o “empirica”); ovvero, detto in altri termini: la “classica” e la “frequentista”, quella “a priori” e quella “a posteriori”.

2. Cardano e Galilei

I primissimi e documentati studi condotti nel campo della probabilità risalgono al XVI secolo e sono riportati nell’opera “*Liber de ludo aleae*”, scritto da Gerolamo Cardano intorno al 1525 e pubblicato postumo nel 1663. Geniale fisico e matematico nonché illustre medico, Cardano fu anche un cultore di astrologia e, soprattutto, un accanito giocatore d’azzardo. Tale passione lo portò a dilapidare ingenti fortune; per questo, nonostante gli elevati guadagni ottenuti con intense e molteplici attività, condusse sempre una vita estremamente precaria. Il *Liber de ludo aleae* è dunque il frutto di questa passione e, sebbene sia solitamente citato soprattutto in rapporto allo sviluppo del calcolo delle probabilità, questo libro contiene anche riflessioni morali, storiche e tecniche sul gioco dei dadi. Cardano fornisce alcuni risultati sul gioco dei dadi: l’equiprobabilità dell’uscita di una faccia di un dado, calcola la probabilità dei risultati ottenuti lanciando dei dadi, si interessa del “*problema dei punti*” e formalizza, per certi versi, quella che è nota come “definizione” classica della probabilità (ripresa ed enunciata da Laplace qualche secolo dopo).

Nelle Corti e nei palazzi dell’aristocrazia il gioco assume talvolta aspetti maniacali. Tra i giocatori d’azzardo vi sono anche gentiluomini colti e dotati di spirito di osservazione: si chiedono su quale risultato convenga puntare avendo, nel contempo, cura di registrare tutte le “uscite” o risultati di una o più serate di gioco, calcolando così la frequenza delle varie “uscite”. Alcuni gentiluomini fiorentini e probabilmente il Duca di Ferrara, appassionati giocatori della zara, chiedono a Galilei (attorno a 1630): «La lunga osservazione ha fatto da i giocatori stimarsi più vantaggioso 'l 10 e 'l 11 che 'l 9 e 'l 12 [...] ancor che 'l 9 e 'l 12 in altrettante maniere si componghino in quante 'l 10 e 'l 11; perchè?».

Galilei si occupò di questo problema e spiegò come mai sia più “vantaggioso” il 10 del 9 nel lancio di tre dadi nel trattato “*Sopra il giuoco dei Dadi*”: “...è noto che una lunga

osservazione del gioco ha portato i giocatori di dadi a ritenere che il 10 è più vantaggioso del 9.” Nella parte iniziale osserva che esistono degli eventi che sono più frequenti rispetto ad altri: “Il fatto che nel gioco dei dadi certi numeri sono più vantaggiosi di altri ha ragioni ovvie, ossia alcuni risultati sono più frequenti di altri...”. Galilei spiegò il fenomeno, per via teorica, enumerando le possibili “permutazioni” di tre numeri da comporre in somma. Ottenne che per il 10 esistono 27 terne di numeri interi che sommati tra loro danno il numero 10 (casi favorevoli), mentre per il 9 ne esistono 25; infatti le somme 9 e 10 possono essere ottenute con tre dadi secondo le seguenti somme a tre termini:

$$\begin{array}{l}
 9 = 1 + 2 + 6 \longrightarrow \text{ottenibili - "permutabili" - in 6 modi diversi} \\
 = 1 + 3 + 5 \longrightarrow \text{ottenibili in 6 modi diversi} \\
 = 1 + 4 + 4 \longrightarrow \text{ottenibili in 3 modi diversi} \\
 = 2 + 2 + 5 \longrightarrow \text{ottenibili in 3 modi diversi} \\
 = 2 + 3 + 4 \longrightarrow \text{ottenibili in 6 modi diversi} \\
 = 3 + 3 + 3 \longrightarrow \text{ottenibile in 1 solo modo;} \\
 \hline
 \text{25 modi diversi}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 10 = 1 + 3 + 6 \text{ ottenibili - "permutabili" - in 6 modi diversi} \\
 = 1 + 4 + 5 \longrightarrow \text{ottenibili in 6 modi diversi} \\
 = 2 + 2 + 6 \longrightarrow \text{ottenibili in 3 modi diversi} \\
 = 2 + 3 + 5 \longrightarrow \text{ottenibili in 6 modi diversi} \\
 = 2 + 4 + 4 \longrightarrow \text{ottenibili in 3 modi diversi} \\
 = 3 + 3 + 4 \longrightarrow \text{ottenibili in 3 modi diversi} \\
 \hline
 \text{27 modi diversi}
 \end{array}$$

Galilei fa il calcolo dei casi favorevoli a un avvenimento, definito “evento” (qui è un tiro di 3 dadi che dia come risultato 10), rispetto a tutti gli eventi possibili (sono $216 = 6^3$, numero totale dei diversi tiri con 3 dadi; Principio fondamentale del calcolo combinatorio: si realizzino due esperimenti, si supponga che il primo esperimento abbia m esiti possibili, che per ognuno di questi il secondo abbia n esiti possibili. Allora i due esperimenti hanno in tutto mn esiti possibili). Galilei non calcola così il numero totale di “eventi”, bensì enumerando tutti le uscite ottenibili dal lancio di tre dadi.

3. Le lettere tra Fermat e Pascal

La data di inizio ufficiale del Calcolo delle Probabilità su cui concorda la maggioranza degli storici è il 1654, anno in cui si svolge un interessante “commercium epistolicum” tra Pierre de Fermat (1601 –1665) e Blaise Pascal (1623-1662). Fermat fu giurista, raggiunse la più alta carica presso la corte penale di Tolosa, dove si trasferì nel 1631, ma per tutta la vita coltivò la passione per la matematica, raggiungendo innovativi risultati in diversi campi. La maggior parte dei suoi risultati ci è pervenuta tramite il fitto carteggio che tenne con la comunità scientifica francese, (M. Mersenne, Cartesio,

Pascal). L'opera di Fermat può considerarsi di tipo pionieristico: partì da problemi classici della matematica greca per affrontarli con le nuove tecniche rese disponibili da Viète e altri. In analisi sviluppò metodi per la determinazione dei massimi e dei minimi di una funzione che anticipavano Newton e Leibniz. In geometria sviluppò il metodo della geometria analitica prima e in modo indipendente da Cartesio, dove esplicitamente fa ricorso a equazioni per descrivere oggetti del piano.

Il padre di Pascal, magistrato e matematico, orientò Blaise, nell'ambiente scientifico. Pascal è da considerare un allievo di Desargues. Usando lo stesso procedimento estensivo con il quale Desargues, partendo da una proposizione di Pappo, aveva ricavato il suo teorema sul quadrilatero iscritto in una conica, il sedicenne P. pervenne al teorema sull'esagono iscritto in una conica ("hexagramme mystique"). Sul finire della sua vita pubblicò una lettera sulle proprietà della cicloide. Studiò le curve come enti a sé, precorrendo l'idea di funzione, poi studiata dai fondatori del calcolo infinitesimale Leibniz e Newton. Pascal ha dato un importante contributo anche all'aritmetica, sia teorica sia pratica con il primo modello di macchina calcolatrice (la Pascalina).

Antoine Gombaud, cavaliere de Méré (1607 – 1684), scrittore francese, era un nobile con la passione del gioco. Amico di Blaise Pascal, gli propose alcuni problemi inerenti al gioco d'azzardo. Pascal, per rispondere alle domande del Cavaliere de Méré, basò i suoi ragionamenti sull'esperimento e sulle frequenze. Comunicò i quesiti a Fermat e fu così che i due matematici francesi intrapresero una corrispondenza epistolare in cui si scambiarono le idee riguardo i problemi di gioco proposti.

Alcune domande del Cavaliere erano molto arzigogolate (da vero fanatico dei dadi): "Se voglio fare 6 con il lancio di un dado devo chiedere almeno 4 lanci per avere più probabilità di vincere che di perdere.

Se invece voglio fare un doppio 6 con il lancio di due dadi, non è più sufficiente che chieda 24 lanci, come sembrerebbe logico, ma ho verificato che devo farne di più per essere sicuro di vincere".

Le considerazioni di de Méré si basavano sulla sua grande esperienza di gioco. Il ragionamento, come questo da lui fatto, può trarre in inganno: un dado può cadere in 6 modi diversi e 4 lanci corrispondono ai $4/6$, cioè ai $2/3$, dei lanci possibili. Due dadi possono cadere in 36 modi diversi e 24 corrisponde proprio ai $2/3$ di 36.

La risposta intuitivamente sembra quindi che debbano essere 4 e 24 il numero minimo di lanci necessari per essere sicuri di vincere.

In pratica però, con il lancio di due dadi accadeva che 24 lanci non fossero sufficienti per avere una probabilità di vincere superiore a quella di perdere.

Pascal lo invitò semplicemente a calcolare meglio le probabilità. Nel caso di un dado, i sei risultati possibili hanno la stessa probabilità di presentarsi. Al primo lancio abbiamo 6 casi possibili, uno solo favorevole e 5 sfavorevoli. La probabilità di vincere è $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} = 0,1\bar{6}$. Al primo lancio è quindi maggiore la probabilità di perdere che quella di vincere. Al secondo lancio sempre di un solo dado accade che, se abbiamo perso al primo, abbiamo:

- 36 (6X6) casi possibili,
- 25 sfavorevoli,
- $36 - 25 = 11$ casi favorevoli.

La probabilità di vincere è sempre inferiore a quella di perdere: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{11}{36} = 0,30\bar{5}$.

Al terzo lancio, se non abbiamo ancora vinto, abbiamo

- 216 (6X6X6) casi possibili,
- 125 sfavorevoli,
- $216 - 125 = 91$ casi favorevoli.

La probabilità di vincere è ancora inferiore a quella di perdere: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} = 0,4212$.

Al quarto lancio, abbiamo

- 1 296 (6x6x6x6) casi possibili,
- 625 sfavorevoli,
- $1\ 296 - 625 = 671$ casi favorevoli.

I casi favorevoli superano finalmente i casi sfavorevoli e la probabilità di vincere risulta maggiore di quella di perdere: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} = 0,517$.

In altri termini: la probabilità **p** dell'evento “in 4 lanci di un dado esce almeno una volta 6” equivale alla probabilità contraria dell'evento **q**: “in quattro lanci non esce nemmeno una volta 6”: $q = \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$ e $p = 1 - q = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} = 0,517$.

Ripetiamo lo stesso ragionamento per il lancio dei due dadi. Al primo lancio abbiamo

- 36 casi possibili,
- 35 sfavorevoli
- $36 - 35 = 1$ caso favorevole.

La probabilità di vincere è $1 - \frac{35}{36} = 0,02\bar{7}$.

Al secondo lancio, la probabilità di vincere è: $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^2 \approx 0,056$. Proseguendo in questo modo, al ventiquattresimo lancio, si verifica che la probabilità di vincere è ancora inferiore a quella di perdere: $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491$. Solo al venticinquesimo lancio (non al ventiquattresimo, come pensava de Merè) la probabilità di vincere diventa maggiore di quella di perdere: $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} \approx 0,505$.

Detto in altri termini, la probabilità dell'evento **p** “in 24 lanci di due dadi esce almeno un doppio 6” equivale alla probabilità contraria dell'evento $q = 1 - p$ “in 24 lanci di due dadi non esce nemmeno una volta un doppio 6”: $q = \left(\frac{35}{36}\right) \cdot \left(\frac{35}{36}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{35}{36}\right) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ e $p = 1 - q = 0,491$ circa.

4. Il problema dei punti

Altro quesito del Cavaliere a Pascal era il “problema dei punti”, ossia come dovesse essere “equamente” distribuita la posta in gioco tra due giocatori nel caso in cui questi decidessero di abbandonare il gioco prima che fosse terminato (si ritrova ancora nel carteggio tra i due matematici francesi). Il problema sintetizzato: “Due giocatori A e B scommettono ciascuno **32** monete su un gioco a tre punti. Quando A ha due punti e B uno, il gioco viene interrotto. Come deve essere divisa equamente la posta totale (64 monete) tra i due giocatori?”.

Pascal divide il problema in parti proponendo un «procedimento ricorsivo» per illustrarne la soluzione.

I due giocatori si trovano a giocare una partita della quale la sorte è tale che

- se la vince il primo, egli guadagna tutto il denaro che è in gioco, cioè 64 monete;
- se la vince l'altro, essi sono due a due e di conseguenza, se essi si vogliono separare, è necessario che ciascuno ritiri la propria posta, cioè ciascuno 32 monete.

Dunque, se il primo vince, gli toccano 64 monete; se perde gli toccano 32 monete.

A questo punto Pascal arguisce che se i due giocatori non vogliono arrischiare questa partita e separarsi senza giuocarla, il primo dirà: "Io sono sicuro di avere 32 monete, poiché la perdita stessa me le dà; ma per le altre 32, può essere che le avrò io, può essere che le avrete voi; il rischio è uguale; dividiamo dunque queste 32 monete a metà e datemi, oltre queste, le mie 32 che sono per me sicure". Egli avrà dunque 48 monete e l'altro 16.

Allargando le ipotesi: supponiamo che il primo abbia due punti e l'altro nessuno e che essi comincino a giocare un'altra partita. La sorte di questa partita è tale che

- se la vince il primo egli prende tutto il denaro;
- se la vince l'altro giocatore eccoci ricondotti al caso precedente, nel quale il primo avrà due partite e l'altro una.

Abbiamo già mostrato che in questo caso spettano, a quello che ha due partite 48 monete: dunque se essi non vogliono giocare questa partita, egli dirà: " Se io la vinco, guadagnerò tutto, che è 64; se la perdo, mi apparterrà legittimamente 48: datemi dunque le 48 che mi sono certamente dovute nel caso che io perda e dividiamo le altre 16 a metà, perché c'è lo stesso rischio che le vinciate voi come che le vinca io".

Così egli avrà $48 + 8$, che sono 56 monete.

Supponiamo, infine, che il primo non abbia che una partita vinta (quindi un punto) e l'altro nessuna.

Se essi cominciano una nuova partita, la sorte è tale che, se il primo la vince, egli avrà appunto due partite e pertanto, per il caso precedente, gli apparterranno 56 monete; se egli la perde, essi sono a pari: dunque gli appartengono 32 monete.

Dunque egli dirà: "Se non la volete giocare, datemi 32 monete, che mi sono sicure, e dividiamo il resto da 56 a metà. Da 56 togliete 32, resta 24; dividete 24 a metà, prendetene 12 e io ne prendo 12, che con 32 fanno 44".

Ora, in questo modo, voi vedete mediante le semplici sottrazioni che per la prima partita gli appartengono 12 monete, per la seconda altre 12 e per l'ultima 8.

Pascal muta una situazione di incertezza in cui si trova il giocatore in una situazione di certezza, sia pur con una finzione matematica, introducendo il concetto di “speranza matematica”.

(Lettera di Pascal a Fermat del 29 luglio 1654)

Nella Lettera di Pascal a Fermat del 24 agosto 1654, Pascal illustra il metodo di Fermat. Partiamo da un esempio particolare: ad A mancano due partite per concludere il gioco e a B ne mancano tre.

Si procede con partite «finte» con quattro dadi a due facce (tipo Testa/Croce).

Fermat conclude che il gioco sarebbe stato deciso nel corso delle successive quattro partite. Dunque, è necessario vedere in quanti modi i quattro punti possono essere distribuiti tra i due giocatori e poi considerare tutti i casi favorevoli alla vittoria dell'uno e tutti quelli favorevoli alla vittoria dell'altro. Scrive esplicitamente tutte le combinazioni possibili per distribuire 4 punti tra i due giocatori:

aaaa, aaab, aaba, aabb; abaa, abab, abba, abbb; baaa, baab, baba, babb; bbaa, bbab, bbba, bbbb.

Esse sono 16; tra queste ogni combinazione in cui **a** occorre un numero di volte pari a 2 o maggiore rappresenta un caso favorevole alla vittoria di **A**; ogni combinazione in cui **b** occorre 3 volte o 4 rappresenta un caso favorevole alla vittoria di **B**. Contando le combinazioni favorevoli ad A e a B, si ritrova che esse sono 11 e 5; e poiché questi casi sono ugualmente possibili, Pascal conclude che la posta deve essere suddivisa nel rapporto 11:5.

La corrispondenza tra Pascal e Fermat non mette in evidenza il metodo generale utilizzato da Pascal per risolvere il problema della ripartizione della posta tra due giocatori che fu invece esposto nel *Trait té du Triangle arithmétique et de son application*, (pubblicato postumo nel 1665).

In realtà il «problema della divisione della posta» era già presente in un manoscritto anonimo del XIV secolo: *Regole d'Alzibra*. In generale la sua formulazione è:

Due giocatori A e B si accordano nel mettere in palio una certa posta da destinare a chi per primo raggiunga N punti in un gioco. Il gioco viene però interrotto quando A ha ottenuto n punti e B m punti, con n ed m entrambi inferiori ad N. Si domanda come occorra ripartire la posta in questo caso.

Si gioca su tre vittorie

La partita viene sospesa sul 2 a 0 per il giocatore A contro B.

Parte dal presupposto che, quando un giocatore vince una partita, egli conquista parte del denaro dell'avversario. Così A guadagna c ducati a B vincendo la prima partita per cui, al termine di questa egli possiederà $1 + c$ ducati, mentre B ne possiederà solo $1 - c$.

L'incognita c rappresenta il valore della prima partita. Sul punteggio di 1 a 0 (per A), l'autore afferma che anche la seconda partita avrà valore $c' = c$.

Il ragionamento sembra basarsi su due considerazioni di simmetria. La prima è che il guadagno di un giocatore coincide con quanto l'altro perde. L'altra è che il guadagno di A deve essere lo stesso del guadagno che otterrebbe B, vincendo.

- Se A vincesses la seconda partita (2-0), il suo guadagno arriverebbe a $c + c'$
- Se B vincesses (1-1), il guadagno complessivo di B sarebbe $c' - c$, visto che ha perso la prima partita.

Tuttavia, sul punteggio di 1 a 1, il guadagno di B deve essere nullo e quindi $c' = c$. Detto questo, dopo che A ha vinto la seconda partita (2-0), il suo capitale totale è $1 + 2c$, mentre quello di B è $1 - 2c$.

Per procedere, l'autore osserva che, se A vincesses ancora (3-0), B perderebbe l'intera somma residua $1 - 2c$ che rappresenta il valore di questo gioco.

Se invece B vincesses (2-1), A possederebbe $4c$, mentre B si troverebbe con $2 - 4c$ ducati che è anche il valore della partita successiva, in quanto se B la perdesse, perderebbe tutto.

Vincendo B, A avrebbe $8c - 2$ ducati, mentre B avrebbe $4 - 8c$ ducati e le due cifre debbono essere uguali perché il punteggio è di 2 a 2. Pertanto $4 - 8c = 8c - 2$ da cui $c = 3/8$.

Tornando al punteggio al quale si è effettivamente interrotta la partita, ad A spettano $1 + 2c = 7/4 = 1$ ducato e $3/4$, mentre a B spetta il restante quarto di ducato.

L'anonimo autore ha avuto il merito di determinare la suddivisione della posta con un metodo che procede "in avanti", partendo cioè dal punteggio iniziale di 0-0.

Manca però la capacità di generalizzare il procedimento al caso di altri punteggi o al caso di più di due giocatori.

5. Il periodo successivo

Né Pascal né Fermat diedero una stesura sistematica ai risultati a cui erano pervenuti. Nel 1657, il matematico olandese Christian Huygens, venuto a conoscenza della corrispondenza, si occupò delle questioni contenute nel carteggio pubblicando un libro che per più di 50 anni fu considerato il libro di testo della Teoria della Probabilità, il "De ratiociniis in ludo aleae" (Calcoli nel gioco del dado), scritto in olandese e tradotto in latino.

Nella sua forma definitiva, il trattato presenta 14 problemi con le relative soluzioni e 5 problemi la cui soluzione viene lasciata al lettore. Huygens diede notevoli contributi nel campo della probabilità, dando anche il concetto di speranza matematica, o rendimento, o valor atteso, maggiore e più consapevole rilievo scientifico rispetto alle prime considerazioni fatte da Blaise Pascal:

Il concetto nasce senza il concetto di probabilità (come senza probabilità nasce quella di Pascal): «In un gioco d'azzardo, la speranza di un giocatore di ottenere qualcosa, è quella quantità tale che, se il giocatore la possedesse, allora di nuovo egli potrebbe

pervenire alla stessa speranza con un gioco equo, cioè con un gioco che miri a non danneggiare nessuno.

Ad esempio, se qualcuno, a mia insaputa, nasconde tre monete in una mano e 7 nell'altra e poi mi chiede di scegliere fra le due mani, io dico che questa offerta ha lo stesso valore che se mi regalassero cinque monete. Infatti, se possiedo cinque monete, posso nuovamente pormi nella situazione di avere la stessa possibilità di ottenere o 3 o 7 monete; e ciò con un gioco equo».

«Se con uguale facilità posso ottenere 3 oppure 7, allora la mia speranza è 5 ed è evidente che, possedendo 5, io riesco nuovamente a ricostruire la situazione iniziale. Se infatti, giocando con un altro, poniamo entrambi sul tavolo 5 monete, con la condizione che chi vince darà 3 monete all'avversario, questo gioco è equo ed io, con uguale facilità, posso ottenere 3 monete, se perdo, oppure 7 monete, se vinco: in questo ultimo caso, infatti, ritiro 10 monete ma 3 le do al mio avversario».

Tra le altre cose, Huygens dimostrò le seguenti tre proposizioni:

Proposizione I: « Se con eguale facilità io posso ottenere una somma **a** od una somma **b**, allora la mia speranza è $(a + b)/2$ nel senso che, in possesso di $(a+b)/2$, posso costruire con un avversario un gioco nel quale, versata che sia la somma $(a + b)/2$ da parte di ognuno di noi, tutti e due ci troviamo in situazioni identiche cioè nelle due possibilità, che possono verificarsi con pari facilità, di ottenere **a** oppure **b**».

Proposizione I: Se mi aspetto di ottenere **a** o **b** con uguale probabilità, allora la mia speranza matematica è pari a $\frac{a + b}{2}$.

Egli chiama **x** il valore incognito dell'aspettazione e si pone nella condizione di avere **x** in un gioco equo:.

Due giocatori impegnano la stessa somma **x** con l'accordo che il vincitore donerà la somma **a** per chi perde (una sorta di premio di consolazione) se $a < x$, ed intascherà la somma restante $2x - a$.

Se si richiede che $2x - a = b$, si ottiene per **x** il valore indicato.

La seconda proposizione è una estensione della prima al caso di tre valori.

Proposizione II

Se mi aspetto di ottenere **a**, **b** o **c** con uguale probabilità, allora la mia speranza matematica è pari a $\frac{a + b + c}{3}$ e così via.

Proposizione III

Se **p** è la probabilità che io vinca una somma pari ad **a** e **q** quella di vincere una somma pari a **b**, allora, nell'ipotesi di uguali possibilità, la speranza matematica è $a p + b q$.

Con queste Proposizioni Huygens risolse molti problemi proposti da Pascal e Fermat.

Problema del dado

Quanti lanci sono necessari per ottenere un 6 con un solo dado?

Soluzione

Huygens arguì che nel caso più semplice, un solo lancio, c'è una sola possibilità di ottenere un 6 e ricevere la somma scommessa a e 5 possibilità di non ottenere nulla, dunque, in virtù della Proposizione III la speranza matematica vale $\frac{1 \cdot a + 5 \cdot 0}{6} = \frac{1}{6}a$.

Per calcolare il valor medio per un sei in due lanci, Huygens fa notare che se il 6 appare col primo dado allora la speranza matematica sarà ancora pari ad a , altrimenti, tornando nel caso precedente, sarà pari ad $\frac{1}{6}a$. Dunque, applicando la Proposizione III c'è un

solo modo di ricevere a e 5 modi di ricevere $\frac{1}{6}a$: $\frac{1 \cdot a + 5 \cdot \frac{1}{6}a}{6} = \frac{11}{36}a$.

Proposizione IV

«Si supponga che qualcuno giochi con me, a questa condizione: chi per primo vince tre volte, si aggiudicherà la cifra in palio, e supponiamo che io abbia già vinto due partite, l'altro una. Desidero sapere se, non volendo proseguire oltre nel gioco ma [volendo] dividere la cifra in palio, per la quale giochiamo, in maniera equa, quanto di questa cifra mi spetta».

Sia a la cifra in palio ed al giocatore G1 manchi un punto per conseguire la vittoria mentre ne manchino due all'altro, G2.

Huygens calcola quale porzione della cifra in palio spetterebbe a ciascuno, continuando il gioco.

Siccome G1 ha vinto due partite, in caso di una sua ulteriore vittoria alla quarta partita, l'intera posta a spetterebbe a lui.

Se al contrario la quarta partita venisse vinta da G2, vi sarebbe una situazione di parità e l'aspettazione di ciascuno per la somma a è pari ad $a/2$.

Ora, supponendo che G1 possa indifferentemente vincere o perdere la quarta partita, egli avrebbe la stessa aspettazione per a o per $a/2$ e dunque, per la Proposizione I, la sua aspettazione è $3a/4$:

questa è la parte della posta che spetta ad G1 in caso di interruzione del gioco nelle condizioni dichiarate nell'enunciato.

A G2 spetta la quota $a/4$.

Il metodo di Huygens è sovrapponibile a quello seguito da Pascal nella corrispondenza con Fermat e, come aveva fatto Pascal in quella sede, egli illustrò nelle proposizioni V-VII altri casi particolari, dall'esame dei quali era possibile risalire al caso generale con un procedimento ricorsivo.

La probabilità di un evento viene considerata da Laplace e da tutti coloro che nel Settecento si occuparono di calcolo delle probabilità come il rapporto tra il numero di casi favorevoli all'evento ed il numero dei casi possibili.

I motivi di questa interpretazione sono immediatamente comprensibili: evolutisi gli strumenti del gioco d'azzardo rispetto ad oggetti primitivi come gli astragali, ne deriva che i casi possibili sono in genere individuabili in modo piuttosto semplice e se, per esempio, i dadi, le monete e le carte non sono truccati, hanno tutti la medesima

possibilità di verificarsi. In questi casi, l'equipossibilità è intesa come riferentesi alla perfetta omogeneità del materiale e delle forme di cui sono composti i pezzi, ma poiché l'analisi fisica di qualsiasi materiale tende ad escludere questa perfezione, si deve riconoscere che una definizione empirica di equipossibilità è destinata al fallimento

Un metodo per evitare la circolarità della definizione classica era già noto fin dagli inizi del Settecento, formulato da Jacob Bernoulli col nome di principio di ragion sufficiente: in mancanza di ragioni che permettano di assegnare probabilità diverse a ciascuno di parecchi eventi alternativi ed esaustivi, questi devono essere considerati equiprobabili.

Intorno al XVII secolo lo studio della probabilità si staccò dai problemi di gioco per entrare nelle Scienze sociali grazie ad un commerciante di stoffe inglese, John Graunt.

Graunt, insieme a Malthus, può essere considerato il fondatore della Demografia, cioè la scienza che studia, da un punto di vista quantitativo, tutto ciò che riguarda i movimenti delle popolazioni.

Cominciò a consultare i cosiddetti Bills of mortality (Bollettini di mortalità) che fornivano la lista dei morti e delle nascite in alcuni quartieri di Londra, in cui erano indicate anche le cause di morte: questi bollettini erano spesso consultati dai ricchi londinesi per conoscere l'insorgere di eventuali epidemie di peste e, quindi, mettersi al sicuro lontano dalla città.

Per Graunt questi dati diventarono la base di un approfondito studio per compiere diverse analisi; per esempio, stimare la popolazione della capitale: egli scoprì che nel 1660 c'erano state circa 3 morti ogni 88 persone, per cui essendoci stati 19200 decessi, $19200 * 88 = 387200$ è la stima calcolata.

Inoltre egli studiò le cause biologiche, sociali ed economiche della mortalità, lo studio del rapporto tra i sessi, la differenza tra nascite e morti in città e campagna, i flussi migratori.

Lo sviluppo di una vera e propria teoria organica e non intuitiva della legge empirica del caso richiese ancora parecchi anni di studio. Determinante a questo proposito fu l'opera di Jacob Bernoulli (1654-1705), pubblicata postuma a Basilea nel 1713 con il titolo "Ars conjectandi", contenente le basi del calcolo combinatorio, in cui si trattano concetti fondamentali quali la legge dei grandi numeri e la probabilità a posteriori. In tale opera, il matematico svizzero fornì le soluzioni ai problemi proposti da Huygens e inoltre si interessò alla natura della probabilità. Secondo Bernoulli la probabilità è un grado di certezza e differisce dalla certezza assoluta come una parte differisce dal tutto. Nella sua opera magna formulò pure una legge matematica che costituisce la base teorica della

distribuzione binomiale: $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ dove X è la variabile aleatoria che

conta il numero di successi, p è la probabilità del singolo evento, costante in ogni prova, e q è la probabilità dell'evento complementare (q=1-p).

Nel XVIII secolo il calcolo delle probabilità viene introdotto, anche se lentamente e a stento, nelle Scienze esatte. All'Ars conjectandi si affianca, nel 1718, ancora un'opera dedicata ai giochi d'azzardo, "The doctrine of Chances", di de Moivre (1667-1754),

Le origini del Calcolo delle probabilità: Pierre de Fermat e Blaise Pascal

nella quale troviamo anche applicazioni a questioni pratiche come leggi di mortalità, assicurazioni sulla vita, ecc.

Di questa progressiva estensione della probabilità fuori dell'ambito dei giochi d'azzardo è chiaro esempio la *Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités, et on résout différentes problèmes relatifs à cette matière* del torinese Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Nella Memoria vengono studiati 10 problemi nei quali si rivela la ben nota propensione di questo scienziato ad operare servendosi delle tecniche più raffinate dell'algebra.

Fu soprattutto in seguito alle ricerche del fisico scozzese James Clerk Maxwell che questa teoria iniziò intorno alla metà dell'Ottocento a trovare solide applicazioni in altri campi della scienza, acquisendo spessore e rilevanza dal punto di vista scientifico.

La prima sistemazione matura, rigorosa, moderna della nuova scienza fu compiuta però solo nel 1812, con un monumentale trattato "Théorie analytique des probabilités", dal francese Pierre Simon de Laplace. Egli estende l'utilizzo della probabilità a vari campi, ad esempio quello della teoria degli errori, e fornisce una definizione di probabilità nota come definizione classica.

Bibliografia

Bernoulli J. (1713). *Ars Conjectandi, opus posthumum*, Basel.

Cardano G. (1663). *Liber de ludo aleae*. In Hieronymi Cardani Mediolanensis Opera Omnia, vol. I, Huguetan & Ravaud, Lugduni, 262-276.

Bottazzini U., Freguglia P., Toti Rigatelli L (1992). *Fonti per la storia della matematica*. Sansoni Editore.

de Fermat P. (1894). *Œuvres de Fermat. Tome II*. Gauthier-Villars, Paris.

Galilei G. (1832). *Considerazione di Galileo Galilei sopra il giuoco dei dadi*. In: *Opere*, vol. I, Bettoni, Milano.

de Laplace P.S. (1814). *Théorie analytique des probabilités, II Edition*. Courcier, Paris.

Pascal B. (1665). *Traité du Triangle arithmétique et de son application*. Desprez, Paris. In *Oeuvres complètes, Tome III*, Hachette, Paris, (1872), pp. 243–268.

Rosso R. <https://mate.unipv.it/~rosso/>

Tartaglia N (1556). *General Trattato de' numeri et misure*. Curtio Trojano dei Navo, Venezia.

https://www.treccani.it/enciclopedia/zara_%28Enciclopedia-Dantesca%29/

https://www.treccani.it/enciclopedia/girolamo-cardano_%28Il-Contributo-italiano-alla-storia-del-Pensiero:-Scienze%29/

https://www.treccani.it/enciclopedia/fermat_%28Enciclopedia-della-Matematica%29/

https://www.treccani.it/enciclopedia/pascal-blaise_%28Enciclopedia-della-Matematica%29/

I problemi dei tre arcieri

Giorgio Pietrocola

www.pietrocola.eu

giorgio.pietrocola@gmail.com

Sunto

Viene presentato, discusso e risolto in forma didattica "il problema dei tre Arcieri" un problema di calcolo delle probabilità basato sul teorema di Bayes con le sue varie interpretazioni più o meno lecite che ne modificano significativamente svolgimento e risultato.

Keywords: Teorema di Bayes, Interpretazione testo, Problemi calcolo probabilità

1. Enunciazione del problema

Tre frecce vengono lanciate contro un bersaglio da tre arcieri. Poiché i tre arcieri sono a distanza diversa dal bersaglio, si stima in $3/5$ la probabilità dell'arciere A di colpire il bersaglio, in $1/2$ quella dell'arciere B e in $4/5$ quella dell'arciere C.

Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?

1.1. Critica del testo

Normalmente quando comunichiamo, mediante il linguaggio scritto o altro, non specificiamo sempre ogni cosa.

Questo a rigore sarebbe spesso non solo impresa ardua, ma inutilmente noiosa. Una scena reale è sempre piena di dettagli irrilevanti che, comunicando, è più sensato trascurare che specificare.

Inoltre spesso, per semplificare ulteriormente il messaggio comunicativo, si sottintendono anche cose che non sarebbero irrilevanti, confidando sulla normale capacità immaginativa e ricostruttiva del cervello del ricevente.

Il processo di semplificazione del messaggio, spesso inconsapevole, è per sua natura imperfetto e può lasciare spazio a interpretazioni inaspettate. Diverso è il caso del linguaggio matematico nato proprio per evitare le ambiguità della lingua naturale. Quando si formula un problema però lo si fa, in generale come nel caso specifico, facendo largo uso della lingua naturale. Per questo motivo, se si vuole un solo risultato, e non una discussione per casi, si dovrebbe prestare particolare cura nell'evitare la

possibilità di testi ambigui o che possano apparire tali, almeno quando, come nel problema preso in esame, la risposta può variare significativamente in funzione dell'interpretazione scelta.

1.2. Questioni interpretative

Il testo del problema recita:

Tre frecce vengono lanciate contro un bersaglio da tre arcieri.

Quante frecce in tutto?

Tre o nove?

Sembrerebbe tre perché altrimenti si sarebbe dovuto specificare "da ciascuno dei tre arcieri".

Quanti bersagli? Uno o uno per uno?

Sembrerebbe uno perché si parla di un bersaglio. Sembrerebbe.

Ma se l'esperienza di chi legge, per esempio, risultasse tale da aver sempre constatato che in ogni gioco i lanci degli arcieri sono sempre di tre frecce per volta, non potrebbe credere, in base a una presunta condivisione delle esperienze vissute, che "ciascuno" è sottinteso e le frecce sono nove?

Per evitare equivoci meglio chiarire il più possibile usando qualche parola in più.\\

Nel caso le frecce in questione siano tre, e il bersaglio uno, le frecce vengono lanciate contemporaneamente? Forse no perché potrebbe risultare pericoloso dato che si può presumere che siano tutti e tre allineati sulla linea perpendicolare al bersaglio altrimenti anche l'angolazione oltre la distanza avrebbe influenzato le probabilità stimate. Se no, in quale ordine? Casuale? Dal più vicino al più lontano per motivi di sicurezza? In ordine alfabetico?

Nell'enunciato del problema si legge anche:

Se una freccia colpisce il bersaglio...

Una sola freccia? Cosa sappiamo delle altre?

Possiamo supporre che tutti gli arcieri abbiano terminato di tirare? Si sta parlando della prima freccia che colpirà il bersaglio non ancora colpito?

Le possibilità sono molte, tante che nel 2014 decisi di pubblicare in rete, insieme con Ivana Niccolai, sul sito didattico Maecle, un ipertesto intitolato "Iperproblema dei tre arcieri" nel quale il problema viene risolto in differenti modi a seconda delle risposte date ai chiarimenti richiesti. Qui mostrerò solo i casi che mi sono sembrati più significativi.

Credo che, a rigore, nei limiti del possibile, si dovrebbero prendere alla lettera le informazioni fornite dal problema senza supporre alcunché ma certo ciò non viene sempre spontaneo.

Per finire, un'osservazione sui dati del problema.

Nonostante sia una cosa innaturale per un ricercatore, nelle nostre scuole siamo abituati a vedere i problemi proposti forniti solo dei dati necessari senza nulla di superfluo.

Benché non sia una regola esplicita e neanche una buona regola, l'abitudine potrebbe condizionare comunque le aspettative e spingere a scegliere, tra due interpretazioni, quella il cui svolgimento utilizza tutti i dati forniti.

Vedremo, nel caso del problema in esame, che alcune varianti utilizzano l'informazione della diversa distanza tra arcieri e bersaglio, mentre altre la ignorano.

1.3 Costruzione di possibili scenari che portano a divergenze interpretative

Come la continua ricerca di significati porta il nostro cervello a costruirsi immagini familiari anche dove regna il puro caso come per il volto umanoide tradizionalmente associato alla luna piena, così mi sembra che la nostra mente tenda a elaborare scenari non richiesti esplicitamente allo scopo di intendere meglio il testo del problema proposto. Dopo il prossimo paragrafo verranno descritti alcuni scenari capaci di suggerire significati assai diversi da attribuire al testo del problema che è stato formulato.

2. Partizione dei possibili accadimenti in otto eventi

Questo paragrafo sarà utilizzato in tutte le varianti del problema che saranno presentate. Indichiamo con A, B, C gli eventi in cui l'omonimo arciere colpisce il bersaglio e con \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} segnati gli eventi contrari.

Sarà quindi:

$$\left| \begin{array}{l} A \vee \bar{A} = U \\ B \vee \bar{B} = U \\ C \vee \bar{C} = U \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} A \wedge \bar{A} = \phi \\ B \wedge \bar{B} = \phi \\ C \wedge \bar{C} = \phi \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} P(A) = \frac{3}{5} \\ P(B) = \frac{1}{2} \\ P(C) = \frac{4}{5} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} P(\bar{A}) = 1 - P(A) \\ P(\bar{B}) = 1 - P(B) \\ P(\bar{C}) = 1 - P(C) \end{array} \right|$$

Consideriamo preliminarmente lo spazio dei tre possibili esiti dei tiri che indichiamo con U. Risulta quindi $P(U)=1$

Creiamo una partizione di U secondo le otto diverse storie possibili.

Come si può osservare nella tabella sottostante, le disposizioni con ripetizione di classe 3 su due simboli, 1 per bersaglio colpito e 0 per bersaglio non colpito, indicano 8 possibilità corrispondenti ai numeri binari da 0 a 7.

| | | | |
|-----|---|-------------------------------|-----------------|
| 000 | $S_0 = \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$ | nessuno colpisce il bersaglio | $P(S_0) = 4\%$ |
| 001 | $S_1 = \bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C$ | solo C va a segno | $P(S_1) = 16\%$ |
| 010 | $S_2 = \bar{A} \wedge B \wedge \bar{C}$ | solo B va a segno | $P(S_2) = 4\%$ |
| 011 | $S_3 = \bar{A} \wedge B \wedge C$ | solo A non va a segno | $P(S_3) = 16\%$ |
| 100 | $S_4 = A \wedge \bar{B} \wedge \bar{C}$ | solo A va a segno | $P(S_4) = 6\%$ |
| 101 | $S_5 = A \wedge \bar{B} \wedge C$ | solo B non va a segno | $P(S_5) = 24\%$ |
| 110 | $S_6 = A \wedge B \wedge \bar{C}$ | solo C non va a segno | $P(S_6) = 6\%$ |
| 111 | $S_7 = A \wedge B \wedge C$ | tutti colpiscono il bersaglio | $P(S_7) = 24\%$ |

Nell'ultima colonna compaiono le probabilità di ognuno degli otto eventi alternativi S_0 S_1 ... S_7 calcolate, per la supposta indipendenza degli eventi, con il teorema della probabilità composta.

Si può notare che gli eventi relativi all'esito del lancio dei singoli arcieri si possono ottenere anche come unioni di alcune di queste otto storie (eventi) fondamentali

| | | |
|--|--|-----|
| $A = S_4 \vee S_5 \vee S_6 \vee S_7$ | $P(A) = P(S_4) + P(S_5) + P(S_6) + P(S_7)$ | 60% |
| $\bar{A} = S_0 \vee S_1 \vee S_2 \vee S_3$ | $P(\bar{A}) = P(S_0) + P(S_1) + P(S_2) + P(S_3)$ | 40% |
| $B = S_2 \vee S_3 \vee S_6 \vee S_7$ | $P(B) = P(S_2) + P(S_3) + P(S_6) + P(S_7)$ | 50% |
| $\bar{B} = S_0 \vee S_1 \vee S_4 \vee S_5$ | $P(\bar{B}) = P(S_0) + P(S_1) + P(S_4) + P(S_5)$ | 50% |
| $C = S_1 \vee S_3 \vee S_5 \vee S_7$ | $P(C) = P(S_1) + P(S_3) + P(S_5) + P(S_7)$ | 80% |
| $\bar{C} = S_0 \vee S_2 \vee S_4 \vee S_6$ | $P(\bar{C}) = P(S_0) + P(S_2) + P(S_4) + P(S_6)$ | 20% |

3. Scenario a lanci terminati

Appurato che ciascuno dei tre arcieri ha appena scagliato la propria freccia ci si sposta sul luogo dei lanci per osservare lo stato del bersaglio dopo i tre tiri. Evidentemente gli eventi possibili, tra loro incompatibili sono 0, 1, 2, 3 frecce a segno. Si enuncia il problema: *Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?*

Il problema suppone il verificarsi della proposizione "una freccia colpisce il bersaglio" e quindi l'evento $E = "Si\ verifica\ S_1\ oppure\ S_2\ oppure\ S_4"$

la cui probabilità, per il teorema della probabilità totale, vista l'incompatibilità dei tre eventi componenti è

$$P(E) = P(S_1) + P(S_2) + P(S_4)$$

Nel nostro caso, per i dati ricavati nel precedente paragrafo, è il 26%

Dobbiamo rivalutare quindi, a causa delle informazioni acquisite, alla luce del teorema di Bayes, le tre probabilità di andare a segno:

$$\left| \begin{array}{l} P(A|E) = \frac{P(E|A)P(A)}{P(E)} \\ P(B|E) = \frac{P(E|B)P(B)}{P(E)} \\ P(C|E) = \frac{P(E|C)P(C)}{P(E)} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{13}{50}} = \frac{3}{13} \\ \frac{\frac{2}{25} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{13}{50}} = \frac{2}{13} \\ \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{13}{50}} = \frac{8}{13} \end{array} \right|$$

Infatti

risulta:

$$P(E|A)=P(S_4)/P(A)=1/10, \quad P(E|B)=P(S_2)/P(B)=2/25, \quad P(E|C)=P(S_1)/P(C)=1/5$$

Dunque la probabilità che la freccia sia di A è 3/13

3.1 Metodo alternativo

$$\left| \begin{array}{l} P(S_4|E) = \frac{P(E|S_4)P(S_4)}{P(E)} \\ P(S_2|E) = \frac{P(E|S_2)P(S_2)}{P(E)} \\ P(S_1|E) = \frac{P(E|S_1)P(S_1)}{P(E)} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \frac{1 \cdot \frac{3}{50}}{\frac{13}{50}} = \frac{3}{13} \\ \frac{1 \cdot \frac{1}{25}}{\frac{13}{50}} = \frac{2}{13} \\ \frac{1 \cdot \frac{4}{25}}{\frac{13}{50}} = \frac{8}{13} \end{array} \right|$$

Essendo S_4, S_2, S_1 sottoinsiemi di E il verificarsi di uno dei tre implica il verificarsi di E .

Dunque risulta $P(E|S_4)=P(E|S_2)=P(E|S_1)=1$

Dunque la probabilità che la freccia sia di A è 3/13

4. Scenario della prima freccia a segno

Si sta seguendo l'evento sul proprio telefonino, appare in diretta null'altro che il bersaglio inquadrato da una telecamera fissa senza né audio o né altre informazioni. Si sa che entro un'ora i lanci dovranno essere effettuati. Si sta aspettando pazientemente l'eventuale arrivo di una prima freccia a segno. Si enuncia il problema:

Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?

L'ipotesi presa in considerazione dal problema implica il verificarsi dell'evento "almeno una freccia va a segno" equivalente a "non si verifica S_0 " per cui

$P(E)=1-P(S_0)$ la cui probabilità, visti i dati forniti dal problema è 96%

Per motivi di sicurezza possiamo escludere che il lancio delle frecce avvenga simultaneamente.

Infatti dai dati del problema i tre arcieri dovrebbero essere sulla stessa retta perpendicolare al centro del bersaglio il che mette a repentaglio la vita di C e di A più vicini al bersaglio.

Si suppone quindi che le frecce siano lanciate a intervalli di tempo da un arciere dopo l'altro.

I casi possibili sono tanti quanti le possibili permutazioni di tre elementi: ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA

I sei casi, pur dando risultati differenti, sono abbastanza simili per quanto riguarda la loro risoluzione. I casi più verosimili sembrano essere l'ordine alfabetico ABC e l'ordine dal più vicino al più lontano CAB.

Affronteremo il primo caso e poi daremo brevemente la soluzione degli altri cinque.

4.1 Ipotesi delle frecce lanciate in ordine ABC

Si suppone che le frecce siano lanciate da un arciere dopo l'altro in ordine alfabetico (ordine A,B,C)

In questo caso le possibilità totali si possono suddividere in quattro eventi tra loro incompatibili

| | | | | |
|-------|------------------------|---|----------------------------------|-----|
| A_1 | A è il primo a colpire | A | $S_4 \vee S_5 \vee S_6 \vee S_7$ | 60% |
| B_1 | B è il primo a colpire | $\bar{A} \wedge B$ | $S_2 \vee S_3$ | 20% |
| C_1 | C è il primo a colpire | $\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C$ | S_1 | 16% |
| | nessuno colpisce | $\bar{C} \wedge \bar{A} \wedge \bar{B}$ | S_0 | 4% |

Dato che sia A_1 che B_1 che C_1 implicano E, negazione di S_0 , risulta

$$P(E|A_1) = P(E|B_1) = P(E|C_1) = 1$$

per il teorema di Bayes

$$\left| \begin{array}{l} P(A_1|E) = \frac{P(E|A_1)P(A_1)}{P(E)} \\ P(B_1|E) = \frac{P(E|B_1)P(B_1)}{P(E)} \\ P(C_1|E) = \frac{P(E|C_1)P(C_1)}{P(E)} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} = \frac{1 \cdot \frac{3}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{5}{8} \\ = \frac{1 \cdot \frac{1}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{5}{24} \\ = \frac{1 \cdot \frac{4}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{1}{6} \end{array} \right|$$

4.2 Confronto tra le permutazioni

Ricordiamo che:

$$\left| \begin{array}{l} P(S_0) = 4\% \\ P(S_4) = 6\% \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} P(S_1) = 16\% \\ P(S_5) = 24\% \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} P(S_2) = 4\% \\ P(S_6) = 6\% \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} P(S_3) = 16\% \\ P(S_7) = 24\% \end{array} \right|$$

I problemi dei tre arcieri

Ricordiamo anche che $P(E)=96\%$

Risolviamo quindi brevemente tutti i casi analoghi a quello già mostrato in precedenza
Ecco dunque i casi relativi alle 3! permutazioni possibili nell'ordine dei tiri, compresi i
due casi già visti:

| | | | | |
|-------------|------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-----|
| $A_{1,acb}$ | A è il primo a colpire | A | $S_4 \vee S_5 \vee S_6 \vee S_7$ | 60% |
| $C_{1,acb}$ | C è il primo a colpire | $\bar{A} \wedge C$ | $S_1 \vee S_3$ | 32% |
| $B_{1,acb}$ | B è il primo a colpire | $\bar{A} \wedge \bar{C} \wedge B$ | S_2 | 4% |

$$P(A_{1,acb}|E) = \frac{5}{8} \quad P(B_{1,acb}|E) = \frac{1}{24} \quad P(C_{1,acb}|E) = \frac{1}{3}$$

| | | | | |
|-------------|------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-----|
| $A_{1,acb}$ | A è il primo a colpire | A | $S_4 \vee S_5 \vee S_6 \vee S_7$ | 60% |
| $C_{1,acb}$ | C è il primo a colpire | $\bar{A} \wedge C$ | $S_1 \vee S_3$ | 32% |
| $B_{1,acb}$ | B è il primo a colpire | $\bar{A} \wedge \bar{C} \wedge B$ | S_2 | 4% |

$$P(A_{1,acb}|E) = \frac{5}{8} \quad P(B_{1,acb}|E) = \frac{1}{24} \quad P(C_{1,acb}|E) = \frac{1}{3}$$

| | | | | |
|-------------|------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-----|
| $B_{1,bac}$ | B è il primo a colpire | B | $S_2 \vee S_3 \vee S_6 \vee S_7$ | 50% |
| $A_{1,bac}$ | A è il primo a colpire | $\bar{B} \wedge A$ | $S_4 \vee S_5$ | 30% |
| $C_{1,bac}$ | C è il primo a colpire | $\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge C$ | S_1 | 16% |

$$P(A_{1,bac}|E) = \frac{5}{16} \quad P(B_{1,bac}|E) = \frac{25}{48} \quad P(C_{1,bac}|E) = \frac{1}{6}$$

| | | | | |
|-------------|------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-----|
| $B_{1,bca}$ | B è il primo a colpire | B | $S_2 \vee S_3 \vee S_6 \vee S_7$ | 50% |
| $C_{1,bca}$ | C è il primo a colpire | $\bar{B} \wedge C$ | $S_1 \vee S_5$ | 40% |
| $A_{1,bca}$ | A è il primo a colpire | $\bar{B} \wedge \bar{C} \wedge A$ | S_4 | 6% |

$$P(A_{1,bca}|E) = \frac{1}{16} \quad P(B_{1,bca}|E) = \frac{25}{48} \quad P(C_{1,bca}|E) = \frac{5}{12}$$

| | | | | |
|-------------|------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-----|
| $C_{1,cab}$ | C è il primo a colpire | C | $S_1 \vee S_3 \vee S_5 \vee S_7$ | 80% |
| $A_{1,cab}$ | A è il primo a colpire | $\bar{C} \wedge A$ | $S_4 \vee S_6$ | 12% |
| $B_{1,cab}$ | B è il primo a colpire | $\bar{C} \wedge \bar{A} \wedge B$ | S_2 | 4% |

$$P(A_{1,cab}|E) = \frac{1}{8} \quad P(B_{1,cab}|E) = \frac{1}{24} \quad P(C_{1,cab}|E) = \frac{5}{6}$$

| | | | | |
|-------------|------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-----|
| $C_{1,cba}$ | C è il primo a colpire | C | $S_1 \vee S_3 \vee S_5 \vee S_7$ | 80% |
| $B_{1,cba}$ | B è il primo a colpire | $\bar{C} \wedge B$ | $S_2 \vee S_6$ | 10% |
| $A_{1,cba}$ | A è il primo a colpire | $\bar{C} \wedge \bar{B} \wedge A$ | S_4 | 6% |

$$P(A_{1,cba}|E) = \frac{1}{16} \quad P(B_{1,cba}|E) = \frac{5}{48} \quad P(C_{1,cba}|E) = \frac{5}{6}$$

4.3 Caso dell'ordine di lancio ignoto

In questo caso si può supporre che ci sia stato un sorteggio a caso di una delle sei (3!) possibilità ritenute equiprobabili.

Indicando con A_1 l'evento "A è il primo a colpire il bersaglio" e sfruttando i risultati del precedente paragrafo abbiamo:

$$P(A_1|E) = \frac{1}{6}P(A_{1,abc}|E) + \frac{1}{6}P(A_{1,acb}|E) + \frac{1}{6}P(A_{1,bac}|E) + \\ + \frac{1}{6}P(A_{1,bca}|E) + \frac{1}{6}P(A_{1,cab}|E) + \frac{1}{6}P(A_{1,cba}|E)$$

Sostituendo in questa e nelle due analoghe si ottiene:

$$P(A_1|E) = 29/96 \quad P(B_1|E) = 23/96 \quad P(C_1|E) = 11/24$$

5. Scenario di una freccia a segno

Sappiamo che è stato deciso che i tre arcieri lancino contemporaneamente ma parallelamente ognuno verso un proprio bersaglio. I bersagli sono stati posti a distanza di sicurezza gli uni dagli altri, ma solo uno dei tre è inquadrato da una telecamera fissa senza audio. Sappiamo che il lancio è imminente, ma non sappiamo altro. Nell'attesa si enuncia il problema:

Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?

In questo caso si verifica l'evento E ="Almeno una freccia raggiunge il bersaglio"

$P(E)=1-P(S_0)$ Nel nostro caso corrisponde al 96%

Sia l'evento A^* ="la freccia a segno è di A", analogamente per B^* e C^* . Risulta:

$$P(A^*) = P(S_4) + \frac{1}{2}P(S_5) + \frac{1}{2}P(S_6) + \frac{1}{3}P(S_7) = 29\%$$

$$P(B^*) = P(S_2) + \frac{1}{2}P(S_3) + \frac{1}{2}P(S_6) + \frac{1}{3}P(S_7) = 23\%$$

$$P(C^*) = P(S_1) + \frac{1}{2}P(S_3) + \frac{1}{2}P(S_5) + \frac{1}{3}P(S_7) = 44\%$$

Essendo $P(E|A^*)=P(E|B^*)=P(E|C^*)=1$ per il teorema di Bayes:

$$\left| \begin{array}{l} P(A^*|E) = \frac{P(E|A^*)P(A^*)}{P(E)} \\ P(B^*|E) = \frac{P(E|B^*)P(B^*)}{P(E)} \\ P(C^*|E) = \frac{P(E|C^*)P(C^*)}{P(E)} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \frac{29\%}{96\%} = \frac{29}{96} \\ \frac{23\%}{96\%} = \frac{23}{96} \\ \frac{44\%}{96\%} = \frac{11}{24} \end{array} \right|$$

6. Scenario del lancio di un arciere non identificato

Immaginiamo che si segua l'evento già iniziato da lontano con un binocolo.

Si vede un arciere che si sta scaldando per lanciare il proprio dardo.

Impossibile identificarlo. Certamente però è A oppure B oppure C con uguali possibilità.

Non sappiamo neppure se l'arciere osservato sia il primo, il secondo o l'ultimo a tirare.

Non possiamo vedere se la freccia che presto sarà scoccata andrà a segno, ma possiamo vedere chiaramente l'arbitro che, come sappiamo, sventolerà le sue bandierine se una freccia colpirà il bersaglio altrimenti allargherà le braccia per segnalare il contrario.

Nell'attesa si formula il problema:

Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?

Indichiamo l'evento "uno dei tre arcieri tira e colpisce il bersaglio" con la lettera E.

Indicando con T_A T_B T_C l'evento in cui a tirare è l'arciere specificato in pedice si ha

$$P(T_A) = P(T_B) = P(T_C) = \frac{1}{3}$$

$$E = T_A \wedge A \vee T_B \wedge B \vee T_C \wedge C$$

e quindi per i teoremi della probabilità composta e totale abbiamo

$$P(E) = \frac{1}{3}P(A) + \frac{1}{3}P(B) + \frac{1}{3}P(C)$$

per cui sostituendo i dati si ottiene:

$$P(E) = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{4}{15} = \frac{19}{30}$$

$$\left| \begin{array}{l} P(T_A|E) = \frac{P(E|T_A)P(T_A)}{P(E)} \\ P(T_B|E) = \frac{P(E|T_B)P(T_B)}{P(E)} \\ P(T_C|E) = \frac{P(E|T_C)P(T_C)}{P(E)} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{19}{30}} = \frac{6}{19} \\ \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{19}{30}} = \frac{5}{19} \\ \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{19}{30}} = \frac{8}{19} \end{array} \right|$$

7. Elementi di storia del problema

Non so né chi abbia ideato né quando sia stato ideato questo problema.

Io ne sono venuto a conoscenza grazie alla mia amica Ivana Niccolai, maestra elementare in pensione e appassionata di matematica.

Da lei ho saputo che il problema nel 2003 fu postato da un corsista nel forum nazionale di matematica dell'Indire moderato da un professore di calcolo delle probabilità

Quasi immediatamente, il moderatore postò la sua soluzione. Siccome nessuno dei docenti partecipanti, compreso chi aveva proposto tale quesito, aveva inviato alcuna soluzione alternativa, Ivana preferì scegliere il silenzio, aspettando di riuscire a capire, prima o poi, la risposta del moderatore. La sua risoluzione era diversa, ma avrebbe voluto comprendere quanto scritto dal moderatore prima di intervenire in merito. Alla fine decise di trascrivere negli appunti, da rivedere in seguito, testo e risoluzione pubblicati, in attesa di trovare, poi, il tempo necessario per una riflessione approfondita, tanto più che in tale periodo era mancata sua madre.

Molti anni dopo, nel 2014, Ivana incontrò lo stesso identico problema nel forum "Matematicamente". Qui trovò una risposta del tutto diversa rispetto a quella postata dal docente di calcolo delle probabilità, da lei trascritta più di dieci anni prima; era invece simile a quella a cui era giunta lei, ma di cui non era sicura. Constatata questa diversità nelle risposte, Ivana cercò in molti modi di dirimere la questione e infine si rivolse anche a me.

All'inizio la soluzione data nel forum Matematicamente mi sembrò essere l'unica corretta. La precisai meglio, chiarendo i passaggi e mettendo bene in evidenza il teorema di Bayes, ma confermandone in pieno il risultato. Poi però, pian piano, stimolato da quella risposta enigmatica, mi resi conto di quanto il testo proposto fosse ambiguo e si prestasse a interpretazioni diverse. Esplorai così un vasto spazio di possibilità cercando di esaminare ogni possibile caso. Mi accorsi quindi che in alcune varianti venivano sfruttati tutti i dati del problema, anche quelli che in prima lettura apparivano curiosamente inutili. Insomma, mi appassionai al problema e alle sue sfaccettature fino al punto di decidere, con la collaborazione di Ivana, di pubblicare, in un sito didattico, Maecla, le varie soluzioni escogitate.

Passati ancora diversi anni ho deciso di rivedere quel lavoro e presentare quel problema a questo simposio.

7.1 Effetto "Ipse dixit"

Tre frecce vengono lanciate contro un bersaglio da tre arcieri. Poiché i tre arcieri sono a distanza diversa dal bersaglio, si stima in $3/5$ la probabilità dell'arciere A di colpire

I problemi dei tre arcieri

il bersaglio, in 1/2 quella dell'arciere B e in 4/5 quella dell'arciere C. Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?

Unica risposta al problema, postato da una corsista nel 2003, fornita dal moderatore Giuseppe Anichini nel forum di matematica

del percorso A del FORTIC:

“Il problema non sembra esaurientemente enunciato.

Aggiungo pertanto una ipotesi ed una doppia casistica:

ipotesi: una SOLA freccia colpisce il bersaglio;

.casistica A): VEDIAMO i 3 amici tirare contemporaneamente.

.casistica B): VENIAMO INFORMATI che uno dei 3 ha tirato ed ha colpito il bersaglio.

- nel caso A e' ovvio che la risposta non puo' essere che $3/5$ essendo indifferente la presenza di 2 (o piu') tiratori;

- nel caso B DOBBIAMO decidere con quale probabilita' il tiratore in oggetto e' A: e' il problema della necessita' di predisporre una valutazione di probabilita' a priori, essenziale nella impostazione bayesiana. In assenza di informazioni possiamo noi supporre probabilita' $1/3$ per tale evento (e per gli analoghi eventi B e C). Tutto cio' precisato la risposta -- diretta applicazione della regola di Bayes -- e' $6/19$ ”

Commento

L'intervento ha il merito di evidenziare deficienze nell'enunciato del problema.

Mentre il caso B corrisponde al nostro scenario del lancio di un arciere non identificato, per quanto riguarda il caso A la risposta data non solo non mi sembra ovvia, ma mi sembra chiaramente errata; quasi certamente inserita ad arte dal docente per stimolare interventi che poi, avendo probabilmente l'autorità del moderatore intimorito i frequentatori del forum, non ci sono stati.

La risposta non è ammissibile perché allora per lo stesso motivo le probabilità di B e di C di essere i lanciatori dell'unica freccia a segno sarebbero 50% e 80%. Ma così la probabilità totale sarebbe 190% invece di 100%! Se poi vogliamo divertirci a cambiare i dati del problema possiamo assegnare a C il 100% (arciere infallibile data la sua estrema vicinanza al bersaglio) e capire senza difficoltà che in questo caso la probabilità che la sola freccia andata a segno sia di A è nulla.

Speriamo inoltre, per motivi umanitari, che A e B abbiano voluto risparmiare la vita di C che comunque, date contemporaneità e vicinanza, avrebbe avuto il tempo di andare a segno!

Siti

- Utente_V, <https://www.matematicamente.it/forum/post163288.html>, Forum Matematicamente, 2007
- Giorgio Pietrocola, <http://www.pietrocola.eu/maecla/iperproblema/index.htm>, Iperproblema dei tre arcieri, Maecla 2014
- Utente_Panurgo, <https://www.base5forum.it/tre-arcieri-tre-freccie-una-freccia-t7760.html>, Forum Base 5, 2014

Razionalità e Probabilità Epistemiche

Raffaele Mascella

Università degli Studi di Teramo
rmascella@unite.it

Abstract. Nell’indagine ultrasecolare, filosofica e scientifica, sui criteri che dovrebbero informare e normare la nozione di razionalità, un posto centrale è stato occupato dalle probabilità epistemiche, ovvero dai giudizi di credenza in contesti di incertezza. In particolare, la cornice di riferimento standard, assumendo la teoria soggettiva della probabilità, richiede che tali giudizi rispettino gli assiomi di Kolmogorov del calcolo delle probabilità classico. Tuttavia, decenni di ricerche sperimentali sul ragionamento hanno evidenziato che tali assiomi sono sistematicamente violati, promuovendo da un lato una spiegazione descrittiva delle violazioni in termini di euristiche e bias, all’interno del programma di ricerca della “razionalità limitata”, dall’altro ispirando una rivisitazione dell’idea di razionalità in termini evolutivisti. Un’alternativa unificante ma non giustificata normativamente, capace di spiegare fenomeni che sono paradossali nella prospettiva classica, è la teoria della probabilità quantistica, alla base del programma di ricerca della “cognizione quantistica”.

Parole Chiave

Bayesianismo, euristiche, assiomatiche probabilistiche.

1. Introduzione.

Le riflessioni e le indagini sulla razionalità vanno al cuore di questioni centrali che riguardano la nostra stessa esistenza. Cosa contraddistingue una scelta razionale da una che non lo è? In base a quale caratteristica noi saremmo degli “animali razionali” a differenza degli altri coabitanti del regno animale? Le proposte teoriche di caratterizzazione della razionalità oggi sono molteplici (Nickerson 2008; Stein 1996) e sono tipicamente di tipo normativo, nel senso che stabiliscono regole generali che le persone dovrebbero rispettare quando ragionano. Solitamente, queste teorie non sono descrittive, cioè non rappresentano in generale ciò che effettivamente accade nel ragionamento, ma comunque esse lo sono almeno parzialmente, in quanto si assume che perlomeno a volte gli esseri umani ragionano seguendo le prescrizioni degli standard normativi.

In particolare, per dominare normativamente le situazioni di incertezza tipiche di questo mondo, fin dall’antichità si è fatto ricorso, oltre alla logica classica, anche al concetto di probabilità, sebbene in un senso superficiale, poco approfondito (Madden 1957), ritenendo il “probabile” come qualcosa che non segua necessariamente – a differenza di quanto accade con la logica deduttiva – ma solo in modo contingente. Il suo uso in

epoca classica è comprovato da una quantità di termini greci e latini che erano già usati per descrivere situazioni incerte in un senso puramente qualitativo, come “probabilis”, “credibilis” e “verisimilis” (Schuessler 2019), ed ancora oggi, la parola “probabile” viene spesso usata con questo significato più antico (Hacking 2006).

A partire dal XVII secolo l’analisi filosofica del concetto di probabilità è divenuta sistematica, andando ad includere anche la sua trattazione quantitativa, grazie alle analisi ed ai primi calcoli probabilistici condotti su giochi da Pascal, Fermat e Huygens (Schuessler 2019) ed a partire da fine Ottocento si è arrivati alla sua formalizzazione anche in termini di teoria assiomatica, per la quale oggi il riferimento è costituito dagli assiomi di Kolmogorov (1933).

Se da un lato la possibilità di un accadimento o che una proposizione sia vera si può riguardare come una caratteristica oggettiva del mondo, quantomeno per una serie di fenomeni, ci si è accorti del fatto che un solo concetto di probabilità non sembra sufficiente per render conto delle sue diverse applicazioni e che le sue fondamenta filosofiche debbano essere attentamente scrutinate. Dunque, si è fatta largo l’idea che esistano interpretazioni diverse di questo concetto e tra queste un ruolo importante è assunto dalla probabilità soggettiva e dall’assunzione della posizione bayesiana, per nulla scontata, secondo cui i nostri gradi di credenza siano rappresentabili numericamente attraverso probabilità. Questa natura duale della probabilità è emersa già nel Seicento (Hacking 2006) perchè da una parte c’era il concetto statistico, connesso alle leggi stocastiche dei fenomeni, dall’altro c’era il concetto epistemologico, connesso alla valutazione dei gradi di credenza ragionevoli, svuotati del loro significato statistico. La differenza era proprio sul piano metafisico, ritenendo che da un lato c’era la probabilità intesa come proprietà attuale di un sistema fisico, indipendente da qualunque stima o misura, dall’altro c’era la probabilità soggettiva, dipendente dalla coscienza e intesa come riguardante lo stato di conoscenza (Hacking 2006). In questo secondo caso, lo stesso Bernoulli e successivamente Laplace, sostenevano la necessità di considerare una probabilità epistemica, a causa della limitatezza e dell’incompletezza della nostra conoscenza.

La visione metafisicamente soggettiva della probabilità, seguendo Baise (2020), si è però sviluppata epistemicamente in due direzioni diverse, sebbene in ciascun caso la probabilità è stata intesa come rappresentazione numerica dei gradi di credenza. Da un lato la direzione “logica” sviluppata da Keynes e Jeffreys, per cui la probabilità è concepita come il grado di credenza che è razionale avere in certe condizioni, per cui può essere pensata come relazione logica tra proposizioni (Keynes 1921) oppure come relazione che scaturisce dall’osservanza alle evidenze empiriche (Williamson 2010). Dall’altro, la direzione “personalistica” di Ramsey, De Finetti e Savage che concepisce la probabilità come misura del grado di confidenza che un agente ha, personalmente, sulla verità di una proposizione (Savage 1972). Questa concettualizzazione non coinvolge il mondo esterno nella sua misurazione, in quanto si tratta di un’interrogazione di sé stessi, e come tale è basata su assunzioni personali ed arbitrarie.

Tuttavia, anche in questa versione epistemica della probabilità si richiede il rispetto delle regole probabilistiche classiche (ovvero di quelle kolmogoroviane), per cui i giudizi finali non possono essere completamente arbitrari, ma devono essere quantomeno *coerenti* (ad esempio, se si crede al 40% che domani pioverà, si dovrà anche credere al 60% che domani non pioverà). Evidentemente, i vari approcci sono determinati anche dalle diverse assunzioni riguardanti il concetto di razionalità, che anche nella versione più liberale della probabilità metafisicamente ed epistemicamente soggettiva ha un elemento normativo determinato dal rispetto delle regole probabilistiche classiche.

Questa posizione ha argomenti a favore ormai consolidati, a partire dalla cosiddetta *scommessa olandese*, ma ha anche dovuto fronteggiare argomenti contrari che sono derivati, in particolare, dal voluminoso riscontro empirico arrivato negli ultimi cinquanta anni dalle neuroscienze, in cui è emerso chiaramente che spesso gli esseri umani fanno stime probabilistiche che non rispettano la teoria probabilistica classica (Kahneman et al. 1982). Ciò ha aperto naturalmente il problema di comprendere e descrivere le tendenze comportamentali e i meccanismi cognitivi alla base delle evidenze empiriche e dall'altro di chiedersi se la formalizzazione probabilistica kolmogoroviana possa essere sostituita da formalizzazioni probabilistiche diverse (Pothos e Busemeyer 2013; Wang et al. 2013) che permettano di spiegare le deviazioni dei risultati empirici dalla teoria probabilistica classica. Uno di questi nuovi modelli è costituito dalla probabilità quantistica, che effettivamente sembra rispondere alle richieste poste e che pone gli studiosi in una situazione simile a quella fronteggiata dai fisici del primo Novecento, in cui accanto ad una forte intuizione nei modelli classici, vi erano anche scoperte empiriche che non potevano essere spiegate con il formalismo classico e che trovarono soluzione in un nuovo formalismo rivoluzionario. Con essa, però, non si assume che i comportamenti decisionali e i giudizi siano trattabili quantisticamente in quanto tale è quantistica la struttura del cervello che ne è alla base, per cui tale deve essere la cornice matematica di riferimento dettata dalla fisica quantistica. Invece, si modella la cognizione con l'apparato matematico quantistico perché l'assunzione è che in essa vi sia un comportamento emergente di tipo quantistico.

2. Razionalità e Bayesianismo

Al cuore degli studi sulla razionalità vi è il sistema di credenze che ogni individuo possiede ed usa, incorporandovi l'esperienza, come rappresentazione del mondo. D'altro canto le credenze sono le fondamenta su cui si basa la nostra conoscenza, visto che nell'impostazione classica della conoscenza si riteneva che essa fosse fondata su credenze giustificate e vere. Ad ogni modo una credenza potrebbe essere razionale anche senza costituire conoscenza, dunque è utile concentrarsi sulle condizioni che rendono razionale una credenza perché anche se la nostra conoscenza ha dei limiti

insormontabili, ciò nondimeno il nostro sistema di credenze può essere razionale e rispettabile.

Chiaramente le fonti delle nostre credenze sono di varia natura, dalla percezione alla memoria, dalla consapevolezza introspettiva all'intuizione, e sappiamo anche che il nostro sistema di credenze può variare nel tempo anche radicalmente, attraverso nuove evidenze o processi inferenziali. Ma non sappiamo esattamente come le nostre credenze si formino di fatto, come le aree cerebrali vengano manipolate dalle varie fonti e come su tale base si formino le capacità inferenziali delle persone che a volte (nonostante un apparato cerebrale abbastanza identico) appaiono molto distanti. Nonostante questa difficoltà sia evidentemente non trascurabile, nel Novecento la spinta derivante dallo scopo di circoscrivere le inferenze non-deduttive razionali ha portato all'idea di introdurre vincoli per normare le nostre credenze, affinché esse potessero essere considerate razionali (Keynes 1921, Carnap 1950), facendo ricorso alla teoria della probabilità.

In questo scenario, un ruolo decisivo che ha portato all'affermazione della probabilità come approccio dominante nella logica induttiva e nelle decisioni è stata la sua formalizzazione assiomatica operata da Kolmogorov (1933) su una base concettuale insiemistica, costituendo una teoria che viene usualmente denominata *teoria della probabilità classica* (d'ora in poi CP).

Supponiamo che Ω sia un insieme non vuoto, che $\mathcal{P}(\Omega)$ sia l'insieme delle sue parti e che sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Diciamo che \mathcal{A} è una σ -algebra booleana se soddisfa le condizioni:

- i) $\Omega \in \mathcal{A}$
- ii) $\forall A \in \mathcal{A}, A' = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- iii) se $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di elementi di \mathcal{A} , allora $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$.

Gli elementi della σ -algebra \mathcal{A} hanno lo scopo di rappresentare eventi, cioè accadimenti del mondo naturale. Sia ora Ω un insieme non vuoto, con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ una σ -algebra e sia $p: \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$. Diciamo che p è una *misura di probabilità classica* (Kolmogoroviana) se soddisfa le seguenti condizioni:

- 1) $p(\Omega) = 1$
- 2) se $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di elementi di \mathcal{A} tale che $\forall A_i, A_j \in \mathcal{A}, A_i \cap A_j = \emptyset$ allora $p(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} p(A_i)$.

Questo secondo assioma può essere anche denominato *principio di estensionalità*, perché si assegna la stessa probabilità ad eventi che hanno la stessa estensione. Tra le infinite conseguenze di questa base assiomatica, consideriamo in particolare alcune proprietà che serviranno nell'analisi seguente. In particolare, la congiunzione e la disgiunzione di due eventi soddisfano la *legge di monotonicità*, secondo la quale, $\forall A, B \in \mathcal{A}$, valgono le disuguaglianze

$$p(A \cap B) \leq \min [p(A), p(B)] \leq \max [p(A), p(B)] \leq p(A \cup B) \leq p(A) + p(B)$$

e con l'ultima disuguaglianza che diventa un'uguaglianza, come stabilisce il terzo assioma, nel caso in cui A e B siano eventi mutuamente esclusivi. Inoltre, $\forall A, B \in \mathcal{A}$ vale la *legge della probabilità totale*, per la quale una probabilità $p(A)$ può essere fornita anche valutando A rispetto alle possibilità che si verifichi o no un altro evento B , cioè

$$p(A) = p(A|B)p(B) + p(A|\neg B)p(\neg B)$$

Un'ulteriore proprietà è che gli eventi in CP sono commutativi, cioè $p(A \cap B) = p(B \cap A)$ da cui segue che, anche nelle stime probabilistiche che ne derivano, ad esempio su un'ipotesi H , rimanga valida la proprietà

$$p(H|A \cap B) = p(H|B \cap A)$$

Questa teoria ha enormi pregi, a partire dalla sua semplicità e dalla sua capacità di rendere conto di una serie di fatti intuitivi. D'altro canto, gli stessi assiomi appaiono come assolutamente motivati normativamente accettabili, vista la loro facile giustificabilità in chiave intuitiva. Ora però, risolto il problema matematico, ci sono quantomeno due problemi da risolvere: il primo è di stabilire che le credenze effettivamente procedono per gradi, il secondo è di decidere se per poter effettuare un'associazione tra credenze e probabilità bisogna ricorrere ad una interpretazione probabilistica metafisicamente ed epistemicamente oggettiva o soggettiva, come evidenziato nell'introduzione.

Oggi si è abbastanza concordi nel rispondere affermativamente ad entrambi i punti, abbracciando la posizione del *bayesianismo*, sebbene le varie posizioni siano un po' divergenti. Sul primo punto si è abbastanza concordi nel riconoscere che la nozione di credenza non è categorica, nel senso che non è un'attitudine ad accettare una proposizione esclusivamente come vera o falsa, quanto piuttosto si tratta di una nozione graduata che esprime un livello di confidenza sulla verità di una proposizione. In generale, la credenza di un individuo in una proposizione può essere considerata come la fiducia che l'individuo è disposto ad accordare alla verità di essa all'interno dei suoi ragionamenti.

Un argomento a favore dell'assunzione delle credenze per gradi è di tipo epistemico: in fondo le nostre credenze sembrano essere costruite su una base evidenziale, giustificativa, ovvero che tanto più sono forti e numerose le evidenze che abbiamo a disposizione, tanto più abbiamo la possibilità di far variare le nostre credenze in relazione ad esse. Ciò comporta che, nello stimare quale sia la probabilità che un certo evento accada, si fa riferimento alla conoscenza in nostro possesso, ma non a questioni fisiche irriducibili, nel senso ontologico prospettato nella fisica quantistica, cioè come caratteristica oggettiva o di propensione del sistema fisico.

Sebbene all'interno del bayesianismo vi siano approcci epistemicamente oggettivi (Williamson 2010) la strada più battuta è quella sulla *probabilità soggettiva*, esplorata concettualmente da de Finetti (1937) e Ramsey (1926) e con Savage (1972) che ne ha dato un'assiomatizzazione convincente all'interno della teoria decisionale classica

dell'*utilità attesa*. L'approccio bayesiano che ne deriva, oggi di larga applicazione in molte aree (informatica, statistica, intelligenza artificiale, economia, filosofia della scienza, e così via), richiede dunque che la valutazione delle credenze sia possibile per valori di intensità diversi. Inoltre, richiede che valgano:

Principio di corrispondenza probabilistica. In qualunque istante t , i gradi di credenza di un individuo sono rappresentabili da una funzione di probabilità $p(\cdot)$;

Principio di condizionalizzazione. Se $p(\cdot)$ è la funzione di probabilità in un certo istante t , e se nell'intervallo $[t, t + \delta]$ le uniche informazioni acquisite consistono nella certezza che E si sia verificato, allora la nuova funzione di probabilità nell'istante $t + \delta$ è identica a $p(\cdot | E)$.

Il principio di corrispondenza probabilistica è normalmente accettato tra gli studiosi bayesiani, ad eccezione di un gruppo di epistemologi per cui sarebbe più opportuno il ricorso a probabilità imprecise (Walley 1991).

Tra gli argomenti a favore del principio di corrispondenza probabilistica, il più noto è l'*argomento della scommessa olandese* (o *Dutch Book*, nel seguito DB), dovuto a Ramsey (1926) e de Finetti (1937), anche se faremo riferimento a quest'ultimo nella nostra esposizione. Cominciamo col supporre che le credenze siano rappresentabili attraverso una funzione di credenza $c(\cdot)$. L'argomento si basa su un'interpretazione dei comportamenti di un individuo rispetto alle possibili scommesse e consiste nel mostrare che l'individuo è razionale se e soltanto se la sua funzione di credenza è una funzione di probabilità.

Una scommessa su A si può definire come un accordo tra due persone in cui lo scommettitore è disposto a pagare un *prezzo* r per ottenere una *posta* s se A risulterà vera. Il rapporto $q = r/s$ rappresenta il *quoziente di scommessa*, per cui la scommessa può essere riassunta come in Figura 1.

| | prezzo pagato | posta ricevuta | guadagno |
|---------|---------------|----------------|--------------------|
| A vera | $r = qs$ | s | $s - r = (1 - q)s$ |
| A falsa | | 0 | $-r = -qs$ |

Figura 1. Configurazione di una scommessa con prezzo r e posta s .

In generale, uno scommettitore cerca di scommettere con il quoziente più basso possibile, ovvero accetta la scommessa per quozienti di scommessa che siano sufficientemente bassi, che lei ritiene vantaggiosi, e non l'accetta per valori abbastanza alti, che lei ritiene svantaggiosi: a far da spartiacque c'è l'*equo quoziente di scommessa*, ovvero il valore $q^* = q^*(A)$ al di sotto del quale lo scommettitore accetta la scommessa, e al di sopra del quale non la accetta. A questo punto gli equi quozienti di scommessa $q^*(A), q^*(B), \dots$ possono essere interpretati come credenze dell'individuo rispetto al verificarsi di A, B , e così via, ovvero si può assumere che $c(A) = q^*(A)$, $c(B) = q^*(B)$, e così via.

Ora, se un individuo è disposto ad accettare alcune scommesse singole, sarà disposto ad accettare anche l'insieme di tali scommesse. Definiamo a tal proposito con *scommessa olandese* un insieme finito di scommesse per il quale, per qualunque combinazione di valori di verità che si presenteranno, l'individuo scommettitore sarà sempre in perdita. Allora un individuo viene considerato razionale se è coerente, ovvero se non accetta scommesse olandesi, cioè se la sua funzione di credenza non lo fa incappare in scommesse olandesi che lo portano ad una perdita certa. Ma la sua coerenza è verificata se, e soltanto se, la sua funzione di credenza è una funzione probabilistica, che rispetta gli assiomi di Kolmogorov. La dimostrazione di questo risultato, fornita da de Finetti (1937), assicura che la razionalità comportamentale di un individuo, concepita come disponibilità a partecipare a scommesse in cui sono coinvolte le sue credenze, proceda di pari passo con le caratteristiche della sua funzione di credenza, ed in particolare essa deve essere una funzione probabilistica. Ovviamente il teorema dimostrato da de Finetti è un risultato matematico, secondo il quale una scommessa olandese non è possibile se e solo se i quozienti di scommessa rispettano gli assiomi di CP, mentre DB è una giustificazione filosofica che si avvale (i) del teorema di de Finetti, (ii) dell'assunzione che la razionalità (benchè si tratti di una razionalità pratica) sia definibile in termini di coerenza nei comportamenti di scommessa, e (iii) dall'assunzione che gli equi quozienti rappresentino i gradi di credenza dell'individuo, ovvero che $c(\cdot) = q^*(\cdot)$. Secondo questo argomento, avere credenze che violano le leggi della probabilità è praticamente irrazionale.

Da notare che, in tutto il ragionamento proposto, all'agente deve importare unicamente la massimizzazione della vincita, dunque non deve avere altro genere di ricompensa o fare altro tipo di considerazioni che lo portino ad agire diversamente nella scommessa, finanche a rifiutare la scommessa per ragioni estranee allo scommettere in quanto tale. In secondo luogo, l'ammontare scommesso deve essere così piccolo per l'agente, rispetto al suo potenziale benessere, che per nessun ammontare più piccolo l'agente cambierebbe la sua disponibilità a scommettere, ovvero le vincite e perdite in termini assoluti non influenzano l'agente.

L'argomento DB è ancora oggi molto dibattuto, a partire dalla vulnerabilità che sembra esserci nell'associare le credenze con i comportamenti di scommessa. Se da una parte questa posizione è accettata perché sembra naturale che decisioni e azioni di un individuo siano fortemente correlate alle sue credenze (Savage 1954), dall'altra l'associazione puntuale delle credenze con gli equi quozienti sembra meno ovvia, a maggior ragione in tutte quelle situazioni dove la verifica del valore di verità è impossibile in un tempo finito. Ad esempio, se si ha a che fare con un dominio di oggetti infinito, o comunque dalla numerosità indefinitamente grande, la veridicità di una proposizione universale (del tipo "ogni oggetto ha la proprietà X ") o di una proposizione statistica (del tipo "ogni oggetto ha il $n\%$ di avere la proprietà Y ") può non essere possibile in un tempo finito, per cui è la definizione di equo quoziente di scommessa che non è più applicabile.

A mettere in discussione se DB sia un argomento così forte a sostegno di un approccio credenziale probabilistico è anche la critica epistemologica di Kennedy e Chihara (1979), secondo cui i fattori che rendono irrazionale l'averne un insieme di credenze probabilisticamente non coerenti sono irrilevanti, dal punto di vista epistemico, rispetto alla verità delle proposizioni valutate. In altri termini, il fatto che un individuo possa perdere soldi, a meno che non abbia gradi di credenza che obbediscono alle leggi probabilistiche, non sarebbe epistemologicamente rilevante per la verità di tali credenze. La risposta bayesiana a tale critica è tipicamente pragmatista, nel senso che (de Finetti 1937) sembra essere abbastanza naturale assumere che la probabilità che un individuo attribuisce ad un evento sia rivelata dalle condizioni in base alle quali l'individuo sia disposto a scommetterci sopra.

Nonostante gli argomenti contrari a DB, ad oggi esso rimane l'argomento più forte a favore della corrispondenza probabilistica. Altri argomenti sono comunque stati dati nel tempo a favore di DB, a partire dall'argomento di Cox (1946) e Good (1950), secondo il quale una funzione di credenza che rispetta alcuni requisiti qualitativi minimali altamente intuitivi (ovvero che (i) la credenza di $A \& B$ rispetto ad un'evidenza C dipende soltanto da due altri valori di credenza, ovvero dalla credenza di A rispetto a $B \& C$ e dalla credenza di B rispetto a C , e (ii) che la credenza di $\neg A$ rispetto a B dipende solo dalla credenza di A rispetto a B) deve essere esprimibile attraverso una funzione probabilistica. Ma, anche per questo argomento, alcuni sostengono che la plausibilità, sebbene alta, non sia tale da essere innegabile e definitiva (Earman, 1992).

In questo scenario, in cui il dibattito è evidentemente aperto su molti fronti, occorre però dire che la larga accettazione del bayesianismo deriva dal fatto che esso è in grado di fornire una teoria unificata sia della razionalità epistemica, attraverso la probabilità soggettiva, sia della razionalità pratica, con la teoria soggettiva dell'utilità attesa, assiomaticamente più complessa – in quanto fissa contemporaneamente le norme da rispettare per costruire le probabilità e le utilità soggettive – ma difficile da eguagliare per eleganza e giustificazione intuitiva delle sue assunzioni.

Tuttavia, se il bayesianismo è così largamente accettato, come si spiega però che le evidenze sperimentali mostrino ormai chiaramente che le decisioni delle persone spesso non rispettano le leggi probabilistiche? A tale scopo, non bisogna confondere la giustificazione razionale del bayesianismo con la sua capacità descrittiva, in quanto esso costituisce una posizione normativa del comportamento razionale, non una teoria empirica del comportamento attuale. Abitudini, euristiche, emozioni influenzano le scelte (Tversky e Kahneman 1974), come hanno dimostrato le ricerche cognitive, ma tutto ciò che il modello bayesiano prova a fare è di suggerire quali siano le opzioni razionali da scegliere, per le quali si hanno maggiori giustificazioni.

3. Evidenze empiriche e razionalità limitata

A metà del Novecento, Simon (1955) inaugurò una serie di studi in cui introdusse la nozione di *razionalità limitata* con l'intenzione di rimpiazzare il modello di razionalità (ottimale, illimitata) con un altro modello che tenesse in debita considerazione le limitazioni nelle capacità computazionali degli esseri umani e nell'accesso alle informazioni nei contesti decisionali. Quando gli individui (o le organizzazioni) ricevono un stimolo esterno, secondo Simon essi reagiscono replicando comportamenti passati, se è possibile, oppure attivano nuove strategie tese a semplificare la risoluzione dei problemi. Ma l'incertezza del mondo reale è alta, e la ricerca dell'ottimalità è molto ardua, per cui la disamina delle alternative a disposizione e delle loro conseguenze non è mai effettuata integralmente, preferendo invece semplificare il processo decisionale attraverso la scelta di opzioni che siano *soddisfacenti*, cioè che permettano di raggiungere un certo livello di aspirazioni posseduto.

L'intuizione di Simon, sebbene poco seguita nell'immediato, ha di fatto dato avvio ad un vasto programma di ricerca che potremmo definire *della razionalità limitata*, che è stato successivamente ampiamente dettagliato per via sperimentale dagli studi della psicologia cognitiva. In particolare, questi studi hanno fornito numerose evidenze empiriche che CP non è in grado di spiegare efficacemente il modo in cui le persone effettuano i loro giudizi probabilistici, portando a comprendere che sotto l'aspetto comportamentale i gradi di credenza violano spesso le leggi probabilistiche classiche. Infatti, in una serie di studi iniziati negli anni Settanta, sono state dimostrate diverse violazioni dalla teoria probabilistica classica, tipicamente consistenti in errori commessi nella formulazione dei giudizi probabilistici e in errori di tipo decisionale, quando il giudizio probabilistico interviene assieme ad altri elementi. Tra questi, tanto per citarne alcuni, figurano la fallacia di congiunzione e di disgiunzione, l'effetto di disgiunzione e di ordinamento, la fallacia dello scommettitore, la fallacia della pianificazione, la fallacia del tasso di base, e molte altre ancora.

Illustriamo alcuni di questi risultati. Ad esempio, nel classico *problema di Linda* (Tversky e Kahneman 1983) si richiede di assegnare, per ciascuna affermazione, il grado con cui si ritiene che Linda, per come è descritta, sia un tipico membro della classe indicata.

Linda ha 31 anni, è single, schietta e molto brillante. Si è laureata in filosofia. Da studentessa era profondamente interessata alle questioni di discriminazione e di giustizia sociale e ha anche partecipato a manifestazioni antinucleari.

Ordina le seguenti affermazioni in base alla loro probabilità di verificarsi, assegnando 1 al più probabile e 8 al meno probabile.

Linda è un'insegnante alle elementari

Linda lavora in una libreria e prende lezioni di yoga

Linda è una femminista attiva

Linda è un'assistente sociale

Linda è un membro della Lega delle Donne che Votano

Linda è una cassiera di banca

Linda è una assicuratrice

Linda è una cassiera di banca ed una femminista attiva

La descrizione di Linda è fatta in modo da essere rappresentativa di una femminista (F) e non rappresentativa di una cassiera di banca (B). E in effetti, confermando le ipotesi degli autori, le risposte ottenute da Tversky e Kahneman indicavano che per l'85% la possibilità che Linda appartenesse alla congiunzione di attributi $B \& F$ era più alta rispetto alla possibilità di appartenere al congiunto meno rappresentativo B , cioè riteneva che $p(B \& F) > p(B)$. In una successiva riformulazione di Morier e Borgida (1984), veniva ridotto il numero di opzioni a quattro, con l'inserimento dell'opzione $B \vee F$, chiedendo altresì di stimarne la probabilità. I risultati ottenuti in media sono i seguenti

$$p(B) = 0.26 \quad p(B \& F) = 0.36 \quad p(B \vee F) = 0.60 \quad p(F) = 0.83$$

Dunque le stime confermano che si ritiene $p(B \& F) > p(B)$, ma anche che $p(B \vee F) < p(F)$, violando in entrambi i casi la legge della monotonicità. Per la prima violazione si parla di *fallacia della congiunzione*, per la seconda di *fallacia della digiunzione*. La spiegazione fornita, inoltre, è che a spingere verso queste stime è proprio il fatto che la descrizione di Linda la faccia sembrare una tipica femminista attiva, per cui sembra più probabile che Linda appartenenga ad una congiunzione di classi che includa F piuttosto che appartenenga ad una classe semplice (cioè, non congiunta) che non sembra essere molto corrispondente. Dunque, è una spiegazione in termini di *euristica della rappresentatività*, in quanto Linda sembra rappresentare meglio la congiunzione di attributi $B \& F$ rispetto al solo attributo B , e l'attributo F rispetto alla disgiunzione $B \vee F$. Oggi esiste una larga evidenza empirica che conferma tali risultati e sono state proposte ulteriori ipotesi esplicative.

Un altro risultato è quello per cui spesso le persone tendono a sottostimare la probabilità di un evento rispetto a quella che si assegna quando l'evento è sciolto in alcuni dei suoi componenti particolari. In particolare, nel *problema del motore* di Fischhoff et al. (1978), rivolta sia a meccanici che a non esperti, veniva chiesto di valutare la probabilità delle cause che impediscono ad un'automobile di essere avviata. In particolare, chiedendo di stimare la probabilità che non si trattasse di un problema di batteria, di sistema di carburazione e di motore, si otteneva una media di 0.14, mentre se venivano esplicitate le possibili cause per questa parte residuale (un problema al sistema di avviamento, oppure al sistema di iniezione, oppure di una cattiva condotta) si passava ad una media di 0.46. Altro esempio classico su questa linea è il *problema della terminazione delle parole* sperimentato da Tversky e Kahneman (1983), in cui emergeva come la stima della percentuale di parole di sette lettere terminanti con “_n_” (cioè avente la “n” come penultima lettera) fosse inferiore a quella di parole di sette lettere terminanti con “ing”. Questo tipo di giudizi è inconsistente con il principio di estensionalità, in quanto la probabilità di un insieme di eventi che concorrono

estensionalmente a formare un evento più ampio non può essere superiore alla probabilità di quest'ultimo. La spiegazione fornita all'interno del paradigma della razionalità limitata è che intervenga l'*euristica della disponibilità*, per cui nello scenario che esplicita le casistiche si tende a sovrastimare la probabilità complessiva rispetto allo scenario meno informativo, in cui la memoria non viene facilitata.

Un altro classico problema è il *problema Hawaii*, proposto da Tversky e Shafir (1992), che mette in evidenza l'effetto disgiunzione in situazioni di incertezza. Il problema è composto da tre situazioni diverse, originariamente presentate a degli studenti. La prima è illustrata nello "scenario disgiuntivo", la seconda e la terza sono illustrate nello "scenario superato/bocciato", con le differenze derivanti solo dai passaggi tra parentesi quadre.

(Scenario disgiuntivo) Immagina di aver appena sostenuto un duro esame. È la fine del semestre invernale, ti senti stanco e non sei sicuro di aver superato l'esame. Nel caso in cui non avessi superato l'esame, dovrai sostenere di nuovo l'esame tra un paio di mesi, dopo le vacanze di Natale. Ora hai l'opportunità di acquistare un pacchetto vacanze di Natale alle Hawaii di 5 giorni molto interessante a un prezzo eccezionalmente basso. L'offerta speciale scade domani, mentre il voto d'esame non sarà disponibile fino al giorno successivo. Vorresti:
 (x) comprare il pacchetto vacanze
 (y) non comprare il pacchetto vacanze
 (z) pagare una quota di \$5 non rimborsabile per mantenere i diritti di acquistare il pacchetto vacanze allo stesso prezzo eccezionale dopodomani (dopo aver scoperto se hai superato l'esame)

(Scenario superato/bocciato) Immagina di aver appena sostenuto un duro esame. È la fine del semestre invernale, ti senti stanco e hai scoperto di [aver superato l'esame/non aver superato l'esame. Dovrai sostenere di nuovo l'esame tra un paio di mesi, dopo le vacanze di Natale]. Ora hai l'opportunità di acquistare un pacchetto vacanze di Natale alle Hawaii di 5 giorni molto interessante a un prezzo eccezionalmente basso. L'offerta speciale scade domani. Vorresti:
 (x) comprare il pacchetto vacanze
 (y) non comprare il pacchetto vacanze
 (z) pagare una quota di \$5 non rimborsabile per mantenere i diritti di acquistare il pacchetto vacanze allo stesso prezzo eccezionale dopodomani (dopo aver scoperto se hai superato l'esame)

Nei tre scenari, Tverski e Shafir ottennero i seguenti risultati

| | (x) | (y) | (z) |
|----------------------|------|------|------|
| Scenario disgiuntivo | 0.32 | 0.07 | 0.61 |
| Senario superato | 0.54 | 0.16 | 0.30 |
| Scenario bocciato | 0.57 | 0.12 | 0.31 |

scoprendo che si tende a privilegiare la scelta (x) se si conosce l'esito dell'esame, qualunque esso sia (rispettivamente 0.54 e 0.57, a fronte del 0.30 e del 0.31 per l'opzione (z)), mentre nella situazione incerta illustrata dallo scenario disgiuntivo si tende a privilegiare l'opzione (z) a scapito di (x) (0.61, contro il 0.32 per (x)). Emerge cioè che, mentre la conoscenza del superamento o del non superamento dell'esame rende evidenti quali siano le buone ragioni per andare in vacanza (rispettivamente, come premio in caso di superamento e come consolazione altrimenti), nel caso disgiuntivo il non avere chiare, esplicitate, le ragioni per andare in vacanza, si tende a rimandare la scelta. Si tratta di un esempio di errore decisionale, in cui emerge un disaccordo con la legge delle probabilità totale. Infatti, se indichiamo con H la scelta di comprare la vacanza hawaiana e con S il superamento dell'esame, per cui la probabilità di comprare la vacanza senza sapere l'esito dell'esame è $p(H) = 0.32$, mentre $p(H|S) = 0.54$ e $p(H|\neg S) = 0.57$ rappresentano le probabilità di acquistare la vacanza sapendo del superamento oppure del non superamento dell'esame, allora si dimostra facilmente che con tali probabilità non esiste alcuna probabilità $p(S)$ che soddisfa la legge della probabilità totale, visto che applicando la legge deve verificarsi che $0.32 = 0.54p(S) + 0.57p(\neg S)$ da cui $0.32 = 0.54p(S) + 0.57(1 - p(S))$ ovvero $p(S) = 0.25/0.03 = 8.33$ che è evidentemente impossibile. La spiegazione fornita in termini di euristiche è che nel caso disgiuntivo ci sia una situazione di incertezza che non rende chiaro che le preferenze nei due casi possano convergere, e solo se l'individuo si concentra sulle possibilità di superare o non superare l'esame le sue preferenze diventano chiare. Lo scenario disgiuntivo, in altri termini, offusca la situazione rendendola incerta e quindi rende più difficile la comprensione delle implicazioni di ciascun risultato d'esame.

Un'ulteriore situazione paradossale alla luce della teoria probabilistica classica è ben illustrata dal *problema dell'infezione*, che Bergus et al. (1998) posero a un campione di medici cercando di capire se l'ordine con cui sono forniti i dati clinici influenza le decisioni diagnostiche. Nello specifico, i medici coinvolti dovevano valutare la probabilità che una paziente avesse un'infezione al tratto urinario (d'ora in poi indicata con I) avendo l'informazione generale che la paziente avesse 28 anni e lamentasse un fastidio in fase di minzione e delle informazioni specifiche, fornite successivamente e in ordine inverso ai due gruppi campione, sulla storia e sull'esame fisico della paziente (d'ora in poi S) e sui dati di laboratorio (d'ora in poi L). I due tipi di informazioni specifiche erano molto diversi tra loro, in quanto S spingeva a pensare alla presenza dell'infezione I , mentre L conteneva dati clinici tendenzialmente poco evocativi sulla presenza di I (alcuni lo erano poco, altri per nulla). La situazione osservata risultò mediamente la seguente.

| | <i>S-prima</i> | <i>S-dopo</i> |
|---|-----------------------|-----------------------|
| Probabilità dopo informazioni generiche | $p(I) = 0.674$ | $p(I) = 0.678$ |
| Probabilità dopo le prime informazioni | $p(I S) = 0.778$ | $p(I L) = 0.440$ |
| Probabilità dopo le ultime informazioni | $p(I S, L) = 0.509$ | $p(I L, S) = 0.591$ |

Figura 2. Aggiornamenti probabilistici nel problema dell'infezione.

I dati suggeriscono che i medici avevano dato più importanza all'ultima informazione ricevuta, che trova spiegazione in un effetto che è stato confermato dalla letteratura noto come *effetto recenza*. Si potrebbe pensare che queste differenti valutazioni siano dovute a problemi di memoria, ma come gli stessi autori avevano precisato, ciò non sembra plausibile perché le informazioni erano brevi e fornite sequenzialmente senza ritardi. Dunque, all'interno della razionalità limitata questo effetto derivante da ordinamenti diversi (o *effetto di ordine*) sembra piuttosto essere dovuto alla procedura di aggiornamento delle credenze che, quando procede per vie diverse, non necessariamente è convergente, contrariamente a quanto stabilisce la teoria classica.

Dunque, all'interno del programma della razionalità limitata le spiegazioni di questi giudizi probabilistici distorti è affidata al fatto che gli individui utilizzerebbero particolari relazioni cognitive che fungono da scorciatoie, come la rappresentatività o la disponibilità, che vengono usate in base al contenuto specifico del giudizio richiesto, per cui non ci si concentra più sull'uso corretto dei principi probabilistici nella formulazione dei giudizi. Ad ogni modo, questa spiegazione in termini di euristiche è stata criticata da altri studiosi. Alcuni, come Gigerenzer (1996), sostengono che la spiegazione in termini di euristiche sia troppo vaga e carente di specifiche teoriche accurate. Per altri, molti risultati deriverebbero da una semplice incomprensione linguistica dei problemi sottoposti. Ad esempio, rispetto alla fallacia della congiunzione, Tentori et al. (2013) hanno evidenziato che a creare la distorsione sembra piuttosto intervenire un'interpretazione in termini di conferma induttiva.

4. Alternative teoriche e cognizione quantistica

Come abbiamo già osservato, l'opportunità di adottare l'interpretazione probabilistica classica per rappresentare i gradi di credenza è stata ed è ancora al centro di un lungo dibattito. La questione, si pone su due piani diversi: giustificabilità normativa e adeguatezza descrittiva. Sul piano normativo, la critica non è molto feroce in quanto all'apparato classico viene riconosciuto un altro grado di giustificazione intuitiva, e ad oggi è discutibile affermare se sia stato superato dalle teorie rivali, per via di virtù normative superiori. Tuttavia, molti studiosi sono scettici nell'assumere una misura di probabilità assiomatica in senso additivo, ovvero che rispetti sempre l'uguaglianza proposta nel secondo assioma di Kolmogorov. Questo genere di modifica è dettato in primis dal fatto che le persone, come si è visto ad esempio con l'esperimento di Fischhoff et al. (1978), tendono a sottostimare la misura probabilistica di un evento rispetto alla somma delle stime effettuate sui suoi componenti. In particolare, alcuni modelli, come la teoria di Gilboa e Schmeidler (1989) hanno assunto una rappresentazione probabilistica di tipo subadditivo, ovvero che, se A e B sono eventi mutuamente esclusivi allora per loro vale in modo meno stringente che

$$p(A \vee B) \leq p(A) + p(B)$$

Questa idea assiomatica è stata percorsa in un modo leggermente diverso nella teoria del supporto di Tverski e Koehler (1994), in cui la subadditività viene richiesta considerando il problema derivante dalla verbalizzazione differenziata, cioè dal fatto che verbalizzazioni differenti di uno stesso evento possono portare a giudizi diversi, diventando inferiori quando la descrizione va ad includere implicitamente più casistiche. Per cui, considerando le verbalizzazioni A' , B' e C' corrispondenti rispettivamente agli eventi A , B e C , con $C' = (A \vee B)'$ e A e B mutuamente esclusivi, allora Tverski e Koehler hanno proposto di assumere che

$$p(C) \leq p(A \vee B) = p(A) + p(B)$$

L'inquadramento di questa assiomatizzazione non-additiva all'interno della teoria decisionale soggettiva è stata percorsa da molti, tra cui Gilboa (1987), come risposta al problema dell'ambiguità evidenziato da Ellsberg (1961), e Schmeidler (1989), riuscendo in tal modo a spiegare alcuni paradossi della teoria dell'utilità attesa. La violazione del principio di estensionalità, così come altre violazioni confermate più volte in letteratura, ha dunque portato a revisionare in più direzioni il modello teorico di probabilità soggettiva, variando opportunamente il modello classico.

Sul piano descrittivo, invece, la critica è molto più profonda ma per certi versi anche meno problematica perché ormai c'è un accordo trasversale che la teoria CP, così come l'approccio bayesiano, non siano capaci di descrivere adeguatamente le risultanze comportamentali delle persone. In questa direzione, una prima strada è stata aperta all'interno del paradigma della razionalità limitata con la formulazione della teoria del prospetto (Tversky e Kahneman 1979) che considera le stime probabilistiche all'interno di una cornice decisionale.

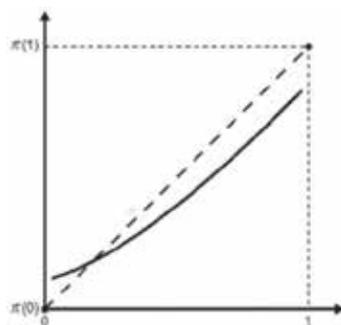


Figura 3. La funzione peso che interviene nella teoria del prospetto e che spiega in che modo i giudizi probabilistici sono distorti nei contesti decisionali.

Sulla base delle risultanze empiriche, Kahneman e Tversky hanno elaborato la rappresentazione dei giudizi probabilistici attraverso una funzione “peso” che assegna valori distorti alle probabilità reali (come si evince dalla Figura 3): (i) per probabilità p piccole, $\pi(p) > p$, ovvero i valori piccoli sono sopravvalutati; (ii) per probabilità p medie o grandi, $\pi(p) < p$, ovvero i valori sono sottovalutati; (iii) vicino ai punti estremi, ovvero alla certezza e all'impossibilità, esiste un limite oltre il quale non viene

attribuito un peso: l'individuo effettua una semplificazione che lo porta ad ignorare probabilità estreme in favore della certezza e dell'impossibilità. Dunque, sulle probabilità piccole avviene una situazione paradossale: sotto un certo limite vengono ignorate, sopra di esso vengono sopravvalutate.

Le evidenze empiriche hanno portato a chiedersi anche se la rappresentazione formale fornita dalla probabilità classica sia l'unica possibile ed accettabile per formalizzare l'incertezza. Il programma di ricerca della razionalità limitata introdotto da Simon (1955) e approfondito empiricamente da Tversky-Kahneman (1974) interpreta le deviazioni empiriche dalla teoria classica come errori di ragionamento, spiegandole in termini di euristiche e di bias cognitivi. Questo tipo di spiegazione, tuttavia, pur essendo molto interessante, ha il difetto dell'eccessiva arbitrarietà ed è limitato nelle sue capacità esplicative. Ciò ha riportato a ripensare i giudizi probabilistici in una chiave fondazionalmente molto diversa, adottando un nuovo modello denominato *cognizione quantistica*, in cui l'apparato matematico è costituito dalla teoria della *probabilità quantistica* (QP) assiomatica di Dirac (1930) e von Neumann (1932). Questo paradigma teorico interpreta tali deviazioni come se fossero il risultato di strutture quantistiche emergenti nel ragionamento umano (Aerts et al., 2015) e permette di costruire modelli descrittivi vincolati alle scoperte empiriche che sono state problematiche dalla prospettiva classica di CP, come gli effetti visti nel paragrafo precedente. Tra questi, vi sono i modelli di Pothos e Busemeyer (2009), di Trueblood e Busemeyer (2011) e i Wang e Busemeyer (2013).

Ma quali caratteristiche rendono la probabilità quantistica una cornice promettente per comprendere la cognizione e ciò che accade nei giudizi probabilistici? Oltre alla capacità di spiegare alcuni fenomeni cognitivi in cui le probabilità classiche non sono adeguate, la proposta di usare QP è venuta dal fatto che giudizi e decisioni sono sempre più visti come processi di misura in cui avviene un'interazione tra l'apparato che misura e l'oggetto misurato, per cui l'oggetto misurato viene influenzato in modo non prevedibile, se non soltanto in modo probabilistico, portando ad avere un indeterminismo nei processi concettuali. Chiaramente, si tratta di un approccio che richiama il modello della fisica quantistica, derivante dal fatto che molti studiosi in ambito cognitivo e sociale (Sen 1997) hanno iniziato a guardare ai processi di ragionamento e di scelta non come processi passivi, di recupero di informazioni già registrate, quanto piuttosto di processi attivi, di misurazione.

Peraltro, l'apparato matematico quantistico implica matematicamente alcuni fenomeni particolari come la sovrapposizione, l'entanglement, l'incompatibilità e l'interferenza. Ad esempio, la sovrapposizione di stati in ambito fisico riguarda il fatto che una particella si trovi potenzialmente in più posizioni, senza trovarsi effettivamente in nessuna di queste; invece in psicologia la sovrapposizione sembra essere un modo intuitivo per caratterizzare le sfumature, il conflitto, l'ambivalenza del pensiero quotidiano (Pothos e Busemeyer 2013).

Secondo CP tutte le valutazioni probabilistiche sono tra loro compatibili, nel senso che le stime possono essere considerate in contemporanea. Ciò comporta che i giudizi probabilistici su due eventi A e B possono essere sempre effettuati, almeno teoricamente, in simultanea, senza interferenze reciproche, portando ad avere che il verificarsi di due eventi A e B può essere considerato in modo congiunto, attraverso $p(A\&B)$. Invece, in QP le stime possono essere compatibili o incompatibili, per cui se due domande A e B sono compatibili, è sempre possibile considerare la congiunzione $A\&B$, ma se sono incompatibili è impossibile definire la loro congiunzione, in quanto una risposta alla domanda A implica una sovrapposizione di stati con la domanda B (cioè se A è vera o falsa in un certo momento, nello stesso momento B non può essere né vera né falsa). In tal caso, non esiste alcuno spazio campionario in cui si possono valutare le stime congiuntamente. Ovvero, il *principio di unicità* (Griffiths 2003) per cui esiste una unica descrizione esaustiva di ogni proprietà del sistema non vale nella probabilità quantistica.

Invece, QP permette di definire una congiunzione sequenziale del tipo “ A , e poi B ”, in cui però la domanda A può influenzare la risposta alla domanda B , per cui emergono effetti di interferenza e la valutazione di una domanda probabilistica crea una nuova prospettiva che altera la valutazione delle domande che seguono. Questo è un modo nuovo di pensare alle probabilità, in cui effettuare una stima probabilistica può interferire con le stime successive, per cui l’ordine con cui le stime sono effettuate diventa rilevante. D’altra parte, come abbiamo visto, giudizi e preferenze spesso evidenziano effetti di ordine e di contesto, per cui in tali casi QP sembra fornire una spiegazione naturale dei processi cognitivi (Pothos e Busemeyer 2013).

Inoltre, bisogna anche tener presente che, per ciò che riguarda il funzionamento del sistema concettuale, i dati raccolti empiricamente sulla combinazione di concetti (Hampton, 1988) non possono essere giustificati attraverso modelli di probabilità classiche, ma possono essere spiegati con l’apparato matematico quantistico, poiché le descrizioni operazionali sui sistemi concettuali sono rappresentabili in modo analogo a quelle dei sistemi concettuali. Come conseguenza di ciò, il modello cognitivo quantistico assegna al sistema cognitivo delle proprietà attuali indipendenti da eventuali misure successive, ma all’atto della misura l’interazione dell’apparato misuratore altera lo stato misurato in modo non deterministico.

Un’altra delle ragioni che rende la teoria QP attraente per la cognizione è che il suo apparato matematico è particolarmente robusto, sottoposto a esami critici approfonditi (Pothos e Busemeyer 2013) in ambito fisico. Ma va precisato che la cognizione quantistica non ha a che fare con l’applicazione della fisica quantistica nella modellizzazione dei fondamenti dei nostri processi di ragionamento, bensì consiste nell’applicazione del solo apparato matematico, cioè QP, ovvero dell’utilizzare la cornice matematica tipica della fisica quantistica per modellizzare il comportamento emergente del sistema cognitivo quando produce giudizi probabilistici.

Nonostante CP e QP siano teorie probabilistiche differenti, con assiomatiche molto diverse e stime spesso divergenti, esse hanno comunque degli aspetti in comune a partire dal medesimo obiettivo di quantificare l'incertezza e di provare a modellare la cognizione umana attraverso una cornice probabilistica formale. Ciò significa che entrambe possono essere applicate, perlomeno in linea di principio, in qualunque altra scienza che necessiti di formalizzare l'incertezza. Ma mentre i modelli cognitivi CP nascono da idealizzazioni normative, nel senso che derivano da una analisi fondazionale sulla razionalità, i modelli QP nascono più propriamente da una astrazione teorica che generalizza i dati empirici, in quanto derivano dal tentativo di tener conto dei meccanismi cognitivi della mente.

Vediamo su quali aspetti formali si basa QP. Nella cognizione quantistica, il primo ingrediente da considerare è che lo spazio delle possibili credenze è costituito da uno spazio di Hilbert complesso \mathcal{H} , ovvero da uno spazio vettoriale lineare e completo dotato di prodotto interno, generalmente assunto come finito. Dunque, per lo spazio \mathcal{H} sono soddisfatti i seguenti assiomi: se $|u\rangle, |v\rangle \in \mathcal{H}$ (nella notazione di Dirac, gli elementi di \mathcal{H} sono denotati con $|u\rangle$) e $a, b \in \mathbb{C}$ (dove \mathbb{C} è l'insieme dei numeri complessi) allora:

- (1) $|u\rangle + |v\rangle \in \mathcal{H}, a|u\rangle \in \mathcal{H}$
- (2) $a(|u\rangle + |v\rangle) = a|u\rangle + a|v\rangle$
- (3) $(a + b)|u\rangle = a|u\rangle + b|u\rangle$
- (4) $a(b|u\rangle) = ab|u\rangle$
- (5) $|u\rangle + |v\rangle = |v\rangle + |u\rangle$
- (6) $|u\rangle + (|v\rangle + |w\rangle) = (|u\rangle + |v\rangle) + |w\rangle$
- (7) $|u\rangle + |0\rangle = |u\rangle$
- (8) $|u\rangle + |-u\rangle = |0\rangle$

Il prodotto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$ di \mathcal{H} è sempre un numero complesso ($\langle \cdot | \cdot \rangle: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$), che soddisfa i seguenti assiomi:

- (9) $\langle u|u\rangle \geq 0$, con $\langle u|u\rangle = 0$ se e solo se $|u\rangle = |0\rangle$
- (10) $\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle^*$ (dove $\langle v|u\rangle^*$ è il complesso coniugato di $\langle v|u\rangle$)
- (11) $\langle u|(a|v\rangle + (b|w\rangle) = a\langle u|v\rangle + b\langle u|w\rangle$

Se $\langle u|v\rangle = 0$ allora i vettori $|u\rangle, |v\rangle$ sono detti *ortogonali*; inoltre, il prodotto interno induce una norma $|\cdot|: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $||u\rangle| = \sqrt{\langle u|u\rangle}$ e particolare importanza è rivestita dai vettori unitari, aventi norma 1. Mentre in CP gli eventi sono sottoinsiemi dello spazio campionario, nella probabilità quantistica gli eventi sono sottospazi dello spazio di Hilbert. Avendo uno spazio finito n-dimensionale, si ha anche che un insieme di vettori ortogonali e di norma 1 $\{|h_i\rangle\}, i = 1, \dots, n$ costituisce una base ortonormale, per cui ogni altro vettore $|u\rangle$ può essere espresso come combinazione lineare di essi

$$|u\rangle = \sum_{i=1}^n u_i |h_i\rangle = |0\rangle$$

ed ovviamente, nello stesso spazio \mathcal{H} , un vettore $|u\rangle$ può essere espresso in varie basi. Nel modello della cognizione quantistica ciò significa che un vettore può essere espresso come una combinazione lineare di una serie di dimensioni concettuali di base. Ad esempio, nel problema di Linda, la base ortonormale può rappresentare le varie dimensioni concettuali che entrano in gioco nella descrizione stessa di Linda, come “giovane” (o “vecchia”), “femminista attiva” (o “non femminista attiva”), “sposata” (o “non sposata”), “brillante” (o “non brillante”) e così via.

Su questo spazio un *operatore* è una funzione $O: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ che ad un elemento dello spazio fa corrispondere un altro elemento. In particolare, ci interessano gli operatori di *proiezione ortogonale* P_A su un sottospazio A dello spazio \mathcal{H} , che proiettano qualunque vettore sul sottospazio A . Queste proiezioni, nel modello della cognizione quantistica, corrispondono a domande elementari, a cui si può rispondere “sì” o “no” e hanno la caratteristica di essere autoaggiunti (ovvero, per ogni $|u\rangle, |v\rangle \in \mathcal{H}$ vale $\langle u|P_A|v\rangle = \langle v|P_A|u\rangle^*$ ed idempotenti (ovvero $P_AP_A = P_A$).

Il secondo ingrediente che occorre nel modello è l’indicazione dello stato di credenza iniziale, che può essere data attraverso un *vettore di stato* specifico $|\psi\rangle$ di \mathcal{H} , contenente le informazioni sullo stato cognitivo di partenza, cioè prima di effettuare qualunque computazione (o misurazione). Infatti, così come nella fisica quantistica ci sono gli osservabili, ovvero quelle quantità che possono essere misurate in seguito ad uno esperimento, nel modello della cognizione quantistica ciò che si può osservare deriva dall’esplicitazione di una preferenza o di una scelta. Per cui, la determinazione della credenza in uno specifico aspetto può essere descritta come una proiezione P_A del vettore di stato $|\psi\rangle$ sull’opportuno sottospazio A dello spazio di Hilbert \mathcal{H} , ovvero come il risultato di $P_A|\psi\rangle$.

Dunque, questo stato gioca un ruolo analogo a quello che gioca la probabilità a priori nelle teorie classiche, pur non essendo ancora una probabilità. Infatti, le valutazioni probabilistiche a questo punto si possono effettuare ricorrendo alle proiezioni ortogonali e al teorema di Gleason, per cui la probabilità di A è ottenuta a partire dalla norma della proiezione ortogonale su A , ovvero

$$p(A) = |P_A|\psi\rangle|^2 = \langle \psi|P_AP_A|\psi\rangle = \langle \psi|P_A|\psi\rangle$$

e valgono, in analogia con la definizione classica della probabilità, che (i) la probabilità quantistica di un qualunque sottospazio A è compresa tra 0 e 1, che (ii) per l’evento certo la probabilità sia 1, e che (iii) per sottospazi mutuamente esclusivi la probabilità della loro unione è uguale alla somma delle rispettive probabilità. Il fatto che l’assiomatizzazione di Kolmogorov ricalchi formalmente l’assiomatizzazione quantistica non deve ingannare, in quanto l’uso delle proiezioni e del calcolo probabilistico effettuato in modo diverso conduce a differenze profonde tra l’approccio classico e quello quantistico.

Dopo la misurazione della credenza, infine, la proiezione tramite l'operatore P_A porta ad avere un nuovo vettore di stato $|\psi_A\rangle$ che è la rinormalizzazione della proiezione appena effettuata, ovvero

$$|\psi_A\rangle = \frac{P_A|\psi\rangle}{|P_A|\psi\rangle|}$$

Le misurazioni poi non sono sempre compatibili, cioè non sono sempre misurabili simultaneamente. L'incompatibilità si ha, in particolare, quando i corrispondenti operatori non commutano, ovvero vale $P_AP_B \neq P_BP_A$. In tali casi, non è possibile definire una congiunzione di eventi, ma soltanto una sequenza del tipo "A, e poi B" (oppure "B, e poi A") perché l'ordine di esecuzione fa la differenza.

Tornando al problema di Linda, se dalla descrizione fornita di Linda si costruisce una credenza $|\psi\rangle$ che porta a vedere Linda come una femminista, si ha che la proiezione $P_F|\psi\rangle = |\psi_F\rangle$ sarà abbastanza alta, vicino all'unità, con probabilità $p(F) = |P_F|\psi\rangle|^2$; per cui se a questo punto si valuta la probabilità che sia anche una cassiera di banca, ciò consisterà in una ulteriore misurazione che possiamo rappresentare con la proiezione $P_BP_F|\psi\rangle$ che porta ad una probabilità $p(F,B) = |P_BP_F|\psi\rangle|^2$. Se invece si valuta direttamente la possibilità che Linda sia una cassiera di banca, ciò si può rappresentare con una sola misurazione che avviene con la proiezione $P_B|\psi\rangle = |\psi_B\rangle$ che porta ad una probabilità $p(B) = |P_B|\psi\rangle|^2$. Dunque, proprio per la diversità dei processi di misurazione, può valere che $p(F,B) \geq p(B)$ proprio perché accade che $|P_BP_F|\psi\rangle|^2 \geq |P_B|\psi\rangle|^2$ come è evidenziato dalla Figura 4. QP permette dunque di spiegare perché nel problema di Linda emerga la distorsione relativa alla congiunzione, che può essere stimata come superiore ad uno dei suoi congiunti.

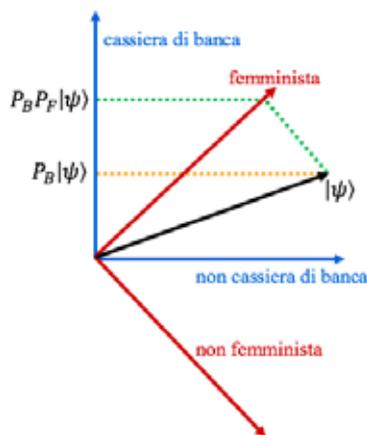


Figura 4. Il vettore di stato $|\psi\rangle$, che rappresenta la credenza in un certo contesto, porta ad avere stime probabilistiche che spiegano ciò che accade nel problema di Linda: la doppia proiezione $P_BP_F|\psi\rangle$, rappresentante della situazione in cui le proprietà B e F sono considerate sequenzialmente, risulta maggiore della proiezione $P_B|\psi\rangle$, in cui è considerata la sola proprietà B.

Benché ci possano essere situazioni in cui le nostre credenze siano indipendenti dal contesto, in molte situazioni accade invece che il contesto influenzi le nostre credenze e che i nostri giudizi dipendano dall'ordine con cui vengono formulati. Questo comporta

che ci siano violazioni della legge classica della probabilità totale. Per comprendere come l'apparato quantistico aiuti a spiegare questa situazione, consideriamo due contesti diversi: nel primo calcoliamo la probabilità di verificarsi di un evento B , nel secondo consideriamo dapprima il verificarsi di A e di $\neg A$ (che sarà indicata con \bar{A}), per poi valutare la probabilità del verificarsi di B . Nel primo caso, la probabilità di B è semplicemente data da $p(B) = |P_B|\psi\rangle|^2$, mentre nel secondo caso occorre considerare la somma delle probabilità di B dopo aver osservati A e \bar{A} , ovvero $p(A, B) + p(\bar{A}, B)$. Secondo la legge classica dovremmo avere l'uguaglianza, cioè dovrebbe valere

$$|P_B|\psi\rangle|^2 = p(B) = p(A, B) + p(\bar{A}, B) = |P_B P_A|\psi\rangle|^2 + |P_B P_{\bar{A}}|\psi\rangle|^2.$$

Invece si ha che

$$\begin{aligned} p(B) &= |P_B|\psi\rangle|^2 = |P_B(P_A + P_{\bar{A}})|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|(P_A + P_{\bar{A}})P_B P_B(P_A + P_{\bar{A}})|\psi\rangle = \\ &= \langle\psi|P_A P_B P_A|\psi\rangle + \langle\psi|P_{\bar{A}} P_B P_{\bar{A}}|\psi\rangle + \langle\psi|P_A P_B P_{\bar{A}}|\psi\rangle + \\ &\langle\psi|P_{\bar{A}} P_B P_A|\psi\rangle = \\ &= |P_B P_A|\psi\rangle|^2 + |P_B P_{\bar{A}}|\psi\rangle|^2 + \langle\psi|P_A P_B P_{\bar{A}}|\psi\rangle + \langle\psi|P_{\bar{A}} P_B P_A|\psi\rangle \end{aligned}$$

e si evince come l'uguaglianza non sia rispettata per via della presenza di due termini aggiuntivi che rappresentano l'interferenza tra i due concetti. Da notare che, se i due operatori commutassero, allora entrambi i termini si annullerebbero e l'uguaglianza tornerebbe ad essere rispettata. Dunque in questo modello si può spiegare ciò che accade negli effetti di ordine, ovvero quando il giudizio probabilistico su un'ipotesi a seguito di alcune informazioni in sequenza non è uguale alla probabilità dell'ipotesi quando l'informazione è data in ordine inverso. Questo spiega perché nel problema dell'infezione (Figura 2) si ottiene che $p(I|L, S) > p(I|S, L)$.

Conclusioni

Costruire modelli normativi e descrittivi delle credenze è ancora oggi un problema aperto. Da una parte abbiamo il modello teorico della probabilità classica, che ancora oggi rimane la teoria di riferimento per la definizione di un sistema di credenze razionali, sulla cui giustificazione c'è la forte intuizione a favore dei suoi assiomi. Dall'altro, l'inadeguatezza della teoria classica a descrivere i giudizi probabilistici attuali ha portato sia a rendere meno stringenti le richieste normative, con nuovi modelli teorici che rilassano le assunzioni di base, sia a trovare teorie alternative per spiegare alcune distorsioni sistematiche, non ammesse all'interno delle possibili definizioni di razionalità.

In particolare, per una serie di queste evidenze, legate ad effetti d'ordine, di contesto, violazione della legge delle probabilità totali e della composizionalità è stata proposta una cornice probabilistica diversa, la probabilità quantistica, che non è più di tipo insiemistico ma è di tipo geometrico, con l'assegnazione di probabilità effettuata su uno

spazio vettoriale. Questa teoria può essere plausibilmente proposta come cornice descrittiva per la razionalità limitata, mentre non sembra ad oggi poter avere il necessario supporto come teoria normativa. Infatti, in tal caso ci sarebbe da giustificare perché debba essere accettato come razionale che un individuo giudichi gli stessi eventi in modo diverso se questi sono proposti in ordine inverso, oppure perché una congiunzione o disgiunzione di eventi possano essere sovrastimati o sottostimati oltre dei limiti fissati e continuare ad essere considerati accettabili.

Un ulteriore aspetto aperto è però quello dell'accuratezza. In generale, se la scommessa olandese è un argomento a priori che giustifica l'assunzione della probabilità classica come teoria normativa, cosa ci dice che essa sia la teoria più accurata possibile? Il fatto è che un DB non si può avere nelle probabilità quantistiche se si considerano domande incompatibili, perché in quel caso cambia proprio lo spazio campionario. In generale, possiamo dire che se ci sono domande compatibili, CP è una cornice migliore, mentre se ci sono domande incompatibili, con la loro incompatibilità giustificata razionalmente, allora è QP a fornire una cornice migliore. È ciò che concludono Pothos e Busemeyer (2014): quale sia la migliore scelta dipende dalla presenza di domande incompatibili.

Bibliografia.

Aerts D., Sozzo S., Veloz T. (2015), Quantum structure in cognition and the foundations of human reasoning, *International Journal of Theoretical Physics* 54, 4557-4569.

Baise A. (2020), The objective-subjective dichotomy and its use in describing probability, *Interdisciplinary Science Reviews*, 45, 174-185.

Bar-Hillel M., Neter E. (1993), How alike is it versus how likely is it: a disjunction fallacy in probability judgments, *Journal of Personality and Social Psychology*, 65, 1119-1131.

Bergus G. R., Chapman G. B., Levy B. T., Ely J. W., Oppliger, R. A. (1998), Clinical diagnosis and order of information, *Medical Decision Making*, 18, 412-417.

Carnap R. (1950), *The Logical Foundations of Probability*, Chicago: University of Chicago Press.

Cohen L. J. (1983), Belief, acceptance, and probability, *Behavioral and Brain Sciences*, 6, 231-245.

Crupi V., Fitelson B., Tentori K. (2008), Probability, confirmation, and the conjunction fallacy. *Thinking & Reasoning*, 14, 182-99.

Cox R.T. (1946), Probability, Frequency, and Reasonable Belief, *American Journal of Physics*, 14, pp. 1-13.

- de Finetti, Bruno, 1937, La Prevision: ses lois logiques, se sources subjectives, *Annales de l'Institut Henri Poincare*, 7, 1-68; trad. in Kyburg H., Smokler H. E. (1980), *Studies in Subjective Probability*, Huntington: Krieger Publishing Co.
- Dirac P. A. M. (1930), *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford: Clarendon Press.
- Earman J. (1992), *Bayes or Bust? A Critical Examination of Bayesian Confirmation Theory*, Cambridge: The MIT Press.
- Ellsberg D. (1961), Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms, *Quarterly Journal of Economics*, 75, 643-669.
- Fischhoff B., Slovic P., Lichtenstein S. (1978), Fault trees: Sensitivity of estimated failure probabilities to problem representation, *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 4, 330-344.
- Gigerenzer G. (1996), On narrow norms and vague heuristics: a reply to Kahneman and Tversky, *Psychological Review*, 103, 592-596.
- Gilboa I. (1987). Expected Utility with Purely Subjective non-Additive Probabilities, *Journal of Mathematical Economics*, 16, 65-88.
- Gilboa I., Schmeidler D. (1989), Maxmin Expected Utility with a Non-Unique Prior, *Journal of Mathematical Economics*, 18, 141-153.
- Goldstick D. (2000). Three Epistemic Senses of Probability, *Philosophical Studies*, 101, 59-76.
- Good, I. G. (1950), *Probability and the Weighing of Evidence*, London: Charles Griffin.
- Griffiths R. B. (2003), *Consistent quantum theory*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Hacking I. (2006), *The Emergence of Probability: A Philosophical Study of Early Ideas about Probability, Induction and Statistical Inference*, 2a ed., Cambridge: Cambridge University Press.
- Hagan S., Hameroff S. R., Tuszynski J. A. (2002), Quantum computation in brain microtubules: Decoherence and biological feasibility, *Physical Review E*, 65.
- Hampton J. A. (1988), Overextension of conjunctive concepts: Evidence for a unitary model for concept typicality and class inclusion, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 14, 12-32
- Kahneman D., Slovic P., Tversky A. (1982), *Judgment under Uncertainty. Heuristics and Biases*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Kahneman D., Tversky A. (1979), Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk, *Econometrica*, 47, 263-291.

- Kennedy R. and Chihara C. (1979), The Dutch Book Argument: Its Logical Flaws, Its Subjective Sources, *Philosophical Studies*, 36, 19-33.
- Keynes, J. M. (1921), *A Treatise on Probability*, London: Macmillan
- Kolmogorov A. N. (1933), *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ergebnisse Der Mathematik; trad. (1950) *Foundations of Probability*, New York: Chelsea Publishing Company.
- Madden E. H. (1957), Aristotle's treatment of probability and signs, *Philosophy of Science*, 24, 167-172.
- Morier D. M., Borgida E. (1984), The Conjunction Fallacy. A Task Specific Phenomenon, *Personality and Social Psychology Bulletin*, 10, 243-252.
- Nickerson R. S. (2008), *Aspects of Rationality: Reflections on What It Means To Be Rational and Whether We Are*, New York: Psychology Press.
- Pothos E. M., Busemeyer J. R. (2013), Can quantum probability provide a new direction for cognitive modeling?, *Behavioral and Brain Sciences*, 36, 255-327.
- Pothos E. M., Busemeyer J. R. (2014), In search for a standard of rationality, *Frontiers in Psychology*, 5, 49
- Quiggin J. (1982), A theory of anticipated utility, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 3, 323-343.
- Ramsey P.F. (1926), Truth and Probability, in Kyburg H. E., Smokler H. E. (1980), *Studies in Subjective Probability*, 1980, Huntington: Kreiger Publishing Co.
- Savage L. J. (1972), *The Foundations of Statistics*, 2a ed., New York: Dover.
- Schmeidler D. (1989), Subjective Probability and Expected Utility without Additivity, *Econometrica*, 57, 571-587.
- Schuessler R. (2019), Probability in Medieval and Renaissance Philosophy, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Zalta E. N. (ed.), <<https://plato.stanford.edu/archives/sum2019/entries/probability-medieval-renaissance/>>.
- Sen A. (1997), Maximization and the act of choice, *Econometrica*, 65, 745-779
- Simon H. A. (1955), A behavioral model of rational choice, *The Quarterly Journal of Economics*, 69, 99-118.
- Slovic P., Tversky A. (1974). Who accepts Savage's Axiom?, *Behavioral Science*, 19, 368-373.
- Sozzo S. (2021), Applicazioni del formalismo quantistico alle Scienze Cognitive, *Ithaca - Viaggio nella Scienza*, XVII.

- Stein E. (1996), *Without Good Reason: The Rationality Debate in Philosophy and Cognitive Science*, Oxford: Clarendon Press.
- Tentori K., Crupi V. (2013), Why quantum probability does not explain the conjunction fallacy, *The Behavioral and Brain Science*, 36, 308-310.
- Tentori K., Crupi V., Russo S. (2013), On the Determinants of the Conjunction Fallacy: Probability Versus Inductive Confirmation, *Journal of Experimental Psychology*, 142, 235-255
- Tversky A., Kahneman D. (1983), Extension versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment, *Psychological Review*, 90, 293-315.
- Tversky A., Kahneman D. (1974), Judgment under uncertainty: Heuristics and biases, *Science*, 185, 1124-1131
- Tversky A., Koehler D. J. (1994), Support theory: A nonextensional representation of subjective probability, *Psychological Review*, 101, 547-67.
- Tversky A., Shafir E. (1992), The disjunction effect in choice under uncertainty, *Psychological Science*, 3, 305-309.
- von Neumann J. (1932), *Mathematical foundations of quantum theory*, Princeton: Princeton University Press.
- Walley P. (1991), *Statistical Reasoning with Imprecise Probabilities, Monographs on Statistics and Applied Probability*, London: Chapman and Hall.
- Wang Z., Busemeyer J. R., Atmanspacher H., Pothos E. (2013), The Potential of Using Quantum Theory to Build Models of Cognition, *Topics in cognitive science*, 5, 672-688.
- Williamson, J. (2010), *In Defence of Objective Bayesianism*, Oxford: Oxford University Press.

Logica degli eventi e probabilità soggettiva: considerazioni ed esperienze didattiche¹

Luciana Delli Rocili^a Antonio Maturo^b

^aMathesis Abruzzo, lucianadr@live.it

^bMathesis Abruzzo, antomato75@gmail.com

Sunto Il lavoro si basa sul presupposto che un passo essenziale per lo studio della probabilità soggettiva è l’analisi approfondita delle proposizioni che rappresentano gli eventi. Infatti, molti paradossi della probabilità derivano proprio da errori di interpretazione del testo.

L’apprendimento dei fondamenti della logica del certo e dell’incerto è impostato come il risultato di un lavoro interdisciplinare. Vengono quindi presentate delle sperimentazioni didattiche in cui si cerca di capire come i bambini interpretano una frase con soggetto e predicato, ossia se essi ritengono che i valori di verità che possono essere attribuiti sono quelli della logica bivalente come *vero* o *falso*, oppure quelli di una logica plurivalente. Inoltre si evidenzia la differenza fra incertezza dovuta a *informazione incompleta*, che porta a valutazioni di probabilità, e *incertezza semantica* che conduce alla teoria dei fuzzy set. Particolare attenzione è posta anche nel capire se i bambini riescono ad individuare frasi non complete e che quindi non sono enunciati linguistici.

Parole Chiave: Enunciati della logica binaria. Enunciati linguistici. Logica del certo e dell’incerto. Logica fuzzy. Grado di informazione. Variabili linguistiche.

1. Introduzione

Il primo passo per lo studio della probabilità soggettiva è quello di un’analisi approfondita delle proposizioni che rappresentano gli eventi. Infatti, molti paradossi della probabilità derivano proprio da errori di interpretazione del testo.

In questo lavoro ci focalizziamo sull’analisi delle frasi.

L’apprendimento dei fondamenti della logica del certo e dell’incerto è presentato come il risultato di un lavoro interdisciplinare.

La sperimentazione riguarda essenzialmente due aspetti:

- (1) verifica della *comprensione linguistica* di una proposizione;

¹ Ringraziamo i docenti Alberto Lavista, Mariella Centurione, Mauro Scorrano e Nadia Paciocco della Scuola Primaria di “Piano T” (Plesso scolastico dell’Istituto Comprensivo Pescara 5) per aver consentito le sperimentazioni nelle loro classi.

(2) *analisi dello stato di informazione.*

Per il primo aspetto si tratta di vedere come i bambini interpretano una frase con soggetto e predicato, ossia se essi ritengono che i valori di verità che possono essere attribuiti sono:

(a) quelli della logica bivalente come *vero* o *falso*,

(b) valori di verità di una logica plurivalente, ossia se c'è la possibilità/necessità di considerare anche valori di verità intermedi fra *vero* e *falso* come ad esempio: *più vero che falso*, *più falso che vero*, *a metà fra vero e falso*.

È anche richiesto ai bambini di individuare frasi non complete e che quindi non sono enunciati linguistici.

Per quanto riguarda il secondo aspetto si tratta di analizzare lo *stato di informazione* sul concetto espresso da una proposizione, ossia di vedere se è possibile attribuire subito ad essa un valore di verità, oppure se è necessario acquisire una ulteriore informazione.

Mettiamo in evidenza la distinzione fra incertezza dovuta a *informazione incompleta*, che porta a valutazioni di probabilità, e *incertezza semantica* che conduce alla teoria dei fuzzy set.

2. Primi passi di logica bivalente nella scuola primaria

La logica bivalente si basa sul *concetto di enunciato o proposizione*.

Il primo passo è quindi saper riconoscere se una frase è un enunciato. Il problema è tutt'altro che banale e proprio il contatto con i bambini può chiarirne le difficoltà.

Alcuni tentativi di descrivere il concetto di enunciato sono i seguenti:

In (Behnke and alii, 1968) un *enunciato o proposizione* della logica bivalente è descritto come un “complesso linguistico o segnico per cui ha senso chiedersi se è *vero* o *falso*”.

In (Russell, 1962) un *enunciato* della logica bivalente è descritto come “una disposizione di parole e/o simboli che esprime ciò che è o *vero* o *falso*”.

Evidentemente le precedenti descrizioni non sono definizioni e, a nostro parere, *nascondono una valutazione soggettiva*. Ossia esiste un individuo, *il decisore*, forse un esperto di logica o di linguistica, forse la maestra o un bambino, che, per accettare una disposizione di parole e/o simboli come un *enunciato della logica bivalente*, la deve interpretare come una *domanda* a cui si può dare *una e una sola* delle due risposte: *vero* o *falso*.

Le proprietà caratteristiche di un enunciato della logica bivalente sono le seguenti:

- (1) *Principio del terzo escluso*. Un enunciato è o *vero* o *falso* e non esiste una terza alternativa.

(2) *Principio di non contraddizione*. Un enunciato non può essere contemporaneamente vero e falso.

L'insieme dei due principi di terzo escluso e di non contraddizione viene anche chiamato *principio di bivalenza* (Russell, 1962).

Dal punto di vista *linguistico* il concetto di enunciato o proposizione è più ampio, in quanto si riferisce ad una frase di senso compiuto (con soggetto, predicato verbale o nominale, complementi, etc.) per la quale si può esprimere un giudizio di verità che non necessariamente si limita a *vero* o *falso*, ma può essere anche *più falso che vero*, *più vero che falso*, *a metà fra vero e falso*, etc.

Il primo passo della nostra sperimentazione consiste nel valutare fino a che punto i bambini, opportunamente guidati, riescono a riconoscere se una frase è un *enunciato della logica bivalente*, un *enunciato linguistico*, oppure *non è un enunciato*.

Data la soggettività del concetto, si tratta di vedere in che misura i bambini sono in accordo fra loro o con le opinioni di adulti o esperti.

In altre parole, si tratta di vedere come i bambini interpretano una frase con soggetto e predicato attribuendo semplicemente i valori di verità *vero* o *falso*, oppure attribuendo un giudizio come *più falso che vero*, *più vero che falso*, *a metà fra vero e falso*.

Nel caso in cui i bambini non riconoscano la frase come un enunciato linguistico, probabilmente esprimono un giudizio come: *frase non chiara*, *non si capisce* e simili.

Usualmente un enunciato è indicato con una lettera maiuscola.

Se E è un enunciato scriviamo $E = 0$ per indicare che E è *falso* e $E = 1$ per indicare che E è *vero*.

Nel caso di enunciati linguistici non bivalenti sono attribuiti a E anche valori numerici compresi fra 0 e 1 (Zadeh, 1965; 1975; Klir and Yuan 1995).

3. Logica del certo e dell'incerto nella scuola primaria

Una volta riconosciuto che una certa frase E è un enunciato della logica bivalente, il secondo passo è capire se le *informazioni* che si hanno a disposizione permettono di stabilire se esso è *vero* o *falso*. Se ciò avviene, E è un enunciato della *logica classica o del certo*, in caso contrario E si dice *evento aleatorio*.

La *logica dell'incerto* si occupa di tutti gli enunciati, sia di quelli della logica classica, sia degli eventi aleatori.

Una volta che un bambino ha valutato un'affermazione come *proposizione della logica bivalente*, il secondo passo consiste nel fargli analizzare le informazioni di cui egli è in possesso:

- (1) l'informazione è *totale* se egli è in grado di attribuire un valore di verità all'enunciato,
- (2) è *parziale* se invece non può, nel suo stato di informazione, stabilire se l'enunciato è *vero* o *falso*.

Anche il secondo passo è soggettivo, perché due individui che valutano possono avere informazioni diverse.

Un enunciato della logica dell'incerto è usualmente chiamato *evento*. In particolare, un enunciato della logica del certo si dice *evento certo* se assume il valore *vero* e *evento impossibile* se assume valore *falso*.

“Un *evento* è una proposizione di cui può essere *non conosciuto* il valore di verità. Se tale valore è conosciuto ed è 1, l'evento si dice *certo*, se è 0, si dice *impossibile*, se non è conosciuto si dice *aleatorio*.” (de Finetti, 1970, p.710)

La logica dell'incerto, basata sul concetto di evento come proposizione logica, è a fondamento della *probabilità soggettiva* (de Finetti, 1970; Coletti and Scozzafava, 2002) e quindi della *teoria delle decisioni*, ossia dei criteri da seguire per fare scelte coerenti con i propri obiettivi (Lindley, 1990).

Per una verifica della comprensione dei concetti di logica bivalente, abbiamo proposto agli alunni della scuola elementare le seguenti attività:

- (1) *lettura di frasi e loro riconoscimento come enunciati della logica bivalente*, verificando il grado di convinzione di ciascun alunno sul fatto che valgono i principi del terzo escluso e non contraddizione;
- (2) *classificazione degli enunciati* accettati come proposizioni della logica bivalente come eventi: *certo*, *impossibile*, *aleatorio*;
- (3) quando un enunciato è classificato nella logica del certo, *attivazione di procedure* per verificare se è *vero* o *falso* (*criterio di verifica*, Fadini, 1979).

4. Enunciati linguistici e logica fuzzy nella scuola primaria

Un passo ulteriore verso la interdisciplinarietà si ottiene interpretando gli enunciati che si trovano nella lingua italiana come *proposizioni della logica fuzzy*, che generalizza la logica bivalente (Zadeh, 1965; 1975).

D'altra parte, lo stesso de Finetti, nell'appendice critica del libro *Teoria delle Probabilità*, mette in luce la necessità di prendere in considerazione la logica a più di due valori. In particolare, cita in proposito le varianti proposte in (Reichenbach, 1942) per un *terzo valore di verità* diverso da *vero* e *falso*.

Generalizzando la descrizione di enunciato della logica bivalente data in (Behnke and alii, 1968) chiamiamo *enunciato sfumato* o *fuzzy* o *linguistico*, con insieme di valori di verità G , ogni complesso linguistico o segnico per cui ha senso attribuire un *valore di verità* appartenente a G .

Nel caso particolare in cui G si riduce all'insieme $\{\text{vero}, \text{falso}\}$ ci si riduce al concetto di enunciato della logica bivalente.

Riteniamo opportuno tener presente questa generalizzazione già nella scuola primaria per ridurre la distanza fra i concetti *logici* e *linguistici*, poiché nella comunicazione fra individui si usano abitualmente enunciati linguistici che non sono quelli della logica bivalente; ad un enunciato linguistico si possono attribuire giudizi diversi da quelli estremi: *vero* o *falso*.

In tale ordine d'idee ci è sembrato opportuno integrare le attività (1), (2), (3) sopra descritte con le seguenti:

- (4) *generalizzazione del concetto di enunciato della logica bivalente*, facendo scoprire ai bambini stessi che in certi casi oltre a *vero* o *falso* ci possono essere altri valori di verità come: *più vero che falso*, *più falso che vero*, *a metà fra vero e falso*, invitandoli a dare *giudizi qualitativi*, appartenenti ad un insieme ordinato, compresi fra *vero* e *falso*;
- (5) *riflessione sugli aspetti interdisciplinari dei concetti logici*, facendo scoprire che nel linguaggio parlato spesso si usano enunciati che non sono quelli della logica bivalente.

5. La sperimentazione precedente

In passato abbiamo somministrato a quattro classi (due prime e due quarte) di una scuola primaria un questionario con 16 affermazioni classificabili in 7 possibili risposte:

vero, falso, vero o falso ma ora non so quale dei due, più vero che falso, più falso che vero, a metà fra vero e falso, non è un enunciato linguistico.

Le prime tre fanno riferimento alla logica bivalente, dalla quarta alla sesta si intende verificare se il bambino intuisce una logica plurivalente.

L'ultima risposta prevede il riconoscimento del fatto che l'affermazione non è completa, e quindi non è un enunciato neanche nella accezione più generale.

I risultati sono apparsi molto interessanti e utilizzabili come spunti per nuove ricerche approfondite.

Nelle prime è stato necessario l'aiuto degli insegnanti sia per una piena comprensione del testo dell'affermazione e sia per l'allineamento per righe e colonne.

Per quanto riguarda le quarte, invece, è stato condotto un esperimento per valutare l'influenza e l'importanza dell'intervento dell'insegnante facendo compilare il

questionario ad una classe con spiegazioni essenziali da parte dell'insegnante e a un'altra con spiegazioni dettagliate.

In questo lavoro riportiamo invece alcune sperimentazioni analoghe fatte quest'anno (e ancora in atto) in una classe 5^a della stessa scuola.

6. La sperimentazione attuale

6.1 Il questionario proposto

È stato somministrato un questionario, in una classe quinta di scuola primaria composta da 18 alunni, formato da due blocchi di 8 affermazioni con 8 risposte possibili.

Le prime tre risposte indicavano il riconoscimento, da parte dello studente, dell'affermazione come *proposizione* della logica binaria.

In particolare, le risposte A e B implicavano la conoscenza, da parte dello studente, del valore di verità della proposizione, mentre la risposta C significava che lo studente aveva interpretato la proposizione come *evento aleatorio*, non conoscendo il valore di verità.

Le risposte D, E, F implicavano il riconoscimento, da parte dello studente, della possibilità di avere valori di verità diversi da “vero” e “falso”.

Ossia lo studente riconosceva le affermazioni come *enunciati linguistici*, ossia tali da poter individuare la frase come composta dalle sue parti indispensabili (soggetto e predicato), e tale da poter attribuire un valore di verità nell'ambito di una *logica plurivalente* (o *logica fuzzy*), in cui oltre ai valori di verità “vero” e “falso”, sono presi in considerazione “più vero che falso”, “più falso che vero”, “a metà fra vero e falso”.

La risposta G, “*non è un enunciato linguistico*” implicava il riconoscimento, da parte dello studente, del fatto che la frase mancava di parti fondamentali per cui non ha senso attribuire un valore di verità. Per semplificare tale riconoscimento è stato scritto fra parentesi che si tratta di “*frase che non si capisce*”.

La risposta H, “*altro*”, stimola lo studente a fare osservazioni personali, qualora per il bambino non fosse stato possibile inquadrare la risposta in nessuna delle opzioni precedenti. Un bambino molto attento potrebbe anche arrivare, intuitivamente, al concetto di *evento fuzzy*, osservando che, per una data domanda, non sa attribuire il valore di verità “più adeguato” fra i 5 proposti, per *mancanza di informazioni*.

Riassumendo, le possibili risposte alle frasi proposte sono state così formulate:

(1) Logica bivalente

A-*Vero*

B-*Falso*

C-*Vero o Falso, ma non so quale dei due* (evento aleatorio)

(2) Logica plurivalente

D-*Più Vero che Falso*

E- *Più Falso che Vero*

F- *A metà fra Vero e Falso*

(3) Individuazione della frase come “non enunciato”

G- *Non è un enunciato linguistico (non si capisce)*

(4) Ricerca di osservazioni personali, ma anche frase vista come *evento fuzzy*

H-*Altro (scrivi cosa pensi)*

6.2 Itinerari didattici seguiti

Prima di sottoporre il questionario, l'insegnante ha ritenuto opportuno far ripercorrere ai bambini alcuni itinerari didattici riguardanti la logica bivalente, la composizione della frase, ha cercato di far intuire che le risposte dipendono anche dalle informazioni possedute ed è stato spiegato ai bambini il significato delle varie risposte.

Nella risposta “*non è un enunciato linguistico (non si capisce)*” la parte tra parentesi è stata aggiunta per facilitare i bambini con difficoltà di apprendimento (BES) presenti nella classe.

È stato rilevato, però, che tale precisazione ha disorientato alcuni altri alunni che hanno inteso di poter inserire in quella colonna le affermazioni che ritenevano incomprensibili perché, a loro giudizio, inaccettabili.

6.3 Il primo blocco di 8 affermazioni

Nella tabella che segue sono stati riportati le risposte ottenute per il primo blocco di frasi nella classe 5^A di scuola primaria presa in considerazione.

| Classe 5^A Campione di 18 studenti | A vero | B falso | C vero o falso, ma non so quale dei due | D più vero che falso | E più falso che vero | F A metà fra vero e falso | G non è un enunciato linguistico (non si capisce) | H altro (scrivi cosa pensi nel retro del foglio) | Totale risposte |
|---|-----------|------------|---|----------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------|--|--|--------------------|
| 1- Alisia è brava | 8 | 1 | 7 | 1 | | 1 | | | 18 |
| 2- Luigi un panino | | | | | | | 18 | | 18 |
| 3- Mattia è il più alto della sua classe | 16 | | 1 | 1 | | | | | 18 |
| 4- Leonardo è assente | 1 | 13 | 2 | 2 | | | | | 18 |
| 5- il cane vola sull'albero | | 16 | | | 1 | | 1 | | 18 |
| 6- nel mese di settembre fa caldo | 1 | 5 | 5 | | 5 | 1 | | | 17 |
| 7- i cantanti sono famosi | 5 | | 5 | 3 | 1 | 2 | | 1 | 17 |
| 8- la Juve vincerà la prossima partita | | 1 | 13 | | | 3 | | | 17 |

Tabella riassuntiva dei dati raccolti per il primo blocco

Osservando la tabella, si può notare che la totalità (nell'affermazione n. 2, *Luigi un panino*) ha individuato il concetto di “*non enunciato linguistico*”.

Per quanto riguarda l'affermazione n. 1 (*Alisia è brava*), bisogna osservare che si tratta di un enunciato fuzzy in quanto non ben definita. Infatti, si dovrebbe capire quale significato dare alla parola “brava” (in che cosa? quale senso dare all'aggettivo “brava”? brava per il suo comportamento? oppure si fa riferimento al profitto scolastico?). In ogni caso ci sono stati 16 bambini che l'hanno considerata come appartenente alla *logica*

bivalente, mentre 2 hanno interpretato l'affermazione come *enunciato fuzzy* considerando valori di verità diversi da “vero” e “falso”.

L'affermazione n. 3 (*Mattia è il più alto della sua classe*) è stata ritenuta da quasi tutti i bambini come *evento della logica bivalente* (in particolare da 17), solo uno l'ha considerata un *enunciato fuzzy*.

Per quanto riguarda l'affermazione n. 4, *Leonardo è assente*, 13 bambini hanno ritenuto di dare la risposta corretta scegliendo la risposta “falso” in quanto era presente a scuola, ma è da precisare che si tratta di un bambino che ha una diagnosi BES (Bisogni Educativi Speciali) e spesso si sente fuori contesto, spaesato e a volte si addormenta sul banco.

Si presuppone che sia questo il motivo per cui 1 bambino ha risposto “vero”, 2 “vero o falso, ma non so quale dei due” e 2 “più vero che falso” (una delle due scelte è stata proprio la sua).

All'affermazione n. 5, *Il cane vola sull'albero*, 16 alunni hanno risposto correttamente, 1 ha attribuito un valore *aleatorio* (forse influenzato dalla visione di qualche cartone animato), 1 lo ha considerato un *non enunciato linguistico*, ma si ritiene si sia lasciato confondere dalla parte tra parentesi (*non si capisce*).

L'affermazione n. 6 *Nel mese di settembre fa caldo* ha avuto interpretazioni diverse. Infatti, 11 bambini l'hanno valutata come appartenente alla *logica bivalente* e precisamente 5 l'hanno considerata come *evento aleatorio*, 5 come *evento impossibile* e 1 come *evento certo*. Altri 6 bambini hanno visto l'affermazione come *enunciato non bivalente* rispondendo “più falso che vero” (5) oppure “a metà fra vero e falso” (1). Uno non ha risposto, forse per distrazione.

L'enunciato n. 7, *I cantanti sono famosi*, è sicuramente *fuzzy*, sia nel soggetto, sia nel predicato. Infatti chi sono i cantanti? Quali si possono definire tali? Qualcuno in particolare? E poi in che senso sono famosi? In quale ambiente? In ogni caso 10 bambini l'hanno valutata come appartenente alla *logica binaria*, 6 come *enunciato fuzzy*, 1 ha risposto “altro” specificando che non tutti sono famosi, ma solo alcuni e 1 non ha risposto.

Rispetto al n. 8, *La Juve vincerà la prossima partita*, la maggioranza (13 alunni) ha classificato l'enunciato come appartenente alla *logica bivalente* rispondendo “vero o falso, ma non so quale dei due”; 1 lo ha classificato come *evento impossibile* (ma è da rilevare che è molto tifoso del Milan e quindi non può concepire vittorie di altre squadre al di fuori della sua squadra del cuore!). Ci sono stati 3 bambini che hanno interpretato l'affermazione come *enunciato fuzzy*, mentre 1 non ha risposto.

7. Il secondo blocco di 8 affermazioni

| Classe 5^A Campione di 18 studenti | A vero | B falso | C vero o falso, ma non so quale dei due | D più vero che falso | E più falso che vero | F a metà fra vero e falso | G non è un enunciato linguistico (non si capisce) | H altro (scrivi cosa pensi) usa il retro del foglio per scrivere | Totale risposte |
|--|-----------|------------|--|----------------------------------|----------------------------------|---|--|---|--------------------|
| 9- frequentiamo la scuola per 8 ore | 13 | 2 | | 2 | | 1 | | | 18 |
| 10- Veronica e' bionda | 15 | 1 | 1 | 1 | | | | | 18 |
| 11- Teresa con i pattini | | 1 | | | | | 17 | | 18 |
| 12- tutti vedono i colori | 2 | 8 | | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 (riferimento ai daltonici) | 18 |
| 13- Giada ha preso 9 in matematica | 4 | 1 | 8 | 1 | | 3 | | 1 | 18 |
| 14- Massimo e' un broccolo | 1 | 8 | 2 | | 1 | | 6 | | 18 |
| 15- i cavalli hanno cinque dita | | 15 | | | 1 | | 2 | | 18 |
| 16- Amadeus ha tre ville grandi | | | 13 | 1 | | 2 | | 2 | 18 |

Tabella riassuntiva dei dati raccolti per il secondo blocco

Osservando la tabella, si può notare che quasi la totalità degli alunni (nella seconda affermazione n. 11, *Teresa con i pattini*) ha individuato il concetto di *enunciato linguistico* (hanno risposto correttamente 17 bambini su 18); solo un bambino ha dato una valutazione errata alla seconda affermazione, non rendendosi conto che mancava il verbo e considerandolo un evento della logica del certo.

La maggioranza degli alunni (15) ha riconosciuto l'affermazione n.9, *Frequentiamo la scuola per 8 ore*, come proposizione appartenente alla *logica del certo*. Invece 3 bambini l'hanno valutata come *enunciato fuzzy*, probabilmente perché hanno pensato che non tutti i giorni si recano a scuola, trattandosi di una scuola a tempo pieno che funziona dal lunedì al venerdì.

Quasi tutti gli alunni (15) hanno classificato l'affermazione n. 10, *Veronica è bionda*, come *evento certo*; alcuni (3) si sono distaccati da questa valutazione esprimendo dei dubbi e uno di essi lo ha considerato come *enunciato fuzzy*.

L'affermazione n. 12, *Tutti vedono i colori*, ha avuto valutazioni differenti. Infatti 10 bambini l'hanno data come una proposizione della *logica del certo*, 5 della *logica fuzzy*, 1 ha detto che "*non è un enunciato linguistico*" e 2 hanno risposto "*altro*" facendo riferimento alle persone daltoniche (anche se potevano operare la stessa scelta rispondendo "*falso*"). Il verbo "*vedono*" è stato utilizzato appositamente, in quanto anche i daltonici vedono i colori, anche se non li "*distinguono*" o hanno difetti nella percezione cromatica.

Per quanto riguarda l'affermazione n. 13, *Giada ha preso 9 in matematica*, 13 alunni l'hanno ritenuta appartenente alla *logica binaria*, 4 come proposizione della *logica fuzzy*, 1 ha risposto "*altro*", giustificando tale scelta perché non conosce alcuna bambina che porta come nome "*Giada*" (*evento fuzzy*).

L'affermazione n. 14, *Massimo è un broccolo*, non è stata da tutti considerata alla lettera.

In particolare, 8 bambini hanno risposto "*falso*", 4 hanno interpretato la proposizione come una metafora pensando che da qualche parte ci sarà pure un tizio che si chiama Massimo e che si può considerare un "broccolo", cioè un po' goffo o sciocco.

Uno di questi ultimi ha giudicato l'affermazione come *enunciato fuzzy*, rispondendo "*più falso che vero*".

Altri 6 bambini hanno detto che non è un enunciato linguistico, forse non sapendo se interpretare la frase "alla lettera" o come metafora.

Per quanto riguarda l'evento n. 15, *I cavalli hanno cinque dita*, 15 bambini hanno risposto correttamente, 1 lo ha interpretato come un *enunciato fuzzy* e 2 hanno risposto che non è un enunciato linguistico (probabilmente fuorviati dal "*non si capisce*" che è stato messo tra parentesi).

L'ultima affermazione, *Amadeus ha tre ville grandi*, è stata considerata come un *evento aleatorio* dalla maggioranza (13 alunni), non avendo adeguate informazioni al riguardo.

Altri 3 bambini l'hanno valutata come *enunciato fuzzy*, 2 hanno risposto “*altro*” spiegando: “non conosco Amadeus” o “non si può sapere”.

Avrebbero potuto comunque scegliere la risposta “*vero o falso, ma non so quale dei due*”.

La risposta “*altro*” può anche essere interpretata come “*evento fuzzy*”, ritenendo possibili (ma non noti) tutti i 5 valori di verità.

8. Conclusioni e proposte

La sperimentazione ha messo in evidenza la necessità di approfondire il lavoro di comprensione linguistica di una frase, basandosi su un'ottica interdisciplinare.

- Da un punto di vista *sintattico* si tratta soprattutto di capire se la frase ha una struttura completa tale da potersi definire come enunciato linguistico;
- Dal punto di vista *semantico* si tratta di stimolare gli alunni a formarsi una opinione
 - sia sul fatto che un enunciato linguistico appartiene alla logica bivalente o non bivalente;
 - sia se il grado di informazione posseduto permette di attribuire un valore di verità.

Gli alunni hanno espresso per varie affermazioni opinioni molto differenti. Ciò, in generale, non significa che alcuni hanno dato valutazioni corrette e altri valutazioni sbagliate.

Significa soprattutto che gli alunni hanno gradi d'informazione differenti e inoltre spesso interpretano in maniera diversa i valori di verità.

Ad esempio, il valore di verità “*più vero che falso*” appartiene ad una logica non bivalente, ma un alunno che ragiona da un punto di vista bivalente potrebbe interpretarlo come “*è più facile che sia vero piuttosto che sia falso*”.

Un'ampia discussione in classe è avvenuta sull'interpretazione della frase “Alisia è brava”.

Alcuni studenti si riferivano forse al rendimento scolastico; per altri la parola ‘brava’ è stata interpretata come ‘dotata di qualità personali e morali’ ossia come persona gentile, educata, rispettosa, generosa, ubbidiente, etc. Forse alcuni hanno mediato entrambe le interpretazioni.

Inoltre, la stessa frase può essere interpretata in maniera differente secondo il *criterio di verifica* seguito e il *tipo di logica adottato* (bivalente o plurivalente).

Ad esempio, il criterio di verifica potrebbe essere il voto preso da Alisia in una materia oppure la media dei voti nelle varie materie.

In un'ottica plurivalente si può attribuire il valore "vero" se Alisia ha preso 10, il valore "più vero che falso" se ha preso 8 o 9, il valore "a metà fra vero falso" se Alisia ha preso 6 o 7, il valore "più falso che vero" se ha preso 5, "falso" se ha preso meno di 5.

In un'ottica bivalente il significato del voto 10 potrebbe essere: "è certo che Alisia è brava", quello dei voti 8 e 9: "è più probabile che Alisia sia brava piuttosto che sia non brava", i voti 6 e 7 si potrebbero interpretare "è ugualmente probabile che Alisia sia brava e che sia non brava", un voto inferiore a 6 potrebbe significare: "è più probabile che Alisia sia non brava piuttosto che sia brava".

Ad un'analisi accurata il punto di vista bivalente sembra piuttosto artificioso. Tuttavia, diversi bambini hanno considerato l'affermazione "Alisia è brava" come un *evento aleatorio*.

Enfatizziamo il fatto che avere opinioni e punti di vista differenti è da considerare una ricchezza, poiché proprio dal desiderio e dalla libertà di esprimere il proprio pensiero e dal confronto con gli altri nasce la comprensione approfondita e la condivisione del significato di ogni elemento di una frase e quindi la possibilità di esprimersi in maniera scientificamente corretta sia nella lingua italiana e sia nel linguaggio scientifico formale.

Da notare che alcuni bambini hanno fatto osservazioni molto acute, che hanno stimolato un approfondimento da parte dell'insegnante e hanno messo in luce la necessità di un'analisi di ciò che è esplicito in una affermazione e ciò che invece è sottinteso (e che quindi impedisce la comunicazione fra individui con culture diverse).

Qualcuno ha definito la filosofia come "l'estrinsecazione dell'ovvio" e la matematica come "l'arte di non fare i calcoli".

Le due affermazioni, provocatorie e apparentemente paradossali, nascondono due importanti necessità:

- la prima è quella di *esplicitare ciò che è sottinteso*, perché individui diversi possono sottintendere presupposti diversi, in dipendenza delle loro conoscenze, esperienze, principi morali e religiosi acquisiti in famiglia, carattere etc.
- la seconda necessità è quella di dare la *priorità al ragionamento logico* piuttosto che ad un addestramento meccanicistico che porta a seguire procedure e algoritmi senza capirne il significato e senza rendersi conto se sono adeguati al contesto in cui si opera.

Da tali punti di vista la risposta dei bambini è stata soddisfacente. Il dibattito svolto nelle classi, i dubbi, gli stessi errori d'interpretazione hanno avuto un esito molto costruttivo, facendo riflettere su aspetti spesso non presi in considerazione.

In conclusione, riteniamo che sia opportuno continuare il lavoro avviato, creare nuove occasioni di riflessione e di discussione critica sugli *enunciati* e *non enunciati* per favorire nei bambini lo sviluppo del pensiero logico e l'acquisizione di un linguaggio

sicuro, corretto, da poter trasferire in altri contesti di studio e non (logica interdisciplinare, trasversalità delle competenze).

Bibliografia

- [1] Behnke and alii, (1968), *Matematica 1 and 2*, Feltrinelli Editore Milano.
- [2] Coletti G., Scozzafava R., (2002), *Probabilistic Logic in a Coherent Setting*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [3] De Finetti B., (1970), *Teoria delle Probabilità*, Einaudi, Torino,
- [4] Fadini A., (1979), *Introduzione alla teoria degli insiemi sfocati*, Liguori Editore, Napoli.
- [5] Klir G.J., Yuan B., (1995), *Fuzzy sets and fuzzy logic*, Prentice Hall.
- [6] Lindley D. V., (1990), *La logica della decisione*, Il Saggiatore, Milano.
- [7] Maturo A., (1993), Struttura algebrica degli eventi generalizzati, *Periodico di Matematiche*, 4, 1993, p. 18-26.
- [8] Maturo A., (2008), La moderna visione interdisciplinare di Geometria, Logica e Probabilità in Bruno de Finetti, *Ratio Sociologica*, 2, 2008, pp. 39-62.
- [9] Reichenbach H., (1942), *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica*, tr. it. Einaudi, Torino, 1952
- [10] Russell B., (1962), *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milano.
- [11] Scozzafava R., (1996), *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*, Zanichelli, Bologna.
- [12] Scozzafava R., (2001), *Incertezza e probabilità. Significato, valutazione, applicazioni della probabilità soggettiva*, Zanichelli, Bologna.
- [13] Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Inf. Control*, 8, 338-353.
- [14] Zadeh, L. (1975). The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning I. *Inf. Sciences*, 8, 199-249.

Alcuni paradossi della probabilità

Giangiaco Gerla

Università di Salerno
ggerla@unisa.it

Sunto: Si espongono alcuni paradossi della teoria della probabilità presi tra i tanti presenti in letteratura. Lo scopo è di evidenziare il loro ruolo per la chiarificazione di tale teoria ed anche di mostrare come l’opinione comune sia poco affidabile quando si tratta di valutare fenomeni di carattere probabilistico. In particolare, si pone l’attenzione sui paradossi che nascono dall’utilizzazione di dati statistici per definire le funzioni di probabilità.

Parole Chiave: Paradossi, probabilità.

1. Introduzione: le nozioni di paradosso e di antinomia

Le nozioni di paradosso e di antinomia spesso non vengono distinte. Nel seguito preferisco attenermi alle seguenti definizioni.

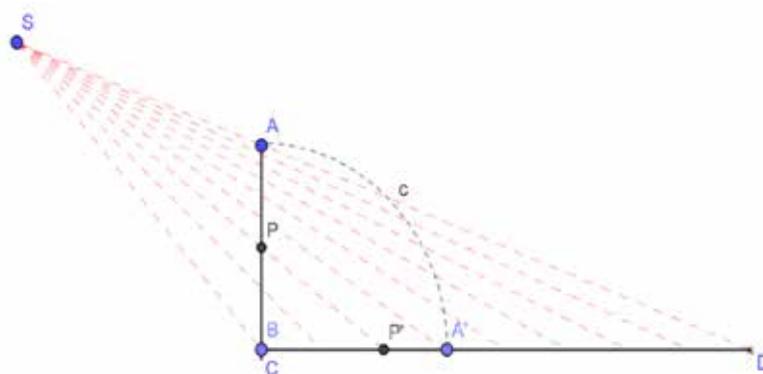
Paradosso Dal [greco](#) *παρά* (*contro*) e *δόξα* (*opinione*). Dimostrazione di un’asserzione che pur partendo da una teoria che si considera valida, contraddice l’opinione comune o l’esperienza quotidiana.

Antinomia Dal [greco](#) *αντι* (*contro*) e *νομος* (*legge*). Dimostrazione, a partire da una teoria che si considera valida, di una asserzione che nega se stessa, cioè un’asserzione del tipo $\alpha \wedge \neg \alpha$.

Pertanto, un paradosso giunge ad una conclusione che si considera valida ma che si contrappone ad alcune idee che gli uomini hanno del mondo che li circonda. Tale conclusione suscita pertanto stupore e spesso resistenza ad essere accettata ma questo non le impedisce di essere considerata vera. Ad esempio, tutt’ora l’opinione comune di una popolazione non scolarizzata è che il sole gira intorno alla terra. Opinione, tra l’altro ben fondata dal punto di vista scientifico in quanto fortemente confermata dall’esperienza quotidiana. Questo aspetto paradossale della teoria non le ha impedito di essere comunemente accettata dalla comunità scientifica.

Un'antinomia invece si muove in ambito puramente logico. Si riferisce infatti ad una teoria T da cui si può dedurre una asserzione α ed anche la sua negata $\sim\alpha$. Questo comporta che T non può avere modelli e quindi che non c'è niente di cui T possa parlare. Infatti, se esistesse un modello di T in tale modello dovremmo accettare come vera sia α sia la sua negata $\sim\alpha$.

In questo senso mentre un paradosso comporta un cambio di opinione, un'antinomia comporta un cambio della teoria da cui è stata derivata. Se dalle leggi italiane il mio avvocato deduce, con un ragionamento corretto, che non sono perseguibile ed il pubblico ministero deduce, con un ragionamento corretto, che devo avere l'ergastolo, allora nelle leggi deve esserci un difetto e quindi vanno cambiate. Forse la più famosa antinomia è quella di Russell che ha portato a scelte di nuovi assiomi in teoria degli insiemi. Ecco invece un paradosso della teoria degli insiemi.



Paradosso 1.1. Due segmenti AB e CD con AB molto più piccolo di CD hanno lo stesso numero di punti.

Dim. Disponiamo i due segmenti perpendicolarmente come in figura, tracciamo la retta per A e D e fissiamo in tale retta un punto S . Possiamo allora considerare la proiezione di AB dal punto S sul segmento CD cioè la funzione che ad ogni punto P di AB associa il punto P' ottenuto come intersezione della retta SP con CD . È evidente che tale proiezione è una funzione biunivoca e questo prova che AB ha tanti punti quanti ne ha CD . Si può visualizzare un tale teorema supponendo che S sia il sole, che AB sia un'asta verticale fissata al suolo e che CD sia la sua ombra sul terreno.

Questo teorema della teoria degli insiemi è contro l'opinione comune che tende ad immaginare che più lungo è un segmento e più punti contiene. Quindi è lecito chiamarlo paradosso. Tale paradosso suggerisce che se si vuole conservare la teoria degli insiemi bisogna cambiare opinione (se si vuole, bisogna cancellare l'assioma di Euclide per cui il tutto è maggiore della parte).

Osserviamo anche che ogni paradosso si può trasformare in una antinomia se l'opinione comune si assume come assioma come mostra il seguente esempio.

Antinomia 1.2. Il sistema di assiomi di Euclide congiunto con la teoria degli insiemi costituisce una teoria T contraddittoria. Infatti, in T si può dimostrare che:

- Ogni parte propria di un segmento è strettamente più piccola del segmento stesso.
- Esiste una parte propria di un segmento che non è più piccola del segmento stesso.

Dim. La prima asserzione è un assioma della teoria di Euclide e quindi anche un teorema di T . Per quanto riguarda la seconda asserzione, ruotiamo AB fino ad ottenere il segmento $BA' = CA'$. È evidente che CA' ha tanti punti quanti ne ha AB e quindi tanti punti quanti ne ha CD . Questo dimostra che CA' è una parte propria di CD con ha tanti elementi quanti ne ha CD .

Paradossi ed antinomie apparenti. Abbiamo parlato di paradossi e di antinomie ma esiste una terza categoria che è costituita dai paradossi e dalle antinomie apparenti. Con questo termine indico quei paradossi e quelle antinomie che derivano da dimostrazioni sbagliate ma in cui l'errore è ben nascosto.

Concludiamo questo paragrafo evidenziando che nonostante il fatto che abbiamo messo in risalto la differenza di significato delle parole “paradosso” e “contraddizione”, di fatto spesso un paradosso può essere visto come una antinomia ed una antinomia come un paradosso. Basta che l'opinione comune sia vista come un assioma oppure che un assioma di una teoria sia espressione di una opinione comune.

2. Paradossi legati al trattamento dei dati statistici

Passando all'argomento di questa lezione, i semplici assiomi della teoria della probabilità non producono antinomie essendo tale teoria consistente. Questo è provato dal fatto che ogni coppia di dadi ed ogni mazzo di carte fornisce un modello di tale teoria. Questo non esclude che essa dia origine ad una quantità enorme di paradossi. Il problema è che *l'opinione comune* quando si applica a fenomeni probabilistici spesso fallisce. Ne segue il paradosso per cui pur essendo semplicissima nei suoi assiomi, la teoria della probabilità si rivela di difficilissima comprensione ed irta di antinomie apparenti.

Cominciamo con l'espone alcuni paradossi che nascono dall'uso delle statistiche per definire le funzioni di probabilità.

2.1. Paradosso della somma di due dati di origine diversa

Supponiamo che un centro di ricerca voglia indagare sull'efficacia di una pillola per curare il mal di testa e che le informazioni di cui dispone provengono da due ospedali diversi. Nel primo si riferiscono a 400 persone e nel secondo a 300. Ai ricercatori **A, B, C, D, M** viene richiesto di fondere queste informazioni in modo che il risultato di questa operazione, riferendosi ad un campione di $400+300 = 700$ persone, risulti più affidabile. La risposta data dai primi quattro ricercatori è indicata da opportune tabelle (vedere alla fine di questo sottoparagrafo). Tali tabelle contengono nelle prime due righe le informazioni disponibili mentre nell'ultima riga indicano la procedura applicata da ciascun ricercatore ed il risultato ottenuto.

La risposta di **A** non opera nessuna semplificazione nel trattare le frazioni e può essere considerata quella giusta. Le altre risposte invece usano varie semplificazioni che, specialmente quando i numeri sono molto alti, sembrano aiutare nel calcolo. Il simbolo \oplus è l'operazione tra frazioni definita ponendo

$$n/m \oplus n'/m' = (n+n')/(m+m'),$$

cioè l'operazione in cui si addizionano numeratore a numeratore e denominatore a denominatore. L'ultimo ricercatore invece di utilizzare l'operazione \oplus propone di considerare il valor medio delle percentuali. Naturalmente è paradossale che i ricercatori pervengano a risposte tanto diverse tra loro.

Come vedremo tali paradossi nascono dal fatto che con una espressione come $180/300$ in generale intendiamo un numero razionale e quindi ci sembra lecito semplificare e ridurlo a $60/100$ come ha fatto ad esempio **C**. Tuttavia, la stessa espressione si può interpretare come "180 su 300" senza che si consideri questa espressione la stessa cosa di "60 su 100". In questo caso parliamo di frazione. Chiariremo questa distinzione nel prossimo paragrafo riesaminando la definizione del campo dei numeri razionali.

Alcuni paradossi della probabilità

| A | Ospedale | Guarite/i | Totale | Percentuale | |
|---|------------|-----------|--------|-----------------------|---------------------------|
| | Ospedale 1 | 220 | 400 | 220/400 \oplus | |
| | Ospedale 2 | 180 | 300 | 180/300 | |
| | Totale | 400 | 700 | 400/700 \rightarrow | 400/700 (= 4/7 ??) |

| B | Ospedale | Guarite/i | Totale | Percentuale | |
|---|------------|-----------|--------|-----------------------|----------------|
| | Ospedale 1 | 220 | 400 | 220/400 \rightarrow | 11/20 \oplus |
| | Ospedale 2 | 180 | 300 | 180/300 \rightarrow | 3/5 |
| | Totale | 400 | 700 | 400/700 | 14/25 |

| C | Sesso | Guarite/i | Totale | Percentuale | |
|---|------------|-----------|--------|-----------------------|----------------|
| | Ospedale 1 | 220 | 400 | 220/400 \rightarrow | 11/20 \oplus |
| | Ospedale 2 | 180 | 300 | 180/300 \rightarrow | 60/100 |
| | Totale | 400 | 700 | 400/700 | 71/120 |

| D | Sesso | Guarite/i | Totale | Percentuale | |
|---|------------|-----------|--------|-----------------------|--------------------|
| | Ospedale 1 | 220 | 400 | 220/400 \rightarrow | 22/40 \oplus |
| | Ospedale 2 | 180 | 300 | 180/300 \rightarrow | 18/30 |
| | Totale | 400 | 700 | 400/700 | 40/70 = 4/7 |

| M | Sesso | Guarite/i | Totale | Percentuale | Valore medio |
|---|------------|-----------|--------|-------------|---|
| | Ospedale 1 | 220 | 400 | 220/400 | |
| | Ospedale 2 | 180 | 300 | 180/300 | |
| | Totale | 400 | 700 | | $(220/400+180/300)/2 =$ $=$ 23/40 \neq 4/7 |

2.2. Distinzione tra frazioni e razionali.

Ricordiamo come sono usualmente definiti i numeri razionali evidenziando il significato diverso della nozione di frazione e di quella di numero razionale.

Definizione 2.2.1. Chiamiamo *frazione* una coppia (n, m) con n ed m numeri interi relativi tali che $m \neq 0$ e rappresentiamo con n/m coppie di questo tipo. Nell'insieme Fr delle frazioni definiamo le operazioni di somma e prodotto ponendo, rispettivamente

$$(n/m) + (n'/m') = (n \cdot m' + n' \cdot m) / (m \cdot m') ; \quad (n/m) \cdot (n'/m') = (n \cdot n') / (m \cdot m').$$

Si ottiene in questo modo una struttura algebrica $(Fr, +, \cdot, 0/1, 1/1)$.

La struttura algebrica $(Fr, +, \cdot, 0/1, 1/1)$ non è un campo ma è un primo passo per la definizione del campo dei numeri razionali. Da notare che la prima equazione deriva da una nota procedura per calcolare la somma di due numeri razionali senza ricorrere al minimo comune multiplo. Da notare anche che in tale struttura non è lecita la semplificazione. Ad esempio, non è lecito dividere per 2 numeratore e denominatore di $6/8$ e quindi non è lecita l'equazione $6/8 = 3/4$.¹

Il secondo passo consiste nel definire una relazione di equivalenza \equiv in Fr .

Definizione 2.2.2. Indichiamo con \equiv la relazione binaria in Fr definita ponendo

$$a/b \equiv a'/b' \Leftrightarrow ab' = a'b.$$

Ad esempio $3/4 \equiv 6/8$ in quanto $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. È anche facile vedere che se si moltiplica numeratore e denominatore di una frazione per lo stesso numero n allora si ottiene una frazione equivalente. Ad esempio $(3 \cdot n)/(4 \cdot n) \equiv 3/4$ in quanto $3 \cdot n \cdot 4 = 4 \cdot n \cdot 3$.

Teorema 2.2.3. La relazione \equiv è una congruenza nell'algebra delle frazioni, cioè è compatibile con le operazioni in tale algebra. Il quoziente di $(Fr, +, \cdot, 0/1, 1/1)$ modulo \equiv è un campo, che denotiamo con $(Q, +, \cdot, [0], [1])$, che prende il nome di *campo dei numeri razionali*. Un elemento di tale campo viene detto *numero razionale*.

Pertanto, per definizione di quoziente di una struttura, abbiamo che:

- Gli elementi di Q , detti *numeri razionali*, sono classi di equivalenza $[n/m] = \{n'/m' : n'/m' \equiv n/m\}$
- Le operazioni $+$, \cdot sono definite ponendo

$$[a/b] + [c/d] = [a/b + c/d] \text{ e } [a/b] \cdot [c/d] = [a/b \cdot c/d]$$
- $[0/1] = \{0/n : n \text{ numero intero}\}$, $1 = [1/1] = \{n/n : n \neq 0\}$.

Non dimostro tale teorema limitandomi ad osservare che $[3/4]$ ammette come inverso $[4/3]$ in quanto $[3/4] \cdot [4/3] = [12/12] = [1/1]$ dove quest'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che $12/12 \equiv 1/1$. Come è noto, nel fare calcoli in questo campo portarsi appresso le parentesi quadre è noioso. Questo porta a denotare un numero razionale $[n/m]$ semplicemente con n/m . Ne segue che si considera corretta, ad esempio, la scrittura $3/4 = 6/8$ in quanto è da interpretare come $[3/4] = [6/8]$ che è effettivamente un'eguaglianza

¹ Dal punto di vista didattico sarebbe utile proporre ad una classe di verificare se tale struttura è un campo. In proposito è evidente che $0/1$ e $1/1$ sono elementi neutri rispetto all'addizione ed alla moltiplicazione. Tuttavia, non siamo in presenza di un campo. Ad esempio, se si moltiplica $3/4$ con una qualunque frazione n/m si ottiene $3n/4m$ che non potrà mai coincidere con $1/1$.

essendo $3/4 \equiv 6/8$. Se invece ci si muove all'interno della struttura $(Fr, +, \cdot, 0/1, 1/1)$ la stessa equazione si deve considerare non corretta essendo la coppia $(3, 4)$ diversa dalla coppia $(6, 8)$.

Coesistono in definitiva due strutture algebriche totalmente diverse tra loro che corrispondono ad un effettivo uso del linguaggio comune. Facciamo un esempio: se andando dal vinaio dico

per favore mi dia tre (pausa) "quartini di vino"

intendo dire che voglio tre bottigliette di vino ciascuno di un quarto di litro. Pertanto se ricevessi sei bottigliette di un ottavo di litro ci rimarrei abbastanza male. Se invece, andando dal vinaio dico

"per favore mi dia 'tre quarti' (pausa) di vino"

non ponendo pausa tra "tre" e "quarti" intendo riferirmi ai litri e per me non esiste grande differenza nel ricevere 3 bottigliette da un quarto oppure 6 bottigliette da un ottavo cioè tra $3/4$ e $6/8$. Nel primo caso coinvolgiamo $3/4$ come *frazione* nel secondo coinvolgiamo $3/4$ come un numero razionale.

2.3. Soluzione del paradosso.

Detto questo, la soluzione del paradosso è che in certi casi i calcoli in teoria della probabilità devono essere fatti tramite la struttura $(Fr, +, \oplus, \cdot, 0/1, 1/1)$ ed in cui l'operazione \oplus può giocare un ruolo come nel caso della somma delle percentuali come nel paradosso di cui stiamo parlando. Questo significa che durante i calcoli non siamo autorizzati ad effettuare semplificazioni. Ad esempio, riferendoci alla soluzione di **C**, non possiamo semplificare $220/400$ in $11/20$ e $180/300$ in $3/5$ per poi operare con \oplus .

Fare la media. Quale rapporto ha tutto questo con la media che ha utilizzato il ricercatore **M**? È immediato provare che se si pone $\lambda = m/(m+m')$ e quindi $1-\lambda = m'/(m+m')$ allora

$$(n/m) \oplus (n'/m') = (n/m) \cdot \lambda + (n'/m') \cdot (1-\lambda).$$

Si tratta di una *media pesata* che tiene conto del numero di pazienti presenti negli archivi dei due ospedali. Ai dati di un ospedale viene dato tanto più "peso" quanto è maggiore il numero di pazienti considerati rispetto al numero totale dei pazienti. Se i due ospedali avessero avuto lo stesso numero di pazienti allora $\lambda = 1-\lambda = 1/2$ e la risposta di **M** sarebbe stata corretta. Da notare che possiamo interpretare $m/(m+m')$ come la probabilità che capiti un paziente del primo ospedale rispetto al totale dei presenti nei due ospedali e quindi $1-\lambda = m'/(m+m')$.

Potrebbe sembrare che l'equazione proposta sopra permetta di definire \oplus a partire dalla somma e dal prodotto di numeri razionali e che quindi sia possibile fare a meno di tale operazione. Tuttavia, la media pesata non è un'operazione definibile utilizzando le operazioni di prodotto ed addizione tra razionali perché non è compatibile con \equiv . Questo per il fatto che la funzione con cui si calcola λ non è compatibile con \equiv . Ad esempio se

consideriamo le frazioni $3/4$ e $2/5$ e le frazioni equivalenti $6/8$ e $6/15$ abbiamo che nel primo caso $\lambda = 4/(4+5) = 4/9$ nel secondo $\lambda = 6/23$ che non è equivalente a $4/9$. D'altra parte solo il fatto che λ dipende solo dai denominatori delle frazioni che entrano in gioco rende evidente che λ non è invariante per equivalenza.

Concludo evidenziando che tale tipo di argomentazione può essere collegata anche al famoso teorema delle alternative che, per ragione di spazio, non ho trattato.

3. Paradosso di Simpson

Un paradosso forse più interessante, detto *Paradosso di Simpson*, è il seguente (Wijayatunga 2014). Anche in questo caso si tratta di trattare dati statistici. Siamo nello stesso centro di ricerca che abbiamo ora menzionato ma questa volta, considerando che i mal di testa spesso scompaiono anche senza nessun intervento, si vuole scoprire se la pillola aumenta o meno le possibilità di guarigione rispetto alle guarigioni spontanee. Supponiamo ora che i dati forniti dai due ospedali siano i seguenti.

| Ospedale 1 | Guariti | Totale | Guariti percentuale | |
|------------|---------|--------|---------------------|----------|
| Presa | 70 | 100 | $70/100 = 70/100$ | Efficace |
| Non presa | 180 | 300 | $180/300 = 60/100$ | |

| Ospedale 2 | Guariti | Totale | Guariti percentuale | |
|------------|---------|--------|---------------------|----------|
| Presa | 90 | 300 | $90/300 = 30/100$ | Efficace |
| Non presa | 20 | 100 | $20/100 = 20/100$ | |

Volendo fondere le informazioni contenute in queste due tabelle otteniamo

| Globale | Guariti | Totale | Guariti percentuale | |
|-----------|----------------|--------|---------------------|--------------|
| Presa | $70+90 = 160$ | 400 | $160/400 = 40/100$ | Non efficace |
| Non presa | $180+20 = 200$ | 400 | $200/400 = 50/100$ | |

Si ha allora il seguente paradosso

Paradosso. I dati di ciascuno dei due ospedali ci portano a concludere sulla validità della pillola. Tuttavia quando i dati si raggruppano si ottengono dati che dicono che la pillola non è valida.

4. Due strani paradossi

Ecco due paradossi che criticano il punto di vista che si possano assumere come valori probabilistici semplicemente attingendo a valori statistici.

4.1 Paradosso di Carlo V.

Leggendo la settimana enigmistica ho trovato la seguente “spigolatura”.

Nel 1952, durante la campagna militare che oppose Enrico II e Carlo V, quest’ultimo stava ispezionando la propria armata, insediata davanti a Metz, quando si avvicinò un po’ troppo ad una delle batterie nemiche. Numerosi ufficiali del suo esercito lo pregarono allora di spostarsi in una posizione più sicura, ma Carlo quinto esclamò ridendo: «rassicuratevi: potete citarmi un solo imperatore che sia stato colpito da una palla di cannone?».

Tale spigolatura determina un paradosso, infatti il numero che misura la probabilità di un evento viene usualmente assunto uguale alla percentuale dei casi passati in cui si è verificato l’evento. Pertanto, il comportamento spericolato di Carlo V è in completo accordo con la teoria della probabilità. D’altra parte, con lo stesso tipo di argomentazione Carlo V potrebbe posizionarsi davanti alla bocca del cannone senza correre alcun rischio e questo è assurdo.

4.2 Paradosso delle due bombe

Il seguente paradosso è sostanzialmente equivalente a quello ora esposto. Carlo, famoso studioso di teoria della probabilità, viaggia spesso per i suoi convegni ma ha sempre una grande paura che un terrorista faccia esplodere l’aereo in cui si imbarca. Un giorno un poliziotto della sorveglianza lo perquisisce e gli trova una bomba nella borsa...

- Lei è in arresto, perché porta questa bomba?
- E lei che è un ignorante! Ho visto le statistiche e risulta che i casi in cui sono state trovate due bombe in un aereo è di uno su un miliardo, mentre i casi in cui è stata trovata una sola bomba è di uno su un milione. Poiché le valutazioni probabilistiche si basano su quelle statistiche: se porto una bomba nel mio aereo allora diventa poco probabile che non ce ne siano altre!

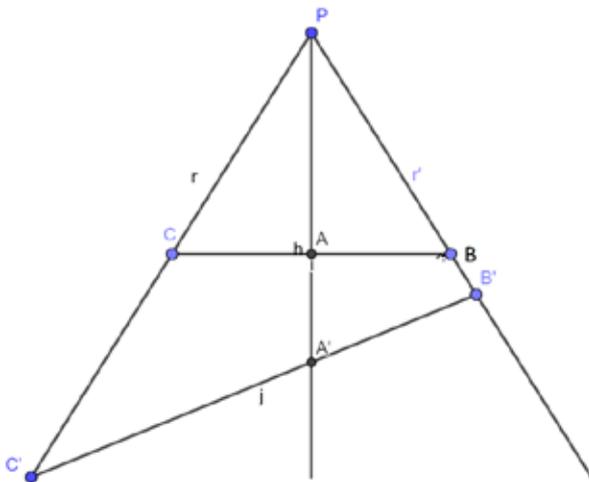
Da notare che con la stessa argomentazione possiamo provare che se Carlo portasse cento bombe nelle valigie sarebbe sicuro di non correre nessun rischio. Di più, visto che era la prima volta che Carlo saliva su di un aereo e che nelle statistiche del passato nessun aereo ha mai trasportato una bomba con Carlo a bordo, la probabilità che ci sia una bomba con lui presente è zero! Quindi potrebbe anche fare a meno di portarsi una bomba.

5. Paradosso dell'equipotenza.

Parliamo ora di alcuni paradossi che non sono paradossi della probabilità in senso stretto. Ecco il primo. Accettiamo che se si vuole colpire un bersaglio allora più è grande il bersaglio più è probabile che venga colpito. Ora, dato un punto P si traccino due rette r ed r' e poi la bisettrice dell'angolo che tali rette formano. Costruiamo poi una perpendicolare a tale bisettrice ed indichiamo con C , A e B i tre punti di intersezione di tale perpendicolare con le tre rette per P . Per costruzione AC è uguale a CB . Si tracci inoltre una retta che intercetti tre punti A' , C' e B' in modo che $C'A'$ sia molto minore di $C'B'$. Detto questo supponiamo che dal punto P vengano sparati a caso dei colpi di pistola in tutte le direzioni ma sempre all'interno dell'angolo tra le rette r ed r' . È evidente che la probabilità di colpire $A'C'$ è molto minore della probabilità di colpire $C'B'$ essendo il primo segmento di minore estensione. Inoltre, la probabilità di colpire AC è la stessa della probabilità di colpire CB essendo i due segmenti della stessa estensione. Abbiamo quindi che $p(AC) = p(CB)$ e $p(A'C') < p(C'B')$. D'altra parte tutte le volte che un proiettile colpisce AC colpisce necessariamente anche $A'C'$ e tutte le volte che colpisce $A'C'$ deve necessariamente avere colpito AC . Pertanto $p(A'C') = p(AC)$ e per lo stesso motivo $p(C'B') = p(CB)$. Da ciò segue che $p(C'B') = p(A'C')$ in contrasto con il fatto che $p(A'C') < p(C'B')$.

Ho chiamato "paradosso dell'equipotenza" questo paradosso poiché si basa sull'idea che due eventi a e b che sono equipotenti dovrebbero avere la stessa probabilità di verificarsi. Infatti sia $f: a \rightarrow b$ è una funzione biiettiva tra a e b e supponiamo che esista un marchingegno che ogni volta che si verifica un evento elementare x crei l'evento elementare $f(x)$. Allora accade che la probabilità che si verifichi a non può che essere uguale alla probabilità che si realizzi b . Questo fatto è compatibile con la concezione classica della probabilità in cui l'ipotesi di equiprobabilità per gli eventi elementari comporta l'equiprobabilità tra eventi equipotenti. Porta invece a contraddizione se si definisce la probabilità come rapporto di misure nello spazio euclideo. Infatti è evidente

che due insiemi possono essere equipotenti ma con misure diverse.



6. Paradosso della conferma

Questo paradosso è stato ideato dal logico tedesco C. G. Hempel nel 1937. In realtà non è un paradosso della teoria della probabilità, piuttosto è un paradosso logico il quale (forse) può essere risolto grazie alla teoria della probabilità.

Consideriamo l'affermazione “tutti i corvi sono neri” che possiamo riscrivere in termini logici con

$$“\forall x(x \text{ è un corvo} \Rightarrow x \text{ è nero})”. \quad (*)$$

In quanto affermazione scientifica su dati di fatto, una sua conferma si ottiene tutte le volte che vediamo un corvo e constatiamo che è nero. Ora in logica matematica sappiamo che una implicazione $A \Rightarrow B$ è equivalente alla sua “contronominale” $\neg B \Rightarrow \neg A$ nel senso che la prima è vera se e solo se la seconda è vera. Quindi l'implicazione (*) equivale a

$$“\forall x(x \text{ non è nero} \Rightarrow x \text{ non è un corvo})”. \quad (**)$$

Ma questo comporta che la legge (*) è confermata se è confermata la legge (**) e quindi tutte le volte che vedo un animale non nero e mi accorgo che non è un corvo. Ad esempio tutte le volte che vedo un coniglio bianco!

In realtà la stranezza non ci sarebbe se ci riferissimo ad insiemi piccoli di animali, ad esempio gli animali di una isoletta.² Tuttavia quando enunciamo una regola del tipo “tutti i corvi sono neri” intendiamo enunciare una regola universale che vale non solo per gli animali attualmente esistenti ma per tutti gli animali che possono esistere in futuro. Inoltre, è evidente che la regola (*) non viene inficiata nel caso si trovi un solo corvo “albino”, cioè nel caso che per qualche caso strano sia nato un animale che per tutti gli aspetti è da ritenere un corvo ma che risulta non nero.

Un modo per risolvere il paradosso della conferma è quello di interpretare l'affermazione “tutti i corvi sono neri” in termini probabilistici cioè come “è probabile che se mi appare un corvo allora tale corvo risulti nero”. Se indico con c l'evento “essere un corvo” e con n l'evento “essere nero” allora la misura di tale probabilità è rappresentata dalla probabilità condizionata $p(n|c)$. In tale modo il paradosso si blocca poiché l'equivalenza tra una implicazione e la sua contronominale non sussiste nel caso delle probabilità condizionate. In altre parole, non vale l'uguaglianza $p(n|c) = p(\neg c|\neg n)$. Ad esempio nell'insieme delle vocali posso porre $c = \{a, e, o\}$ e $n = \{e, i, o\}$, allora $p(n|c) = |\{e, o\}|/|a| = 2/3$ mentre $p(\neg c|\neg n) = |\{u\}|/|\{a, u\}| = 1/2$.

² Anzi, se esistono 20 corvi e 5 animali bianchi che non sono corvi, allora per verificare (*) ho bisogno di 20 verifiche, per verificare (**) ho bisogno di 5 verifiche. Pertanto (**) risulta non solo equivalente ma anche “più conveniente” di (*).

7. Paradosso dell'autoreferenzialità

Sui 4 foglietti a), b), c), d) sono scritte 3 affermazioni al modo seguente:

- a) la probabilità di estrarre la risposta corretta è $1/4$
- b) la probabilità di estrarre la risposta corretta è $1/4$
- c) la probabilità di estrarre la risposta corretta è $2/4$
- d) la probabilità di estrarre la risposta corretta è $0/4$

I foglietti vengono piegati e chiusi in un'urna: quale è la probabilità di estrarre un foglietto con la risposta esatta? Esaminiamo la situazione.

Sicuramente esiste una risposta corretta tra quelle segnate. Infatti, se non esistesse a) sarebbe vera.

Sicuramente a) non è corretta. Infatti, se fosse corretta lo sarebbe anche b) e quindi la probabilità sarebbe di $2/4$ almeno.

Sicuramente b) non è corretta. Vale la stessa argomentazione di a)

Sicuramente c) non è corretta. Infatti, compare una sola volta e quindi la sua probabilità è $1/4$ corretta allora dovrebbe avere probabilità almeno $1/4$.

Sicuramente d) non è corretta. Infatti, se fosse corretta la probabilità non potrebbe essere 0.

Ne segue che nessuna risposta è corretta. Questo è assurdo poiché se così fosse d) sarebbe vera! E allora qual è la risposta? Semplice: la risposta è che la domanda è mal posta, o, in altri termini, che ci troviamo di fronte a un paradosso. Il paradosso nasce non dalla teoria della probabilità ma dall'autoreferenzialità, ossia si chiede la risposta a una domanda che parla della propria risposta.

8. Conclusione

Come abbiamo già messo in rilievo, la teoria della probabilità non ammette antinomie come avviene ad esempio alla teoria degli insiemi. Tuttavia, esistono numerosi paradossi per tale teoria dei quali quelli ora esposti sono solo piccola parte. Questo significa che l'opinione comune quando si applica a fenomeni di carattere probabilistico risulta essere spesso errata. È interessante osservare che questo avviene in modo notevolmente inferiore in altri casi, ad esempio quando si tratta di fenomeni che riguardano lo spazio, cioè in geometria.

Abbiamo anche visto che la maggior parte dei paradossi appare quando si passa da dati di natura statistica alla formulazione di una funzione di probabilità. Un esempio interessante è relativo alla mortalità per Covid. In un certo periodo su alcuni giornali apparve la notizia per cui il tasso di mortalità per Covid in Italia risultava maggiore del tasso della Cina. Questo proverebbe una maggiore validità del metodo applicato dal governo cinese rispetto a quanto fatto dal governo Italiano. In effetti la statistica era corretta in quanto, come affermato dall'Istituto Superiore della Sanità in un comunicato del 6 marzo 2020.

"Per quanto riguarda la letalità in generale, al 4 marzo in Italia risultava del 3,5%, mentre in Cina al 24 febbraio era del 2,3%."

Tuttavia, era la traduzione di tale statistica in un rapporto di causa ed effetto a non essere corretta. Infatti, sempre nello stesso comunicato, viene affermato che un confronto corretto

"... sfata il luogo comune che sta circolando in questi giorni che afferma che nel nostro paese la mortalità sia più alta che in Cina ... "

L'errore emerge quando viene fatta entrare in gioco la variabile "nascosta" età. Infatti, i dati statistici riportati nello stesso documento dicono anche che:

"In Italia al 4 marzo la letalità tra gli over 80 risulta del 10,9%, mentre in Cina al 24 febbraio ... era del 14,8%. Tra 70 e 79 anni il confronto vede l'Italia con una letalità del 5,3%, mentre la Cina ha l'8%, e tra 0 e 69 è 0,5% nel nostro paese contro l'1,3% cinese."

Concludo osservando che spesso si è in presenza di eventi che sono unici nel senso che non esistono statistiche che possano aiutare a valutare la probabilità del loro verificarsi. Per chi fosse interessato in (Gerla 1994) si affronta una tale questione.

Bibliografia

Clark Michael. (2004), *I Paradossi dalla A alla Z.*, Edizione Mondolibri, Milano.

Costantini Domenico. (2004), *I fondamenti storico-filosofici delle discipline statistico-probabilistiche*, Bollati Boringhieri Scienze, Torino.

de Finetti Bruno. (1970), *Teoria delle Probabilità*, vol. I e II, Einaudi, Torino.

Di Crescenzo Antonio, Giorno Virginia, Nobile Amelia Giuseppina Ricciardi Luigi Maria. (2009), *Un primo corso in probabilità*, Liguori Editore, Napoli.

Gerla Gian­giaco­mo. (1994), The probability that Tweety is able to fly. *International Journal of Intelligent Systems* 9, 403–409.

Giroto­to Vittorio. (2001), Gli errori nel ragio­namento. Tratto da: KOS. Rivista di medicina, cultura e scienze umane. 187. pp. 40-49 (scaricabile in rete).

Maturo Antonio. (2001), Didattica della Matematica a partire da situazioni di incertezza, in *Atti del Congresso Nazionale Mathesis 2000*, pp. 277-292, Editrice Rotas, Barletta.

Maturo Antonio. L'insegnamento del Calcolo delle Probabilità ed i quesiti agli Esami di Stato. Manoscritto scaricabile in rete.

Legge dei grandi numeri e teorema del limite centrale

Luciano Corso

Presidente della Federazione Italiana Mathesis
lcorso@iol.it

Sunto

L’aspetto applicativo nello sviluppo della statistica inferente si basa sull’importante ruolo della distribuzione Normale. Da una parte si può facilmente constatare come essa rappresenti la chiave di interpretazione di molteplici distribuzioni sperimentali naturali, dall’altra si evidenzia già sperimentalmente come la nostra distribuzione di probabilità sia il punto di convergenza asintotica di numerose distribuzioni di probabilità; ciò giustifica la sua portata scientifica nell’ambito della statistica inferente con particolare riguardo al teorema del limite centrale.

Parole chiave: probabilità, frequenza relativa, legge dei grandi numeri, teorema centrale limite, densità di probabilità, funzione caratteristica dei momenti.

1. Introduzione

I due teoremi che tratterò costituiscono il fondamento dell’inferenza statistica con particolare riguardo alla teoria dei grandi campioni. Per quanto riguarda la legge dei grandi numeri, la sua dimostrazione può essere svolta, con la dovuta attenzione, nel corso degli ultimi anni delle scuole medie superiori dedicandole una unità didattica. Invece, la dimostrazione del teorema del limite centrale richiede un supporto analitico che non è svolto nel corso degli istituti superiori e perciò, il teorema può solo essere enunciato e supportato da esemplificazioni che possano condurre gli studenti a dar credito alla congettura. Tutta-via, per studenti che hanno interesse per la matematica e risorse per poterla approfondire, è possibile anche trattare la dimostrazione del teorema del limite centrale. In questa breve nota, cercheremo un modo sperimentale utile per far capire il significato dei due teoremi. In appendice, troverete la dimostrazione del teorema del limite centrale.

2. Disuguaglianza di Bienaimé-Tchebyshev

Consideriamo una variabile aleatoria (in seguito v.a.) X con funzione di ripartizione $P(X \leq x) = F_X(x)$. Supponiamo che la v.a. X abbia media aritmetica μ e varianza σ^2 . Siamo ora interessati a definire la quantità

$$Q(h|h \in \mathbb{R}^+) = \text{Prob}\{(x|\mu - h\sigma < x \leq \mu + h\sigma)\}. \quad (1)$$

Nel continuo si ha:

$$Q(h|h \in \mathbb{R}^+) = F_X(\mu + h\sigma) - F_X(\mu - h\sigma) = \int_{\mu-h\sigma}^{\mu+h\sigma} f(x) \cdot dx, \quad (2)$$

dove $f(x)$ è la funzione di densità di probabilità di X .

Possiamo calcolare $Q(h|.)$ in alcuni casi. Per esempio, se consideriamo la distribuzione di probabilità della Normale, $N_X(x|\mu, \sigma)$, la risposta è:

$$Q(h|h \in \mathbb{R}^+) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\mu-h\sigma}^{\mu+h\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx.$$

Se consideriamo la legge esponenziale

$$F_X(x|\mu = 1/\lambda) = 1 - e^{-\lambda \cdot x}$$

ove λ è il numero di volte che si presenta l'evento E nell'arco di tempo unitario, otteniamo

$$Q(h|h \in \mathbb{R}^+) = \lambda \cdot \int_{(1/\lambda)-h/\lambda^2}^{(1/\lambda)+h/\lambda^2} e^{-\lambda \cdot x} \cdot dx.$$

Se consideriamo la binomiale la risposta è:

$$Q(h|h \in \mathbb{R}^+) = \sum_{x=np-h\sqrt{npq}}^{np+h\sqrt{npq}} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

Molte altre volte non è possibile trovare una formulazione adeguata di questo problema. Ci si chiede come risolvere il problema quando accade questo. Un lavoro dovuto a due autori, Bienaymé e Tchebyshev, ha dimostrato che esiste una condizione di minimo per $Q(h|h \in \mathbb{R}^+)$.

Teorema di Bienaymé e Tchebyshev: Sia X una v.a. con distribuzione di probabilità $F_X(x)$; allora è vero quanto segue:

$$Q(h|h \in \mathbb{R}^+) = F_X(\mu + h\sigma) - F_X(\mu - h\sigma) \geq 1 - \frac{1}{h^2}. \quad (3)$$

Legge dei grandi numeri e teorema del limite centrale

Nel continuo la relazione diventa:

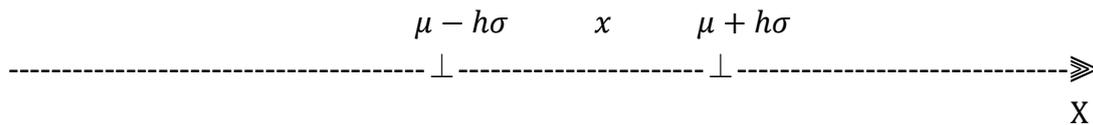
$$Q(h|h \in \mathbb{R}^+) = \int_{\mu-h\sigma}^{\mu+h\sigma} f(x) \cdot dx \geq 1 - \frac{1}{h^2} . \quad (4)$$

La dimostrazione parte dalla scomposizione della varianza:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx \quad (5)$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\mu-h\sigma} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx + \int_{\mu-h\sigma}^{\mu+h\sigma} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx + \int_{\mu+h\sigma}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx .$$

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu-h\sigma} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx + \int_{\mu+h\sigma}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx .$$



Dalla figura si capisce che la parte che ci interessa è $x \leq \mu - h\sigma$ e $x \geq \mu + h\sigma$. Perciò, possiamo scrivere:

$$x - \mu \leq -h\sigma \quad , \quad x - \mu \geq +h\sigma$$

ed elevando al quadrato si ottiene per entrambi i casi: $(x - \mu)^2 \geq h^2\sigma^2$. A questo punto possiamo affermare anche

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu-h\sigma} h^2\sigma^2 \cdot f(x) \cdot dx + \int_{\mu+h\sigma}^{+\infty} h^2\sigma^2 \cdot f(x) \cdot dx .$$

$$\sigma^2 \geq h^2\sigma^2 \left[\int_{-\infty}^{\mu-h\sigma} f(x) \cdot dx + \int_{\mu+h\sigma}^{+\infty} f(x) \cdot dx \right] .$$

$$\frac{1}{h^2} \geq \int_{-\infty}^{\mu-h\sigma} f(x) \cdot dx + \int_{\mu+h\sigma}^{+\infty} f(x) \cdot dx .$$

$$\frac{1}{h^2} \geq 1 - \int_{\mu-h\sigma}^{\mu+h\sigma} f(x) \cdot dx \quad , \quad \text{da cui:} \quad \int_{\mu-h\sigma}^{\mu+h\sigma} f(x) \cdot dx \geq 1 - \frac{1}{h^2} . \quad (6)$$

Vediamo un esempio di applicazione della disuguaglianza di Tchebyshev.

Esempio 1 (tratto da [5] Parzen pag. 279): Usare la disuguaglianza di Tchebyshev per determinare quante volte si deve lanciare una moneta (intesa non falsata) perché valga almeno 0,90 la probabilità che il rapporto del numero osservato di volte che esca testa, rispetto al numero di lanci, cada tra 0,4 e 0,6.

Soluzione:

$$Prob(0,4 \leq f_n \leq 0,6) \geq 0,9$$

dove $f_n = x/n$.

$$1 - \frac{1}{h^2} \geq 0,9 \quad , \quad h\sigma = \varepsilon \quad , \quad h = \varepsilon/\sigma \quad , \quad h = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \quad , \quad h^2 = \frac{\varepsilon^2 n}{pq}$$

$$1 - \frac{pq}{\varepsilon^2 n} \geq 0,9 \quad , \quad 2\varepsilon = 0,6 - 0,4 = 0,2 \quad , \quad p = q = 1/2$$

$$1 - 0,9 \geq \frac{0,5 \cdot 0,5}{0,1^2 \cdot n} \quad , \quad n \geq \frac{0,25}{0,1 \cdot 0,01} \quad , \quad n \geq 250 .$$

3. Legge dei grandi numeri (e postulato empirico del caso)

Dalla disuguaglianza di Bienaymé-Tchebyshev si arriva presto a dimostrare la cosiddetta legge dei grandi numeri di J. Bernoulli che viene formalmente enunciata nel modo seguente:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Prob\{|f_n - p| \leq \varepsilon\} = 1 \quad o \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} Prob\{|f_n - p| > \varepsilon\} = 0, \quad (7)$$

dove $f_n = x_n/n$ è la frequenza relativa osservata di un certo evento E , p la probabilità che E si verifichi in una prova e n è il numero di prove statisticamente indipendenti dell'esperimento. Posto $q = 1 - p$ e tenuto conto che la varianza della frequenza relativa in n prove bernoulliane è pq/n si ha:

$$Prob\{|f_n - p| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{pq}{\varepsilon^2 n} \quad , \quad h = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Prob\{|f_n - p| \leq \varepsilon\} = 1 \quad o \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} Prob\{|f_n - p| > \varepsilon\} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pq}{\varepsilon^2 n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Prob\{|f_n - p| > \varepsilon\} = 0.$$

Legge dei grandi numeri e teorema del limite centrale

Bisogna evitare di confondere il postulato empirico del caso con la legge dei grandi numeri. Infatti per n finito si postula che la legge tenga, ma non è dimostrato che ciò avvenga.

Il risultato sopra descritto, raggiunto da Jacob Bernoulli nel 1713, è oggi considerato un teorema del limite locale.

Il teorema venne in seguito generalizzato da altri autori che dimostrarono che esso tiene anche per ogni v.a. con media e varianza certa e finita. Data una successione di osservazioni indipendenti e identicamente distribuite, con una distribuzione di probabilità avente media e varianza finita, allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Prob}\{|\bar{x}_n - \mu| > \varepsilon\} = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Prob}\{|\bar{x}_n - \mu| \leq \varepsilon\} = 1. \quad (8)$$

dove $\bar{x}_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ (media aritmetica campionaria).

Dimostriamo che ciò è vero.

Supponiamo che X sia una v.a. con funzione di distribuzione $F_X(x)$. Siano μ e σ^2 rispettivamente la media aritmetica e la varianza di X . Consideriamo un campione di n unità $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ statisticamente indipendenti estratto dalla popolazione X . Allora sappiamo che la media aritmetica delle medie aritmetiche campionarie è centrata sulla media aritmetica di X : $M(\bar{x}) = \mu$ (correttezza dello stimatore). La varianza delle medie aritmetiche campionarie, se le estrazioni dei dati campionari sono statisticamente indipendenti è $M(\bar{x} - \mu)^2 = \sigma^2/n$.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}}^2 &= M \left[\frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n} - \mu \right]^2 = M \left[\frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - n \cdot \mu}{n} \right]^2 \\ &= M \left[\frac{(x_1 - \mu) + (x_2 - \mu) + \dots + (x_n - \mu)}{n} \right]^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot M[(x_1 - \mu)^2 + (x_n - \mu)^2 + 2(x_1 - \mu) \cdot (x_2 - \mu) + \dots + 2(x_{n-1} - \mu) \cdot (x_n - \mu)] \end{aligned}$$

Le medie aritmetiche dei doppi prodotti sono nulle in quanto le rilevazioni campionarie sono statisticamente indipendenti. Per cui si ottiene:

$$= \frac{1}{n^2} \cdot [M(x_1 - \mu)^2 + \dots + M(x_n - \mu)^2] = \frac{1}{n^2} \cdot (\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$

in quanto i valori x_i , a priori, possono assumere ogni valore dei dati della popolazione. Allora, dalla disuguaglianza di Tchebyshev si ha:

$$Prob\{|\bar{x}_n - \mu| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{1}{\binom{\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}}{n}} = 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \cdot n},$$

da cui si ottiene $\lim_{n \rightarrow +\infty} Prob\{|\bar{x}_n - \mu| \leq \varepsilon\} = 1$.

Esempi di applicazione della legge dei grandi numeri. Si propone al lettore quanto segue:

Esempio 2. Un'applicazione importante della legge dei grandi numeri e della disuguaglianza di Tchebyshev è l'uso di questi risultati per la ricerca di una numerosità campionaria che permetta di stimare una probabilità di un evento p con errore associato ε . Vediamo come.

Supponiamo che si desideri sapere quante prove, in un esperimento con due eventi possibili E e $-E$, si dovrebbero fare perché al 95% di probabilità la differenza ε tra frequenza relativa osservata e la probabilità p dell'evento E sia pari a 0,01. Allora si può applicare la relazione

$$Prob\{|f_n - p| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{pq}{\varepsilon^2 n}, \quad h = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

e tenendo conto che il prodotto pq ha il suo valore massimo pari a $\frac{1}{4}$ si ottiene:

$$0,95 \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \quad da\ cui \quad n \geq 50.000.$$

Esempio 3. [5 - Parzen]: Si prende un campione per trovare la proporzione p di fumatori in una certa popolazione. Trovare la dimensione di un campione tale che la probabilità (i) sia 0,95 o meglio, (ii) 0,99 o meglio che la proporzione osservata di fumatori differisca dalla proporzione vera di fumatori per meno di (a) 1%, (b) 10% (da risolvere).

Esempio 4. [5] La legge dei grandi numeri, nella terminologia corrente, è chiamata «legge delle medie». Commentate il seguente consiglio: quando lanciate una moneta non falsata per fare una scommessa, lasciate che il vostro compagno faccia la chiamata. Se “Testa” viene chiamata 7 volte su 10, la legge semplice delle medie dà alla persona che ascolta un enorme vantaggio.

4. Teorema del limite centrale

Questo teorema costituisce il fondamento dell'inferenza statistica standard e si basa su un'idea che può essere sperimentata in un laboratorio di Matematica.

Per la sua dimostrazione formale si veda l'appendice. Qui di seguito ci concentriamo sull'importanza del teorema.

Partiamo con le definizioni di momenti dall'origine e momenti centrali di una variabile aleatoria.

Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. indipendenti e identicamente distribuite con funzioni di distribuzione di probabilità $\{F_X(x)\}_n$, per momenti dall'origine e dal valore centrale si intendono rispettivamente le seguenti medie aritmetiche:

$$\mu_k = M(x_i^k) \quad , \quad \bar{\mu}_k = M(x_i - \mu)^k \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \quad , \quad (9)$$

dove M è la funzione media aritmetica, μ è la media aritmetica della popolazione di dati e k è l'ordine del momento k -esimo; con $k = 1$ si hanno la media aritmetica e la media aritmetica degli scarti dalla media aritmetica (che è uguale a zero); con $k = 2$ si hanno la media dei quadrati e la varianza; con $k = 3$ si hanno i momenti di terzo ordine, indicatori di eventuali asimmetrie dei dati osservati; con $k = 4$ si possono valutare possibili appiattimenti della distribuzione sperimentale dei dati, ecc.

I momenti campionari, cioè i momenti che si calcolano sui dati sperimentali seguono la stessa formulazione:

$$m_k = M(x_i^k) \quad , \quad \bar{m}_k = M(x_i - m)^k \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N} \quad , \quad (10)$$

dove m è la media aritmetica campionaria.

Teorema del limite centrale. L'enunciato del teorema è il seguente:

Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. indipendenti e identicamente distribuite con funzioni di distribuzione di probabilità $\{F_X(x)\}_n$ qualsiasi e con momenti dall'origine e centrali finiti (in particolare la media e la varianza), allora le stime che si ottengono con i momenti campionari, m_k e \bar{m}_k , hanno una distribuzione di probabilità che converge in legge a una distribuzione normale con media uguale al valore del momento corrispondente della popolazione, cioè $M(m_k) = \mu_k$ e varianza pari a

$$\sigma_k^2 = \frac{\mu_{2k} - \mu_k^2}{n} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad , \quad (11)$$

indipendentemente dalla distribuzione di probabilità associata alla v.a. di origine. In particolare, se consideriamo $\{X_n\}$ e la somma $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e standardizziamo S_n

$$Z_n = \frac{S_n - M(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \quad , \quad (12)$$

la funzione di ripartizione di Z_n , converge alla funzione di ripartizione normale con media zero e deviazione standard 1.

In particolare, se siamo in presenza di una media aritmetica campionaria e la standardizziamo, il teorema ci garantisce che le stime che otteniamo hanno una distribuzione di probabilità che converge in legge alla Normale di parametri μ e σ/\sqrt{n} . La standardizzazione della media aritmetica campionaria è analoga a quanto visto sopra:

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - M(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}}.$$

Ora cerchiamo di capire in sostanza ciò che afferma questo teorema e perché è importante per la statistica. La statistica tratta insiemi di dati sperimentali che provengono da una popolazione generalmente, ma non necessariamente, più ampia. Di questi dati si cercano delle regolarità statistiche e da queste si vuole inferire sulle regolarità che afferiscono alla popolazione da cui i dati provengono. Per fare delle inferenze probabilistiche occorre conoscere la funzione di ripartizione associata alla popolazione. La maggior parte delle volte, però, ciò non è possibile. Se non è possibile, non si può fare granché di inferenziale. Ci sono, tuttavia dei casi favorevoli all'applicazione dei metodi inferenziali. Tra questi ha un ruolo centrale quello relativo alla teoria della stima in presenza di "grandi campioni". In questo settore dell'inferenza statistica l'importanza del teorema del limite centrale è evidente.

Quando siamo in presenza di grandi campioni, quando cioè abbiamo a che fare con indagini statistiche che si basano su una numerosità di dati da trattare molto grande (il teorema è valido per $n \rightarrow +\infty$) i momenti campionari che descrivono le proprietà statistiche più significative di una v.a. X (che dà origine alla popolazione di dati sotto analisi) generano stime che hanno una distribuzione di probabilità che converge in legge alla normale con media di tutte le possibili stime uguale a quella della popolazione e varianza pari a (11) e ciò non dipende assolutamente dalla distribuzione di probabilità associata alla popolazione di dati da cui il campione proviene. Domenico Piccolo in [8] al riguardo riporta in nota quanto segue: " Il teorema del limite centrale (come il teorema di Pitagora o la Gravitazione universale (di Newton)) è tra le poche acquisizioni scientifiche dell'Umanità per le quali vi è stata un'evidenza empirica antica e costante che, solo ad un certo punto, viene formalizzata in modo rigoroso. [...] non si può sottovalutare il Teorema Limite centrale solo perché è impossibile trovare un fenomeno reale che sia perfettamente Normale".

Per l'esercitazione passare ad EXCEL.

Nei fogli Excel riportati di seguito troverete due processi sperimentali che confermano la validità del teorema del limite centrale almeno come congettura.

Legge dei grandi numeri e teorema del limite centrale

Analisi dei dati di un esperimento sugli spicchi dei limoni (suggerimento di M. Cerasoli)
Distribuzione sperimentale e adattamento alla Normale

| n. spicchi | f_{oss} ass. | classe | Norm Cum | p(.) classe | Freq ass teo | $\frac{(f_{oss} - f_t)^2}{f_t}$ |
|------------|----------------|-------------------|-------------|-------------|--------------|---------------------------------|
| 5 | 2 | $(-\infty; 5,5]$ | 0,000718499 | 0,000718499 | 1,664763275 | 0,06750729 |
| 6 | 10 | $(5,5; 6,5]$ | 0,006179695 | 0,005461195 | 12,65358956 | 0,55648538 |
| 7 | 55 | $(6,5; 7,5]$ | 0,034661221 | 0,028481526 | 65,99169655 | 1,83079689 |
| 8 | 226 | $(7,5; 8,5]$ | 0,129046154 | 0,094384933 | 218,6898888 | 0,24435389 |
| 9 | 479 | $(8,5; 9,5]$ | 0,327975392 | 0,198929238 | 460,9190452 | 0,70928058 |
| 10 | 594 | $(9,5; 10,5]$ | 0,594792363 | 0,266816971 | 618,2149228 | 0,94847676 |
| 11 | 534 | $(10,5; 11,5]$ | 0,822592797 | 0,227800434 | 527,8136052 | 0,07250946 |
| 12 | 304 | $(11,5; 12,5]$ | 0,946376593 | 0,123783795 | 286,8070539 | 1,03064898 |
| 13 | 98 | $(12,5; 13,5]$ | 0,989164724 | 0,042788131 | 99,14010004 | 0,01311102 |
| 14 | 12 | $(13,5; 14,5]$ | 0,998565772 | 0,009401049 | 21,78222955 | 4,39312306 |
| 15 | 3 | $(14,5; +\infty)$ | 1 | 0,001434228 | 3,323105152 | 0,03141548 |
| | 2317 | | | 1 | 2317 | 9,8977088 |

$$n = 2317 \quad \bar{x} = 10,15235218 \quad s^2 = 2,129140993 \quad \chi^2 = 9,8977088$$

$$s = 1,459157631$$

Verifica d'ipotesi:

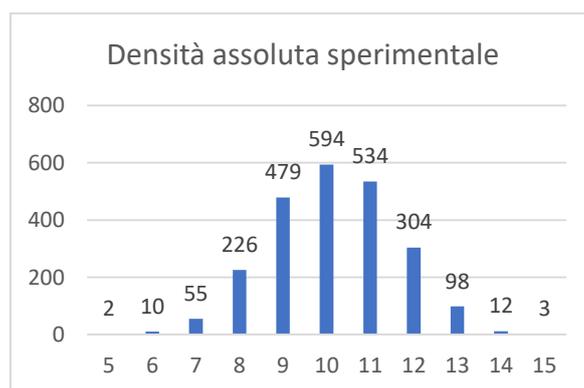
$$\begin{cases} H_0: n_{sp}(i) = n_{teo}(i) \\ H_1: n_{sp}(i) \neq n_{teo}(i) \end{cases}$$

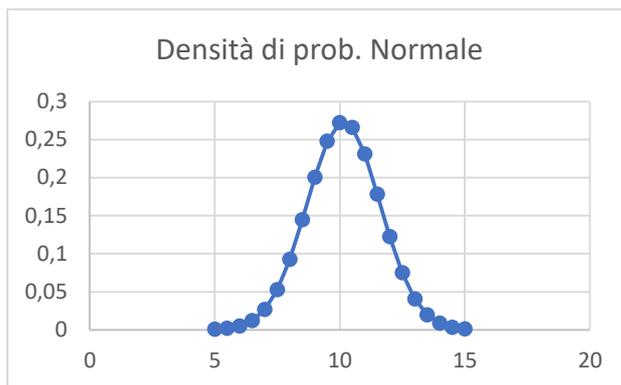
Al livello di significatività del 5%: $\alpha = 0,05$.

Gradi di libertà: $\nu = (\text{classi} - 1) - \text{parametri da stimare} = (11 - 1) - 2 = 8$.

Con questi dati sulle tabelle troviamo un $\chi^2_{crit}(\nu = 8, \alpha = 0,05) \cong 15,51$.

Si accetta H_0 e si conclude che non ci sono buone ragioni per credere che la distribuzione sperimentale non abbia un comportamento probabilistico del tipo $N_X(m, s)$.



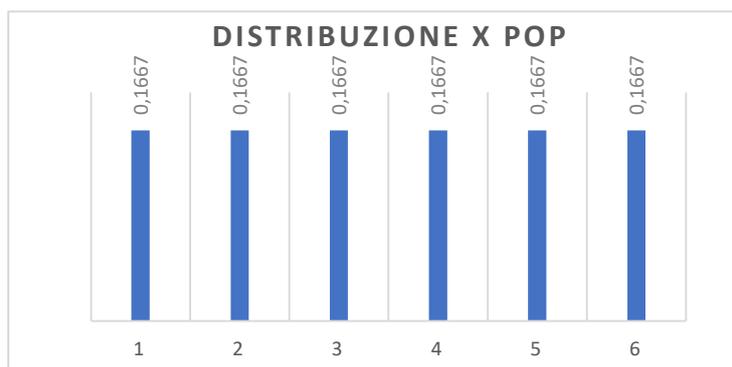


Le due figure presentano rispettivamente l'istogramma delle frequenze assolute sperimentali e la densità di probabilità normale accostata alle frequenze relative sperimentali.

Verifica sperimentale del teorema del limite centrale

| X (popolazione di dati) | | | | | | |
|-------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Prob(x) | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

$$\mu = 3,5 \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \cong 2,91667 \quad \sigma \cong 1,70783.$$



Medie aritmetiche campionarie con n=2

| | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 |
| 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
| 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 |
| 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 |
| 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 5,5 |
| 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 5,5 | 6 |

I campioni ottenibili con prove indipendenti con $n = 2$ sono $6^2 = 36$. Si verifica che la media aritmetica campionaria è uno stimatore corretto della media della popolazione:
 $M(\bar{x}) = \mu$.

| | | | | | | | | | | | |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| \bar{x} | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 5,5 | 6 |
| P(\bar{x}) | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

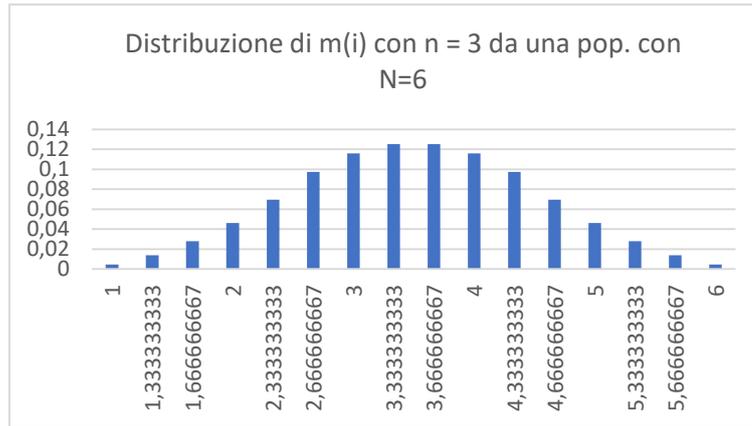
Legge dei grandi numeri e teorema del limite centrale

$$M(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{11} \bar{x}_j p_j = 3,5 = \mu \quad e \quad Var(\bar{x}) = \sigma^2/n \cong 2,9667/2$$

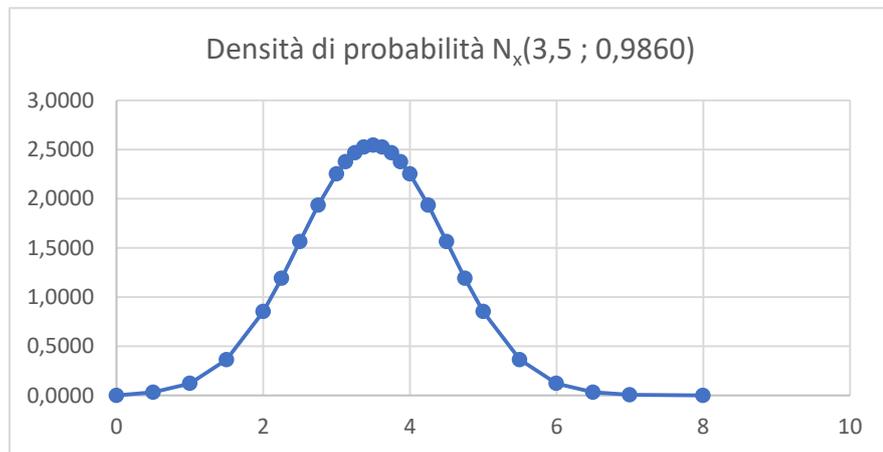
I campioni possibili con prove indipendenti con $n=3$ sono $6^3 = 216$.

| Tabella dei campioni possibili con $n=3$ e delle loro medie aritmetiche | | | | | |
|---|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 111 ==> 1 | 112 ==> 4/3 | 113 ==> 5/3 | 114 ==> 6/3 | 115 ==> 7/3 | 116 ==> 8/3 |
| 121 ==> 4/3 | 122 ==> 5/3 | 123 ==> 6/3 | 124 ==> 7/3 | 125 ==> 8/3 | 126 ==> 9/3 |
| 131 ==> 5/3 | 132 ==> 6/3 | 133 ==> 7/3 | 134 ==> 8/3 | 135 ==> 9/3 | 136 ==> 10/3 |
| 141 ==> 6/3 | 142 ==> 7/3 | 143 ==> 8/3 | 144 ==> 9/3 | 145 ==> 10/3 | 146 ==> 11/3 |
| 151 ==> 7/3 | 152 ==> 8/3 | 153 ==> 9/3 | 154 ==> 10/3 | 155 ==> 11/3 | 156 ==> 12/3 |
| 161 ==> 8/3 | 162 ==> 9/3 | 163 ==> 10/3 | 164 ==> 11/3 | 165 ==> 12/3 | 166 ==> 13/3 |
| 211 ==> 4/3 | 212 ==> 5/3 | 213 ==> 6/3 | 214 ==> 7/3 | 215 ==> 8/3 | 216 ==> 9/3 |
| 221 ==> 5/3 | 222 ==> 6/3 | 223 ==> 7/3 | 224 ==> 8/3 | 225 ==> 9/3 | 226 ==> 10/3 |
| 231 ==> 6/3 | 232 ==> 7/3 | 233 ==> 8/3 | 234 ==> 9/3 | 235 ==> 10/3 | 236 ==> 11/3 |
| 241 ==> 7/3 | 242 ==> 8/3 | 243 ==> 9/3 | 244 ==> 10/3 | 245 ==> 11/3 | 246 ==> 12/3 |
| 251 ==> 8/3 | 252 ==> 9/3 | 253 ==> 10/3 | 254 ==> 11/3 | 255 ==> 12/3 | 256 ==> 13/3 |
| 261 ==> 9/3 | 262 ==> 10/3 | 263 ==> 11/3 | 264 ==> 12/3 | 265 ==> 13/3 | 266 ==> 14/3 |
| 311 ==> 5/3 | 312 ==> 6/3 | 313 ==> 7/3 | 314 ==> 8/3 | 315 ==> 9/3 | 316 ==> 10/3 |
| 321 ==> 6/3 | 322 ==> 7/3 | 323 ==> 8/3 | 324 ==> 9/3 | 325 ==> 10/3 | 326 ==> 11/3 |
| 331 ==> 7/3 | 332 ==> 8/3 | 333 ==> 9/3 | 334 ==> 10/3 | 335 ==> 11/3 | 336 ==> 12/3 |
| 341 ==> 8/3 | 342 ==> 9/3 | 343 ==> 10/3 | 344 ==> 11/3 | 345 ==> 12/3 | 346 ==> 13/3 |
| 351 ==> 9/3 | 352 ==> 10/3 | 353 ==> 11/3 | 354 ==> 12/3 | 355 ==> 13/3 | 356 ==> 14/3 |
| 361 ==> 10/3 | 362 ==> 11/3 | 363 ==> 12/3 | 364 ==> 13/3 | 365 ==> 14/3 | 366 ==> 15/3 |
| 411 ==> 6/3 | 412 ==> 7/3 | 413 ==> 8/3 | 414 ==> 9/3 | 415 ==> 10/3 | 416 ==> 11/3 |
| 421 ==> 7/3 | 422 ==> 8/3 | 423 ==> 9/3 | 424 ==> 10/3 | 425 ==> 11/3 | 426 ==> 12/3 |
| 431 ==> 8/3 | 432 ==> 9/3 | 433 ==> 10/3 | 434 ==> 11/3 | 435 ==> 12/3 | 436 ==> 13/3 |
| 441 ==> 9/3 | 442 ==> 10/3 | 443 ==> 11/3 | 444 ==> 12/3 | 445 ==> 13/3 | 446 ==> 14/3 |
| 451 ==> 10/3 | 451 ==> 10/3 | 453 ==> 12/3 | 454 ==> 13/3 | 455 ==> 14/3 | 456 ==> 15/3 |
| 461 ==> 11/3 | 462 ==> 12/3 | 463 ==> 13/3 | 464 ==> 14/3 | 465 ==> 15/3 | 466 ==> 16/3 |
| 511 ==> 7/3 | 512 ==> 8/3 | 513 ==> 9/3 | 514 ==> 10/3 | 515 ==> 11/3 | 516 ==> 12/3 |
| 521 ==> 8/3 | 522 ==> 9/3 | 523 ==> 10/3 | 524 ==> 11/3 | 525 ==> 12/3 | 526 ==> 13/3 |
| 531 ==> 9/3 | 532 ==> 10/3 | 533 ==> 11/3 | 534 ==> 12/2 | 535 ==> 13/3 | 536 ==> 14/3 |
| 541 ==> 10/3 | 542 ==> 11/3 | 543 ==> 12/3 | 544 ==> 13/3 | 545 ==> 14/3 | 546 ==> 15/3 |
| 551 ==> 11/3 | 552 ==> 12/3 | 553 ==> 13/3 | 554 ==> 14/3 | 555 ==> 15/3 | 556 ==> 16/3 |
| 561 ==> 12/3 | 562 ==> 13/3 | 563 ==> 14/3 | 564 ==> 15/3 | 565 ==> 16/3 | 566 ==> 17/3 |
| 611 ==> 8/3 | 612 ==> 9/3 | 613 ==> 10/3 | 614 ==> 11/3 | 615 ==> 12/3 | 616 ==> 13/3 |
| 621 ==> 9/3 | 622 ==> 10/3 | 623 ==> 11/3 | 624 ==> 12/3 | 625 ==> 13/3 | 626 ==> 14/3 |
| 631 ==> 10/3 | 632 ==> 11/3 | 633 ==> 12/3 | 634 ==> 13/3 | 635 ==> 14/3 | 636 ==> 15/3 |
| 641 ==> 11/3 | 642 ==> 12/3 | 643 ==> 13/3 | 644 ==> 14/3 | 645 ==> 15/3 | 646 ==> 16/3 |
| 651 ==> 12/3 | 652 ==> 13/3 | 653 ==> 14/3 | 654 ==> 15/3 | 655 ==> 16/3 | 656 ==> 17/3 |
| 661 ==> 13/3 | 662 ==> 14/3 | 663 ==> 15/3 | 664 ==> 16/3 | 665 ==> 17/3 | 666 ==> 18/3 |

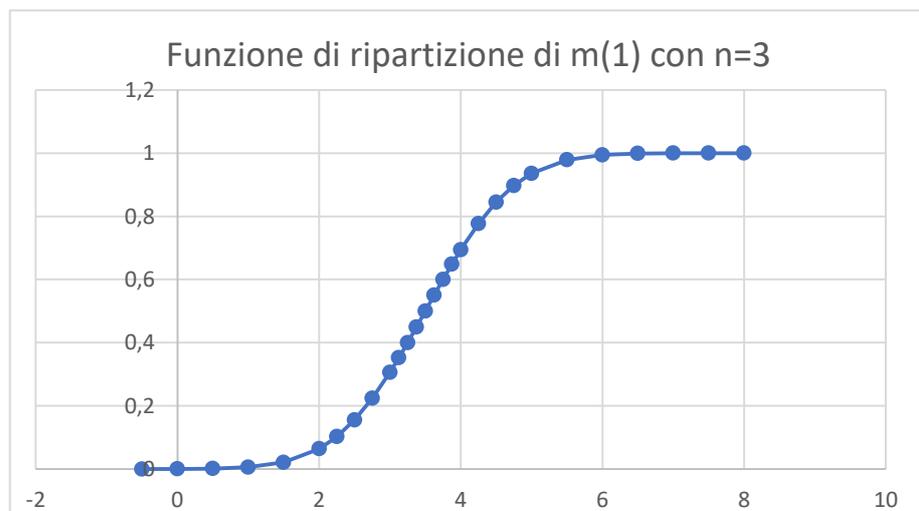
Anche in questo caso si ottiene: $M(\bar{x}) = 3,5 \quad e \quad Var(\bar{x}) = \sigma^2/n = 2,9667/3$



Il grafico della densità di probabilità Normale verso cui le distribuzioni sperimentali convergono è riportata qui sotto. La Normale è del tipo : $N_{\bar{x}}(\mu = 3,5 ; \sigma/\sqrt{n} = 1,70783/\sqrt{3} \cong 0,9860)$.



Il grafico della funzione di ripartizione



Appendice

Teorema del limite centrale: dimostrazione

Vediamo ora di fissare la base per la dimostrazione del teorema di J. W. Lindeberg e Paul Lévy.

Sia $\{X_n\}$ una successione di v.a. indipendenti e identicamente distribuite con funzione di distribuzione di probabilità $\{F_X(x)\}_n$ e con **momenti dall'origine e centrali finiti** rispettivamente uguali a:

$$\mu_k = M(x_i^k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^k \quad , \quad \bar{\mu}_k = M(x_i - \mu)^k \text{ per ogni } k \in \mathbb{N} ,$$

dove N è la numerosità della popolazione.

Definiamo **la funzione caratteristica** dei momenti di una v.a. X nel modo seguente:

$$\mathcal{C}(t) = M(e^{itX}) \quad , \quad t \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1 .$$

Il nome a questa funzione è stato dato proprio per la sua proprietà di generare tutti i momenti di una v.a. e per-ciò di avere la stessa forza cognitiva della corrispondente funzione di ripartizione.

I momenti campionari di tale v.a. siano:

$$m_k = M(x_i^k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^k \quad , \quad \bar{m}_k = M(x_i - \mu)^k \text{ per ogni } k ,$$

dove n è la numerosità del campione. C'è un teorema dovuto a Lévy-Cramér sulla corrispondenza tra la conoscenza della funzione di distribuzione delle probabilità di una v.a. e la conoscenza dei momenti della stessa v.a. X che dimostra in sostanza, dal punto di vista statistico, che la funzione di ripartizione e la funzione caratteristica dei momenti di una v.a. hanno lo stesso contenuto d'informazione e l'una vale l'altra.

È possibile sviluppare in serie di Mac-Laurin $\mathcal{C}(t)$:

$$\mathcal{C}(t) = M(e^{itX}) = 1 + itX + \frac{(itX)^2}{2!} + \frac{(itX)^3}{3!} + \dots + \frac{(itX)^k}{k!} + \dots$$

Quindi, la funzione, in campo complesso, è analitica.

I momenti campionari di tale v.a. sono:

$$m_k = M(x_i^k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^k \quad , \quad \bar{m}_k = M(x_i - \mu)^k \text{ per ogni } k ,$$

dove n è la numerosità del campione.

Le stime di μ_k di una v.a. X che si ottengono dai momenti campionari m_k hanno una distribuzione di probabilità che converge in distribuzione a una Normale con media centrata su μ_k e varianza (efficienza) pari a

$$\sigma_k^2 = \frac{m_{2k} - m_k^2}{n} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

La funzione di densità di probabilità della v.a. Normale è data da:

$$f_X(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \sigma_x \in \mathbb{R}^+,$$

dove μ è la media aritmetica e σ_x è la deviazione standard di x . La funzione di ripartizione della Normale è in forma aperta:

$$Prob(X \leq u) = F_X(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx.$$

La funzione caratteristica dei momenti della v.a. Normale è (prova omessa):

$$M(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itX} \cdot f_X(x|\mu, \sigma) \cdot dx = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Continuazione:

Consideriamo una successione di v.a. $\{X_n\}$ indipendenti e identicamente distribuite con funzioni di ripartizione $\{F_n(x)\}$ qualsiasi. Applichiamo la seguente trasformazione a X_n (standardizzazione):

$$\begin{aligned} Z_n &= \frac{\bar{X}_n - M(\bar{X}_n)}{\sqrt{Var(\bar{X}_n)}} = \frac{\bar{X}_n - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j - n \cdot \frac{\mu_X}{n}}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{\frac{1}{n} [(x_1 - \mu_X) + (x_1 - \mu_X) + \dots + (x_n - \mu_X)]}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{[(x_1 - \mu_X) + (x_1 - \mu_X) + \dots + (x_n - \mu_X)]}{\sqrt{n} \cdot \sigma_X}. \end{aligned}$$

Legge dei grandi numeri e teorema del limite centrale

dove \bar{X}_n è il termine generale della sequenza di medie aritmetiche campionarie $\{\bar{X}_n\}$.
Tale media è calcolata su un campione di n unità. È noto che: $M(Z_n) = 0$ e $Var(Z_n) = 1$.

Pongo $y_j = x_j - \mu_X \quad \forall j$. Sostituendo in Z_n , si ha:

$$Z_n = h_1 y_1 + h_2 y_2 + \dots + h_n y_n \quad \text{dove} \quad h_j = \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sigma_X} \quad \forall j.$$

La funzione caratteristica della v.a. Z_n è:

$$\begin{aligned} C_n(t; Z_n) &= M(e^{itZ_n}) = M(e^{it(h_1 y_1 + h_2 y_2 + \dots + h_n y_n)}) \\ &= M(e^{ith_1 y_1}) \cdot M(e^{ith_2 y_2}) \cdot \dots \cdot M(e^{ith_n y_n}). \end{aligned}$$

Essendo le v.a. x_j indipendenti (e quindi anche le y_j).

La funzione caratteristica di Z_n è quindi data dal prodotto delle funzioni caratteristiche di ogni scarto y_j . A priori, gli y_j sono uguali in quanto risultano variabili definite sullo stesso campo numerico.

Si ha perciò:

$$C_n(t; Y) = \left[M \left(1 + ith_j y_j + \frac{(ith_j y_j)^2}{2!} + \frac{(ith_j y_j)^3}{3!} + \dots + \frac{(ith_j y_j)^r}{r!} + \dots \right) \right]^n,$$

$$C_n(t; Y) = \left(1 + ith_j \mu_1 + \frac{(ith_j)^2 \mu_2}{2!} + \frac{(ith_j)^3 \mu_3}{3!} + \dots + \frac{(ith_j)^r \mu_r}{r!} + \dots \right)^n.$$

Per i primi tre addendi abbiamo:

$$C_n(t; Y) = \left[1 + it \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \sigma_X} \cdot 0 - \frac{t^2 \cdot \sigma_X^2}{2! \cdot n \cdot \sigma_X^2} + o \left(\frac{(ith_j)^3 \mu_3}{3!} + \dots + \frac{(ith_j)^r \mu_r}{r!} + \dots \right) \right]^n.$$

Noto che $o(\cdot)$, per $n \rightarrow +\infty$, è un infinitesimo di ordine superiore (ogni μ_k ha al denominatore un n) e che μ_2 (momento dall'origine di ordine 2, è in questo caso uguale a σ_X^2). Si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n(t; Y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{t^2}{2! \cdot n} \right)^n.$$

Quest'ultimo limite è un limite notevole, come si vede, ed è uguale a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{C}_n(t; Y) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Questa è la funzione caratteristica della v.a. Normale standardizzata.
Q.E.D.

Riferimenti bibliografici

- [1] Landella G., Marasini D., Ferrari P., Probabilità e variabili aleatorie, il Mulino, Bologna, 1997.
- [2] Gambotto Manzone, Susara Longo, Probabilità e statistica 2, Tramontana ed., Milano, 1998.
- [3] Gnedenko B. V., Teoria della Probabilità, Editori Riuniti – Edizioni MIR, Mosca, 1979.
- [4] Modd A. M., Graybill F. A., Boes D. C., Introduzione alla statistica, McGraw-Hill, Milano, 1991.
- [5] Parzen E., La moderna teoria delle probabilità e le sue applicazioni, Franco Angeli ed., Milan, 1976.
- [6] Daboni L., Calcolo delle probabilità ed elementi di statistica, UTET, Torino, 1980.
- [7] Corso L., Teorema centrale limite di J.W. Lindeberg-Paul Lévy, MatematicaMente n. 200, Mathesis di Verona, 2015.
- [8] Piccolo D., Statistica, ed. il Mulino Terza edizione, Bologna, 2010.

Quesiti e problemi del calcolo delle probabilità in applicazione della regola di Bayes

Loredana Biacino

loredana.biacino@libero.it

Sunto In questo lavoro sono esposti alcuni problemi e giochi riconducibili al paradosso delle tre scatole: si sottolinea il fatto che la soluzione intuitiva a tali quesiti è in contrasto con la soluzione matematica consistente nell’applicazione della regola di Bayes. Si presentano anche semplici situazioni della vita quotidiana per la cui soluzione la regola precedente gioca un ruolo fondamentale.

Parole chiave Regola di Bayes, paradosso delle tre scatole, test medici.

Abstract In this paper some problems and games similar to the paradox of the three boxes are exposed and the intuitive solution of them is given, conflicting with the mathematical solution consisting in the application of the Bayes’ rule. Simple situations of every day life are also proposed whose solution makes use of the previous rule.

Key words Rule of Bayes, paradox of the three boxes, medical texts.

1. Introduzione

In applicazione del calcolo delle probabilità è possibile creare una grande e svariata quantità di problemi e di giochi. Qui ne illustreremo alcuni classici che hanno fatto molto discutere perché lasciano il giocatore interdetto quando, alla luce di una più accurata analisi, guidata nel presente caso dal teorema di Bayes, trovano una risposta contrastante con quella che viene in un primo momento istintivamente data. Il primo è il problema di Monty Hall, un gioco televisivo statunitense che prende il nome dal conduttore del gioco, Maurice Halprin. Ne daremo la soluzione considerando il problema matematico sottostante da diversi punti di vista. Lo stesso faremo per altri giochi la cui risoluzione può essere interpretata come una messa in discussione della capacità dell’intuizione nel risolvere problemi quando questi richiedono strumenti logici accurati per la loro descrizione e catalogazione: la proposta di tali esempi può essere anche riguardata come un modo per educare lo stesso intuito ed elevarne il livello di

applicazione. Di carattere lievemente diverso è il paradosso dei 3 condannati e del guardiano in cui la risposta intuitiva, anche se passibile di confutazione, coincide con quella che ci consente l'analisi del problema alla luce della regola di Bayes. Seguono applicazioni pratiche della stessa regola ad alcuni problemi della vita quotidiana quali i test diagnostici in ambito medico o la determinazione della probabilità che una determinata macchina abbia fornito un prodotto guasto nel caso di una produzione industriale in serie.

2. Il problema di Monty Hall

Cominciamo con il problema di Monty Hall, Il gioco si svolge al seguente modo. Si fanno vedere al giocatore tre porte chiuse: dietro due di esse c'è una capra, dietro la terza c'è un'automobile. Il giocatore non sa qual è la disposizione delle capre e dell'automobile, ma vince l'automobile se indovina dove è nascosta. Gli si chiede di scegliere una porta, ma, dopo la scelta, la porta rimane chiusa. Il conduttore, che conosce cosa c'è dietro le porte, apre una delle due porte rimanenti, in ogni caso una porta dietro alla quale c'è una capra e chiede al giocatore se egli intende cambiare la porta che ha inizialmente scelto con quella che è rimasta chiusa. Ciò che è contro l'intuizione è che al giocatore conviene cambiare porta. Perché?

Soluzione 1 - Se il giocatore ha scelto l'automobile, con probabilità $\frac{1}{3}$, cambiando perde, ma se ha scelto la porta con la capra, e di capre ce ne sono 2 su 3, cambiando vince e quindi essendo $\frac{2}{3}$ la probabilità di tale scelta tale è quindi anche la probabilità di vittoria.

Il paradosso consiste nel fatto che cambiando porta la probabilità di vincita si raddoppia, è esattamente eguale alla probabilità di perdere nel caso non fosse possibile il cambio.

Un errore di ragionamento - Alcune persone, quando viene proposto il gioco, dichiarano di essere convinte che cambiando porta la probabilità di vincita aumenta, ma non raddoppia, bensì passa da $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$, in quanto dopo che il conduttore ha aperto la porta, si deve scegliere tra due opzioni equivalenti e pertanto è indifferente cambiare oppure no. Essi sbagliano perché è vero che sostanzialmente la situazione non è mutata dal punto di vista fisico, ma l'ignoranza del giocatore è mutata e ciò può condurlo in modo razionale a mutare la propria scelta.

Soluzione 2 - Dopo l'intervento del conduttore egli sa quale porta nasconde una capra e cambiare la porta comporta una probabilità di vincita che è somma della probabilità della porta scelta nel cambio più la probabilità di quella che è stata aperta dal conduttore, cioè $\frac{2}{3}$. In effetti cambiando è come se invece di aprire una porta il giocatore

Quesiti e problemi del calcolo delle probabilità in applicazione della regola di Bayes

ne aprisse 2. La probabilità ci dà informazioni non sul mondo fisico, che rimane immutato nello svolgimento del gioco, ma sulla nostra informazione del mondo.

Soluzione 3 -Valutiamo la probabilità di vincita con il cambio della porta usando la legge di Bayes. Attribuiamo ad ogni porta un numero i con $i = 1, 2, 3$. Costruiamo lo spazio campionario. Indichiamo con A_i l'evento: "dietro la porta i c'è l'auto" e sia C_i l'evento: "il conduttore apre la porta i ". Ovviamente si suppone che sia $P(A_i) = \frac{1}{3}$ per ogni $i = 1, 2, 3$. Supponiamo che il concorrente abbia scelto la porta 1 e il conduttore abbia aperto la porta 3. Risulta:

$$P(C_3/A_1) = \frac{1}{2} = P(C_2/A_1),$$

in quanto se l'auto sta dietro la porta 1 si può supporre che il conduttore apra indifferentemente una o l'altra delle porte 2 e 3, ad esempio lanciando una moneta equa; inoltre

$$P(C_3/A_2) = 1 \quad \text{e} \quad P(C_3/A_3) = 0$$

perché se l'auto sta dietro la porta 2 certamente il conduttore apre la porta 3 e se l'auto sta dietro la porta 3 certamente il conduttore non apre la porta 3. Quindi la probabilità a priori che il conduttore apra la 2 o la 3 è $\frac{1}{2}$, cioè $P(C_2) = P(C_3) = \frac{1}{2}$. Infatti, per la legge delle alternative risulta:

$$P(C_3) = P(C_3/A_1) \cdot P(A_1) + P(C_3/A_2) \cdot P(A_2) + P(C_3/A_3) \cdot P(A_3) = \left(\frac{1}{2} + 1 + 0\right) \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Allora, per la legge di Bayes:

$$P(A_2/C_3) = \frac{P(C_3/A_2)P(A_2)}{P(C_3)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

cioè la probabilità che l'auto stia dietro la porta 2, visto che il conduttore ha aperto la porta 3, è $\frac{2}{3}$.

Si può eseguire il seguente calcolo in alternativa, tenendo presente che se il conduttore apre la porta 3 sicuramente l'auto sta dietro la porta 1 o dietro la porta 2:

$$P(A_2/C_3) = 1 - P(A_1/C_3) = 1 - \frac{P(C_3/A_1)P(A_1)}{P(C_3)} = 1 - \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Quindi una volta che sia stata aperta la porta 3 è conveniente effettuare il cambio. Analogamente se il conduttore apre la porta 2.

Nota – Si è supposto che se l'auto sta dietro alla porta 1 allora la probabilità che il conduttore apra la porta 2 o la 3 è $\frac{1}{2}$, cioè si è supposto che il conduttore in tal caso lanci una moneta equa per decidere se aprire la porta 2 o la porta 3. Tuttavia, si può immaginare che il conduttore segua una procedura casuale con probabilità $P(C_2/A_1) = p$ e $P(C_3/A_1) = 1-p$. In tal caso si ha:

$$P(C_3) = P(C_3/A_1) \cdot P(A_1) + P(C_3/A_2) \cdot P(A_2) + P(C_3/A_3) \cdot P(A_3) = (1-p) \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 0 = \frac{2-p}{3}$$

E quindi:

$$P(A_2/C_3) = \frac{P(C_3/A_2)P(A_2)}{P(C_3)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{2-p}{3}} = \frac{1}{2-p},$$

da cui si trae in particolare, per $p = \frac{1}{2}$, $P(A_2/C_3) = \frac{2}{3}$, cioè il risultato prima trovato. E, caso più interessante, per $p=1$ risulta $P(A_2/C_3) = 1$, cioè se il conduttore apre la porta 3 l'auto si trova in 2 certamente.

Varie presentazioni del problema Il problema può essere presentato come un gioco da effettuarsi con tre carte da gioco coperte, di cui una è considerata vincente e permette di ottenere un premio e le altre due sono perdenti. Mediante un buon numero di iterazioni si può cercare di indurre l'uditorio ad interpretare correttamente il gioco e la sua spiegazione. Si tenga presente che il problema può essere formulato in vari altri modi; ad es. in (Smullyan 1994, pag. 207) è presentato come paradosso delle tre scatole, dove in luogo delle tre porte ci sono tre scatole chiuse tali che una di esse contiene un premio mentre le altre sono vuote: la procedura del gioco è la stessa del paradosso di Monty Hall.

3. Paradosso dei tre condannati e del guardiano

Il problema delle tre porte fu studiato da Martin Gardner nel 1959 sulla rivista *Mathematical Games*. Pubblicato poi in (Gardner 1973, pag. 184) è ripreso da (Cerasoli 1995, pag. 147- 152) dove è presentato al seguente modo:

“Tre uomini – A, B e C – sono chiusi in celle separate in attesa dell'esecuzione capitale, quando il governatore decide di graziarne uno. Scrive i loro nomi su tre pezzi di carta, li rimescola in un cappello, ne estrae uno e telefona al guardiano chiedendo che il nome del fortunato prigioniero rimanga segreto per diversi giorni. Voci di questo fatto provengono al prigioniero A e, quando il guardiano fa il suo giro quotidiano, A tenta di persuaderlo a dirgli se è stato graziato. Il guardiano rifiuta «Allora mi dica» dice A, «il nome di uno dei due che saranno giustiziati. Se è B mi dica il nome di C. Se è C mi dica quello di B. E se sono io getti una moneta per decidere se dire B o C». Il guardiano, che non sa nulla di probabilità, ci pensa sopra la notte e decide che, se segue il procedimento suggerito da A, non gli dà nessun aiuto nella valutazione delle sue possibilità di sopravvivenza. Sicché la mattina seguente dice ad A che sarà giustiziato B. Partito il guardiano, A sorride della stupidità del guardiano. Ci sono solo due elementi egualmente probabili in quello che i matematici chiamano «lo spazio di campionatura» del problema: ... la probabilità di sopravvivenza è salita da $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$.”

Soluzione 1 – Se A è graziato e quindi sia B che C debbono essere giustiziati il guardiano lancia una moneta (equa) per rispondere, mentre se A è uno dei due condannati allora uno e uno solo degli altri due è condannato e quindi la risposta è univoca. Allora, siano A, B e C anche i tre eventi: {A è condannato}, {B è condannato}

Quesiti e problemi del calcolo delle probabilità in applicazione della regola di Bayes

e {C è condannato}, con $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{2}{3}$, e inoltre siano $B^* =$ “il guardiano dice B”; $C^* =$ “il guardiano dice C”; risulta:

$$P(B^*/\neg A) = P(B^*/B \cap C) = \frac{1}{2},$$

perché se A è graziato sono condannati B e C e allora il guardiano getta la moneta (equa) per dire B o C. Se poi A è condannato $P(B/A) = P(C/A) = \frac{1}{2}$, cioè i due eventi B e C sono equiprobabili stante la scelta a caso effettuata a monte e di conseguenza equiprobabile è anche il responso del guardiano, cioè:

$$P(B^*/A) = P(C^*/A) = \frac{1}{2}.$$

Ne segue

$$P(B^*) = P(B^*/A) \cdot P(A) + P(B^*/\neg A) \cdot P(\neg A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Nella precedente relazione si è posto $P(\neg A) = P(B \cap C) = \frac{1}{3}$ essendo i tre eventi $B \cap C$, $A \cap C$ e $B \cap A$ equiprobabili ed esaustivi. Infine

$$P(A/B^*) = P(B^*/A) \frac{P(A)}{P(B^*)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Quindi ha ragione il guardiano e l'informazione ricevuta non cambia la probabilità di essere condannato per A. Infatti, l'informazione è troppo debole. Se ad esempio $P(B^*/\neg A)$ non fosse eguale ad $\frac{1}{2}$ ma fosse eguale a $p > \frac{1}{2}$ allora sarebbe

$$P(B^*) = P(B^*/A) \cdot P(A) + P(B^*/\neg A) \cdot P(\neg A) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{p}{3} = \frac{p+1}{3}$$

e di conseguenza

$$P(A/B^*) = P(B^*/A) \cdot \frac{P(A)}{P(B^*)} = \frac{\frac{1}{2} \times 3}{p+1} = \frac{1}{p+1} < \frac{2}{3},$$

cioè se fosse dato con più certezza il valore B quando A non è condannato migliorerebbe la situazione di A, passando addirittura a $\frac{1}{2}$ la speranza di grazia nel caso il guardiano rispondesse B con probabilità 1 nel caso in cui A fosse il graziato.

Soluzione 2 – Si può dare in alternativa anche la seguente dimostrazione. Risulta:

$$P(B^*) = P(B^*/B \cap C) \cdot P(B \cap C) + P(B^*/A \cap B) \cdot P(A \cap B) + P(B^*/A \cap C) \cdot P(A \cap C).$$

Ora se B e C sono entrambi condannati allora il guardiano dice B o C con probabilità $\frac{1}{2}$, cioè $P(B^*/B \cap C) = P(C^*/B \cap C) = \frac{1}{2}$. Supposto che A sia condannato allora il guardiano dice B solo se C è condannato, quindi $P(B^*/A \cap B) = 0$, $P(B^*/A \cap C) = 1$.

I tre eventi $B \cap C$, $A \cap C$ e $B \cap A$ sono equiprobabili ed esaustivi, quindi hanno tutti probabilità $\frac{1}{3}$. Ne segue:

$$P(B^*) = \frac{1}{3} \cdot \left\{ \frac{1}{2} + 1 \right\} = \frac{1}{2}.$$

Possiamo allora calcolare $P(\neg A/B^*) = P(B^*/\neg A) \frac{P(\neg A)}{P(B^*)} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

E quindi anche in questo modo si verifica che le probabilità di salvezza di A non sono aumentate in seguito alla risposta del guardiano.

4. Problema delle tre scatole

Un problema sostanzialmente equivalente al precedente era stato ideato dal matematico francese Joseph Louis François Bernard (1822 – 1900) nel suo libro *Calcul des Probabilités* (1889), dove descrive il problema delle tre scatole che qui è riportato nella versione di (Clark 2002) e che si può enunciare al seguente modo:

Sono date tre scatole: di queste una contiene due monete d'oro (O, O), un'altra due monete d'argento (A, A), la terza una moneta d'oro e una d'argento (O, A). Ogni scatola è divisa in due scomparti che si possono aprire separatamente e ogni scomparto contiene una moneta. La probabilità che si scelga una delle scatole, e in particolare quella che contiene le due monete diverse, è $\frac{1}{3}$. Supponiamo però di aver scelto una scatola e di aver visto che nel primo scomparto c'è una moneta d'oro. Qual è la probabilità che l'altra sia d'argento?

Un errore di ragionamento - Molti ragionano al seguente modo: ci sono due possibilità, l'altra moneta è O oppure è A e quindi sembrerebbe che la probabilità di (O, A), una volta che si sia visto che nel primo scomparto c'è O, sia $\frac{1}{2}$. Invece se si fanno un gran numero di esperimenti, iterando la scelta, si osserva che la probabilità è inferiore a $\frac{1}{2}$, di fatto è eguale a $\frac{1}{3}$, che è la probabilità a priori della scatola (O, A). Perché?

Spiegazione intuitiva guidata dal ragionamento - È due volte più probabile vedere per prima una moneta d'oro se la scatola è (O, O) piuttosto che se è (O, A), perciò se si vede una moneta d'oro è due volte più probabile che si tratti della scatola (O, O) piuttosto che della scatola (O, A). Questa confusione che nasce dal non tenere conto di quante volte la stessa situazione può presentarsi è abbastanza frequente e ricorda in particolare il seguente episodio. Nel compilare l'articolo dell'Enciclopedia sulla probabilità, impegno che non aveva preso con gran entusiasmo, d'Alembert asserì che nel lancio di due monete la probabilità di ottenere “testa e croce” era $\frac{1}{3}$ e non $\frac{1}{2}$, ignorando che ci sono due casi favorevoli all'evento, (T, C) e (C, T) e due non favorevoli (T, T) e (C, C). Laplace sottolineò successivamente l'errore.

Dimostrazione con le regola di Bayes – Consideriamo i due eventi: $O^* =$ “la prima moneta che ho visto è d'oro” = {(O, O), (O, O), (O, A)}; $A^* =$ {(O, A)}. Dobbiamo determinare la probabilità dell'evento A^* una volta che si è visto che la moneta in uno scomparto è d'oro, cioè $P((O, A)/O^*)$.

Quesiti e problemi del calcolo delle probabilità in applicazione della regola di Bayes

Per la legge di Bayes:

$$P((O, A)/O^*) = P(O^*/(O, A)) \times \frac{P((O, A))}{P(O^*)}.$$

Per poterla utilizzare dobbiamo calcolare quanto valgono i termini che vi compaiono.

Ora, $P(O^*/(O, A)) = \frac{1}{2}$ poiché, data la scatola (O, A), la probabilità che io abbia visto O è eguale alla probabilità che veda A.

Per la regola delle alternative:

$$\begin{aligned} P(O^*) &= P(O^*/(O, A)) \cdot P((O, A)) + P(O^*/(O, O)) \cdot P((O, O)) + P(O^*/(A, A)) \cdot P((A, A)) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + 1 + 0 \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Quindi $P((O, A)/O^*) = P(O, A) = \frac{1}{3}$.

Pertanto, come ci aveva indicato l'intuizione guidata, la probabilità richiesta eguaglia la probabilità della scatola con monete diverse.

5. Test diagnostici

Spesso si fa uso di test, procedimenti rapidi per determinare, in base ad un esame del sangue o di qualche altra variabile umana rilevabile, che comporta una reazione chimica a un determinato agente, se una data persona è affetta da una data malattia o no. Se la reazione è positiva vuol dire che è presente l'anticorpo della malattia indagata e quindi il soggetto è malato, altrimenti è sano. Però i test non sono mai sicuri al 100% e quindi un test può risultare negativo anche se il paziente è malato o viceversa. Per questo motivo si calcola la probabilità che il risultato sia corretto. Si formalizza a tale scopo la situazione al seguente modo: si considerano 4 eventi elementari:

M = "il paziente è malato"; S = "il paziente è sano";

T^+ = "il paziente è positivo al test"; T^- = "il paziente è negativo al test".

Essi possono dar luogo alle seguenti combinazioni: $T^+ \cap M$; $T^+ \cap S$; $T^- \cap M$; $T^- \cap S$, di cui la prima indica che il test ha dato risultato positivo ed effettivamente il paziente è malato, la quarta indica che il test ha dato risultato negativo ed il paziente è effettivamente sano, invece la seconda e la terza indicano risultati sbagliati, la seconda che il test ha dato risultato positivo ma il paziente è sano e la terza che il test ha dato risultato negativo ma il paziente è malato.

Prima di essere utilizzato un test è sperimentato su vasta scala, controllandolo su individui notoriamente sani o malati. Si determinano in tal modo la sensibilità, $P(T^+/M)$

$$= \frac{P(T^+/M)}{P(M)} \text{ e la specificità } P(T^-/S) = \frac{P(T^-/S)}{P(S)}.$$

Però i precedenti valori non ci permettono di stabilire con quale probabilità un malato risulti positivo al test. In (Benedetto, Degli Esposti, Maffei, 2016) si considera il caso di una malattia per cui $P(T^+/M) = 95\%$; $P(T^-/S) = 90\%$. Si suppone anche che con uno screening di massa si sia appurato che risulti positivo un quinto della popolazione, cioè

$P(T^+) = 0,2$ e quindi $P(T^-) = 0,8$. Vogliamo conoscere qual è la probabilità che un individuo sia malato, cioè vogliamo calcolare $P(M)$. La formula:

$$P(M) = P(M/T^+) \cdot P(T^+) + P(M/T^-) \cdot P(T^-),$$

non può essere usata perché non sono note le probabilità condizionate che vi compaiono. Invece osserviamo la formula:

$$P(T^+) = P(T^+/M) \cdot P(M) + P(T^+/S) \cdot P(S) = P(T^+/M) \cdot P(M) + P(T^+/S) \cdot [1 - P(M)].$$

Sono noti tutti i termini tranne $P(M)$: infatti $P(T^+/M) = 95\%$, $P(T^+/S) = 1 - P(T^-/S) = 0,1$.

Allora, risolvendo la precedente relazione nell'incognita $P(M)$, si ricava:

$$P(M) \cdot [0,95 - 0,1] = 0,2 - 0,1 = 0,1$$

$$\text{e quindi } P(M) = \frac{0,1}{0,85} = \frac{2}{17} \approx 0,118.$$

Ne segue che circa il 12% della popolazione è malata.

Nel caso del tampone per il covid la sensibilità è del 98% e la specificità molto alta. Nella settimana dal 31 gennaio al 6 febbraio 2022 risultava $P(T^+) = 0,1$, pertanto supponendo che la specificità fosse $P(T^-/S) = 0,95$ e quindi $P(T^+/S) = 0,05$, si ricavava ragionando come prima, $P(M) = \frac{1}{19}$ cioè circa 5 individui su 100 erano ammalati in quel periodo.

6. Alcuni semplici problemi sulla probabilità condizionata

Problema 1 – Dimostrare che l'evento $A =$ “fare 6 lanciando 2 dadi” ha probabilità $\frac{5}{36}$.

Se nel lancio uno dei due dadi cade per primo mostrando il 2, nei pochi istanti che ci separano dalla caduta del secondo dado come rivalutiamo la probabilità di A ? E che possiamo dire dell'evento $B =$ “fare 7 lanciando i due dadi” o dell'evento $C =$ “la somma dei punti è 9”?

Osserviamo che ci sono 36 casi possibili e il nostro evento si può scrivere per esteso così:

$$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\};$$

per questo $P(A) = \frac{5}{36}$. Sia E l'evento “è uscito il 2 nel lancio del primo dado”, cioè

$$E = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\};$$

allora per ottenere il 6 come somma l'altro dado deve necessariamente mostrare 4, quindi abbiamo 1 possibilità su 6 di realizzare A e $P(A/E) = \frac{1}{6} > \frac{5}{36}$. La probabilità condizionata in tal caso è maggiore della probabilità di partenza perché è stata esclusa la possibilità che il primo dado mostrasse il 6, fatto che avrebbe reso del tutto impossibile il verificarsi di A .

Analogamente $P(B) = \frac{6}{36}$ e $P(B/E) = \frac{1}{6}$, perché se è uscito il 2 ho anche in questo caso una sola possibilità per il secondo dado di realizzare l'evento B . È poi evidente che, essendo

Quesiti e problemi del calcolo delle probabilità in applicazione della regola di Bayes

$$C = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (5, 3)\},$$

si ha $P(C) = \frac{4}{36}$, ma risulta invece $P(C/E) = 0$.

Problema 2 - Se lancio 4 dadi quale probabilità ho di ottenere esattamente un doppio 6? Se si riesce a scorgere che sicuramente uno dei dadi non segna il 6, mentre nulla si sa degli altri, qual è la probabilità di realizzare esattamente un doppio 6? E se invece si scorge che uno dei dadi segna 6?

1) Poniamo A = "si realizza esattamente un doppio 6". In quanti modi può verificarsi A ? Il gioco può essere visto come una ripetizione 4 volte del lancio di un dado, inoltre abbiamo due possibilità di risultato per ogni dado, esce il 6 oppure non esce il 6, evento quest'ultimo che indichiamo con *, quindi i possibili risultati favorevoli ad A sono:

$$66**; **66; 6*6*; *6*6*; 6**6; *66*.$$

Precisamente A può verificarsi in $6 = \binom{4}{2}$ modi e concludiamo che:

$$P(A) = 6 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2;$$

infatti l'uscita del 6 ha probabilità $\frac{1}{6}$, mentre l'evento contrario, *, ha probabilità $\frac{5}{6}$ e il fatto che si presenti il 6 nei quattro lanci esattamente due volte in un dato ordine ha probabilità $\binom{4}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

2) Poniamo B = "il primo dado non segna il 6". Risulta $P(B) = \frac{5}{6}$. In tal caso il doppio 6 può essere ottenuto con gli altri 3 dadi e ci sono esattamente tre possibilità, cioè $\binom{3}{2}$ possibilità di ottenere il risultato voluto, ognuna con probabilità $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6}$.

Pertanto $P(A/B) = 3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6}$. Ora $P(A \cap B) = 3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2$, poiché, com'è noto $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$.

3) Poniamo C = "il primo dado segna 6". Risulta $P(C) = \frac{1}{6}$. In tal caso per ottenere esattamente un doppio 6 nei tre lanci successivi dobbiamo ottenere solo un 6. Questo può ottenersi in tre modi distinti, ogni modo avendo probabilità $\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$. Pertanto, $P(A/C) = \binom{3}{2} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$.

Ovviamente abbiamo ottenuto un valore maggiore che nel caso 1 e nel caso 2, casi nei quali avrebbe potuto non presentarsi mai un 6 in nessuno dei 4 lanci.

Problema 3 - Tre scatole A , B e C contengono asciugacapelli, di cui alcuni sono difettosi. Si sa che sono difettosi il 7% degli asciugacapelli in A , il 10% degli asciugacapelli in B e il 20% degli asciugacapelli in C . Gli asciugacapelli vengono tutti messi in commercio, ritirandoli da una delle tre scatole al seguente modo:

$P(A)$ = probabilità che siano scelti dalla scatola A = $\frac{10}{32}$,

e allo stesso modo: $P(B) = \frac{7}{32}$; $P(C) = \frac{15}{32}$.

Qual è la probabilità che uno di essi sia difettoso? Qual è la probabilità che provenga da A, B o C?

Per il teorema delle alternative, indicato con D l'evento "l'asciugacapelli è difettoso", si ha:

$$P(D) = P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B) + P(D/C) \cdot P(C) = \\ \frac{7}{100} \cdot \frac{10}{32} + \frac{10}{100} \cdot \frac{7}{32} + \frac{20}{100} \cdot \frac{15}{32} = \frac{13,75}{100}.$$

Circa il 14% degli asciugacapelli è difettoso.

Per sapere qual è la probabilità che un asciugacapelli difettoso provenga da A bisogna calcolare $P(A/D)$; questo può essere effettuato tramite la formula di Bayes:

$$P(A/D) = P(D/A) \cdot \frac{P(A)}{P(D)} = \frac{7}{100} \cdot \frac{10}{32} \cdot \frac{100}{13,75} \approx \frac{100}{624}.$$

Quindi la probabilità che l'asciugacapelli provenga da A è circa $\frac{1}{6}$. Analogamente:

$$P(B/D) = P(D/B) \cdot \frac{P(B)}{P(D)} = \frac{10}{100} \cdot \frac{7}{32} \cdot \frac{100}{13,75} \approx \frac{100}{624}.$$

$$P(C/D) = P(D/C) \cdot \frac{P(C)}{P(D)} = \frac{20}{100} \cdot \frac{15}{32} \cdot \frac{100}{13,75} \approx \frac{10}{15} = \frac{2}{3},$$

la probabilità che l'asciugacapelli provenga dalla scatola B è all'incirca eguale alla probabilità che provenga dalla scatola A, $\frac{1}{6}$ circa, mentre la probabilità che provenga da C è quattro volte maggiore, eguale a $\frac{2}{3}$ circa.

7. Conclusioni

Sin dall'antichità la scoperta di paradossi, come quelli di Zenone, ha creato grande interesse e, per la loro spiegazione, ha spinto gli uomini ad indagare più a fondo alcuni lati delle loro conoscenze e alle volte a introdurre addirittura nuove teorie. In particolare, la serie di esempi e di giochi relativi alla regola di Bayes qui presentata si è andata sempre più configurando nel suo delinearsi come divisa in due parti, rispondenti a due diverse esigenze di tipo educativo: la prima, comprendente il paradosso di Monty Hall, il dilemma del prigioniero e il problema delle tre scatole tratta problemi a cui le risposte che il giocatore darebbe immediatamente, basandosi sul suo intuito, sono in contraddizione con la soluzione logico-analitica e quindi portano il giocatore a rivedere

Quesiti e problemi del calcolo delle probabilità in applicazione della regola di Bayes

e mettere in crisi la sua precedente convinzione: tali problemi possono essere visti come integrabili in un processo di maturazione dello stesso intuito, un modo per comprendere che esso, ben guidato, può crescere ed essere educato ad indagare processi più alti di calcolo e di astrazione. Anche la proposta di dare più spiegazioni, sia di carattere intuitivo che matematico, degli stessi problemi, rientra in un programma per sviluppare e anche liberare potenzialità mentali alla ricerca del significato insito negli esempi.

La seconda parte è meno problematica, più esercitativa e presenta però delle applicazioni della teoria a situazioni della vita di ogni giorno e come tale può essere inserita in un progetto teso a mettere in relazione la matematica con la realtà circostante.

Bibliografia

Baclawski Kenneth, Cerasoli Mauro, Rota Gian Carlo (1984), Introduzione alla probabilità, U. M. I., Bologna.

Benedetto Dario, Degli Esposti Mirko, Maffei Carlotta (2016), Matematica per le scienze della vita, Ambrosiana, Milano.

Cerasoli Mauro (1995), *Il paradosso delle tre scatole*, La matematica e la sua didattica, N.2.

Clark Michael (2002), I paradossi dalla A alla Z, Raffaello Cortina Editore, Milano.

Gardner Martin (1973), Enigmi e giochi matematici, Rizzoli.

Smullyan Raymond (1994), Satana, Cantor e l'infinito e altri inquietanti rompicapi. Bompiani, Milano.

Wikipedia. Il problema di Monty Hall.

I pre-requisiti essenziali per lo studio della Probabilità e della Statistica

Ferdinando Casolaro¹

Alessandra Rotunno²

¹Direttore di redazione “Periodico di Matematica”
ferdinando.casolaro@unina.it

²Liceo scientifico “A. Labriola”, Napoli - docente a contratto di Geometria DIARC “Federico III”
alessandra.rotunno@unina.it

Sunto

Si presentano alcune tematiche di carattere elementare che sono alla base dello studio della “Matematica dell’incerto”. Dopo una sintesi sulle proprietà delle medie, vengono rappresentati alcuni grafici per lo studio della Statistica senza l’utilizzo dell’analisi matematica, al fine di dare una comprensione della funzione di Gauss.

Parole chiave: Lorem Medie, grafici, istogrammi, funzione di Gauss

1. Introduzione

La Matematica dell’incerto, pur essendo inserita già nei vecchi programmi ministeriali per la Scuola Secondaria di secondo grado (Scuola superiore o liceo prima delle Indicazioni nazionali) dal 1979, non è stata quasi mai oggetto di proposta nei corsi di insegnamento.

C’è quasi un rifiuto da parte dei docenti ad affrontare i temi di Statistica e Calcolo delle Probabilità; alcuni li ritengono non essenziali rispetto agli argomenti classici di Algebra e Geometria, altri ritengono difficile l’approccio.

La motivazione principale è sicuramente dovuta ad una scarsa Formazione fornita nei corsi universitari e, come detto, alla mancanza di proposta agli stessi docenti negli anni in cui hanno frequentato la Scuola Secondaria.

I corsi di Aritmetica e di Geometria vengono affrontati già dalla Scuola Primaria, per cui al primo anno della Scuola di secondo grado lo studio dell’Algebra ed i teoremi di Geometria sintetica trovano negli allievi la base su cui poggiare argomenti più complessi.

Il punto, la retta, il piano, l’angolo, il poligono,... sono gli elementi di *geometria* che i bambini assimilano già dalla Scuola di infanzia e nelle famiglie; la numerazione, le quattro operazioni elementari, l’operazione di potenza... sono i concetti di *aritmetica* che si propongono agli allievi dai primi anni della Scuola Primaria.

Pertanto riteniamo opportuno, prima di introdurre le definizioni di probabilità (anche di Statistica) che il docente affronti in modo esauriente e con esempi significativi i concetti di **media**, **indici di variabilità** ed **analisi combinatoria**.

Le medie classiche (aritmetica, aritmetica ponderata, geometrica, armonica), le medie di posizione (mediana, moda) e gli indici di variabilità (scarto semplice, varianza, scarto quadratico medio) sono gli elementi su cui costruire la matematica dell'incerto, oltre ai principi fondamentali del calcolo combinatorio: fattoriale di un numero intero positivo, coefficiente binomiale, binomio di Newton. Disposizioni, permutazioni, combinazioni semplici e combinazioni con ripetizioni.

Nel paragrafo che segue ci limiteremo alla descrizione di esempi sulle medie e sul calcolo combinatorio, rimandando l'approfondimento degli indici di variabilità ai riferimenti bibliografici (Casolaro F. 2004).

2. Definizioni ed esempi

La media aritmetica tra n numeri interi positivi x_1, x_2, \dots, x_n è il quoziente fra la loro somma e il loro numero n (Casolaro, Fontana 2018).

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Esempio 1: Problema che si risolve con la media aritmetica

Uno studente universitario ha ottenuto nei suoi primi esami i seguenti voti: 24, 28, 25, 29, 30, 18.

Qual è la media dello studente? Quale voto avrebbe dovuto ottenere nell'ultimo esame affinché la media fosse 26?

Soluzione

$$M = \frac{24 + 28 + 25 + 29 + 30 + 18}{6} = 25, \bar{6}$$

Chiamando x il voto che avrebbe dovuto ottenere nell'ultimo esame si ha che:

$$\frac{24 + 28 + 25 + 29 + 30 + x}{6} = 26$$

da cui si ricava $x = 20$.

La media geometrica tra n numeri interi positivi x_1, x_2, \dots, x_n si ottiene estraendo la radice n -sima del loro prodotto.

$$M_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Esempio 2: Problema che si risolve con la media geometrica

Uno scommettitore puntando una somma iniziale pari a 2 euro, ha conseguito un capitale di 432 euro in 3 giocate successive. In particolare, ha vinto:

- Nella prima giocata, 3 volte la somma iniziale ovvero $2 \cdot 3 = 6$ euro
- Nella seconda giocata, 8 volte la somma precedentemente vinta, ovvero $6 \cdot 8 = 48$ euro
- Nella terza giocata, 9 volte la somma precedentemente vinta, ovvero $48 \cdot 9 = 432$ euro

Qual è stata la vincita media riportata?

Soluzione

La somma complessivamente vinta è ottenuta mediante una legge moltiplicativa, ossia: $2(3 \cdot 8 \cdot 9) = 432$ euro. Pertanto, determinare di quante volte in media si è moltiplicato il capitale inizialmente puntato (2 euro), significa individuare quel valore che sostituito ai fattori moltiplicativi 3, 8 e 9 nella funzione di prodotto ne lascia invariato il risultato. Tale valore è la media geometrica dei valori osservati ovvero:

$$M_g = \sqrt[3]{3 \cdot 8 \cdot 9} = 6$$

L'equazione si ricava dal seguente ragionamento:

$2 \cdot 3 = 6$, I° vincita;

$(2 \cdot 3) \cdot 8 = 48$, II° vincita;

$[(2 \cdot 3) \cdot 8] \cdot 9 = 432$, III° vincita,

per cui, indicando con x il valore della vincita media, deve risultare:

$$[(2 \cdot 3) \cdot 8] \cdot 9 = [(2 \cdot x) \cdot x] \cdot x = 432$$

cioè: $2 \cdot x^3 = 432 \implies x^3 = 216 \implies x = \sqrt[3]{216} = 6$ euro, media geometrica della terna (3, 8, 9).

Osservazione: se fosse stata calcolata la media aritmetica dei valori osservati:

$$M_a = \frac{3 + 8 + 9}{3} = 6,667$$

Sulla base di questo valore si potrebbe concludere che il giocatore ha vinto mediamente 6.667 volte la somma puntata. Tuttavia tale valore non è corretto: partendo da un capitale iniziale di 2 euro in tre giocate successive non si ottiene il capitale finale di 432 euro, se ad ogni giocata si vince 6.667 volte la posta. Considerata la tipologia del problema, la media idonea a rappresentare i valori osservati è sicuramente la media geometrica.

La media aritmetica ponderata tra n numeri interi positivi x_1, x_2, \dots, x_n positivi, a cui sono associati i numeri p_1, p_2, \dots, p_n detti pesi, il quoziente fra la somma dei prodotti dei numeri per i loro pesi e la somma dei pesi stessi.

$$P = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

La media aritmetica è un caso particolare di media ponderata in cui tutti i pesi sono uguali a 1.

Esempio 3: Problema che si risolve con la media aritmetica ponderata

Un'azienda spende per gli stipendi del personale le seguenti quote mensili:

920 € per 12 operai, 1240 € per 8 tecnici, 1350 € per 4 impiegati e 1950 € per 2 dirigenti.

Qual è lo stipendio medio pagato dall'azienda?

Soluzione

Lo stipendio medio coincide con la media ponderata dei valori dati:

$$P = \frac{920 \cdot 12 + 1240 \cdot 8 + 1350 \cdot 4 + 1950 \cdot 2}{12 + 8 + 4 + 2} = 1163,85 \text{ €}$$

La media quadratica tra n numeri interi positivi x_1, x_2, \dots, x_n positivi è uguale alla radice quadrata del rapporto della somma dei quadrati dei valori numerici ed il numero dei valori.

$$M_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

Esempio 4: Problema che si risolve con la media quadratica

Quattro appezzamenti quadrati di terreno misurano rispettivamente (in metri): $l_1 = 25$, $l_2 = 35$, $l_3 = 50$, $l_4 = 85$.

Questi 4 appezzamenti vengono permutati con altri 4 terreni quadrati, uguali fra di loro, in modo da compensare la superficie ceduta con quella ricevuta.

Qual è il lato di ognuno dei 4 terreni uguali ricevuti in permuta?

Soluzione

La misura del lato ricercato coincide con la media quadratica dei valori dati:

$$l = \sqrt{\frac{25^2 + 35^2 + 50^2 + 85^2}{4}} = 53,79 \text{ m} \quad (*)$$

Infatti, indicato con x il lato dei quattro quadrati uguali, deve risultare:

$$25^2 + 35^2 + 50^2 + 85^2 = 4x^2$$

$$x^2 = \frac{25^2 + 35^2 + 50^2 + 85^2}{4}, \text{ da cui (*)}$$

La media armonica tra n numeri interi positivi x_1, x_2, \dots, x_n è un numero reale M_a

tale che il suo reciproco $\frac{1}{M_a}$ è uguale alla media aritmetica dei reciproci di

x_1, x_2, \dots, x_n ,

$$\frac{1}{M_a} = \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}$$

Pertanto, la media armonica di x_1, x_2, \dots, x_n è data da:

$$M_a = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Esempio 5: Problema che si risolve con la media armonica

Un'auto percorre 240 Km effettuando tre soste rispettivamente:

- al 60esimo Km.
- al 120esimo Km.
- al 180esimo Km.

Durante il primo percorso l'auto tiene una velocità media $v_{m1} = 80$ Km/h; nei percorsi successivi le velocità medie sono rispettivamente:

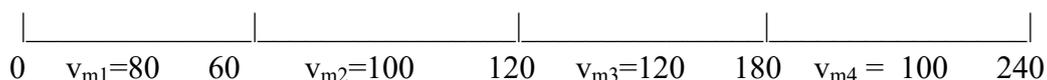
$v_{m2} = 100$ Km/h; $v_{m3} = 120$ Km/h; $v_{m4} = 100$ Km/h.

Determinare la velocità media dell'auto sull'intero percorso.

Soluzione

La velocità media coincide con la media armonica dei valori richiesti:

$$v_m = \frac{4}{\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120}} = 97,96 \text{ Km/h}$$



Infatti, il primo tratto di 60 Km alla velocità media $v_{m1}=80$ Km/h, lo percorre nel tempo

$t_1 = \frac{s_1}{v_{m1}} = \frac{60}{80} h$, il secondo tratto di 60 Km alla velocità media $v_{m2} = 100$ Km/h, lo

percorre nel tempo $t_2 = \frac{s_2}{v_{m2}} = \frac{60}{100} h$, il terzo tratto di 60 Km alla velocità media

$v_{m3} = 120$ Km/h, lo percorre nel tempo $t_3 = \frac{s_3}{v_{m3}} = \frac{60}{120} h$, il quarto tratto di 60 Km

alla velocità media $v_{m4} = 100$ Km/h, lo percorre nel tempo $t_4 = \frac{s_4}{v_{m4}} = \frac{60}{100} h$.

Pertanto, l'intero tratto è percorso nel tempo totale (in ore)

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{60}{80} + \frac{60}{100} + \frac{60}{120} + \frac{60}{100}$$

per cui la velocità media sul totale del percorso è:

$$v_m = \frac{s}{t} = \frac{240}{\frac{60}{80} + \frac{60}{100} + \frac{60}{120} + \frac{60}{100}} = \frac{4}{\frac{1}{80} + \frac{1}{100} + \frac{1}{120} + \frac{1}{100}} \text{ Km/h}$$

Esempio 6: sul calcolo combinatorio

Date le cinque cifre: 3, 5, 7, 8, 9, stabilire quanti numeri interi (Disposizioni) a tre cifre si possono scrivere con essi. Se si gioca al lotto, quanti terni (Combinazioni) si possono ottenere combinando queste cifre?

Nel primo caso si tratta di calcolare le disposizioni di 5 elementi a tre a tre, in quanto la variazione di posto cambia il valore del numero; nel secondo caso si tratta di combinazioni di 5 elementi a tre a tre, in quanto con la variazione di posto si ha lo stesso terno.

Numeri interi a tre cifre: $D_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 60$

Numeri di terni al lotto $C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

3. Un approccio didattico all'insegnamento della Statistica

Uno degli aspetti più complessi nell'insegnamento è la comunicazione degli argomenti alle persone che:

- *non hanno sufficienti conoscenze pregresse (pre-requisiti).*
- *non conoscono la lingua del relatore.*

Lo studio della Matematica e della Statistica, per gli obiettivi proposti, è facilitato rispetto alle altre discipline perché si può comunicare attraverso l'utilizzo di formule e visualizzazioni grafiche.

Spesso, però, le rappresentazioni attraverso formule o disegni vengono proposte in modo da risultare di difficile comprensione perché non si tiene conto delle conoscenze di base dei destinatari (Casolaro F., Paladino L. 2012),

Analizziamo, ad esempio, un quesito assegnato agli Esami di Stato 2007 nelle Scuole italiane anche all'estero:

“Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.1)$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della Matematica illustrando il significato di μ , σ , σ^2 e come tali parametri influenzino il grafico di $f(x)$ ”.

E' un quesito di Statistica, che chiede di analizzare la cosiddetta "curva degli errori" (funzione gaussiana) che caratterizza l'andamento di tutti i fenomeni naturali. Il grafico in oggetto è il seguente:

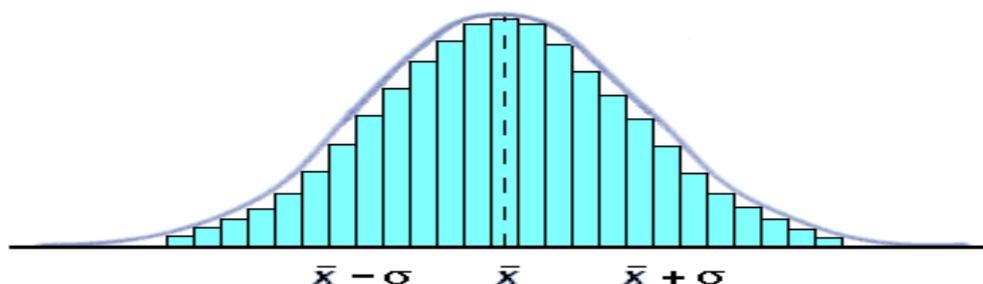


fig.3.1

La funzione gaussiana è alla base delle analisi statistiche in ogni disciplina e la sua conoscenza permette lo studio sociologico e qualitativo di gran parte dei fenomeni attraverso la Statistica ed il Calcolo delle Probabilità, discipline essenziali per la formazione delle nuove generazioni che, a causa della velocizzazione degli eventi, vivono una realtà dominata dall'incertezza.

Questo quesito è stato molto criticato dai docenti perché ritenuto difficile ed estraneo alle indicazioni ministeriali. Per affrontarlo, l'allievo deve conoscere alcuni elementi

che non si possono estrarre direttamente dalla formula, per cui riteniamo che per l'analisi dei fenomeni nelle Scienze applicate, si debba arrivare a proporre la (1.1) dopo che gli allievi abbiano maturato alcuni aspetti caratteristici dei parametri inseriti nella rappresentazione analitica.

Di seguito si richiamano alcuni concetti con i quali, partendo da semplici grafici già noti dalla Scuola secondaria di Primo grado (istogrammi e semplici rappresentazioni sul piano cartesiano), si facilita la comprensione di funzioni più complesse, come la (1.1).

4. Costruzione di semplici grafici relativi a problemi naturali

Come accennato nel paragrafo precedente, presentiamo alcune costruzioni di grafici elementari come primo approccio alla comprensione della gaussiana.

1) Con un campione di mille studenti, costruire un istogramma che presenta sull'asse delle ascisse le seguenti fasce di altezza (in centimetri):

< 150 - da 150 a 160 - da 160 a 170 - da 170 a 180 - da 180 a 190 - da 190 a 200 - > 200;

e sull'asse delle ordinate, il numero di studenti per ogni fascia.

Si vede immediatamente che la fascia centrale presenta i valori massimi, mentre gli studenti di altezza inferiore a 150 cm e gli studenti di altezza superiore a 200 centimetri presentano i valori più bassi (fig. 4.1).

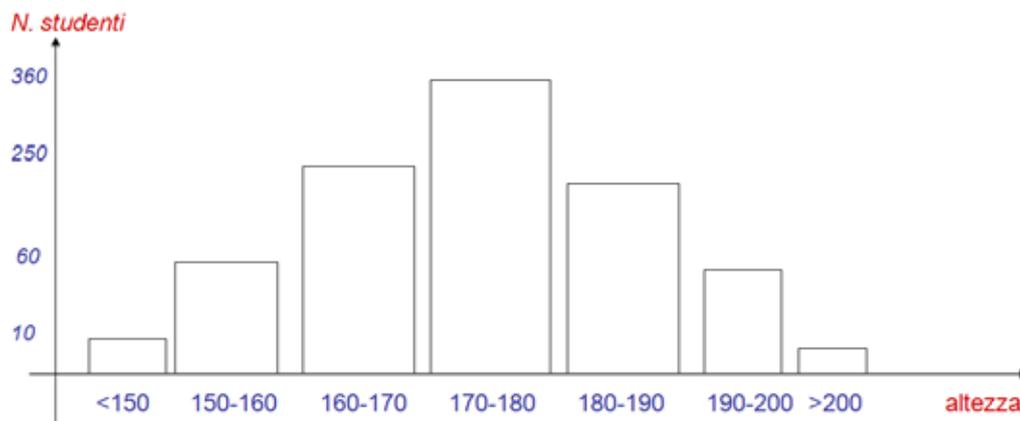


fig. 4.1

2) Costruire l'istogramma che presenta sull'asse delle ascisse i mesi dell'anno e sulle ordinate la misura della fascia oraria compresa tra l'alba e il tramonto.

Si hanno i seguenti dati: gennaio e dicembre: 8.00 → 17.00 - giugno-luglio: 05.00 → 21.00.

I valori massimi sono concentrati nei mesi centrali, giugno-luglio, i valori minimi agli estremi rappresentati dai mesi di gennaio e dicembre (fig. 4.2).

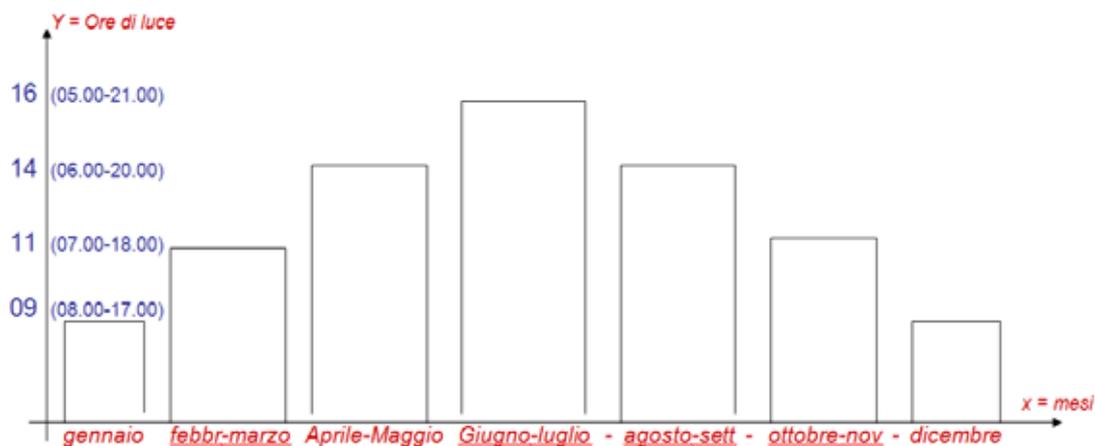


fig. 4.2

3) Disegnare un vulcano ed indicare sulla figura i punti in cui si sviluppa la massima energia.

E' evidente che la figura del vulcano ha l'andamento della curva di Gauss; è interessante far notare agli allievi come i valori di massima energia si hanno nella parte centrale in cui è concentrata una massa maggiore, coerentemente al principio di equivalenza massa-energia (fig. 2.4).



fig. 4.3

5. Rappresentazione del grafico di una funzione. Pre-requisiti matematici

E' noto che per rappresentare il grafico di una funzione $f(x)$ si richiede la conoscenza di:

- a. equazioni, disequazioni e sistemi lineari;
- b. cenni di topologia e concetto di limite;
- c. concetto di derivata con relativa rappresentazione geometrica.

I concetti al punto a. vengono approfonditi abbastanza nelle lezioni di algebra; gli argomenti ai punti b. e c. rappresentano il nocciolo del programma di Analisi Matematica che è oggetto di studio degli ultimi anni del corso quinquennale, per cui diventa difficile lo studio delle questioni da affrontare attraverso la Statistica nei primi anni di corso.

Ad esempio, per la crescita o la decrescita dell'andamento relativo ad un fenomeno da studiare, si opera con grandezze discrete che spesso richiedono troppi passaggi, per cui si traccia il grafico di una funzione continua per l'interpolazione con i dati a disposizione (Casolaro 2018).

Come si può tracciare (almeno con un'approssimazione nei limiti di quanto basta alla comprensione del fenomeno) il grafico senza le conoscenze del calcolo differenziale?

Cerchiamo di rispondere a tale domanda pensando di proporre le seguenti tematiche nell'ordine che segue:

1. *Equazione della retta: visualizzazione di equazioni e disequazioni di primo grado, con particolare riferimento ai grafici delle distribuzioni di frequenza, per meglio assimilarne l'andamento.*
2. *Equazione della parabola con l'asse parallelo all'asse delle ordinate: studio del segno del trinomio di secondo grado con relativa visualizzazione grafica (equazioni e disequazioni di secondo grado).*
3. *La funzione esponenziale e la funzione logaritmica tracciata per punti con la base 2 e generalizzazione alla base naturale e.*

I punti 1. 2. vengono in generale trattati nei corsi del biennio per cui risultano noti agli studenti. Fissiamo, pertanto, l'attenzione sulla rappresentazione grafica delle funzioni esponenziali e logaritmiche con semplici applicazioni dell'algebra e della geometria elementare per individuarne la monotonia e la concavità (Casolaro 1990).

Relativamente al punto 3. premettiamo le seguenti definizioni:

Definizione 1. *La funzione $y = f(x)$ - di dominio X - si dice strettamente crescente in X se $x_1 \in X, x_2 \in X$, con $x_1 < x_2$, risulta:*

$$f(x_1) < f(x_2)$$

si dice strettamente decrescente se $x_1 \in X, x_2 \in X$, con $x_1 < x_2$, risulta

$$f(x_1) > f(x_2)$$

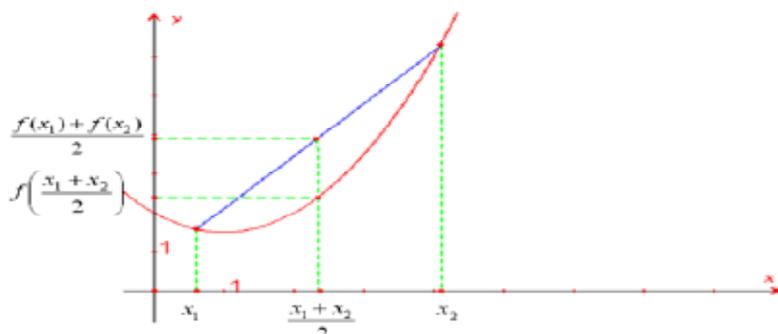
Definizione 2. Una funzione $y = f(x)$, continua in un intervallo X , si dice strettamente convessa (volge la concavità verso l'alto, fig. 2.5) in tale intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ se,

$$\forall x_1 \in [a, b], x_2 \in [a, b], \text{ con } x_1 < x_2$$

riesce

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

fig. 5.1



Precisamente, la $f(x)$ volge la concavità verso l'alto se l'ordinata del punto medio sul segmento di secante al grafico per gli estremi di ascissa rispettivamente x_1 e x_2 è situata al di sopra dell'ordinata del punto medio sul grafico.

La $y = f(x)$, continua nell'intervallo X , si dice strettamente concava (volge la concavità verso il basso, fig. 2.6) in tale intervallo se,

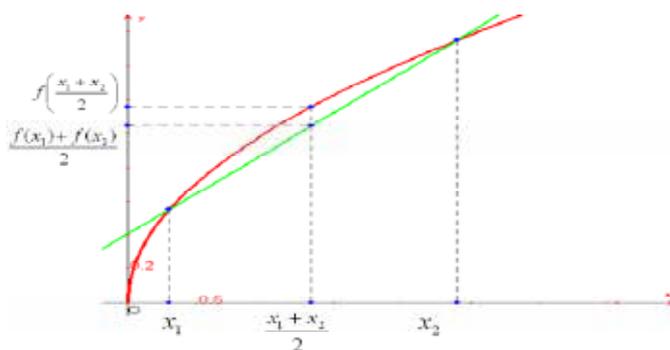
$$\forall x_1 \in [a, b], x_2 \in [a, b], \text{ con } x_1 < x_2$$

riesce:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Precisamente, la $f(x)$ volge la concavità verso il basso se l'ordinata del punto medio sul segmento di secante al grafico per gli estremi di ascissa rispettivamente x_1 e x_2 è situata al di sotto dell'ordinata del punto medio sul grafico.

fig. 5.2



Definizione 3. La media geometrica di due numeri reali positivi e distinti è sempre minore della media aritmetica.

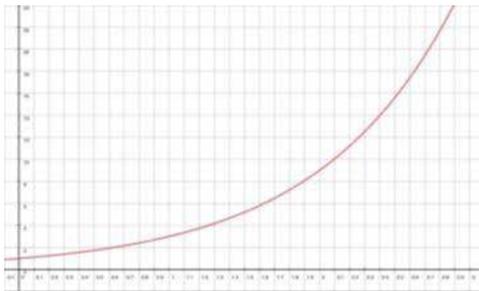
Infatti, con $a > 0$, $b > 0$, risulta:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 > 0, \quad a^2 + 2ab + b^2 > 4ab, \quad \frac{(a+b)^2}{4} > a \cdot b$$

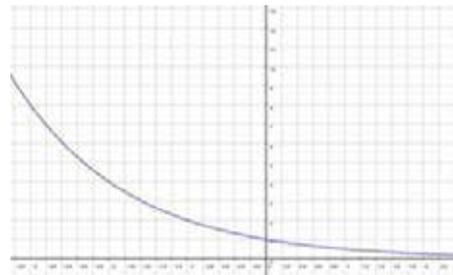
$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b} \quad (5.3)$$

La funzione esponenziale $f(x) = a^x$

Teorema 1 - La funzione $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, è strettamente crescente se $a > 1$, strettamente decrescente se $a < 1$; è convessa (volge la concavità verso l'alto) in entrambi i casi.



$f(x) = a^x$, con $a > 1$ - fig. 3.3



$f(x) = a^x$, con $a < 1$ - fig. 3.4

Dim. – Ci limitiamo al caso di $a > 1$.

Se $x_1 < x_2$, posto: $h = x_2 - x_1$, $x_2 = x_1 + h$, si ha:

Pertanto $f(x) = a^x$, con $a > 1$, è strettamente crescente in $[a, b]$.

Per dimostrare la concavità osserviamo che, essendo la funzione esponenziale positiva,

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], \quad a^{x_1} > 0, \quad a^{x_2} > 0$$

risulta

$$\sqrt{a^{x_1} \cdot a^{x_2}} < \frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2}$$

da cui, tenendo sempre conto che $a > 1$, si ha:

$$\left(a^{x_1} \cdot a^{x_2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{x_1+x_2}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{x_1+x_2}{2}} < \frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2}$$

ossia:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} .$$

per cui a^x è strettamente convessa.

Analogamente si dimostra la proprietà per $a < 1$.

La funzione logaritmica $f(x) = \lg_a x$

Teorema 2 - La funzione $f(x) = \lg_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, è strettamente crescente e concava in $(0, +\infty)$ se $a > 1$, strettamente decrescente e convessa se $a < 1$



$f(x) = \log_b x$, con $a > 1$ - fig. 5.5



$f(x) = \log_b x$, con $a < 1$ - fig. 5.6

Dim. - Se $a > 1$ è evidente, per definizione di logaritmo, che $f(x)$ è strettamente crescente.

Dimostriamo la stretta concavità. Per la (5.3) e per la stretta crescita, si ha:

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow \lg_a \sqrt{x_1 \cdot x_2} < \lg_a \frac{x_1 + x_2}{2}$$

da cui:

$$\frac{1}{2} \lg_a (x_1 \cdot x_2) < \lg_a \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{cioè:} \quad \frac{\lg_a x_1 + \lg_a x_2}{2} < \lg_a \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Pertanto, $f(x)$ volge la concavità verso il basso in $(0, +\infty)$.

6. Le funzioni a campana e la distribuzione normale

Per comprendere la relazione (2.1)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

bisogna che si chiarisca il significato dei parametri che presenta la rappresentazione

analitica e l'andamento del grafico della funzione di fig. 2.1 che rientra nelle cosiddette “funzioni a campana” per rappresentare le “distribuzioni normali”. Precisamente, relativamente ai parametri:

1. la media aritmetica μ ,
2. lo scarto quadratico medio σ (o deviazione standard)
3. la varianza σ^2 [misura di quanto i valori assunti dalla variabile, si discostino dalla media]

Relativamente agli aspetti grafici, la rappresentazione della funzione, trattata in modo esaustivo nel paragrafo precedente e la funzione che rientra nelle cosiddette funzioni a campana per la distribuzione normale.

Pertanto, dopo aver proposto nei primi anni esempi del mondo reale attraverso semplici grafici per evidenziare come questi hanno sempre l'andamento della curva di Gauss, come indicato nel paragrafo 2 (pagine 8-9) di questo articolo, è opportuno introdurre i primi elementi analitici di Statistica descrittiva e di Calcolo delle Probabilità, partendo già dal primo biennio con giochi di dadi, carte e classifiche dei campionati di calcio. Inoltre, non riteniamo superfluo trattare in modo specifico quelle particolari curve che rappresentano la cosiddetta <distribuzione normale>.

Le distribuzioni normali sono una famiglia di distribuzioni che hanno le stesse caratteristiche e lo stesso andamento. Graficamente sono rappresentate da curve simmetriche rispetto ad una retta, con valori più concentrati verso il centro e meno nelle estremità laterali, che hanno un andamento di curve a campana (ma non tutte le curve a campana sono distribuzioni normali).

Una distribuzione normale può essere espressa matematicamente in funzione di due parametri: la media (μ) e lo scarto tipo (o deviazione standard) σ (fig. 4.1) come caso particolare della curva a campana:

$$f(z) = e^{-z^2}$$

del grafico della funzione

$$f(z) = k e^{-z^2}$$

ottenuta da

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

avendo posto: $k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ $z = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$

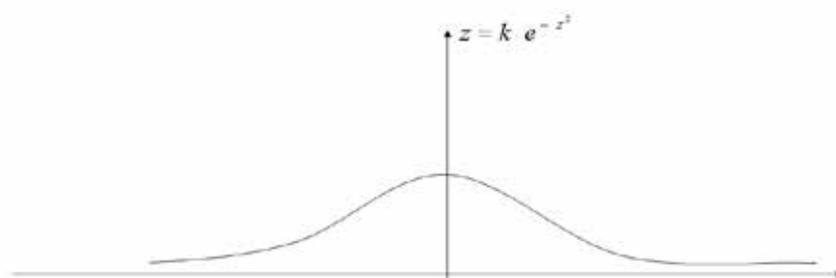


Fig. 6.1

I parametri essenziali sono:

- **La media aritmetica μ** (nella curva normale, essendo simmetrica, coincide con la *moda* e la *mediana*) che corrisponde all'asse di simmetria della curva, di cui ne caratterizza la posizione sull'asse delle ascisse. Cambiando la media la curva trasla lungo l'asse x .

- **La deviazione standard σ** (o *scarto quadratico medio*) che corrisponde alla distanza tra l'asse di simmetria (la media) e il punto di flesso della curva (dove la curva attraversa la sua tangente) e determina l'ampiezza della curva stessa.

- **La varianza σ^2** che fornisce una misura di quanto i valori assunti dalla variabile si discostino dalla media. Di fatto, misura la dispersione dei dati intorno al valore atteso.

In fig. 4.2 sono rappresentati grafici di distribuzione normale in cui si può notare come le curve normali differiscano per il modo in cui i valori si distribuiscono.

In fig. 4.3 si può osservare come, al variare della media e della varianza, la curva subisca sia uno spostamento sull'asse delle ascisse, sia un appiattimento; se si fa variare solo la varianza e si tiene costante la media, la curva si appiattisce quando la varianza cresce e diventa più appuntita quando la varianza cala, mentre il centro rimane lo stesso.

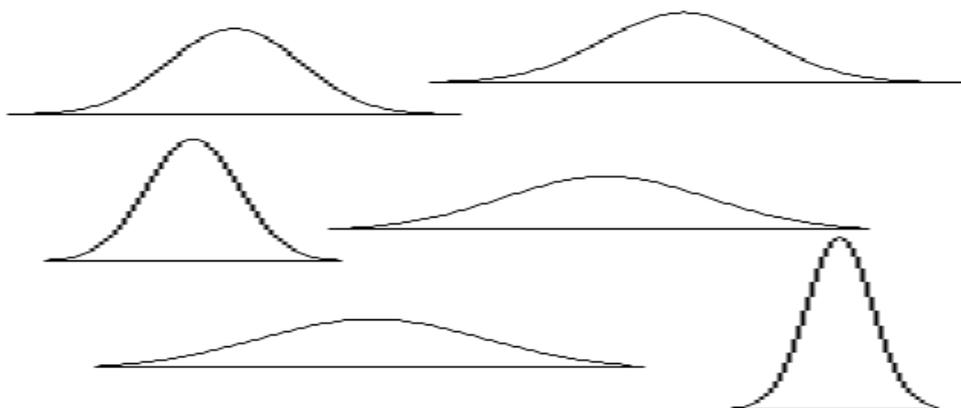


fig. 6.2

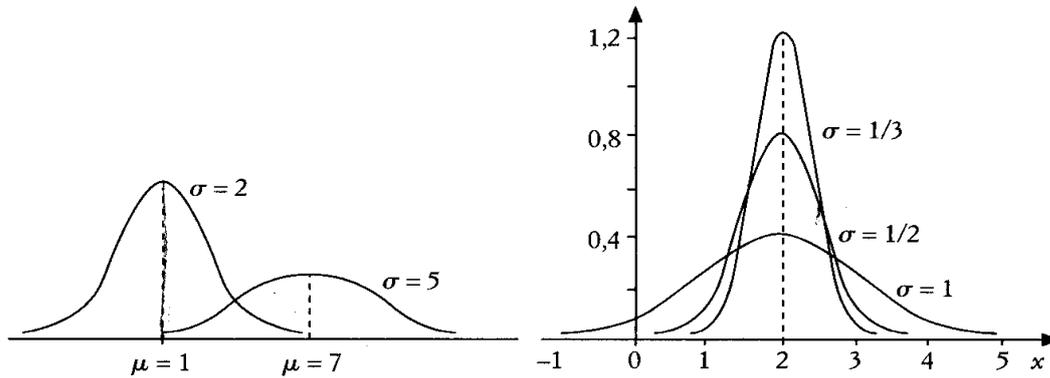


fig. 6.3

Per calcolare le probabilità che una variabile casuale X assuma valori compresi all'interno di intervalli della retta reale, si utilizza la **distribuzione normale standardizzata**, la cui importanza sta nel fatto che le probabilità corrispondenti alle superfici racchiuse dalla curva normale sono state tabulate e vengono riportate in apposite tabelle, per cui possono essere determinate senza dover ricorrere al calcolo di integrali.

La distribuzione normale *standardizzata* presenta le stesse caratteristiche della distribuzione normale *non standardizzata*. Ciò che distingue le due distribuzioni è che la normale standardizzata ha Media = 0 e Deviazione standard = 1, per cui è rappresentata da una sola curva (fig. 4.4), mentre la distribuzione normale generale è costituita da infinite curve.

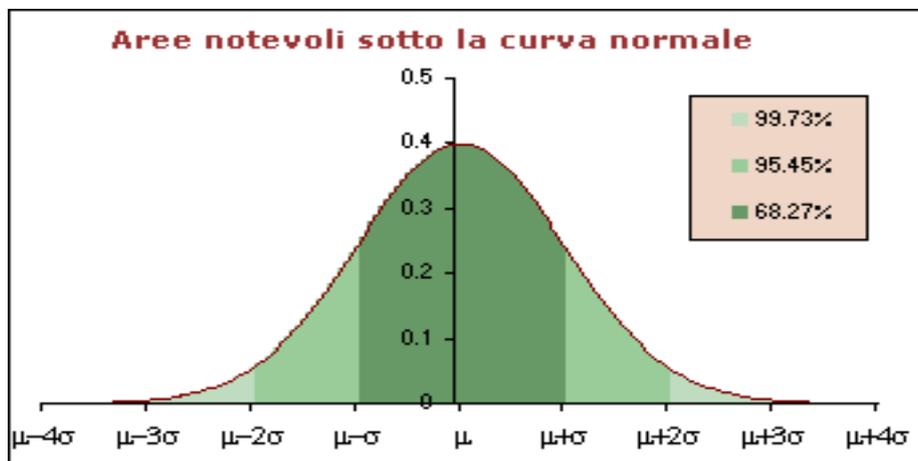


fig. 6.4

7. Conclusioni

Come si può constatare, l'esposizione delle tematiche oggetto del presente capitolo parte da esempi estremamente semplici che addirittura si possono proporre nella Scuola del Primo Ciclo. Si passa poi a rappresentare concetti che richiedono conoscenze più avanzate.

In realtà, è questo l'approccio che gli studenti hanno relativamente allo studio di altre branche della Matematica, come l'algebra e la geometria che nel secondo Ciclo di studi vengono proposte quando essi hanno maturato, già dai primi anni della Scuola Primaria, i concetti fondamentali di aritmetica e di rappresentazione di figure nel piano e nello spazio.

La Matematica dell'incerto, invece, viene catapultata senza alcuna progettazione in quanto la maggior parte dei docenti non ha avuto una adeguata Formazione nei corsi universitari, per cui l'obiettivo della nostra proposta è quello di razionalizzare l'intero percorso, in modo che il docente possa spalmare con gradualità i vari argomenti anno dopo anno in base alle difficoltà crescenti.

Bibliografia

Casolaro F. (1990), "*Le funzioni elementari senza l'utilizzo dell'analisi matematica*" Convegno nazionale Mathesis 1990, Ed. Luciani - Iseo 1990. Casolaro F. (2004),

Casolaro F. (2004) *Dispensa del corso di Statistica tenuto alla Facoltà di Scienze (Laurea in Scienze Ambientali) dell'Università del Sannio nel periodo 2004-2007.*

Casolaro F., Paladino L. (2012), "*Didactics of Statistics in Sociology*". First International Conference on Recent Trends in Social Sciences: Qualitative Theories and Quantitative Models (RTSS) - Iași (Romania), 2012. Pagg. 228-241.

Giambò A., Giambò R. (2009), *Matematica per la Scuola Superiore*, Ed. Armando Scuola.

Casolaro F., Fontana A. (2018) *I pre requisiti essenziali per lo studio della Probabilità e della Statistica*. Scuola Estiva per docenti della Scuola secondaria "La matematica dell'incerto". Castellammare di Stabia luglio 2018, pagine 45-52.

Casolaro F. (2018), *Un approccio didattico all'insegnamento della Statistica*, Scuola Estiva per docenti della Scuola secondaria "La matematica dell'incerto". Castellammare di Stabia luglio 2018, pagine 73-84.

Distribuzioni binomiale, ipergeometrica, geometrica e di Poisson

Sergio Schiavone

Liceo "E. Pestalozzi" di San Severo(FG),
Indirizzo Liceo Scientifico, opzione Scienze Applicate
Via Adda, 5, 71016, San Severo, Italy
sergioschiavone66@gmail.com

Sunto

In questo lavoro vengono presentate alcune variabili aleatorie discrete molto importanti e vengono fornite le caratteristiche con esempi relativi alle loro distribuzioni di probabilità.

L'auspicio è che questa trattazione possa stimolare quei colleghi che insegnano la Matematica nelle Scuole secondarie di II grado poco avvezzi alla Probabilità e alla Statistica, perché la ritengono inutile o forse complessa, inconsapevoli del fatto che, quando i propri allievi intraprendono gli studi universitari, queste nozioni rappresentano conoscenze fondamentali all'applicazione nei più disparati campi che caratterizzano moltissimi ambiti professionali.

Verranno discusse le distribuzioni binomiale, ipergeometrica, geometrica e di Poisson anche a livello didattico con l'ausilio della calcolatrice grafica ormai entrata a pieno titolo come strumento di lavoro nella scuola italiana.

Parole Chiave Variabili casuali, Distribuzioni discrete

1. La distribuzione simmetrica

Una v.a. S è **simmetrica** se ha le seguenti caratteristiche:

$$S = \left\{ \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \dots & v_s \\ \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \dots & \frac{1}{s} \end{array} \right\},$$

se assume s valori, ciascuno con probabilità $1/s$.

Ad esempio, per:

- $s=2$, $v_1=0$ e $v_2=1$, si ha la moneta perfetta o equa;
- $s=6$, $v_k=k$ con $k=1,2,\dots,6$, si ha il dado perfetto o equo;

- c) $s=90$, $v_k=k$ con $k=1,2,\dots,90$, si ha l'estrazione del primo numero su una ruota del gioco del lotto.

2. La distribuzione binomiale

L'**indicatore** o v.a. di Bernoulli ha la seguente caratteristica:

$$I = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{array} \right\},$$

dove p è un numero reale qualsiasi tale che $0 < p < 1$.

Nel lancio di una moneta, p è il trucco della moneta. Se $p=1/2$, la moneta è equa o perfetta e, in questo caso, I è simmetrico.

Se in un'urna ci sono 5 biglie rosse e 2 biglie bianche, denominando "successo" la v.a. associata all'estrazione casuale di una biglia rossa, si ha:

$$I = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \frac{2}{7} & \frac{5}{7} \end{array} \right\}$$

In generale, quando si contestualizza un fenomeno casuale a due eventi possibili, uno fissato come *successo*, l'altro come *insuccesso*, e identificati, rispettivamente, con i simboli I e θ , una v.a. di questo tipo è un *indicatore*.

La **v.a. binomiale** si caratterizza proprio dalla somma di più indicatori indipendenti ed equidistribuiti.

Ad esempio, siano X_1 e X_2 due indicatori indipendenti ed equidistribuiti, convenendo di porre $q=1-p$,

$$X_1 \approx X_2 = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ q & p \end{array} \right\},$$

la loro distribuzione congiunta, risulta:

| | | | |
|-------|---|-------|-------|
| | | X_2 | |
| | | 0 | 1 |
| X_1 | 0 | q^2 | qp |
| | 1 | pq | p^2 |

e la v.a. somma $S_2=X_1+X_2$ ha la seguente distribuzione:

$$S_2 = X_1 + X_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \end{array} \right\},$$

si può osservare che:

Distribuzioni binomiale, ipergeometrica, geometrica e di Poisson

$$q^2 + 2pq + p^2 = (q + p)^2 = 1^2 = 1,$$

come deve essere per una variabile aleatoria.

Se si considera un'ulteriore indicatore X_3 equidistribuito con X_1 e X_2 ed indipendente da S_2 , la distribuzione congiunta di S_2 e X_3 risulta:

| | | | | |
|-------|---|--------|---------|--------|
| | | S_2 | | |
| | | 0 | 1 | 2 |
| X_3 | 0 | q^3 | $2pq^2$ | p^2q |
| | 1 | pq^2 | $2p^2q$ | p^3 |

Quindi, la v.a. $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$ ha la seguente distribuzione:

$$S_3 = X_1 + X_2 + X_3 = \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ q^3 & 3pq^2 & 3p^2q & p^3 \end{array} \right\},$$

in cui è possibile notare, ancora una volta, che:

$$q^3 + 3pq^2 + 3p^2q + p^3 = (q + p)^3 = 1^3 = 1$$

In accordo con la definizione di v.a.

Pertanto, pensando di iterare questo procedimento, introducendo ad ogni passo un indicatore X_k equidistribuito con gli indicatori che lo precedono ed indipendente con S_{k-1} , si otterrà una famiglia di v.a. S_1, S_2, \dots, S_n dalla somma di n indicatori. Ogni variabile aleatoria di questo tipo è detta **v.a. binomiale**.

A questo punto si può determinare la distribuzione di S_n , grazie al teorema di Giacomo Bernoulli (1654-1705) presente nella sua opera *Ars Conjectandi* pubblicata postuma nel 1713 da suo nipote Nicola.

Teorema

Siano X_1, X_2, \dots, X_n n indicatori indipendenti ed equidistribuiti tali che

$$X_i = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{array} \right\} \quad \forall h \in \{1, 2, \dots, n\}$$

La v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ assume il valore k , con $0 \leq k \leq n$, con probabilità

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{distribuzione o formula di Bernoulli})$$

La v.a. S_n assume il valore k quando k indicatori su n , prendono il valore 1 e i rimanenti $n-k$ assumono, ovviamente, valore 0. La probabilità che esattamente k degli indicatori assumano valore 1, per l'ipotesi di indipendenza degli X_n è $p^k (1-p)^{n-k}$. Ma quanti sono i modi con cui si può verificare questo?

Certamente, tanti quanti sono i modi di avere k uni ed $n-k$ zeri in una sequenza lunga n , cioè $C_{n,k} = \binom{n}{k}$.

La v.a. **binomiale** $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ di parametro o trucco p ha, pertanto, la seguente distribuzione di probabilità:

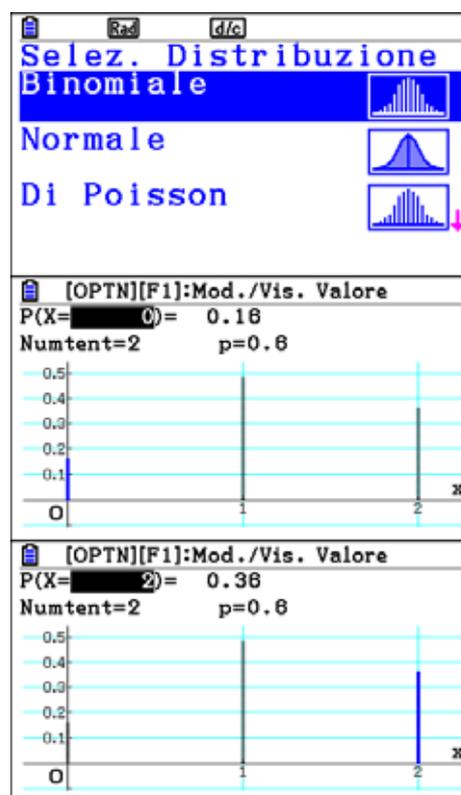
$$S_n = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & \dots & n-k & \dots & n \\ (1-p)^n & npq^{n-1} & \dots & \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \dots & p^n \end{array} \right\}$$

Si propongono di seguito alcuni esempi.

Esempio 1

Un'urna contiene 6 biglie rosse e 4 bianche. Vengono estratte due biglie con rimessa: determinare la v.a. "numero di biglie rosse estratte" e la relativa distribuzione di probabilità. Convenendo di associare il valore 0 all'estrazione di una biglia bianca e 1 a quella della rossa, risulta con $p=3/5$

$$S_2 = X_1 + X_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{25} & \frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{array} \right\}$$



Distribuzioni binomiale, ipergeometrica, geometrica e di Poisson

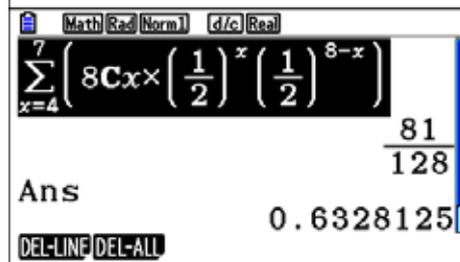
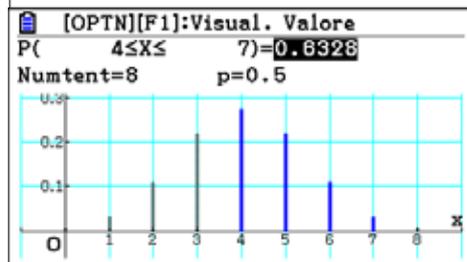
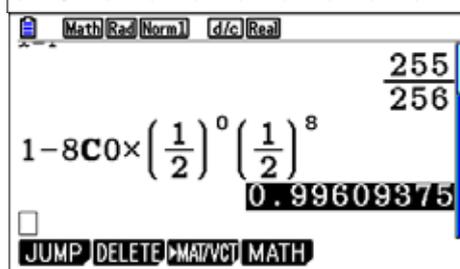
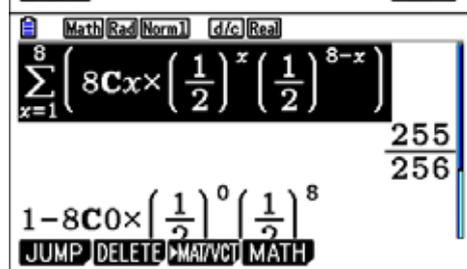
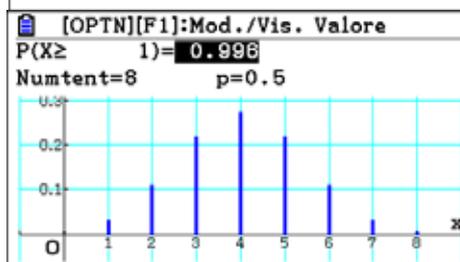
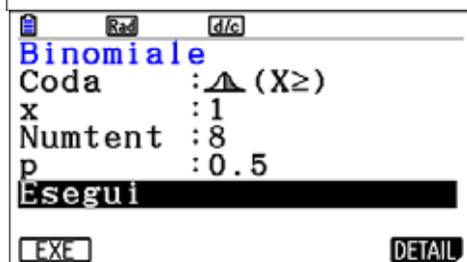
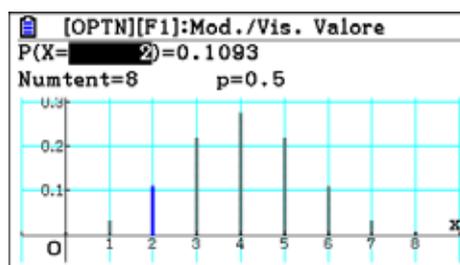
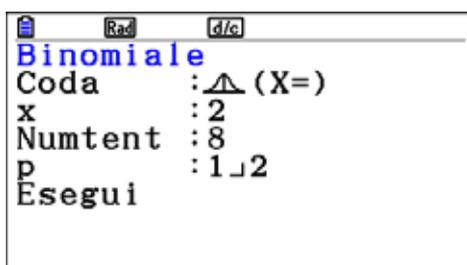
Esempio 2

In otto lanci di una moneta equa, si vuole determinare la probabilità che escano:

- esattamente 2 teste;
- almeno 1 testa;
- un numero di teste superiore a 3 e inferiore a 8;

Risulta:

- $P(S_8 = 2) = \binom{8}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^6$
- $1 - P(S_8 = 0) = 1 - \binom{8}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^8 = P(S_8 \geq 1) = \sum_{k=1}^8 \binom{8}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{8-k}$
- $P(4 \leq S_8 \leq 7) = \sum_{k=4}^7 \binom{8}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{8-k}$



Esempio 3

Sapendo che una squadra vinca una partita sia $p=3/4$, se gioca 6 partite, nell'ipotesi che siano tutte tra loro indipendenti, qual è la probabilità di vincerne k ?

Utilizzando la formula di Bernoulli con $0 \leq k \leq 6$, risulta:

$$P(S_6 = k) = \binom{6}{k} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{6-k}$$

The calculator screenshots show the following steps:

- Inputting the binomial probability formula: $\text{Seq}\left(6Ck \times \left(\frac{3}{4}\right)^k \times \left(\frac{1}{4}\right)^{6-k}, x\right)$
- Generating a list of probabilities: $\left\{\frac{1}{4096}, \frac{9}{2048}, \frac{135}{4096}, \frac{13}{102}\right\}$
- Setting up a table for k values (0, 1, 2, 3).
- Configuring the binomial distribution: **P.D binomiale**, Data: List, List: List1, Numtrial: 6, p: 0.75, Save Res: List2.
- Graphing the distribution in **StatGraph1** mode, showing a curve with a cursor at $X=5.1$ and $Y=0.3559670312$.

3. La distribuzione ipergeometrica

Il processo di estrazione

Un modello di campionamento un po' più generale di quello con rimessa è il Processo di Pòlya. In tale processo si inizia con una scatola contenente r biglie rosse e b bianche.

Si estrae una biglia a caso:

- Se è rossa, allora, si pongono la biglia estratta più altre c biglie rosse nella scatola.
- Se invece è bianca, si ripongono la biglia estratta più altre d biglie bianche, procedendo così nel seguito.

Estrazioni con rimessa si hanno per $c = d = 0$ e estrazioni senza rimessa per $c = d = -1$. Questo processo fu introdotto nel 1923 da Pòlya ed Eggenberger come modello di epidemie.

Le biglie rosse rappresentano individui infetti, ciascuna scoperta di una biglia rossa fa aumentare la probabilità che altre biglie siano rosse ($c > 0$).

Il modello può essere discutibile, ma può costituire un esempio di una forma generale di campionamento.

Siano X_1, X_2, \dots, X_n i risultati successivi di estrazioni di n biglie nel processo di Pòlya.

Il calcolo della distribuzione congiunta delle X_j , per la legge delle probabilità composte, per la successione 1,1,0,0,1, dove 1 sta per biglia rossa estratta e 0 per biglia bianca, risulta:

$$c_{1,1,0,0,1} = P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 1) = \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r+c}{r+b+c} \cdot \frac{b}{r+b+2c} \cdot \frac{b+d}{r+b+2c+d} \cdot \frac{r+2c}{r+b+2c+2d}$$

Se R è la v.a. che conta le biglie rosse in n estrazioni, allora nel caso particolare $c = d = -1$,

si ottiene la cosiddetta **distribuzione ipergeometrica**:

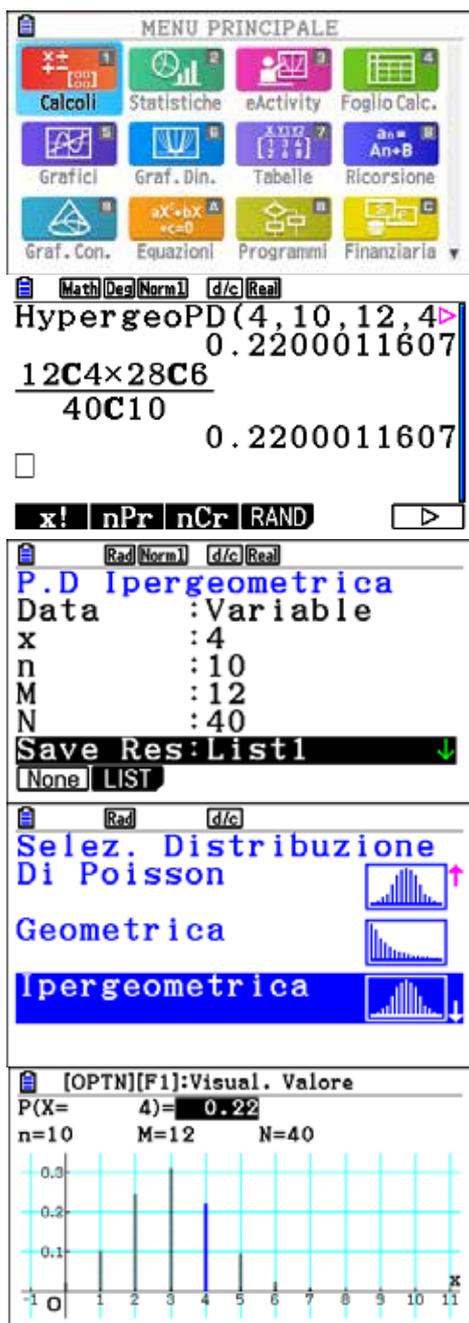
$$P(R = k) = \frac{\binom{r}{k} \binom{b}{n-k}}{\binom{r+b}{n}}$$

Mentre nel secondo caso, per $c = d = 0$, si ottiene la **distribuzione di Bernoulli**, ponendo $p = \frac{r}{r+b}$

Esempio 1

$$r + b = 40, r = 12, n = 10 \text{ e } k = 4$$

$$P(R = 4) = \frac{\binom{12}{4} \binom{28}{6}}{\binom{40}{10}}$$



Esempio 2

Si calcoli la $P(7 \leq X \leq 9)$, sapendo che $X \sim H(k, n, M, N) = H(k, 10, 12, 40)$.

In questo caso usiamo la funzione di ripartizione HCD Hypergeometric Cumulative Distribution

$$P(7 \leq X \leq 9) = F(9) - F(6)$$

Distribuzioni binomiale, ipergeometrica, geometrica e di Poisson

MENU PRINCIPALE

Calcoli Statistiche eActivity Foglio Calc.
 Grafici Graf. Din. Tabelle Ricorsione
 Graf. Con. Equazioni Programmi Finanziaria

Rad Norm1 d/c Real

C.D Ipergeometrica
 $p = 3.2889 \times 10^{-3}$

Rad d/c

Ipergeometrica
 Coda : Δ ($\leq X \leq$)
 Inf. : 7
 Sup. : 9
 n : 10
 M : 12
 N : 40

DETAIL

Rad Norm1 d/c Real

C.D Ipergeometrica
 Data : Variable
 Lower : 7
 Upper : 9
 n : 10
 M : 12
 N : 40

List Var

Rad d/c

Selez. Distribuzione Di Poisson
 Geometrica
Ipergeometrica

[OPTN][F1]:Visual. Valore
 $P(7 \leq X \leq 9) = 3.2E-3$
 n=10 M=12 N=40

Rappresentazione grafica della funzione distribuzione di probabilità

Rad Norm1 d/c Real

| | List 1 | List 2 | List 3 | List 4 |
|-------|--------|--------|--------|--------|
| SUB K | | | | |
| 1 | 0 | | | |
| 2 | 1 | | | |
| 3 | 2 | | | |
| 4 | 3 | | | |

TOOL EDIT DELETE DEL-ALL INSERT

Rad Norm1 d/c Real

| | List 1 | List 2 | List 3 | List 4 |
|-------|--------|--------|--------|--------|
| SUB K | | P(X=K) | | |
| 4 | 3 | 0.3073 | | |
| 5 | 4 | 0.22 | | |
| 6 | 5 | 0.0918 | | |
| 7 | 6 | 0.0223 | | |

0.2200011607

GRAPH CALC TEST INTR DIST

Rad Norm1 d/c Real

P.D Ipergeometrica
 Data : List
 List : List1
 n : 10
 M : 12
 N : 40

Save Res:List2
 None LIST

Rad Norm1 d/c Real

StatGraph1

X=3 Y=0.3073032085

4. La distribuzione geometrica

In una serie di prove di Bernoulli ripetute e indipendenti ci si chiede quante prove bisogna effettuare per avere il primo successo. Se si indica con W_1 la v.a. che conta il numero di prove per avere il primo successo tale che, fissato n , si possa considerare l'evento

$(W_1=n)$ "il primo successo si ha all' n -sima prova"

Si prova che $P(W_1 = n) = pq^{n-1}$ (1)

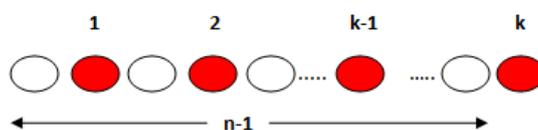
Questa distribuzione di probabilità è detta **geometrica** perché i termini della successione pq^{n-1} costituiscono una *progressione geometrica* di ragione q .

Per questo, si ottiene che

$$P(W_1 \leq n) = P(W_1 = 1) + \dots + P(W_1 = n) = p \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 - (1 - p)^n$$

Si può generalizzare la (1), considerando la v.a. W_k che conta il numero di prove necessario per avere il k -simo successo.

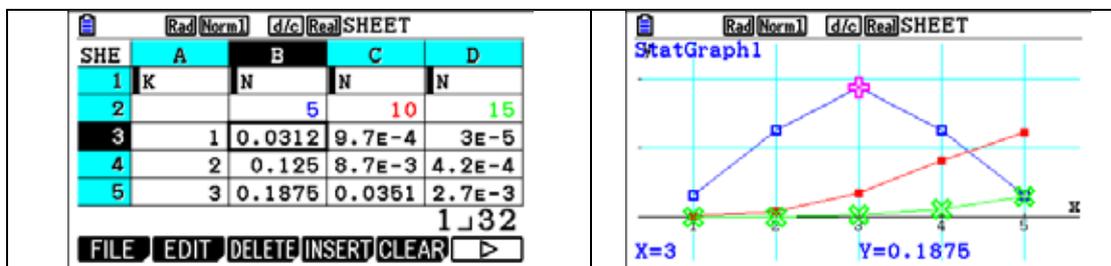
Fissando $(W_k=n)$ "il k -simo successo si ha all' n -sima prova"



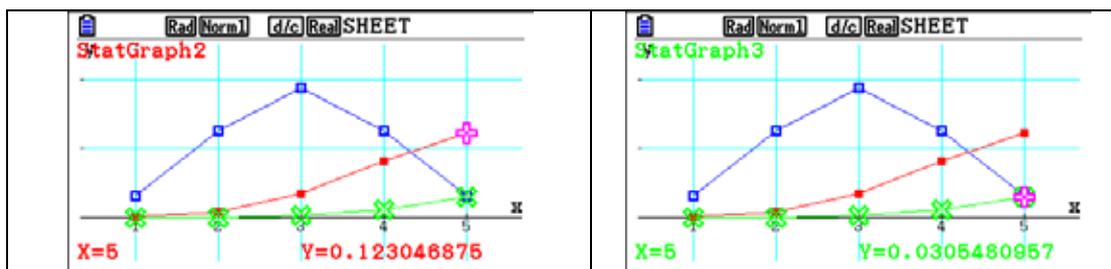
$$P(W_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$$

Tale distribuzione è chiamata **binomiale negativa o di Pascal**

Si riportano le distribuzioni di probabilità per $1 \leq k \leq 5$ e per $n = 5, 10, 15$ prove



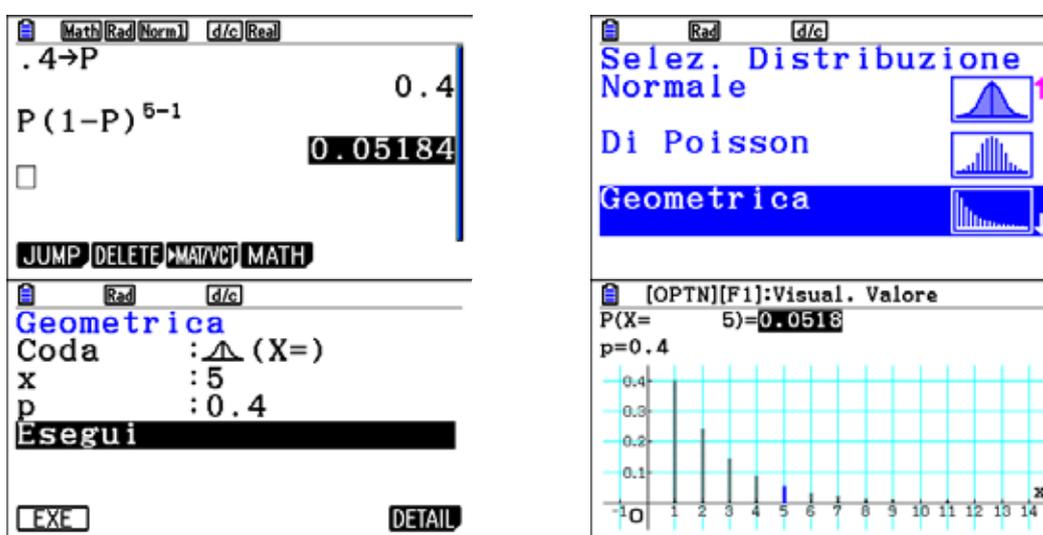
Distribuzioni binomiale, ipergeometrica, geometrica e di Poisson



Un ultimo esempio di **distribuzione geometrica** è quella che consiste nel calcolare la lunghezza della lacuna T_k tra la $(k - 1)$ -sima e la k -sima testa:

$$P(T_k = n) = p \cdot (1 - p)^{n-1}$$

Ad esempio per $p=0.4$ e $n=5$, risulta:



5. La distribuzione di Poisson

Si propone un'attività esemplificativa impostata come scheda didattica.

1. Descrizione dell'attività

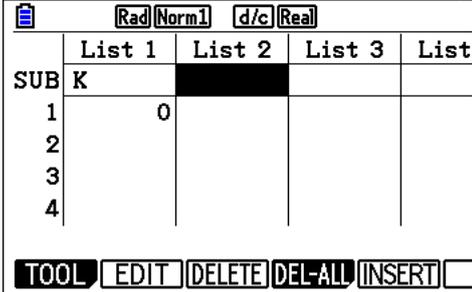
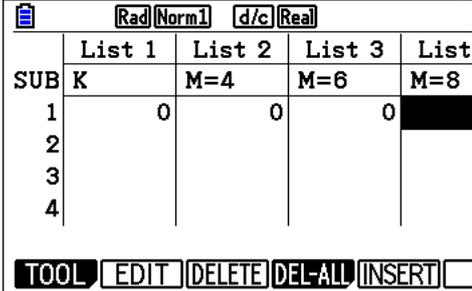
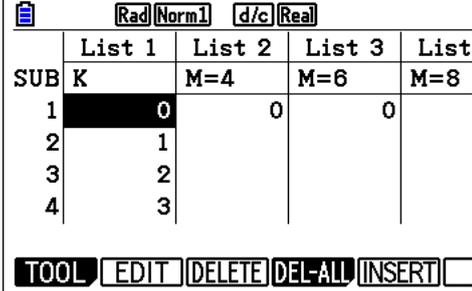
| | |
|--------------------------------------|--|
| Titolo dell'attività | Distribuzioni di alberi su un territorio |
| Area tematica | <ul style="list-style-type: none"> ○ Aritmetica e algebra ○ Geometria ○ Relazioni e funzioni X Dati e previsioni ○ Informatica |
| Collocazione | <ul style="list-style-type: none"> ○ Secondaria di primo grado ○ Secondaria di secondo grado - Primo biennio ○ Secondaria di secondo grado - Secondo biennio X Secondaria di secondo grado - Ultimo anno |
| Abstract | L'attività si propone di calcolare la probabilità di ripetizione di eventi, nel caso in cui il singolo evento abbia una bassissima probabilità di realizzarsi (evento raro) e le prove ripetute siano molte, ovvero mediante la distribuzione di Poisson. |
| Prerequisiti | Conoscenza del significato di v.a. discreta, di media, di varianza di una v.a. discreta, di funzione densità di probabilità (pdf), di funzione di distribuzione di probabilità (o di ripartizione- pcd) in particolare del processo di Poisson e della distribuzione binomiale. |
| Competenze | Saper applicare in fenomeni reali, modelli di calcolo probabilistico. Rendersi conto del comportamento di particolari fenomeni reali e saper scegliere il modello probabilistico più adatto allo studio del problema. Saper utilizzare il modello matematico scelto a situazioni analoghe per lo studio di ulteriori processi. |
| Tempo previsto per l'attività | 2 ore |

2. Risorse necessarie

| | |
|--|---|
| Strumentazione utilizzata nel corso dell'attività (hardware e software) | Calcolatrice ed emulatore CASIO FX-CG50 |
| Menù utilizzati |   |
| Materiali /attrezzature utilizzate | LIM, E-book, risorse reperibili in rete |

3. Sviluppo delle attività

| | |
|---|---|
| <p>Descrizione</p> | <p>Un metodo tipico dell'ecologia per studiare la distribuzione di specie animali e vegetali disperse in modo casuale in un territorio è quello della suddivisione della superficie del territorio in sottoinsiemi, in genere quadrati o rettangoli, tutti di uguale area.</p> <p>In questo modo, infatti, risulta più agevole esaminare la distribuzione degli organismi.</p> <p>Per studiare un caso particolare, supponiamo che in una zona pianeggiante di 10 km², omogenea come qualità del terreno, umidità, luminosità, ecc., siano distribuite, in modo casuale, 40000 querce.</p> <p>Con quale probabilità, analizzando una zona limitata, per esempio di 1000 m², possiamo trovare k querce ($k=0,1,2,3,..$)? Se consideriamo una quercia a caso tra le $N=40000$ presenti nell'intera regione, la probabilità che essa si trovi in una particolare zona tra le $n=10000$ ($n=10 \text{ km}^2/1000 \text{ m}^2$) nelle quali è suddivisa la regione esaminata, è $p=1/n=1/10000=10^{-4}$.</p> |
| <p>Svolgimento</p> | <p>Dunque la probabilità che in una data zona vi siano esattamente k querce è data dalla distribuzione binomiale:</p> $P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k}$ <p>Visto che la distribuzione è binomiale, il valore medio di alberi per zona è $m = pN = \frac{N}{n} = \frac{40000}{10000} = 4$.</p> <p>Calcolare il valore $P(X = k)$ non è agevole, visto che N e n sono valori molto grandi.</p> <p>E' invece possibile ottenere un'approssimazione di $P(X = k)$ che è particolarmente utile perché dipende solo dal numero medio m di alberi per zona, che è la quantità effettivamente misurata dagli sperimentatori (in questo caso $m=4$).</p> <p>Questa espressione si ottiene considerando il limite di $P(X = k)$ per $N \rightarrow +\infty$ e $p \rightarrow 0$ mantenendo il valore atteso $m = pN$ fissato.</p> <p>Si dimostra facilmente che si ottiene</p> $P(X = k) = \frac{m^k}{k!} e^{-m}$ <p>Per N molto grande, questo valore è una buona approssimazione di quello corretto.</p> <p>Si dimostra inoltre che se X è una v.a. di Poisson, risulta:</p> $E(X) = m$ $\sigma^2 = m$ <p>Con l'aiuto della calcolatrice si può quindi calcolare, in particolare, con quale probabilità in una zona di 1000 m² troviamo k querce, o almeno k querce, o al più k querce o un numero di querce compreso tra k_1 e k_2</p> |
| <p>Usa la calcolatrice grafica <i>fx-CG50</i></p> | |

| Dati e istruzioni da seguire | Che cosa si ottiene |
|--|--|
| <p>Passaggio #1</p> <p>Dal Menù Principale, entra in</p>  <p>Quindi premi I</p> <p>Inserisci nella Lista 1 i valori di k e nelle Liste 2, 3 e 4, rispettivamente, i valori della media $m=4$, $m=6$ e $m=8$ della variabile aleatoria X di Poisson.</p> <p>Per scrivere k, portati con il cursore nella prima colonna, sotto List 1 e digita</p> <p>a, </p> <p>Analogamente per scrivere nelle colonne $m=4$ sotto List 2, $m=6$ sotto List 3 e $m=8$ sotto List 4, digita in ciascuna:</p> <p>a7L.4 </p> <p>a7L.6 </p> <p>a7L.8 </p> |    |
| <p>Passaggio #2</p> <p>Riportati nella prima colonna, List 1, e digita i valori di k, ad esempio, da 0 a 15</p> <p>0 1</p> <p>fino a15 </p> <p>Digita successivamente (due volte) UU.</p> |  |

Distribuzioni binomiale, ipergeometrica, geometrica e di Poisson

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|--|---|--|--------|------|--|--|--|--------|--------|--------|------|-----|---|-----|-----|-----|----|----|--|--|--|----|----|--|--|--|----|----|--|--|--|----|----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--------|--------|--------|------|-----|---|-----|-----|-----|----|----|--|--|--|----|----|--|--|--|----|----|--|--|--|----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--------|--------|--------|------|-----|---|-----|-----|-----|----|----|--|--|--|----|----|--|--|--|----|----|--|--|--|----|----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--------|--------|--------|------|-----|---|-----|-----|-----|----|----|--|--|--|----|----|--|--|--|----|----|--|--|--|----|----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--------|--------|--------|------|-----|---|-----|-----|-----|----|----|--|--|--|----|----|--|--|--|----|----|--|--|--|----|----|--|--|--|
| <p>Passaggio #3</p> <p>Utilizza le successive colonne per riportare i valori della distribuzione di probabilità della v.a. di Poisson che andrai a calcolare per le rispettive medie.</p> <p>Quindi digita [DIST] y</p> <p>e successivamente U</p> <p>q [POISSON]</p> <p>e ancora Q [Ppd] Poisson probability distribution</p> | <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td colspan="5" style="text-align: center;"> Rad Norm1 d/c Real </td> </tr> <tr> <td style="width: 5%;"></td> <td style="width: 20%;">List 1</td> <td style="width: 20%;">List 2</td> <td style="width: 20%;">List 3</td> <td style="width: 35%;">List</td> </tr> <tr> <td>SUB</td> <td>K</td> <td>M=4</td> <td>M=6</td> <td>M=8</td> </tr> <tr> <td>13</td> <td>12</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>14</td> <td>13</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>15</td> <td>14</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>15</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;"> TOOL EDIT DELETE DEL-ALL INSERT □ </p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td colspan="5" style="text-align: center;"> Rad Norm1 d/c Real </td> </tr> <tr> <td style="width: 5%;"></td> <td style="width: 20%;">List 1</td> <td style="width: 20%;">List 2</td> <td style="width: 20%;">List 3</td> <td style="width: 35%;">List</td> </tr> <tr> <td>SUB</td> <td>K</td> <td>M=4</td> <td>M=6</td> <td>M=8</td> </tr> <tr> <td>14</td> <td>13</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>15</td> <td>14</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>15</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>17</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;"> GRAPH CALC TEST INTR DIST □ </p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td colspan="5" style="text-align: center;"> Rad Norm1 d/c Real </td> </tr> <tr> <td style="width: 5%;"></td> <td style="width: 20%;">List 1</td> <td style="width: 20%;">List 2</td> <td style="width: 20%;">List 3</td> <td style="width: 35%;">List</td> </tr> <tr> <td>SUB</td> <td>K</td> <td>M=4</td> <td>M=6</td> <td>M=8</td> </tr> <tr> <td>13</td> <td>12</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>14</td> <td>13</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>15</td> <td>14</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>15</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;"> GRAPH CALC TEST INTR DIST □ </p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td colspan="5" style="text-align: center;"> Rad Norm1 d/c Real </td> </tr> <tr> <td style="width: 5%;"></td> <td style="width: 20%;">List 1</td> <td style="width: 20%;">List 2</td> <td style="width: 20%;">List 3</td> <td style="width: 35%;">List</td> </tr> <tr> <td>SUB</td> <td>K</td> <td>M=4</td> <td>M=6</td> <td>M=8</td> </tr> <tr> <td>13</td> <td>12</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>14</td> <td>13</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>15</td> <td>14</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>15</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;"> NORM t CHI F BINOMIAL □ </p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td colspan="5" style="text-align: center;"> Rad Norm1 d/c Real </td> </tr> <tr> <td style="width: 5%;"></td> <td style="width: 20%;">List 1</td> <td style="width: 20%;">List 2</td> <td style="width: 20%;">List 3</td> <td style="width: 35%;">List</td> </tr> <tr> <td>SUB</td> <td>K</td> <td>M=4</td> <td>M=6</td> <td>M=8</td> </tr> <tr> <td>13</td> <td>12</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>14</td> <td>13</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>15</td> <td>14</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>15</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;"> POISSON GEO HYPRGEO □ </p> | Rad Norm1 d/c Real | | | | | | List 1 | List 2 | List 3 | List | SUB | K | M=4 | M=6 | M=8 | 13 | 12 | | | | 14 | 13 | | | | 15 | 14 | | | | 16 | 15 | | | | Rad Norm1 d/c Real | | | | | | List 1 | List 2 | List 3 | List | SUB | K | M=4 | M=6 | M=8 | 14 | 13 | | | | 15 | 14 | | | | 16 | 15 | | | | 17 | | | | | Rad Norm1 d/c Real | | | | | | List 1 | List 2 | List 3 | List | SUB | K | M=4 | M=6 | M=8 | 13 | 12 | | | | 14 | 13 | | | | 15 | 14 | | | | 16 | 15 | | | | Rad Norm1 d/c Real | | | | | | List 1 | List 2 | List 3 | List | SUB | K | M=4 | M=6 | M=8 | 13 | 12 | | | | 14 | 13 | | | | 15 | 14 | | | | 16 | 15 | | | | Rad Norm1 d/c Real | | | | | | List 1 | List 2 | List 3 | List | SUB | K | M=4 | M=6 | M=8 | 13 | 12 | | | | 14 | 13 | | | | 15 | 14 | | | | 16 | 15 | | | |
| Rad Norm1 d/c Real | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | List 1 | List 2 | List 3 | List | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| SUB | K | M=4 | M=6 | M=8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | 14 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Rad Norm1 d/c Real | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | List 1 | List 2 | List 3 | List | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| SUB | K | M=4 | M=6 | M=8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | 14 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Rad Norm1 d/c Real | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | List 1 | List 2 | List 3 | List | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| SUB | K | M=4 | M=6 | M=8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | 14 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Rad Norm1 d/c Real | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | List 1 | List 2 | List 3 | List | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| SUB | K | M=4 | M=6 | M=8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | 14 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Rad Norm1 d/c Real | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | List 1 | List 2 | List 3 | List | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| SUB | K | M=4 | M=6 | M=8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | 14 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

| | <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> Rad Norm1 d/c Real <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th>List 1</th> <th>List 2</th> <th>List 3</th> <th>List</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>SUB K</td> <td></td> <td>M=4</td> <td>M=6</td> <td>M=8</td> </tr> <tr> <td>13</td> <td>12</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>14</td> <td>13</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>15</td> <td>14</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>15</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;"> Ppd Pcd InvP </div> </div> | | List 1 | List 2 | List 3 | List | SUB K | | M=4 | M=6 | M=8 | 13 | 12 | | | | 14 | 13 | | | | 15 | 14 | | | | 16 | 15 | | | | | | | | | | | | | |
|--|--|--------|--------|--------|--------|------|--------|---|--------|-----|--------|----|--------|--------|--------|------|-------|----|-----|-----|-----|----|----|--------|--|---|----|----|--------|--|--|---|---|--------|--|--|---|---|--------|--|--|
| | List 1 | List 2 | List 3 | List | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| SUB K | | M=4 | M=6 | M=8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 12 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | 13 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | 14 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| <p>Passaggio #4</p> <p>Utilizza i valori della prima lista per k. Fissa $m=4$</p> <p>e imposta che i valori di probabilità siano calcolati e inseriti nella lista 2</p> <p>Infine, vai con il cursore su <i>Esegui</i> e premi I oppure [CALC] con Q</p> <p>Premi quindi due volte [EXIT].</p> | <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> Rad Norm1 d/c Real <p>P.D Poisson Data :List List :List1 λ :4 Save Res:None Esegui</p> <hr/> Rad Norm1 d/c Real <p>P.D Poisson Data :List List Sel. num. elenco λ :4 Save Res:None Esegui</p> <div style="border: 2px solid blue; padding: 2px; margin: 5px 0;"> List[1~26]: 2 </div> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;"> None LIST </div> <hr/> Rad Norm1 d/c Real <p>P.D Poisson</p> <table style="width: 100%;"> <tr><td>1</td><td>0.0183</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.0732</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.1465</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.1953</td></tr> <tr><td>5</td><td>0.1953</td></tr> </table> <p style="text-align: right; margin-top: 10px;">0.018315638</p> <hr/> Rad Norm1 d/c Real <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th></th> <th>List 1</th> <th>List 2</th> <th>List 3</th> <th>List</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>SUB K</td> <td></td> <td>M=4</td> <td>M=6</td> <td>M=8</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0.0183</td> <td></td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1</td> <td>0.0732</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>2</td> <td>0.1465</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>3</td> <td>0.1953</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <div style="text-align: right; margin-top: 5px;"> TOOL EDIT DELETE DEL-ALL INSERT </div> </div> | 1 | 0.0183 | 2 | 0.0732 | 3 | 0.1465 | 4 | 0.1953 | 5 | 0.1953 | | List 1 | List 2 | List 3 | List | SUB K | | M=4 | M=6 | M=8 | 1 | 0 | 0.0183 | | 0 | 2 | 1 | 0.0732 | | | 3 | 2 | 0.1465 | | | 4 | 3 | 0.1953 | | |
| 1 | 0.0183 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0.0732 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 0.1465 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 0.1953 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 0.1953 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | List 1 | List 2 | List 3 | List | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| SUB K | | M=4 | M=6 | M=8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 0.0183 | | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 0.0732 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 2 | 0.1465 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 3 | 0.1953 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Distribuzioni binomiale, ipergeometrica, geometrica e di Poisson

Passaggio #5

Ripeti i passaggi #3 e #4 utilizzando le liste 3 e 4, rispettivamente per $m=6$ e $m=8$

P.D Poisson
 Data :List
 List :List1
 λ :6
 Save Res:List3
Esegui

| | List 1 | List 2 | List 3 | List |
|-----|--------|--------|--------|------|
| SUB | K | M=4 | M=6 | M=8 |
| 1 | 0 | 0.0183 | 2.4E-3 | |
| 2 | 1 | 0.0732 | 0.0148 | |
| 3 | 2 | 0.1465 | 0.0446 | |
| 4 | 3 | 0.1953 | 0.0892 | |

P.D Poisson
 Data :List
 List :List1
 λ :8
 Save Res:List4
Esegui

| | List 1 | List 2 | List 3 | List |
|------------------|--------|--------|--------|------|
| SUB | K | M=4 | M=6 | M=8 |
| 1 | 0 | 0.0183 | 2.4E-3 | 3.3E |
| 2 | 1 | 0.0732 | 0.0148 | 2.6E |
| 3 | 2 | 0.1465 | 0.0446 | 0.01 |
| 4 | 3 | 0.1953 | 0.0892 | 0.02 |
| 3.354626279 × 10 | | | | |

Passaggio #6

Imposta i parametri di rappresentazione delle funzioni densità di probabilità della v.a. di Poisson nello stesso piano

Digita [GRAPH] q e successivamente [SET] u

Imposta le opzioni del grafico 1, tenendo conto dei valori calcolati e riportati in List 2 per $m=4$

E' preferibile selezionare Mark Type con simboli e Grph Color con colori diversi per i tre grafici.

Ripeti le stesse operazioni per GRAPH2 e GRAPH3

| | List 1 | List 2 | List 3 | List |
|-----|--------|--------|--------|------|
| SUB | K | M=4 | M=6 | M=8 |
| 1 | 0 | 0.0183 | 2.4E-3 | 3.3E |
| 2 | 1 | 0.0732 | 0.0148 | 2.6E |
| 3 | 2 | 0.1465 | 0.0446 | 0.01 |
| 4 | 3 | 0.1953 | 0.0892 | 0.02 |

| | |
|--|---|
| | <p>  Rad Norm1 d/c Real </p> <p>StatGraph1</p> <p>Graph Type : Scatte</p> <p>XList : List1</p> <p>YList : List2</p> <p>Frequency : List2</p> <p>Mark Type : <input type="checkbox"/></p> <p>Color Link : Off</p> <p>GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3</p> |
| | <p>  Rad Norm1 d/c Real </p> <p>Graph Type : Scatte</p> <p>XList : List1</p> <p>YList : List2</p> <p>Frequency : List2</p> <p>Mark Type : <input type="checkbox"/></p> <p>Color Link : Off</p> <p>Grph Color : Blue</p> <p>COLOR</p> |
| | <p>  Rad Norm1 d/c Real </p> <p>StatGraph2</p> <p>Graph Type : Scatte</p> <p>XList : List1</p> <p>YList : List3</p> <p>Frequency : 1</p> <p>Mark Type : <input checked="" type="checkbox"/></p> <p>Color Link : Off</p> <p>GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3</p> |
| | <p>  Rad Norm1 d/c Real </p> <p>Graph Type : Scatte</p> <p>XList : List1</p> <p>YList : List3</p> <p>Frequency : 1</p> <p>Mark Type : <input checked="" type="checkbox"/></p> <p>Color Link : Off</p> <p>Grph Color : Red</p> <p>COLOR</p> |
| | <p>  Rad Norm1 d/c Real </p> <p>StatGraph3</p> <p>Graph Type : Scatte</p> <p>XList : List1</p> <p>YList : List4</p> <p>Frequency : 1</p> <p>Mark Type : <input checked="" type="checkbox"/></p> <p>Color Link : Off</p> <p>GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3</p> |

Distribuzioni binomiale, ipergeometrica, geometrica e di Poisson

Passaggio #7

Rappresenta le funzioni densità di probabilità della v.a. di Poisson nello stesso piano

Digita **d** e successivamente [SELECT] **r**

Imposta su **On** i tre grafici e premi [DRAW] **u**

Puoi così analizzare l'andamento delle funzioni per le tre diverse medie.

Digita **Lq** [SHIFT] [Trace] e spostati con il cursore per leggere i valori delle probabilità

Ad esempio, per $k=2$ e $m=4$,

$$P(X = 2) = \frac{4^2}{2!} e^{-4} = 0.1465$$

per $k=6$ e $m=6$,

$$P(X = 6) = \frac{6^6}{6!} e^{-6} = 0.1606$$

per $k=10$ e $m=8$,

$$P(X = 10) = \frac{8^{10}}{10!} e^{-8} = 0.0993$$

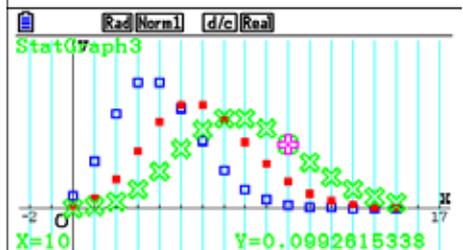
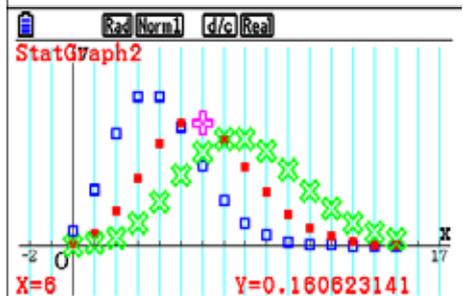
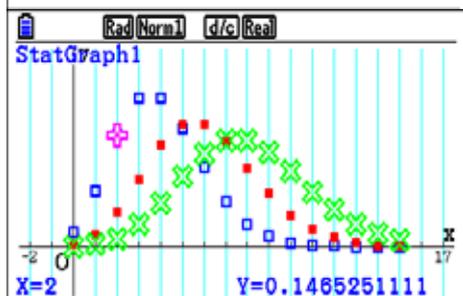
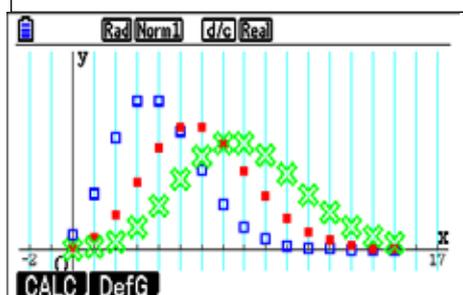
Questi valori e altri sono riportati anche nelle liste

| | Rad | Norm1 | d/c | Real |
|-----|--------|--------|--------|------|
| | List 1 | List 2 | List 3 | List |
| SUB | K | M=4 | M=6 | M=8 |
| 1 | 0 | 0.0183 | 2.4E-3 | 3.3E |
| 2 | 1 | 0.0732 | 0.0148 | 2.6E |
| 3 | 2 | 0.1465 | 0.0446 | 0.01 |
| 4 | 3 | 0.1953 | 0.0892 | 0.02 |

GRAPH1 GRAPH2 GRAPH3 SELECT

StatGraph1 : DrawOn
 StatGraph2 : DrawOn
 StatGraph3 : DrawOn

On Off



Passaggio #8

Scelto, ad esempio, $m=4$, calcola, ora, la probabilità $P(4 \leq X \leq 7) = \sum_{k=4}^7 \frac{4^k}{k!} e^{-4}$.
Puoi farlo sia in Statistiche, che in Calcoli.

Seleziona [Pcd] *Poisson cumulative distribution*,
cioè la funzione di ripartizione con λ

Seleziona Variable in Data.
Fissa gli estremi inferiore 4 ,superiore 7 e salva
nella Lista 5.

Vai su Esegui

| Rad Norm1 d/c Real | | | | |
|--------------------|--------|--------|--------|------|
| | List 1 | List 2 | List 3 | List |
| SUB | K | M=4 | M=6 | M=8 |
| 1 | 0 | 0.0183 | 2.4E-3 | 3.3E |
| 2 | 1 | 0.0732 | 0.0148 | 2.6E |
| 3 | 2 | 0.1465 | 0.0446 | 0.01 |
| 4 | 3 | 0.1953 | 0.0892 | 0.02 |

GRAPH CALC TEST INTR DIST

| Rad Norm1 d/c Real | | | | |
|--------------------|--------|--------|--------|------|
| | List 1 | List 2 | List 3 | List |
| SUB | K | M=4 | M=6 | M=8 |
| 1 | 0 | 0.0183 | 2.4E-3 | 3.3E |
| 2 | 1 | 0.0732 | 0.0148 | 2.6E |
| 3 | 2 | 0.1465 | 0.0446 | 0.01 |
| 4 | 3 | 0.1953 | 0.0892 | 0.02 |

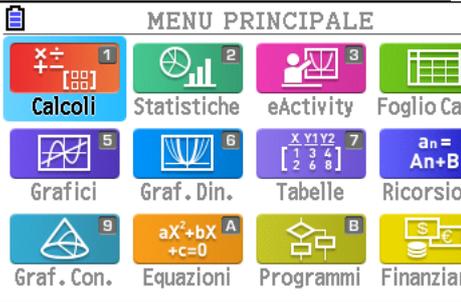
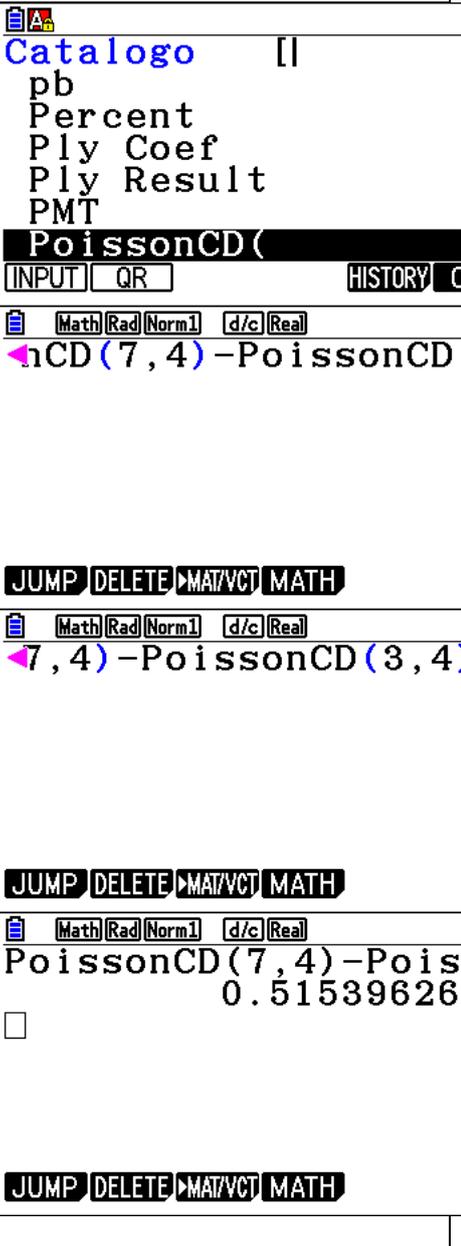
Ppd Pcd InvP

Rad Norm1 d/c Real
C.D Poisson
 Data :Variable
 Lower :4
 Upper :7
 λ :4
Save Res:List5
Esegui
 None LIST

Rad Norm1 d/c Real
C.D Poisson
 Data :Variable
 Lower :4
 Upper :7
 λ :4
 Save Res:List5
Esegui
 CALC

Rad Norm1 d/c Real
C.D Poisson
 p=0.51539626

Distribuzioni binomiale, ipergeometrica, geometrica e di Poisson

| | |
|--|---|
| <p>Passaggio #9</p> <p>Dal MENU' PRINCIPALE, entra in</p>  |  |
| <p>Passaggio #10</p> <p>Entra nel Catalogo con L4 Seleziona la funzione di ripartizione di Poisson e premi I</p> <p>Digita 7,4k-L4I 3,4k</p> <p>e premi I</p> |  <p>Catalogo [I]</p> <p>pb Percent Ply Coef Ply Result PMT</p> <p>PoissonCD(</p> <p>INPUT QR HISTORY C</p> <p>Math Rad Norm1 d/c Real</p> <p>◀nCD (7, 4) - PoissonCD</p> <p>JUMP DELETE MAT/VCT MATH</p> <p>Math Rad Norm1 d/c Real</p> <p>◀7, 4) - PoissonCD (3, 4)</p> <p>JUMP DELETE MAT/VCT MATH</p> <p>Math Rad Norm1 d/c Real</p> <p>PoissonCD (7, 4) - Pois 0.51539626</p> <p>JUMP DELETE MAT/VCT MATH</p> |

| | |
|--|---|
| <p>Passaggio #11</p> <p>Scelto, ad esempio, $m=4$, calcola, ora, la probabilità $P(X > 10) = 1 - \sum_{k=0}^{10} \frac{4^k}{k!} e^{-4}$</p> <p>Risulta $P(X > 10) = 0.0028398$</p> <p>O alternativamente, senza utilizzare la funzione Pcd</p> | <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> Math Rad Norm2 d/c Real $1 - \text{PoissonCD}(10, 4)$ </div> <p>JUMP DELETE MAT/VCT MATH</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> Math Rad Norm2 d/c Real $1 - \text{PoissonCD}(10, 4)$ 0.002839766 </div> <p>DEL-LINE DEL-ALL</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> Math Rad Norm2 d/c Real $1 - \sum_{x=0}^{10} \left(\frac{4^x}{x!} e^{-4} \right)$ 0.002839766 </div> <p>x! nPr nCr RAND</p> |
|--|---|

Bibliografia

1. K. Baclawsky, M. Cerasoli, G.C. Rota, **Introduzione alla probabilità**, UMI.
2. D. Benedetto, M. Degli Esposti, C. Maffei, **Matematica per le scienze della vita**, Casa Editrice Ambrosiana
3. A.M. Cerasoli, M. Cerasoli, **Elementi di Calcolo delle Probabilità'-Introduzione alla matematica dell'incerto**, Zanichelli.

La meccanica statistica e la teoria dei quanti

Mario Innocenzo Mandrone

V. Presidente Accademia Piceno-Aprutina dei Velati (APAV)

V. Presidente Federazione Mathesis- Sez. Sannio-Irpinia

“La fisica quantistica mi manda in estasi. ...E’ come guardare l’universo senza veli.”
(W. Pauli)

Abstract

Il presente lavoro si propone:

1. di presentare i metodi e gli scopi della meccanica statistica;
2. di dare un’idea del grande interesse concettuale che presenta la riduzione del comportamento di sistemi macroscopici alle leggi del mondo atomico.
3. di fornire le basi concettuali della meccanica statistica classica e quantistica, nonché i fondamenti statistici della termodinamica classica.

A tale scopo si analizzerà, preliminarmente, la meccanica statistica classica sviluppata da Stefan Boltzmann (1844-1906), James C. Maxwell (1831-1879) e Josia W. Gibbs (1839-1903), tra la fine del 1800 e gli inizi del 1900, evidenziando le sue più importanti conseguenze quali la legge di ripartizione delle velocità molecolari e il principio dell’equipartizione dell’energia. In tutti i casi in cui il carattere quantistico del sistema cessa di essere trascurabile o diventa addirittura dominante, la meccanica statistica classica non è più applicabile. Saranno, pertanto, analizzate anche le statistiche a cui obbediscono i sistemi di particelle quantistiche: 1) La statistica di Bose-Einstein per particelle indistinguibili e con spin intero (bosoni); 2) La statistica di Fermi-Dirac per particelle indistinguibili e con spin semi-intero (fermioni). Entrambe convergono alla statistica di Boltzmann quando la descrizione quantistica può essere trascurata e le particelle possono essere descritte classicamente. Nel presentare tali argomenti si cercherà di mettere in rilievo gli agganci storici e generalmente culturali dei singoli argomenti nella convinzione che questo sforzo sia utile per inquadrare la fisica in contesti culturali più ampi. Senza dubbio ciò non costituisce una trattazione esaustiva della statistica quantistica, ma ha solo lo scopo di evidenziarne gli aspetti rilevanti ai fini di una trattazione didattica.

Parole Chiave: Statistica classica, statistiche quantistiche, distribuzione di Maxwell-Boltzmann, di Bose-Einstein, di Fermi-Dirac, fermioni e bosoni, densità di energia elettromagnetica, corpo nero, livello di Fermi.

1. Introduzione alla meccanica statistica

La meccanica statistica si è sviluppata nel corso del XIX secolo principalmente per merito del fisico inglese James Clerk Maxwell, del fisico austriaco Ludwig Boltzmann e del fisico matematico J. Willard Gibbs. Negli anni Venti la meccanica statistica venne riformulata al fine di includere i nuovi principi della teoria quantistica. La natura delle particelle, infatti, così come viene intesa dalla teoria quantistica, è diversa da quella tipica della teoria classica, basata sui principi della meccanica di Newton. Le statistiche quantistiche sono applicate alla analisi di quei fenomeni macroscopici influenzati dal comportamento quantistico degli atomi. Tra questi fenomeni ricordiamo: il comportamento anomalo dei gas rarefatti a basse temperature (da cui il nome “gas degenere”), la superfluidità, la superconduttività (esempio tipico di ciò è il comportamento dell’elio al di sotto di due gradi kelvin), il paradosso di Gibbs ossia la non additività dell’entropia.

E’ stato il fisico indiano S. N. Bose ad applicare per primo la nuova statistica in un suo lavoro del 1924 sulla radiazione del corpo nero: S. N. Bose, “Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese”, in *Zeitschrift fur Physik*, 26 (1924), pp.178-181. Nella derivazione della legge di Planck, Bose introdusse delle innovazioni delle quali lui stesso non si rese conto:

1. i quanti di luce sono considerati indistinguibili. Il conteggio dei possibili microstati è pertanto diverso da quello di Boltzmann.
2. Il numero dei quanti non si conserva.

Il 10 luglio 1924, durante una seduta dell’Accademia delle Scienze di Berlino, Einstein espose la generalizzazione della nuova statistica della materia (A. Einstein, “Quantentheorie des einatomigen idealen Gases”, in *Berl. Ber.* (1924), pp. 261-267). E, senza fare ipotesi particolari, applicò la nuova statistica riuscendo a ricavare:

1. la legge dei gas perfetti;
2. la nota formula di Sackur-Tetrode per l’entropia;
3. l’espressione additiva dell’entropia;
4. l’accordo con il teorema di Nernst, ossia che l’entropia di un qualunque sistema si annulla allo zero assoluto

Nel 1926, in due maniere indipendenti Fermi e Dirac giungono alla formulazione dell’altra statistica quantica. Fermi, infatti, introduce il nuovo conteggio in un lavoro nel quale riprende la dimostrazione della formula di Sackur e Tetrode (problema già affrontato da Fermi in due lavori precedenti del 1923 - 1924) quantizzando il gas perfetto monoatomico e usando il principio di esclusione di Pauli del quale è intanto venuto a conoscenza (E. Fermi, “On Quantizing an Ideal Monoatomic Gas”, in *Zeitschrift fur Physik*, 36, 902 (1926)). Dirac, qualche mese dopo, pubblica, sui *Proceedings of the Royal Society of London*, un lavoro dal titolo “On the theory of Quantum Mechanics”. In questo lavoro egli utilizza i nuovi formalismi della meccanica quantistica. Ci volle ancora qualche anno prima che le due statistiche,

inizialmente viste come contrapposte, potessero, grazie soprattutto agli interventi di Dirac e di Heisenberg, convivere in maniera pacifica. In particolare fu una fulgida intuizione del fisico tedesco che lasciò intravedere gli stretti rapporti che intercorrono tra lo spin e la statistica. La statistica di Maxwell-Boltzmann, valida per particelle distinguibili (per esempio un gas di molecole in una scatola a temperatura ambiente), che può essere descritto in maniera classica, si basa su due ipotesi che caratterizzano il comportamento delle particelle del sistema:

1. le particelle sono distinguibili;
2. la probabilità di occupazione di un certo stato è indipendente dal numero di particelle che si trovano in quello stato.

Ogni particella si comporta in maniera statisticamente indipendente dalla presenza delle altre. In altre parole la probabilità per una particella di trovarsi in un certo stato non dipende dal numero di particelle che si trovano già in quello stato. L'unico vincolo è quello di appartenere ad un sistema di particelle in equilibrio termico. È bene chiarire che la descrizione classica di una particella è un'approssimazione, che può essere utilizzata solo quando il comportamento quantistico delle particelle è trascurabile; la statistica classica dà quindi risposte ragionevoli quando la lunghezza d'onda della particella è piccola rispetto alla distanza media fra particelle vicine. Nei casi in cui le particelle identiche siano indistinguibili i risultati che si ottengono applicando la statistica classica portano a conclusioni errate ed è, pertanto, necessario ricorrere all'applicazione delle cosiddette statistiche quantistiche. In questi casi dobbiamo descrivere, come prevede la meccanica quantistica, le particelle attraverso le loro funzioni d'onda. Le statistiche a cui obbediscono questi sistemi di particelle sono:

a) La statistica di Bose-Einstein, valida per particelle con spin intero chiamate "bosoni", le cui ipotesi sono:

1. Le particelle sono indistinguibili;
2. La probabilità per una particella di occupare un certo stato aumenta all'aumentare del numero di particelle che occupano lo stato.

b) La statistica di Fermi-Dirac, secondo la quale:

1. Le particelle sono indistinguibili;
2. La probabilità per una particella di occupare uno stato è nulla se lo stato è già occupato da un'altra particella.

Le particelle, aventi spin semi-intero, che obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac sono chiamate fermioni. Entrambe le statistiche convergono alla statistica di Boltzmann quando la descrizione quantistica può essere trascurata e le particelle possono essere descritte classicamente. Vedremo che la distribuzione di Fermi-Dirac è la diretta conseguenza del principio di esclusione di Pauli; la otterremo, infatti, imponendo ad un sistema di fermioni indistinguibili la condizione che la funzione d'onda del sistema sia antisimmetrica (principio di esclusione di Pauli), mentre otterremo la distribuzione di Bose-Einstein imponendo ad un sistema di bosoni la condizione che la funzione d'onda

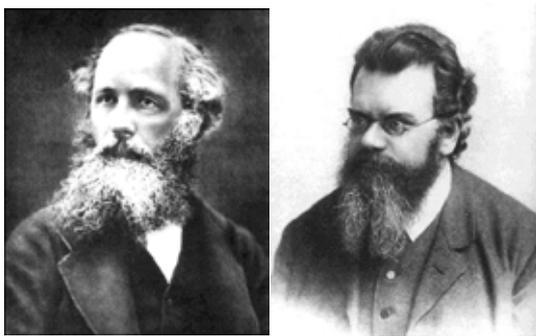
del sistema risulti simmetrica. In generale per un sistema di particelle uguali la funzione d'onda totale può essere simmetrica o antisimmetrica:

1. i sistemi di bosoni vengono descritti da funzioni simmetriche e seguono la statistica di Bose-Einstein;
2. i sistemi di fermioni vengono descritti da funzioni antisimmetriche e seguono la statistica di Fermi-Dirac. Due fermioni identici, non possono occupare lo stesso stato quantico. (Principio di esclusione di Pauli).

Nel modello standard delle particelle elementari, fermioni e bosoni sono le due categorie di particelle fondamentali: i quanti di materia e i quanti di forza. I fermioni (quanti di materia) corrispondono alle particelle che costituiscono la materia (nuclei, atomi, molecole) cioè i quark (di cui sono formati i protoni e i neutroni, costituenti del nucleo atomico), l'elettrone e il neutrino, più altre particelle (con le stesse interazioni) ma molto più pesanti e quindi instabili. I bosoni (quanti di forza), invece, sono particelle che, nella concezione duale onda-corpuscolo della MQ, sono i mediatori delle forze fondamentali che si esercitano tra le particelle elementari e che quindi ne determinano le interazioni. La statistica di Bose-Einstein, con l'introduzione dell'indistinguibilità delle particelle e la quantizzazione della loro energia, riesce, tra l'altro, a spiegare compiutamente due importanti fenomeni: la radiazione del corpo nero e l'annullarsi del calore specifico allo zero assoluto. La statistica di Fermi-Dirac, invece, rende conto di moltissimi altri fatti sperimentali introducendo il principio di esclusione di Pauli (1925) nella trattazione statistica di un gas di elettroni.

2. La meccanica statistica: La distribuzione di Maxwell-Boltzmann

2.1 L'ipotesi dell'equi-probabilità



James Clerk Maxwell - Ludwig Boltzmann

La meccanica statistica è un ramo della fisica che studia il comportamento e le proprietà medie di sistemi costituiti da un numero molto grande di particelle: lo strumento di queste analisi sono i metodi e le tecniche della statistica applicati alla descrizione del moto delle particelle. La statistica di Maxwell-Boltzmann è stata ricavata nell'ambito

dello studio della teoria cinetica dei gas, nella quale si assume che le molecole interagiscono tra di loro molto debolmente e solo durante le collisioni: si possono, cioè, trascurare tutti gli altri tipi di forze possibili. Anche a distanza di molti anni dalla sua iniziale formulazione, la teoria cinetica dei gas («cinetica» dal greco *Kineticòs* che significa movimento) rappresenta una delle teorie fisiche di maggior importanza e di maggior successo. Uno dei suoi grandi meriti è stato quello di aver precorso, in un periodo in cui l'atomicità della materia era ancora considerata con una certa diffidenza, l'esistenza delle molecole e dei loro movimenti. I principali protagonisti che con le loro ricerche hanno ampliato l'orizzonte della meccanica newtoniana fino alle dimensioni atomiche sono stati Bernoulli, Brown, Joule, Einstein, Maxwell, Boltzmann, Gibbs, Perrin, Stern e molti altri. Per ottenere la legge di distribuzione di Maxwell-Boltzmann, consideriamo un sistema classico, ovvero un sistema composto da particelle identiche ma distinguibili. Uno stato macroscopico di tale sistema è caratterizzato dal numero totale di particelle e dall'energia totale: nel caso di particelle classiche, che sono distinguibili, ad ogni stato macroscopico corrispondono diversi stati microscopici o microstati ognuno dei quali è caratterizzato da una assegnata probabilità. Per fare questo si deve introdurre l'ipotesi che tutti i microstati corrispondenti alla stessa energia totale sono equiprobabili. La distribuzione che si ottiene all'equilibrio, pertanto, è quella che ha la massima probabilità di realizzarsi. Ogni microstato è specificato dal numero di componenti (particelle) per ciascun livello energetico. Per ottenere la probabilità di un microstato, nell'ipotesi di equi-probabilità, è sufficiente contare il numero di modi in cui si può realizzare il microstato stesso. Per passare dal numero di modi alla probabilità basta aggiungere una costante moltiplicativa che normalizza all'unità la somma di tutte le probabilità.

Si supponga quindi che il numero totale delle componenti sia N e che ci sia un certo numero n di livelli occupati con certi numeri di occupazione N_1, N_2, \dots, N_S . Applichiamo, ora, il principio di massima verosimiglianza ad un sistema composto da un grande numero N di particelle identiche e distinguibili. Consideriamo, poi, una particolare partizione delle N particelle negli stati ϵ_i con $i=1, \dots, S$. In un sistema fisico reale le particelle tenderanno a disporsi secondo la configurazione che prevede il numero massimo possibile di modi W . Ricordiamo che non tutte le configurazioni delle partizioni sono ammesse, ma solo quelle che rispettano i vincoli di esclusione introdotti. Inoltre ipotizziamo che, all'equilibrio termodinamico, il sistema è nella sua configurazione più probabile. Si tratta quindi di un problema di massimizzazione vincolata per la cui risoluzione si può applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange che riduce l'analisi ad una massimizzazione semplice di una funzione in N_i . Tale metodo consiste nel massimizzare la funzione:

$$L(n_1, n_2, \dots, n_S, \alpha, \beta) = \ln W - \alpha \left(\sum_{i=1}^S n_i - N \right) - \beta \left(\sum_{i=1}^S n_i \epsilon_i - E \right)$$

soggetta ai seguenti vincoli in quanto, per ipotesi, il sistema è chiuso ed isolato:

$$\sum_{i=1}^s n_i = N \quad ; \quad \sum_{i=1}^s n_i \epsilon_i = E$$

La condizione necessaria per avere un estremo è che le derivate parziali si annullino:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial n_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \end{cases}$$

Iniziamo con l'inserimento di n_1 particelle nel livello ϵ_1 . Vi sono N modi per inserire la prima particella nel livello ϵ_1 , $N-1$ modi per la seconda, per la terza i modi sono $N-2$, per l'ultima i modi sono $N - n_1 + 1$. Perciò i modi con cui possono essere scelte le particelle dello stato ad energia ϵ_1 sono:

$$W'_1 = N * (N - 1) * (N - 2) * \dots * [N - (n_1 - 1)] = \frac{N!}{(N - n_1)!}$$

Tuttavia, poiché a noi serve sapere solo quali n_1 particelle scegliamo e non in che sequenza appaiono, dobbiamo dividere W'_1 per il numero di sequenze diverse in cui n_1 oggetti possono essere disposti, cioè $n_1!$. Si avrà così:

$$W_1 = \frac{N!}{n_1! (N - n_1)!} = \binom{N}{n_1}$$

Analogamente, per il livello ϵ_2 avremo:

$$W_2 = \frac{(N - n_1)!}{n_2! (N - n_1 - n_2)!} = \binom{N - n_1}{n_2}$$

perché solo $N - n_1$ particelle possono essere scelte. Allo stesso modo per il terzo livello si avrà:

$$W_3 = \frac{(N - n_1 - n_2)!}{n_3! (N - n_1 - n_2 - n_3)!} = \binom{N - n_1 - n_2}{n_3}$$

In generale, quindi, il numero di modi di distribuire le N particelle negli s stati, è perciò:

$$\begin{aligned} W &= W_1 * W_2 * W_3 * \dots * W_s \\ W &= \frac{N!}{n_1! (N - n_1)!} * \frac{(N - n_1)!}{n_2! (N - n_1 - n_2)!} \\ &\quad * \dots * \frac{(N - n_1 - n_2 - \dots - n_{s-1})!}{n_s! (N - n_1 - n_2 - \dots - n_s)!} \end{aligned}$$

Da cui:

$$W = \frac{N!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_s!}$$

Osserviamo, però, che in questo calcolo abbiamo considerato che ogni configurazione presenta la stessa probabilità di verificarsi. Poiché questa condizione non sempre è verificata, per tenere conto della possibilità che gli stati posseggano probabilità intrinseche diverse, si introduce un fattore g_i detto “degenerazione dello stato i-esimo” che descrive la probabilità di trovare una particella nello stato i-esimo. Pertanto, la probabilità di trovarne due nel medesimo stato sarà g_i^2 e la probabilità di trovarne n_i è $g_i^{n_i}$. Si ottiene così che il numero di modi di distribuire le N particelle negli s stati è dato da:

$$W_{MB} = N! * \prod_{i=1}^s \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

e la relativa probabilità è:

$$P_{MB} = \frac{W_{MB}}{N!}$$

Si ottiene così:

$$P_{MB} = \frac{W_{MB}}{N!} = \prod_{i=1}^s \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

All’equilibrio le particelle sono disposte nella configurazione di massima probabilità soggetta ai seguenti vincoli:

- a) La conservazione del numero totale N di molecole: $N = \sum_i N_i$
- b) La conservazione dell’energia totale $U = \sum_{r=1}^N E_r$

Nelle ipotesi dette, quindi, a piccole variazioni dn_i del numero delle particelle nello stato i-esimo deve corrispondere un differenziale nullo della grandezza P, ovvero $dP = 0$. Matematicamente, si preferisce imporre: $d(\ln P) = 0$. A tale scopo determino il logaritmo di P_{MB} :

$$\ln(P_{MB}) = n_1 \ln g_1 + n_2 \ln g_2 + n_3 \ln g_3 + \dots - \ln(n_1!) - \ln(n_2!) - \ln(n_3!) - \dots$$

Usando la formula di Stirling: $\ln(x!) \cong x \ln x - x = x * (\ln x - 1)$, assumendo che n_1, n_2, n_3, \dots siano grandi numeri, ed applicando i noti teoremi sui logaritmi, si ottiene:

$$\ln(P_{MB}) = -n_1 \ln\left(\frac{n_1}{g_1}\right) - n_2 \ln\left(\frac{n_2}{g_2}\right) - n_3 \ln\left(\frac{n_3}{g_3}\right) - \dots - (n_1 + n_2 + n_3 + \dots)$$

Ovvero, in forma sintetica:

$$\ln(P_{MB}) = N - \sum_{i=1}^S n_i * \ln\left(\frac{n_i}{g_i}\right)$$

Imponendo, ora, la condizione: $d \ln P = 0$, tenendo conto che il sistema è chiuso ed isolato, ovvero

$$\sum_{i=1}^S dn_i = dN = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^S \epsilon_i dn_i = dU = 0$$

e introducendo due parametri, per ora indeterminati, α e β , previsti dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange, vale la relazione complessiva:

$$\sum \left[\alpha + \beta \epsilon_i + \ln\left(\frac{n_i}{g_i}\right) \right] dn_i = 0$$

Quindi, per ogni i la condizione di equilibrio diviene:

$$\alpha + \beta \epsilon_i + \ln\left(\frac{n_i}{g_i}\right) = 0 \quad \rightarrow \rightarrow \quad \ln\left(\frac{n_i}{g_i}\right) = -\alpha - \beta \epsilon_i \quad \rightarrow \rightarrow \quad \frac{n_i}{g_i} = e^{-\alpha - \beta \epsilon_i}$$

ed infine:

$$n_i = g_i * e^{-\alpha - \beta \epsilon_i}$$

2.2 Parametri fisici associati ai moltiplicatori di Lagrange

I due termini α e β sono legati al sistema fisico considerato. In particolare, si può esprimere α in funzione del numero totale di particelle N . Poiché:

$$N = \sum_{i=1}^S n_i = \sum_{i=1}^S g_i e^{-\alpha - \beta \epsilon_i} = \sum_{i=1}^S g_i e^{-\alpha} * e^{-\beta \epsilon_i} = e^{-\alpha} * \sum_{i=1}^S g_i * e^{-\beta \epsilon_i}$$

Introdotta il termine Z detto “funzione di ripartizione” del sistema:

$$Z = \sum_{i=1}^S g_i e^{-\beta \epsilon_i}$$

$$N = e^{-\alpha} * \sum_{i=1}^S g_i * e^{-\beta \epsilon_i} = e^{-\alpha} * Z \quad \rightarrow \rightarrow \quad e^{-\alpha} = \frac{N}{Z} = \frac{N}{\sum_{i=1}^S g_i e^{-\beta \epsilon_i}}$$

Quindi:

$$n_i = g_i e^{-\alpha} e^{-\beta \epsilon_i} = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta \epsilon_i}$$

L'espressione della legge di distribuzione di Maxwell-Boltzmann all'equilibrio è pertanto:

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta \epsilon_i}$$

Consideriamo, ora, la relazione tra il parametro β e l'energia totale del sistema:

$$U = \sum n_i \epsilon_i = \sum \left(\frac{N}{Z} g_i e^{-\beta \epsilon_i} \right) * \epsilon_i = \frac{N}{Z} * \sum_{i=1}^S g_i \epsilon_i e^{-\beta \epsilon_i}$$

Con

$$Z = \sum_{i=1}^S g_i e^{-\beta \epsilon_i}$$

Calcolando la derivata di Z rispetto a β , data da:

$$\frac{dZ}{d\beta} = \frac{d}{d\beta} \left(\sum_{i=1}^S g_i e^{-\beta \epsilon_i} \right) = - \sum_{i=1}^S g_i \epsilon_i e^{-\beta \epsilon_i}$$

si ottiene:

$$U = \sum n_i \epsilon_i = \sum \left(\frac{N}{Z} g_i e^{-\beta \epsilon_i} \right) * \epsilon_i = \frac{N}{Z} * \sum_{i=1}^S g_i \epsilon_i e^{-\beta \epsilon_i}$$

$$U = \frac{N}{Z} * \sum_{i=1}^S g_i \epsilon_i e^{-\beta \epsilon_i} = - \frac{N}{Z} * \frac{dZ}{d\beta}$$

Quindi U dipende dalla funzione di partizione del sistema Z ed è funzione del parametro β : $Z = Z(\beta)$. Tale parametro (β) può essere utilizzato per caratterizzare l'energia interna del sistema. Basta a tale scopo definire il parametro T , temperatura assoluta, in modo tale che:

$$K_B T = \frac{1}{\beta}$$

con $K_B =$ costante di Boltzmann $= 1,38 * 10^{-23} J/K = 8,617 * 10^{-5} eV/K$. Tale

relazione costituisce la definizione statistica di temperatura assoluta. (Notiamo che tale definizione di temperatura è valida solo all'equilibrio, poiché β è stato introdotto durante il calcolo della partizione più probabile). Otteniamo, quindi:

$$U = -N * \frac{d(\ln Z)}{d\beta} = KNT^2 \frac{d(\ln Z)}{dT}$$

3. Applicazione della statistica di Boltzmann: La distribuzione di Maxwell delle velocità molecolari

Nell'esempio che segue mostreremo come si applica la statistica di Boltzmann ad un sistema di particelle classiche. Il procedimento che discuteremo è identico a quello che è necessario utilizzare nelle applicazioni a sistemi che obbediscono alle statistiche quantistiche. Utilizzando la distribuzione di Boltzmann ricaveremo, per un gas di molecole "classiche" contenute in una scatola di volume V , la distribuzione di Maxwell-Boltzmann delle velocità molecolari (o la distribuzione del modulo delle velocità delle molecole del gas). Sia N il numero di molecole contenute in un volume V . Supponiamo che le molecole interagiscano solo attraverso urti elastici e che l'energia potenziale sia costante (per scelta uguale a zero). Se il volume occupato dalle molecole è trascurabile rispetto al volume del contenitore (gas rarefatto), si può applicare al sistema la statistica di Boltzmann. Il primo passo da compiere è individuare quali siano gli stati accessibili ad una particella, cioè determinare la densità degli stati possibili. Occorre tenere ben presente che gli stati possibili non sono necessariamente occupati. Nel caso di molecole classiche tutte uguali ricaviamo la densità degli stati osservando che ogni particella si può trovare con la stessa probabilità in un qualunque volume elementare dV con energia $E = \frac{1}{2}mv^2$ (l'energia è solo cinetica). Il numero degli stati in cui la particella si può trovare è sicuramente proporzionale al volume elementare $dx dy dz = dV$ (avendo supposto che la particella si possa trovare in tutti gli elementi di volume con la stessa probabilità). Inoltre osserviamo che, fissato l'elemento di volume dV , la particella può trovarsi in quel volume con un impulso qualunque di direzione arbitraria. Quindi gli stati possibili per una particella di energia $E = \frac{1}{2}mv^2$ sono quelli che si trovano nel volume di una calotta sferica di raggio v e volume elementare $4\pi^2 v^2 dv$ nello spazio individuato dalle componenti v_x, v_y, v_z del vettore velocità \vec{v} . Il numero di stati possibili è dato quindi dal prodotto tra il numero di stati possibili $4\pi^2 v^2 dv$ e l'elemento di volume dV . Si ha, pertanto: $4\pi^2 v^2 dv dV$.

La densità di stati possibili per unità di volume e unità di velocità è, quindi, uguale a:

$$D(v) = \frac{4\pi^2 v^2 dv dV}{dv dV} = 4\pi^2 v^2$$

Nota la densità degli stati possibili $D(v)$ e la probabilità di occupazione di ciascuno stato, fornita dalla statistica di Boltzmann, possiamo determinare il numero degli stati occupati nei volumi elementari. Tale numero è dato dalla densità degli stati ammissibili moltiplicata per la statistica di Boltzmann: Si ottiene:

$$dN_{MB} = D(v) * A e^{-mv^2/2KT} dv dV$$

Il valore della costante A si determina imponendo che il numero totale di molecole sia N:

$$N = \int dN_{MB} = \int D(v) * A e^{-mv^2/2KT} dv dV = 4\pi^2 VA \int v^2 e^{-mv^2/2KT} dv$$

L'integrale gaussiano:

$$\int v^2 e^{-mv^2/2KT} dv = \frac{KT}{m} * \sqrt{\frac{2KT}{\pi m}}$$

Pertanto:

$$N = 4\pi^2 VA * \frac{KT}{m} * \sqrt{\frac{2KT}{\pi m}}$$

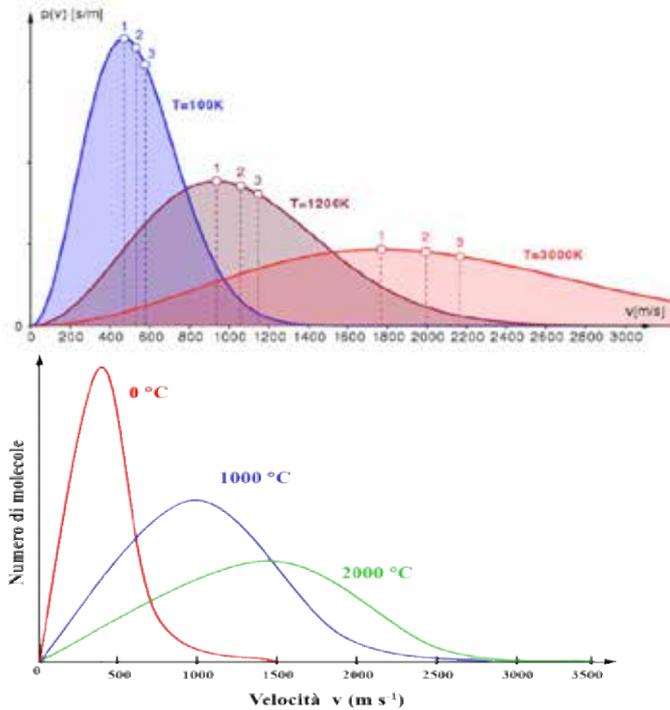
Per un sistema di molecole di massa m in equilibrio termico a temperatura assoluta T si ricava:

$$dn(v) = 4\pi * \left(\frac{N}{V}\right) * \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2KT} dv$$

dove $dn(v)$ è il numero di particelle per unità di volume con velocità compresa fra v e $v + dv$. La distribuzione di Maxwell-Boltzmann è quindi la funzione:

$$\rho_{MB}(v) = \frac{dn_{MB}}{dv} = \frac{dN_{MB}}{dv dV} = 4\pi * \left(\frac{N}{V}\right) * \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2KT}$$

dove $n_{MB}(v)$ è il numero di particelle per unità di volume e unità di velocità. Dalla distribuzione possiamo ricavare alcune quantità macroscopiche caratteristiche del gas come la pressione, la velocità con la massima probabilità, la velocità quadratica media e l'energia media delle molecole del gas in funzione della temperatura assoluta.



Questa curva presenta un punto di massimo; è rapidamente crescente nell'intorno sinistro di tale punto e decrescente (meno rapidamente) nell'intorno destro. Al crescere della temperatura, il valore massimo diminuisce e tende a spostarsi verso temperature maggiori: ciò corrisponde a quanto già noto circa il legame tra l'agitazione termica e la temperatura. L'ascissa di tale massimo, detta la moda della distribuzione della velocità, è facilmente calcolabile uguagliando a zero la derivata della funzione di Maxwell. Si ottiene, così, che la moda di tale distribuzione è:

$$v_{moda} = \sqrt{\frac{2 K_B T}{m}}$$

$$v_{moda} = \sqrt{\frac{2}{3}} \langle v \rangle \cong 0,816 \langle v \rangle$$

La moda è la velocità più probabile, e non coincide con la velocità quadratica media, ma è pari all'82 % di essa. Tale valore non coincide neppure con il valor medio della velocità, perché la distribuzione non è simmetrica. Adoperando il formalismo dell'Analisi Matematica, si ha infatti:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 K_B T}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8}{3 \pi}} \langle v \rangle \cong 0,849 \langle v \rangle$$

Per opera di Maxwell e di Boltzmann, le leggi statistiche, basate sul concetto di velocità, hanno fatto per la prima volta il loro ingresso nella Fisica. Prima di loro si pensava che tutto fosse regolato da leggi deterministiche, cioè che, a partire da precise condizioni iniziali, si potesse in ogni caso studiare l'evoluzione di un sistema in tutti i

particolari; e questo era influenzato anche dall'implicito determinismo insito nelle equazioni della Dinamica e nelle leggi della Gravitazione Universale. Purtroppo, quando dalla dinamica di un sistema di pochi corpi si passa a quella di un sistema formato da un numero enorme di particelle, cessa ogni certezza deterministica, e le uniche certezze che ci rimangono sono a livello di distribuzioni di probabilità. Naturalmente, ogni nuova idea che implica una certa rivoluzione concettuale quasi sempre viene accolta con una certa diffidenza; è stato, questo, anche il destino della Relatività di Einstein, a lungo bollata come "fisica giudea". Non poteva essere diversa la sorte delle teorie fondate sulla natura corpuscolare della materia e nell'applicazione ad essa delle leggi statistiche. Esse suscitavano infatti lunghissime discussioni, talora molto accese, fino a che il fisico tedesco Otto Stern (1888-1969) nel 1926 non riuscì a verificare sperimentalmente la bontà della distribuzione di Maxwell, mediante il selettore di velocità da lui stesso messo a punto. In questo modo, Stern poté verificare che gli atomi di mercurio gassoso obbediscono perfettamente alla distribuzione di Maxwell, fugando una volta per tutte i dubbi residui sulla Teoria Cinetica dei Gas.

4. Statistica di Bose-Einstein



Satyendra Nath Bose ed Albert Einstein

La prima distribuzione quantistica la dobbiamo al bengalese Satyendra Nath Bose (1894-1974), che nel 1920 si occupò delle teorie di Albert Einstein, secondo la quale le onde elettromagnetiche sono costituite da particelle chiamate fotoni. Bose tradusse la teoria della relatività generale di Einstein dal tedesco all'inglese, e decise di derivare da considerazioni statistiche la formula della radiazione del corpo nero di Max Planck (1858-1947), ottenuta ipotizzando che la radiazione non scambi energia con la materia in modo continuo, ma solo attraverso pacchetti discreti, detti appunto quanti. In questo modo, Bose ottenne un risultato di rilievo, individuando una legge statistica in grado di spiegare il comportamento dei fotoni. Tuttavia nessuna rivista europea volle pubblicare il suo articolo "Planck's Law and the Hypothesis of Light Quanta", nel quale descriveva l'effetto fotoelettrico sulla base di considerazioni statistiche, perché esso sembrava contenere un imbarazzante errore di statistica. I suoi risultati furono perciò ignorati. Scoraggiato, Bose scrisse ad Albert Einstein in persona, il quale invece si dimostrò subito d'accordo con le sue teorie. I fisici iniziarono a prendere sul serio le

idee di Bose solo quando Einstein mandò loro un proprio articolo in accompagnamento a quello di Bose, che fu pubblicato nel 1924. Secondo Einstein, poiché i fotoni sono indistinguibili tra loro, non si possono considerare diversi due fotoni aventi la medesima energia. Il famoso "errore" di Bose è oggi alla base di quella che chiamiamo la distribuzione di Bose-Einstein. Einstein applicò la stessa idea a tutte le particelle con spin intero (in unità $\hbar/2\pi$), di cui i fotoni sono un esempio; per questo oggi tali particelle sono chiamate bosoni, in onore di Bose. Applicando questa distribuzione agli atomi, i due fisici predissero l'esistenza di un nuovo, esotico stato della materia, chiamato condensato di Bose-Einstein, la cui esistenza è stata sperimentalmente dimostrata nel 1995. La distribuzione di Bose-Einstein è descritta dalla formula:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{(E_i - \mu)/K_B T} - 1}$$

Con $E_i > \mu$. In essa, n_i è il numero medio di particelle nello stato i , E_i è l'energia dell' i -esimo stato, μ è il potenziale chimico, K_B è la costante di Boltzmann e T è la temperatura assoluta. Il valore g_i dell' i -esimo livello è chiamato degenerazione di quel livello di energia. Vediamo ora come può essere ricavata la distribuzione di Bose-Einstein. Supponiamo di avere un certo numero di livelli di energia, contraddistinti dall'indice i , ciascuno avente energia E_i e contenente un totale di n_i particelle, mentre g_i esprime la degenerazione dello stato i . Sia $w(n, g)$ il numero di modi di distribuire n particelle tra g sottolivelli di un certo livello energetico. Esiste solo un modo di distribuire le n particelle in un solo sottolivello, per cui $w(n, 1) = 1$. È evidente che esistono invece $(n + 1)$ modi di distribuire n particelle in due sottolivelli, quindi scriveremo:

$$w(n, 2) = \frac{(n + 1)!}{n! 1!}$$

Il numero di modi di distribuire n particelle in tre sottolivelli è:

$$w(n, 3) = w(n, 2) + w(n - 1, 2) + \dots + w(0, 2)$$

da cui:

$$w(n, 3) = \sum_{K=0}^n w(n - K, 2) = \sum_{K=0}^n \frac{(n - K + 1)!}{(n - K)! 1!} = \frac{(n + 2)!}{n! 2!}$$

Ripetendo più volte questo procedimento, si può dimostrare che $w(n, g)$ è dato da:

$$w(n, g) = \frac{(n + g + 1)!}{n! (g - 1)!}$$

Generalizzando, il numero di modi di distribuire n_i particelle in g_i sottolivelli, al variare di i , è il prodotto dei modi in cui ogni livello di energia può essere occupato:

$$W = \prod_i w(n_i, g_i) = \prod_i \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i! (g_i - 1)!} \cong \prod_i \frac{(n_i + g_i)!}{n_i! g_i!}$$

In questa approssimazione si assume che $g_i \gg 1$. Seguendo lo stesso procedimento utilizzato per ottenere la statistica di Maxwell-Boltzmann, si dovrebbe determinare un insieme di n_i che massimizza la funzione W , sotto il vincolo che il sistema sia costituito da un numero prefissato di particelle e possieda un'energia prefissata. Per determinare ciò applichiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. A questo scopo, si costruisce la funzione:

$$f(n_i) = \ln W + \alpha \left(N - \sum n_i \right) + \beta * \left(E - \sum n_i \epsilon_i \right)$$

Applichiamo la cosiddetta formula di Stirling per i fattoriali:

$$\ln x! \cong x \ln x - x$$

e teniamo conto dell'approssimazione $g_i \gg 1$. Derivando parzialmente rispetto ad n_i la $f(n_i)$ così ottenuta, uguagliando a zero tale derivata e risolvendo rispetto a n_i l'equazione in tal modo ottenuta si ottiene:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta E_i} - 1}$$

Si può dimostrare, in base a considerazioni di termodinamica, che:

$$\beta = \frac{1}{K_B T} \quad \text{e} \quad \alpha = -\frac{\mu}{K_B T}$$

Sostituendo questi valori nella relazione ricavata precedentemente ovvero in:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta E_i} - 1}$$

si ottiene che la distribuzione di Bose-Einstein è descritta dalla formula:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{(E_i - \mu)/K_B T} - 1}$$

Si osservi che quest'ultima si trasforma nella distribuzione di Maxwell-Boltzmann per energie

$$(E_i - \mu) \gg K_B T.$$

5. Applicazione della statistica di Bose-Einstein: La distribuzione della densità di energia elettromagnetica. Determinazione dello spettro di corpo nero

Si definisce corpo nero un oggetto capace di assorbire la radiazione elettromagnetica incidente per qualsiasi lunghezza d'onda λ . Nel 1860 il fisico tedesco Gustave Kirchoff, con l'utilizzo della termodinamica, dimostrò che ad una data frequenza ν e ad una data

temperatura T , il rapporto tra potere emissivo e potere assorbente è lo stesso per tutti i corpi: quindi il loro rapporto definisce una funzione universale $f(\nu, T)$:

$$\frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)} = f(\nu, T)$$

Kirchhoff definì, poi, corpo nero un corpo il cui potere assorbente, per ogni frequenza e temperatura, è pari ad uno. Da questo deriva che la funzione universale $f(\nu, T)$ eguaglia il potere emissivo: $e(\nu, T) = f(\nu, T)$. La radiazione di corpo nero, come tutti i sistemi all'equilibrio termico, può dedotta applicando il primo e il secondo principio della termodinamica:

$$dQ = dU + p dV$$

$$dS = \frac{dQ}{T}$$

Si ottiene, così, la legge di Stefan-Boltzmann:

$$u(T) = aT^4$$

che mette in relazione l'energia di radiazione con la quarta potenza della temperatura. Per studiare lo spettro di emissione del corpo nero, cerchiamo di determinare una legge per l'intensità della radiazione B_λ in funzione della lunghezza d'onda λ . A tale scopo verranno utilizzati due approcci che porteranno ad una formula simile per la radiazione di corpo nero:

1. Approccio classico di Rayleigh-Jeans che si basa sui principi della fisica newtoniana e dell'elettromagnetismo classico;
2. Approccio di Planck che utilizza la meccanica quantistica.

5.1 Approccio classico di Rayleigh e Jeans

Nei primi anni del '900 i due fisici britannici John William Strutt Rayleigh e James Jeans proposero una relazione per l'intensità di radiazione B_λ , in accordo con i dati sperimentali per grandi valori di λ , ma errata per piccoli λ :

$$B_\lambda \approx \frac{T}{\lambda^4}$$

Ricordando che:

$$\lambda \nu = c \quad \text{da cui} \quad \lambda = \frac{c}{\nu}$$

L'intensità di radiazione B_λ si può anche esprimere in funzione della frequenza nel modo seguente:

$$B_\nu \approx \frac{\nu^2 T}{c^2}$$

Per ricavare tale relazione consideriamo una cavità di corpo nero e calcoliamo la densità di energia di radiazione $u(\nu)$ contenuta in essa, di frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$:

$$u(\nu) d\nu = \bar{\epsilon} N(\nu) d\nu$$

dove $\bar{\epsilon}$ rappresenta l'energia media degli oscillatori delle pareti della cavità in risonanza con la frequenza ν , $N(\nu) d\nu$ è il numero di onde stazionarie all'interno della cavità che assumiamo di forma cubica di lato L . Le onde si propagano in tutte le direzioni con vettore di propagazione di componenti $(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3)$. Un'onda stazionaria risonante ha un numero di nodi pari a:

$$n_i = \frac{2L}{\lambda} \cos \alpha_i \quad i = 1, 2, 3$$

(i nodi di un'onda sono quei punti che rimangono fissi, cioè dove l'onda è sempre nulla) Da cui, facendone il quadrato e sommando, otteniamo:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{4L^2}{\lambda^2} = \frac{4\nu^2}{c^2} L^2 = R^2$$

che rappresenta l'equazione dei punti a coordinate intere positive o nulle sulla sfera di raggio R dato da:

$$R = \sqrt{\frac{4\nu^2}{c^2} L^2} = \frac{2L\nu}{c}$$

Il numero di onde stazionarie tra ν e $\nu + d\nu$ è uguale al numero di punti a coordinate intere nell'ottante positivo del guscio sferico compreso tra R e $R + dR$, con dR uguale a:

$$dR = \left(\frac{2L}{c} \right) d\nu$$

Quando tale numero è molto grande, cioè nel limite termodinamico (il limite termodinamico di un sistema viene raggiunto quando il numero N di particelle tende all'infinito ($N \rightarrow \infty$)), esso approssima il volume dell'ottante:

$$V = \frac{1}{8} * 4\pi R^2 dR = \frac{1}{8} * 4\pi \left(\frac{2L\nu}{c} \right)^2 \left(\frac{2L}{c} \right) d\nu = \frac{4\pi\nu^2}{c^3} * L^3 d\nu$$

La densità di modi di vibrazione permessi è uguale al numero di onde stazionarie diviso il volume della cavità cubica moltiplicato per due in quanto esistono due direzioni di polarizzazioni indipendenti per le onde elettromagnetiche. Quindi:

$$N(\nu) d\nu = \frac{2}{L^3} * \left(\frac{4\pi\nu^2}{c^3} * L^3 d\nu \right) = 2 * \frac{4\pi\nu^2}{c^3} d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu$$

Per calcolare la densità di energia $u(\nu)$ bisogna determinare il valor medio dell'energia di un oscillatore $\bar{\epsilon}$, in quanto:

Mario Innocenzo Mandrone

$$u(\nu) d\nu = \bar{\epsilon} N(\nu) d\nu$$

Per determinare ciò usiamo la procedura di media statistica con la distribuzione di Boltzmann:

$$f(\epsilon) = C e^{-\epsilon/KT}$$

dove K è la costante di Boltzmann il cui valore è dato da:

$$K = 1,38 * 10^{-16} \frac{erg}{K}$$

La $f(\epsilon) = C e^{-\epsilon/KT}$, in meccanica statistica, dà la probabilità che un oscillatore abbia energia compresa tra ϵ e $\epsilon + d\epsilon$. Pertanto, il valor medio dell'energia è:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon f(\epsilon) d\epsilon}{\int_0^{\infty} f(\epsilon) d\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} C \epsilon e^{-\epsilon/KT} d\epsilon}{\int_0^{\infty} C e^{-\epsilon/KT} d\epsilon} = KT$$

Poiché la densità di energia di radiazione $u(\nu)$ contenuta in essa, di frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$ è:

$$u(\nu) d\nu = \bar{\epsilon} N(\nu) d\nu$$

sostituendo in essa i risultati trovati, otteniamo la densità di energia:

$$u(\nu) d\nu = \bar{\epsilon} N(\nu) d\nu = KT * \frac{8 \pi \nu^2}{c^3} d\nu = 8 \pi KT \frac{\nu^2}{c^3} d\nu$$

La relazione ottenuta è detta legge di Rayleigh –Jeans. Per esprimere tale relazione in funzione di λ , ricordiamo che:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad \nu = \frac{c}{\lambda} \quad \text{quindi } d\nu = d\left(\frac{c}{\lambda}\right) = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

$$u(\lambda) d\lambda = -u(\nu) d\nu$$

Sostituendo in

$$\begin{aligned} u(\nu) d\nu &= 8 \pi KT \frac{\nu^2}{c^3} d\nu = 8 \pi KT \frac{1}{c^3} * \left(\frac{c}{\lambda}\right)^2 \left(-\frac{c}{\lambda^2} d\lambda\right) = -8 \pi KT * \frac{1}{c^3} * \frac{c^2}{\lambda^2} * \frac{c}{\lambda^2} d\lambda \\ &= -8 \pi KT * \frac{1}{\lambda^4} \end{aligned}$$

Poiché:

$$u(\lambda) d\lambda = -u(\nu) d\nu$$

si ottiene:

$$u(\lambda) = \frac{8 \pi KT}{\lambda^4}$$

Questa legge, dedotta usando principi classici in cui la radiazione è trattata come un'onda che, ad ogni frequenza, può essere emessa con qualunque energia, diverge per

piccole lunghezze d'onda, prevedendo un'emissione altissima per lunghezze d'onda corrispondenti all'ultravioletto e ai raggi X, e ciò non si osserva sperimentalmente. Questo problema viene chiamato "catastrofe ultravioletta", che una corretta teoria del corpo nero deve evitare.

5.2 Approccio quantistico di Planck

La soluzione alla catastrofe ultravioletta arrivò qualche anno dopo con l'introduzione da parte di Planck di una nuova ipotesi, dalle implicazioni sconvolgenti. Planck ipotizzò che la radiazione potesse essere emessa dagli oscillatori delle pareti solo a pacchetti discreti, detti "quanti" che, per ogni frequenza, potevano trasportare solo una ben precisa quantità di energia: $\epsilon = h\nu$, dove h è una costante universale, detta "costante di Planck". quindi, l'emissione ad una data frequenza, può solo essere del tipo: $\epsilon_n = n\epsilon = nh\nu$. La modifica che questa ipotesi comporta rispetto a quanto fatto nel caso della legge di Rayleigh e Jeans riguarda solo il calcolo del valor medio dell'energia degli oscillatori. Infatti la formula

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon f(\epsilon) d\epsilon}{\int_0^{\infty} f(\epsilon) d\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} C \epsilon e^{-\epsilon/KT} d\epsilon}{\int_0^{\infty} C e^{-\epsilon/KT} d\epsilon} = KT$$

valida nel caso della legge di Rayleigh e Jeans, diventa:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e^{-\epsilon_n/KT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\epsilon_n/KT}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/KT} - 1}$$

Inserendo questo nuovo valore dell'energia media $\bar{\epsilon}$ nella formula per il calcolo della densità di energia:

$$u(\nu) d\nu = \bar{\epsilon} N(\nu) d\nu$$

si ottiene:

$$u(\nu) d\nu = \frac{8 \pi \nu^2}{c^3} * \frac{h\nu}{e^{h\nu/KT} - 1} d\nu$$

Per esprimere tale relazione in funzione di λ , ricordiamo che:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \rightarrow \text{quindi } d\nu = d\left(\frac{c}{\lambda}\right) = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda \rightarrow u(\lambda) d\lambda = -u(\nu) d\nu$$

Utilizzando tali relazioni, abbiamo:

$$u(\lambda) = \frac{8 \pi h c}{\lambda^5} * \frac{1}{e^{hc/KT\lambda} - 1}$$

che rappresenta la fondamentale legge di Planck per l'intensità di spettro del corpo nero. Essa risulta in perfetto accordo con i dati sperimentali se la costante di Planck viene fissata al valore

$$h = 6,626 * 10^{-27} \text{ erg} * \text{s}$$

Con questa assunzione non solo si dà ragione dei dati sperimentali, ma si possono giustificare le leggi empiriche di Stefan-Boltzmann e quella di Wien. Nel caso in cui $h\nu \ll KT$, ovvero per fotoni a bassa energia, si ottiene la formula di Rayleigh e Jeans :

$$B(\nu, T) \cong 2 \frac{h \nu^3 K T}{c^2 h \nu} = 2KT * \left(\frac{\nu}{c}\right)^2$$

Per i fotoni ad alta energia, invece, ovvero per $h\nu \gg KT$, l'esponenziale risulta così grande che il termine unitario nella formula può essere trascurato, ottenendo la legge dello spostamento di Wien. Si ha, pertanto:

$$h\nu \gg KT \quad \rightarrow \rightarrow B(\nu, T) \cong 2 \frac{h \nu^3}{c^2} * e^{-h\nu/KT}$$

La legge dello spostamento di Wien, inizialmente trovata dolo in via sperimentale, è stata in seguito un'ulteriore conferma della validità del modello di Planck. tale legge mostra come la densità di energia emessa da un corpo nero ad una data temperatura, presenti un massimo caratteristico che si sposta al variare di T . La frequenza massima alla quale si verifica il picco di $B(\nu)$ può essere calcolata risolvendo:

$$\frac{\partial B(\nu)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{con} \quad B(\nu, T) \cong 2 \frac{h \nu^3}{c^2} * e^{-h\nu/KT}$$

Risolvendo l'equazione si ottiene la legge di Wien in funzione della frequenza:

$$h\nu_{max} = 2.82 KT \quad \text{oppure} \quad \frac{\nu_{max}}{T} = 2,82 * \frac{K}{h} = 5,88 * 10^{10} \frac{Hz}{K}$$

Con calcoli simili troviamo la lunghezza d'onda λ_{max} alla quale si verifica il massimo di $B(\lambda)$, risolvendo:

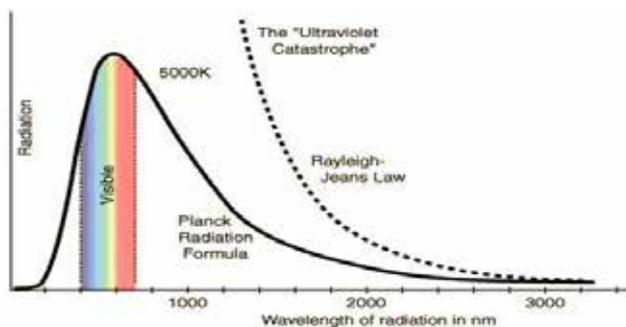
$$\frac{\partial B(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

In questo modo si ottiene l'espressione della legge di Wien più conosciuta:

$$\lambda_{max} T = 0,29 \text{ cm} * K$$

Notare che il prodotto $\lambda_{max} \nu_{max} \neq c$. Dal che si evince che possiamo utilizzare la legge dello spostamento di Wien per caratterizzare il range di frequenza in cui vale l'approssimazione di Rayleigh e Jeans e il range in cui vale, invece, l'approssimazione di Wien. In tal modo si ottiene:

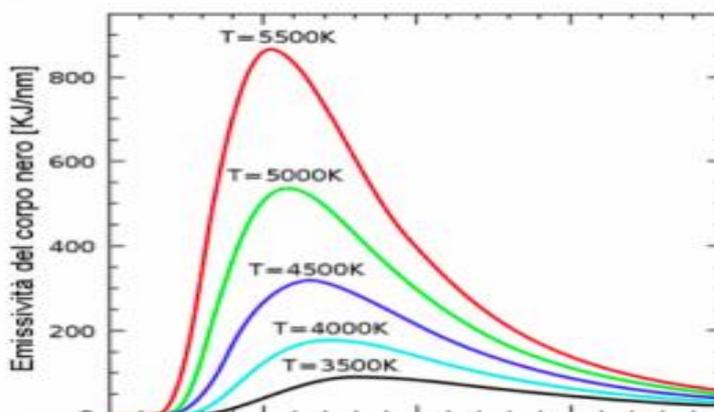
- 1) $\nu \ll \nu_{max}$ è possibile applicare la legge di Rayleigh-Jeans;
- 2) $\nu \gg \nu_{max}$ vale l'approssimazione di Wien.



Gli esperimenti condotti su questi corpi nei hanno mostrato che le pareti dei corpi assorbono ed emettono continuamente radiazioni elettromagnetiche; le radiazioni emesse, inoltre, dipendono esclusivamente dalla temperatura del corpo, e non dalla sua particolare composizione; per questo si dice che l'energia emessa è isotropa. In particolare, in base alla temperatura a cui si trova il corpo si hanno variazioni delle lunghezze d'onda corrispondenti ai valori massimi di emissione; la lunghezza d'onda massima a cui corrisponde il massimo della curva è inversamente proporzionale alla temperatura, e varia secondo la legge:

$$\lambda_{max} = \frac{2,90 * 10^{-3} m * K}{T}$$

Questa legge è detta legge di spostamento di Wien; possiamo riportare in un grafico emissione-lunghezza d'onda l'andamento di alcune curve in base a diversi valori della temperatura:



6. La distribuzione di Fermi- Dirac

La distribuzione di Bose-Einstein non è l'unica distribuzione quantistica conosciuta. I due grandi fisici Enrico Fermi (1901-1954) e Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), due tra i padri nobili della Meccanica Quantistica, nel 1926 ne introdussero un'altra, detta distribuzione di Fermi-Dirac in loro onore, valida non per i bosoni ma per

i fermioni. Queste ultime sono particelle a spin semintero (in unità $h/2\pi$) che obbediscono al Principio di Esclusione di Pauli, secondo il quale non possono esistere nello stesso stato quantistico due fermioni aventi gli stessi numeri quantici. In altre parole, i fermioni sono distinguibili fra di loro, a differenza dei bosoni che risultano indistinguibili.



Enrico Fermi (1901-1954) e Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984),

Supponiamo, quindi, che siano verificate le seguenti ipotesi:

1. le particelle sono identiche e indistinguibili;
2. le particelle obbediscono al principio di esclusione di Pauli, cioè due particelle non possono trovarsi nello stesso stato dinamico e la funzione d'onda complessa deve essere antisimmetrica.

Tali tipi di particelle vengono dette “fermioni”. Si vuole determinare il numero delle distribuzioni distinguibili di n_i particelle tra i livelli degeneri g_i . In meccanica quantistica g_i corrisponde ai differenti stati quantistici aventi la stessa energia, cioè alla “degenerazione” del livello di energia. Naturalmente g_i (massimo numero di fermioni che possono trovarsi su un dato livello) deve avere un valore tale da non violare il principio di esclusione di Pauli. Supponiamo di avere n_i particelle. Il numero di modi di distribuire n_i particelle su g_i stati di energia ε_i è:

$$g_i * (g_i - 1) * (g_i - 2) * (g_i - 3) \dots \dots \dots (g_i - n_i + 1) = \frac{g_i!}{(g_i - n_i)!}$$

In questo modo però considero distinte tutte le distribuzioni che si ottengono permutando le particelle tra loro, cosa che non posso fare in quanto le particelle sono tra loro indistinguibili. Pertanto, se le particelle sono indistinguibili, la relazione precedente va divisa per $n_i!$ ottenendo così:

$$\frac{g_i * (g_i - 1) * (g_i - 2) * (g_i - 3) \dots \dots \dots (g_i - n_i + 1)}{n_i!} = \frac{g_i!}{n_i! (g_i - n_i)!}$$

Se ora disponiamo tutte le particelle sui diversi livelli energetici E_i , si ha:

$$P = \frac{g_1!}{n_1!(g_1 - n_1)!} * \frac{g_2!}{n_2!(g_2 - n_2)!} * \frac{g_3!}{n_3!(g_3 - n_3)!} * \dots = \prod_i \frac{g_i!}{(g_i - n_i)!}$$

Per determinare la distribuzione più probabile, assumiamo che all'equilibrio statistico le particelle siano disposte nella configurazione di probabilità massima. Questa funzione deve essere massimizzata con i vincoli:

$$\sum_i g_i n_i = N$$

$$\sum_i g_i n_i E_i = E$$

Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange che riduce l'analisi ad una massimizzazione semplice di una funzione in N_i si ottiene:

$$L(n_1, n_2, \dots, n_S, \alpha, \beta) = \ln P - \alpha \left(\sum_{i=1}^S n_i g_i - N \right) - \beta \left(\sum_{i=1}^S g_i n_i E_i - E \right)$$

con α e β parametri da determinare. Perché la funzione ammetta estremo vincolato le sue derivate parziali devono essere nulle, ovvero:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial n_i} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \end{cases}$$

Determiniamo, quindi, i valori dei parametri, per ora indeterminati, α e β , in modo tale che valga la relazione complessiva:

$$\sum [\alpha + \beta \epsilon_i + \ln n_i - \ln(g_i - n_i)] = 0 \quad \text{per ogni valore di } i$$

Quindi:

$$\alpha + \beta \epsilon_i + \ln n_i - \ln(g_i - n_i) = 0$$

Da cui:

$$\ln \frac{n_i}{(g_i - n_i)} = -\alpha - \beta \epsilon_i$$

Si avrà, pertanto:

$$\frac{n_i}{(g_i - n_i)} = e^{-\alpha - \beta \epsilon_i}$$

Da cui, ricavando n_i

$$n_i = (g_i - n_i) * e^{-\alpha - \beta \epsilon_i}$$

Si ottiene:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha + \beta \epsilon_i} + 1}$$

che è la legge di distribuzione di Fermi-Dirac. Tale equazione fornisce i valori n_1, n_2, \dots, n_S per la distribuzione più probabile, all'equilibrio. Da considerazioni termodinamiche si ha che:

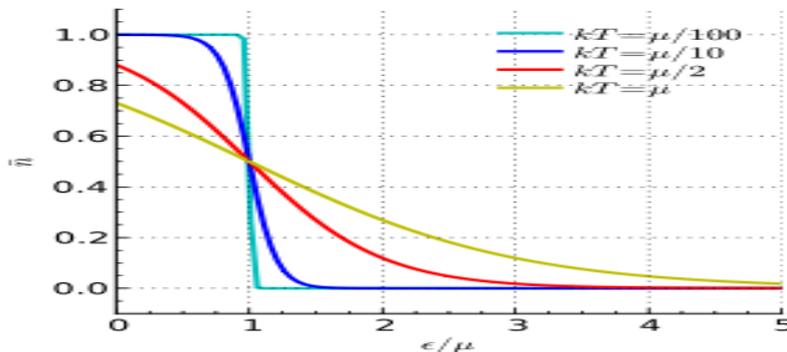
$$\beta = \frac{1}{KT}$$

Se l'energia di Fermi ϵ_F è data da $\epsilon_F = -\alpha KT$ si ha:

$$n_i = \frac{g_i}{e^{(E_i - E_F)/KT} + 1}$$

Da ciò si evince che, per $T = 0$, tutti gli stati di energia fino a $E = E_F$ sono occupati ($n_i = g_i$), mentre quelli con $E > E_F$ sono vuoti ($n_i = 0$). Questo segue da:

$$\lim_{T \rightarrow 0} e^{(E_i - E_F)/KT} = \begin{cases} 0 & \text{per } E_i - E_F < 0 \\ \infty & \text{per } E_i - E_F > 0 \end{cases}$$



7. Calcolo del livello di Fermi

Si consideri uno spazio tridimensionale con i tre assi rappresentati dai tre numeri quantici n_x, n_y, n_z (uno per dimensione). La densità di stati in energia, cioè il numero di stati che hanno energia compresa nell'intervallo $[E, E + dE]$ è data da:

$$D(E)dE = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2mL^2}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} dE$$

La meccanica statistica e la teoria dei quanti

Per calcolare l'energia di Fermi, si impone che l'integrale della densità (che dipende a sua volta dall'energia) da zero all'energia di Fermi (incognita) dia il numero totale di particelle:

$$\int_0^{\epsilon_F} D(E) dE = \int_0^{\epsilon_F} \frac{\pi}{2} \left(\frac{2mL^2}{\pi^2 h^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} dE = \frac{\pi}{2} V \left(\frac{2m}{\pi^2 h^2} \right)^{3/2} \int_0^{\epsilon_F} \sqrt{E} dE = N$$

(notare che: $(L^2)^{3/2} = L^3 = V$)

$$\int_0^{E_F} \sqrt{E} dE = \int_0^{E_F} E^{1/2} dE = \left[\frac{E^{(1/2)+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^{E_F} = \frac{2}{3} * E_F^{3/2}$$

Tale integrale, risolto, fornisce:

$$\int_0^{E_F} D(E) dE = \frac{\pi}{2} V \left(\frac{2m}{\pi^2 h^2} \right)^{3/2} \int_0^{E_F} \sqrt{E} dE = \frac{\pi}{2} V * \left(\frac{2m}{\pi^2 h^2} \right)^{3/2} * \frac{2}{3} E_F^{3/2} = N$$

Pertanto:

$$\frac{\pi}{2} V * \left(\frac{2m}{\pi^2 h^2} \right)^{3/2} * \frac{2}{3} E_F^{3/2} = N$$

Per cui la densità di elettroni per unità di volume è:

$$\frac{N}{V} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2m}{\pi^2 h^2} \right)^{3/2} * \frac{2}{3} E_F^{3/2} = \frac{2m * \sqrt{2m}}{3 \pi^2 h^3} * E_F^{3/2}$$

Quindi:

$$\frac{N}{V} = \frac{2m * \sqrt{2m}}{3 \pi^2 h^3} * E_F^{3/2}$$

Da cui ricavo l'espressione dell'energia di Fermi:

$$E_F^{3/2} = \frac{N}{V} * \frac{3}{\pi} * \left(\frac{\pi^2 h^2}{2m} \right)^{3/2}$$

Quindi:

$$E_F = \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{\pi^2 h^2}{2m}$$

Ovvero, in definitiva:

$$E_F = \frac{h^2}{2m} * \left(\frac{3 \pi^2 N}{V} \right)^{2/3} \quad \text{Energia di Fermi a } T = 0 K$$

che è l'energia di Fermi a $T = 0 K$. Il risultato ottenuto è lo stesso risultato ottenuto sviluppando il modello di Thomas-Fermi. Si noti che questo risultato è ottenuto nell'ipotesi che il sistema si trovi allo zero assoluto.

Detto N il numero di molecole e V il volume occupato dal gas di Fermi, integrando su tutti gli stati si ha:

$$E_F = \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{\pi^2 h^2}{2m} = \frac{h^2}{2m} * \left(\frac{3 \pi^2 N}{V}\right)^{2/3} \quad \text{Energia di Fermi a } T = 0 K$$

Se si moltiplica la densità di particelle in energia per l'energia e si integra da zero all'energia di Fermi, si ottiene naturalmente l'energia totale:

$$E_{TOT} = \int_0^{E_F} D(E) * E dE = \frac{\pi}{2} V * \left(\frac{2m}{\pi^2 h^2}\right)^{3/2} \int_0^{E_F} E * \sqrt{E} dE = \frac{\pi}{5} V \left(\frac{2m}{\pi^2 h^2}\right)^{3/2} (E_F)^{5/2}$$

Calcolo dell'integrale:

$$\int_0^{E_F} E * \sqrt{E} dE = \int_0^{E_F} E * E^{1/2} dE = \int_0^{E_F} E^{3/2} dE = \frac{E^{3/2+1}}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{E^{5/2}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5} E^{5/2}$$

L'energia media è quindi data da:

$$\bar{E} = \frac{E_{TOT}}{N} = \frac{\frac{\pi}{5} V \left(\frac{2m}{\pi^2 h^2}\right)^{3/2} (E_F)^{5/2}}{\frac{\pi}{2} V * \left(\frac{2m}{\pi^2 h^2}\right)^{3/2} * \frac{2}{3} E_F^{3/2}} = \frac{\frac{1}{5} (E_F)^{5/2}}{\frac{1}{2} * \frac{2}{3} E_F^{3/2}} = \frac{3 (E_F)^{5/2}}{5 E_F^{3/2}} = \frac{3}{5} E_F$$

8. Conclusioni

Dalla analisi dei casi trattati si può affermare che:

- La statistica di Maxwell-Boltzmann si applica ai gas di molecole a temperatura ambiente o a temperature più alte.
- La statistica di Bose-Einstein si applica ai gas di bosoni, in stato di degenerazione. I bosoni sono particelle a cui non si applica il principio di Pauli, e non hanno spin o hanno spin intero come ad esempio: fotoni, fononi, mesoni, mesoni K, gas reali (idrogeno ed elio).
- La statistica di Fermi-Dirac si applica ai gas di fermioni che, oltre ad essere in stato di degenerazione, sono anche soggetti al principio di Pauli. I fermioni sono particelle che hanno spin semintero come ad esempio: elettroni, protoni, neutroni.

Quest'ultima distribuzione viene spesso usata per lo studio degli elettroni nei solidi, e quindi costituisce la base per la teoria dei semiconduttori e dell'elettronica, avendo reso

possibile scoperte come quella del transistor. Possiamo quindi dire che l'applicazione di una o dell'altra statistica dipende dal tipo di particelle coinvolte e anche dalle particolari condizioni fisiche in cui queste particelle si trovano. La distribuzione di Maxwell-Boltzmann rappresenta il limite classico in condizioni non degeneri e ad alta temperatura delle distribuzioni di Bose-Einstein e di Fermi-Dirac: infatti, ad alta temperatura, la maggior parte dei sistemi si comporta analogamente a quelli classici, ovvero le differenze tra fermioni e bosoni sono trascurabili a meno che essi abbiano una densità molto alta, come ad esempio appunto in una nana bianca. Osserviamo, infine, che le tre statistiche possono essere riscritte insieme con l'espressione:

$$\frac{g_i}{n_i} + d = e^{\alpha + \epsilon_i/KT}$$

ove

- 1) $d = 0$ per la statistica di Maxwell-Boltzmann;
- 2) $d = -1$ per la distribuzione di Fermi-Dirac;
- 3) $d = +1$ per la distribuzione di Bose-Einstein

Per $n_i/g_i \ll 1$, cioè per sistemi molto rarefatti, ad esempio per alte temperature, le due statistiche quantistiche son equivalenti a quella classica di Maxwell-Boltzmann.

La fisica si è sempre occupata di fenomeni prevedibili e ripetibili. Famosissima, a questo proposito, l'affermazione di Laplace secondo la quale se un matematico «estremamente abile» conoscesse le condizioni iniziali dell'universo potrebbe calcolare tutto il futuro dell'universo stesso. Da tempo, però, la fisica si è dovuta arrendere di fronte alla complessità dei fenomeni comuni che non sempre mostrano la caratteristica della prevedibilità. Eppure, nonostante tutto, anche questa "complessità" che sembra sfuggire ai principi dell'ordine, può essere descritta da regole e leggi della meccanica statistica, della meccanica quantistica e della cromodinamica quantistica. La teoria della complessità evidenzia, difatti, come alcuni fenomeni complessi, quali la superconduttività e la superfluidità, possono emergere solo dall'interazione coerente delle componenti microscopiche del sistema. La meccanica statistica moderna è il prodotto di un lungo percorso storico. Si può affermare che molti dei problemi che si sono presentati nel suo sviluppo, possono dirsi, in larga parte, risolti. Numerose sono, oggi, le applicazioni della meccanica statistica quali, ad esempio, solo per citarne alcune: 1) Lo studio dei comportamenti collettivi in biologia: Stormi, sciami e colonie; 2) la propagazione rapida dell'informazione; 3) le dinamiche sociali: linguaggio, opinioni, consenso, innovazione; 4) i fenomeni emergenti in economia: Complessità /diversificazione della produzione. 5) i sistemi disordinati e vetrosi; 6) Problemi di ottimizzazione; 7) Reti biochimiche. Sia la meccanica statistica che la meccanica quantistica giocano un ruolo fondamentale non solo nella comprensione dei sistemi complessi ma anche nella dinamica caotica. La teoria del caos mostra come persino un sistema fisico deterministico possa risultare imprevedibile. A partire dalle ricerche del meteorologo americano Edward Lorentz, che negli anni Sessanta segnarono la nascita ufficiale della teoria del caos, numerosissimi fenomeni sono stati spiegati con modelli

caotici caratterizzati dalla non linearità delle equazioni che li descrivono. I sistemi descritti da modelli caotici sono spesso di grande complessità. La scienza del caos ha trovato applicazioni in moltissimi campi: dalla meteorologia alla medicina, dalla dinamica dei fluidi alla biologia, dall'elettromagnetismo all'ottica laser.

Bibliografia

Baierlein R. (1998), *Thermal Physics*, Cambridge University Press, Cambridge UK.

Bowley R., Sanchez M. (1999), *Introductory Statistical Mechanics*, Oxford University Press, Oxford.

Goodstein D.L. (1986), *States of Matter*, Dover Publications, New York.

Hill T.L. (1988), *An Introduction to Statistical Thermodynamics*, Dover Publications, New York.

Landau L.D., Lifshits E.M. (2010), *Fisica Statistica, Fisica Teorica, Vol. 5/1*, Editori Riuniti, Roma,

Mandrone M.I. (2018), *Introduzione all'elaborazione statistica dei dati sperimentali*, APAV, Teramo

Zemansky M.W., Dittman R.H. (1997), *Heat and Thermodynamics, 7th edition*, McGraw Hill, Singapore, 1997.

**8° Simposium 2022 - Corso di Formazione per Docenti
Dati e Previsioni nell'insegnamento STEM Roccaraso 7-10 aprile 2022**

Profili biografici dei relatori

Loredana Biacino - loredana.biacino@libero.it

Già professore associato di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Napoli "Federico II", è attualmente impegnata in ambito didattico al Progetto "lauree scientifiche". È stata docente di Storia della Matematica alle SISS ed al Corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica all'Università Federico II di Napoli.

Ferdinando Casolaro - ferdinando.casolaro@unina.it

È stato professore di Matematica nella Scuola secondaria di secondo grado e, dagli anni 'Novanta', docente di Analisi Matematica al Dipartimento di Architettura dell'Università Federico II di Napoli e all'Università del Sannio. È autore di 120 pubblicazioni scientifiche su riviste nazionali e internazionali e di vari libri, Editorial board della rivista "Scienze&Philosophy", del Bollettino dell'AFSU (Accademia di Filosofia e Scienze Umane) e del "Periodico di Matematica", di cui è stato cofondatore nella sua nuova rinascita cento anni dopo la sospensione del 1918. Nella sua attività di ricerca si è interessato di questioni di Analisi Matematica con risultati relativi a "Problemi di decisioni per integrali indefiniti" e, in seguito, di Geometrie non euclidee con particolare riferimento alla Geometria Proiettiva e a Modelli sullo spazio curvo. Attualmente, l'interesse principale è rivolto alla didattica e alla formazione delle nuove generazioni di docenti. È stato Consigliere nazionale Mathesis per quattro mandati (2003-2014), di cui nel periodo 2009-2011 ha ricoperto la carica di Segretario nazionale. Nel triennio 2017-2019 è stato Presidente della Mathesis Napoli "A. Morelli".

Luciano Corso - lcorso@iol.it

Presidente della Federazione Italiana Mathesis, dopo essere stato consigliere e vicepresidente nazionale per vari mandati, è stato professore di Matematica Applicata nella Scuola secondaria di II grado e, dagli anni 'Novanta' a tutt'oggi, Presidente della Mathesis di Verona. È Direttore della rivista "MatematicaMente"

Mario Cristiani - mariocristiani31@gmail.com

Laureato in Economia e Management con lode e menzione alla carriera accademica presso il Dipartimento di Economia, Management e Metodi Quantitativi dell'Università del Sannio-Benevento, è attualmente dottorando presso la Seconda Università di Roma. È autore di due pubblicazioni su questioni relative alla Teoria delle decisioni.

Luciana Delli Rocili - lucianadr@live.it

Dal 1982 al 2021 docente di ruolo di Scuola Primaria, vincitrice di concorso.

Ha fatto parte per più di dieci anni dei gruppi di Ricerca diretti dal Prof. Antonio Maturo, professore ordinario di “Matematica per l’Economia” presso l’Università di Chieti-Pescara. Ha collaborato con le Attività di Ricerca Internazionali dello stesso Docente, assistendo, per tirocini e per ricerche, nei vari anni, studenti provenienti dall’estero in Progetti Erasmus, in particolare quelli provenienti dall’Austria, dalla Romania, dalla Spagna. Autore di 14 articoli scientifici sulla didattica della Probabilità e dei Fuzzy Set nella Scuola del Primo Ciclo, in riviste italiane e straniere.

Ha partecipato, a partire dal 2012, a vari Convegni in Italia e all’estero, in qualità di relatore. In particolare: Iasi, Chieti, Rovigo, Pescara, Spoleto, Gioia del Colle, Brno.

Editor nella rivista “Mondo Matematico e Dintorni”. Fa parte del Direttivo dell’APAV e dell’Associazione “Mathesis Abruzzo”. Ha tenuto corsi di aggiornamento per Docenti sulla didattica del Calcolo delle probabilità nel primo ciclo nelle Scuole Estive di Laceno (anni 2013-2014-2016) e di Pizzoferrato (anni 2017 e 2018).

Giangiaco Gerla - ggerla@unisa.it

Professore emerito dell’Università di Salerno, la sua attività si è indirizzata in tre direzioni. La logica fuzzy e probabilistica, curando, ad esempio, un capitolo dell’Handbook di Soft Computing per la Kluwer ed una monografia intitolata Fuzzy logic: Mathematical tools for approximate reasoning, per la Kluwer. La geometria point-free, curando, ad esempio, un capitolo del Handbook of Incidence Geometry per la North-Holland ed un capitolo di The history of Continua per la Oxford University Press, curato da S. Shapiro e G. Hellman. Infine la didattica della matematica scrivendo, tra l’altro, con il Prof. Luigi Ferrari, il capitolo “Logica e didattica della matematica” del volume “Direzioni della ricerca logica in Italia”, Edizioni della Normale ed inoltre il lavoro Considerazioni sull’insegnamento della matematica e logica nel volume Educare alla razionalità ed. Unione Matematica Italiana.

Mario Innocenzo Mandrone - almavit@libero.it

Laureato in Fisica, indirizzo cibernetico- informatico, presso l’Università degli Studi Federico II di Napoli. Già Docente di ruolo di Matematica e Fisica negli Istituti di Istruzione Superiore. Docente a contratto per l’insegnamento della Fisica- Corso OFA - Dipartimento di Scienze e Tecnologie e per Esercitazioni di Analisi Matematica - Dipartimento di Ingegneria presso l’Università degli Studi del Sannio. Ha collaborato con l’Università “G. D’Annunzio” di Chieti- Pescara- Facoltà di Architettura. Ha svolto attività di docenza nell’ambito dei progetti Ocse- Pisa di ricerca- azione per la valutazione degli apprendimenti. Relatore su tematiche di fisica moderna e contemporanea, di didattica, di storia della matematica e di teoria delle decisioni in diversi convegni nazionali ed internazionali. Docente esperto nei corsi P.O.N. per matematica e fisica e nei corsi di preparazione per le prove Invalsi.

Ha pubblicato su riviste italiane e straniere (Ratio Matematica; Science and Philosophy.). E' stato Presidente della sezione Mathesis di Benevento. E' Vicepresidente dell'Associazione Sannio-Irpinia associata alla Federazione Italiana Mathesis. Attualmente è Vicepresidente dell'Accademia Piceno- Aprutina sei Velati di Teramo, Ente accreditato dal Ministero per la formazione del personale Docente della Scuola. E' componente del comitato scientifico "Olimpiadi della Matematica- Premio A. Morelli". E' componente del comitato scientifico del Periodico di Matematica-edizioni AFSU e del comitato scientifico di "Mondo matematico e dintorni" edito dall'APAV.

Antonio Maturo - antomato75@gmail.com

Professore di prima fascia di "Metodi Matematici dell'Economia e delle Scienze Attuariali e Finanziarie" presso l'Università degli Studi di Chieti – Pescara, ora in pensione. È stato docente all'estero nell'ambito dei progetti Socrates – Erasmus a partire dal 1999 fino al 2015. Ha attivato più di 15 rapporti internazionali con varie nazioni europee. Editor di volumi internazionali Springer.

Ha organizzato vari Convegni Internazionali, in Italia e all'Estero. In particolare, convegni internazionali a Iasi, Resita, Siviglia, Brno.

Le principali linee di ricerca sono riferite alle seguenti tematiche:

- Formulazione di Modelli Matematici e relativi algoritmi per i problemi decisionali di scelta e classificazione in Architettura e nelle Scienze Sociali, in condizioni di incertezza. In particolare basati su fuzzy set e statistica multivariata.
- Studio dei Fondamenti della Matematica con particolare riferimento a: Probabilità Soggettiva, Misure finitamente additive e non additive, Fuzzy Set, Inferenza Statistica Bayesiana, Teoria delle Decisioni, Geometrie Finite, Iperstrutture Algebriche.
- Applicazioni in campo sociale della teoria dei giochi, in particolare dei giochi cooperativi, dei giochi fuzzy e dei giochi associati a spazi geometrici finiti.
- Didattica e Divulgazione della Matematica a partire dalle sue applicazioni in ambito sociale, in particolare dall'analisi di situazioni in cui la complessità, l'incertezza e la vaghezza tipiche dell'ambiente umano rendono necessario il ricorso agli strumenti della probabilità soggettiva, della fuzzy logic, della statistica e della ricerca operativa per definire i problemi e tradurli in linguaggio matematico.

È autore di oltre 180 pubblicazioni scientifiche e di vari libri di didattica della matematica.

Ha ricoperto vari ruoli dirigenziali fra cui: Direttore del Dipartimento di Scienze Sociali, Presidente del Corso di Studi Magistrale in Politiche e Management per il Welfare, Coordinatore del Dottorato in Scienze Sociali, Rappresentante del Dipartimento di Scienze Sociali per i Rapporti Internazionali.

Presidente della Mathesis di Pescara (Società di Scienze Matematiche e Fisiche fondata nel 1895) dal 1987 al 2019, e poi, presidente di Mathesis Abruzzo, in carica.

È socio dell'AMASES, Associazione per la Matematica per l'Economia e fa parte del direttivo dell'APAV.

Nicla Palladino - nicla.palladino@unipg.it

È professore associato presso l'Università di Perugia per il settore MAT/04. Dottore di ricerca in Matematica applicata e Informatica, ha rivolto i suoi studi principalmente a strumenti e modelli di superfici matematiche costruiti nell'800, all'esame delle corrispondenze epistolari tra matematici a cavallo del periodo risorgimentale e a varie questioni ad esse connesse.

Giorgio Pietrocola - giorgio.pietrocola@gmail.com

Laureato in matematica all'Università La Sapienza di Roma il 19 dicembre 1973. E' incaricato addetto alle esercitazioni nel corso di Analisi Matematica della facoltà di Architettura di Roma tra il 1974 e il 1976. Ha insegnato nelle scuole secondarie di II grado di Roma e provincia dal 1976 al 2007 anno del pensionamento. Influenzato dalla filosofia educativa di Seymour Papert crea nel proprio Istituto un piccolo laboratorio di Matematica con alcuni computer, per incoraggiare apprendimenti autonomi e collaborativi. Insegna al Corso di Perfezionamento "Metodologie informatiche e nuove strategie educative" presso Università LUMSA a.a. 1997-98 e 1998-99. Nel 2000, insieme ad altri, è autore e curatore del libro "Apprendimento e nuove strategie educative" Edizioni Unicopli. E' docente del laboratorio "Didattica delle tecnologie per l'integrazione" nella Scuola di Specializzazione all'Insegnamento Secondario, presso l'Università degli Studi G. D'Annunzio dal 2001 al 2005. Su Internet nel 2005 idea e realizza il Tartapelago, un sito divulgativo, con animazioni didattiche di natura geometrica create con il linguaggio MSW-Logo. Dopo il pensionamento, dilettandosi nella ricerca fa alcune scoperte matematiche che dimostra e pubblica in rete. Sulla rivista Archimede 4-2021 ha appena pubblicato "Matrici binomiali per insiemi di polinomi calcolanti somme di potenze".

Sergio Schiavone - sergioschiavone66@gmail.com

È docente di Matematica e Fisica presso il Liceo "E. Pestalozzi" di San Severo (FG) nell'indirizzo Liceo scientifico –opzione Scienze applicate. Laureato in matematica all'Università degli Studi dell'Aquila nel 1991, da molti anni collabora con Casio Italia come formatore a livello nazionale nell'innovazione didattica e metodologica.

INDICE

| | |
|--|----------------|
| La didattica della matematica nella scuola primaria. Dati e previsioni nell' insegnamento STEAM <i>Mario Innocenzo Mandrone</i> | Pag 3 |
| Il “Gioco del calcio” per l’educazione all’incerto: retta di regressione e minimi quadrati <i>Ferdinando Casolaro, Mario Cristiani</i> | Pag 17 |
| Le origini del Calcolo delle probabilità: Pierre de Fermat e Blaise Pascal <i>Nicla Palladino</i> | Pag 29 |
| I problemi dei tre arcieri <i>Giorgio Pietrocola</i> | Pag 43 |
| Razionalità e Probabilità Epistemiche <i>Raffaele Mascella</i> | Pag 55 |
| Logica degli eventi e probabilità soggettiva: considerazioni ed esperienze didattiche <i>Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo</i> | Pag 79 |
| Alcuni paradossi della probabilità <i>Giangiaco Gerla</i> | Pag 93 |
| Legge dei grandi numeri e teorema del limite centrale <i>Luciano Corso</i> | Pag 107 |
| Quesiti e problemi del calcolo delle probabilità in applicazione della regola di Bayes <i>Loredana Biacino</i> | Pag 123 |

| | |
|--|----------------|
| I pre-requisiti essenziali per lo studio della Probabilità e della Statistica <i>Ferdinando Casolaro, Alessandra Rotunno</i> | Pag 135 |
| Distribuzioni binomiale, ipergeometrica, geometrica e di Poisson <i>Sergio Schiavone</i> | Pag 153 |
| La meccanica statistica e la teoria dei quanti <i>Mario Innocenzo Mandrone</i> | Pag 175 |
| Profili biografici dei relatori | Pag 203 |

Istruzioni per gli autori di Quaderni Apav

Chi desidera inviare un articolo per un Quaderno Apav deve seguire i seguenti criteri per il formato:

- (1) L'articolo deve essere in word, carattere Times New Roman, 12 p. Il titolo dell'articolo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 18 p.
- (2) I margini sono di 3 cm sotto, sopra, a destra e a sinistra. L'interlinea è multipla 1,15 p
- (3) L'articolo deve essere diviso in paragrafi numerati, di cui il primo è una introduzione e l'ultimo una conclusione. I paragrafi vanno separati da due interlinee. Il titolo di ogni paragrafo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 14 p.
- (4) Ogni articolo deve avere una lunghezza minima di 6 pagine e non deve superare, di regola, le 14 pagine.
- (5) Dopo l'ultimo paragrafo va inserita la bibliografia. Almeno 4 fra libri e articoli nel formato cognome, nome (anno), titolo dell'articolo, titolo del libro o rivista, editore, città.
- (6) La bibliografia non va numerata. I riferimenti bibliografici nel testo devono avere la forma (cognome dell'autore, anno).
- (7) Non mettere note bibliografiche a piè di pagina. Tutta la bibliografia va messa alla fine.
- (8) I disegni vanno fatti in programmi diversi dal word e salvati in jpg.
- (9) L'articolo deve essere inviato in formato doc o docx ed in formato pdf per il controllo dell'impaginazione e deve avere un numero pari di pagine.



9788894350180