



ACCADEMIA PICENO APRUTINA DEI VELATI

3[^] SCUOLA ESTIVA DI MATEMATICA PER DOCENTI DEL I E DEL II CICLO DI ISTRUZIONE

**Dall'intuizione ai concetti:
metodologie per elaborare
percorsi didattici e modelli
matematici**

PESCASSEROLI (AQ)
14 - 15 - 16 - 17 LUGLIO 2019

APAV

Accademia Piceno – Aprutina dei Velati in Teramo
e
Sezioni Mathesis di Pescara, Napoli e C. mmare di Stabia

3[^] Scuola Estiva di Formazione
per docenti del Primo e del Secondo Ciclo di Istruzione

Pescasseroli (AQ), Hotel Residence Club PRIMULA
14, 15, 16, 17 luglio 2019

***Dall'intuizione ai concetti:
metodologie per elaborare
percorsi didattici e modelli matematici***

Presidente dell'APAV
Giuseppe Manuppella

Direttore del Corso
Renata Santarossa

Curatori del testo
Giuseppe Manuppella, Antonio Maturo

Copertine e Impaginazione: Fabio Manuppella
Sito web: www.fabiomanuppella.it
E-mail: fabiomanuppella@gmail.com

COPYRIGHT © 2019 TUTTI I DIRITTI RISERVATI

Accademia Piceno Aprutina dei Velati in Teramo
Via del Concilio n.24. Pescara, Italia

Codice Fiscale 92036140678 - P. iva 02184450688
Codice destinatario per fatturazione elettronica: M5UXCR1

Banca Unicredit – Agenzia Pescara Umberto 00760
Codice IBAN: IT 57 K 02008 15408 000104232062
BIC Swift UNCRITM1760

Siti web: www.apav.it – www.eiris.it
Email: apavsegreteria@gmail.com , apavsegreteria@pec.it

Stampato nel mese di dicembre 2019 in Pescara

Copertina: Fabio Manuppella
Sito web: www.fabiomanuppella.it, email: fabiomanuppella@gmail.com

Il quaderno è pubblicato sotto la Licenza Creative Commons Attribuzione 3.0 Italia



Prefazione

La terza Scuola Estiva di formazione per i docenti del I e del II ciclo scolastico, è stata organizzata dall'APAV in collaborazione con le sezioni Mathesis di Castellammare di Stabia (NA), Napoli e Pescara. Si è svolta a Pescasseroli il 14-15-16-17 luglio 2019 e le attività presentate sono state tutte orientate verso un unico tema: "DALL'INTUIZIONE AI CONCETTI".

Benchè la tematica scelta sia unica, la scuola è stata organizzata in sezioni parallele il cui piano formativo è stato prevalentemente laboratoriale, ma diversificato nei contenuti come si evince dai titoli delle rispettive sessioni.

Questa tematica intende sollecitare un dibattito epistemologico sui cambiamenti che la scuola ha dovuto affrontare negli ultimi quaranta anni e sugli esiti: un progressivo e continuo indebolimento delle capacità logico-matematiche dei nostri studenti.

Il pensiero computazionale è già stato archiviato, in quanto nella "scuola digitale" ora dobbiamo parlare della società del codice, in cui la fisica relativistica diventa parte integrante della realtà: il tempo è sempre più contratto, e velocizza, anzi accelera, tutti i processi. La nostra è veramente una società della accelerazione, la stessa che ci fa vivere con la percezione di essere sempre in ritardo sulle cose. Questo della velocità, dell'accelerazione, è un tema interessante, ma imposto dai decisori a coloro che sono preposti alla formazione, in un tempo ed uno spazio non "maturi", perché digitalizzare la scuola e razionalizzare i processi, da una parte li dovrebbe rendere efficaci, ma dall'altra la scuola non è pronta e convinta di vivere in un tempo contratto e di subire processi velocissimi.

Intanto studenti e docenti sono sommersi da un diluvio di informazioni che spesso confliggono con i contenuti specifici della formazione, ne disponiamo di più di quante ce ne servono. Sono informazioni che invecchiano alla velocità della luce, lievitano su se stesse con una accelerazione mai conosciuta prima fino a configurare una situazione di entropia che rende difficile e ingestibile l'insieme delle informazioni stesse. Pertanto quegli studenti che sono impreparati a gestire tutte queste informazioni, o non si sentono pronti ma percepiscono il problema, reagiscono con indifferenza.

Fino a qualche decennio fa, per il docente era importante conoscere le tematiche della formazione, sapere dove trovare materiali affidabili; oggi il problema è come gestire e selezionare tutto il materiale esistente. Ecco allora che gli studenti evidenziano concezioni alternative a quelle accreditate, collegate al senso comune e particolarmente resistenti, specialmente nell'ambito scientifico.

Molte ricerche hanno infatti evidenziato che anche studenti ai primi anni dell'università, nonostante i molti anni di insegnamento scientifico, continuano a condividere concezioni di tipo prescientifico e ad avere misconcetti.

I lavori presenti nel quaderno intendono infatti porre l'attenzione sulle idee e sulle teorie scientifiche che ciascun docente, partendo dall'osservazione, deve far sì che ogni studente acquisisca passando per un processo ipotetico deduttivo che richiede, come

prima cosa, un accertamento delle conoscenze. Nell'apprendimento è importante che ciascuno studente percepisca la coerenza dei contenuti. Se la teoria o il formalismo presentati agli studenti non vengono appresi in una maniera significativa, vengono presto dimenticati in quanto conoscenze sì utili ma a cui non si fa più ricorso in futuro.

Il percorso scelto, offre ai docenti varie opportunità per ampliare le proprie competenze pragmatiche in un contesto di cui gli studenti, delle classi appartenenti a qualunque ordine di scuola e a diversi livelli, hanno bisogno di sviluppare al fine di usare correttamente le proprie intuizioni e comprendere l'uso e gli scopi delle tematiche oggetto di studio.

Nello specifico, ciascuna attività presenta un processo didattico come un percorso cognitivo, costituito da una continua revisione dei modi di concettualizzare il contenuto oggetto di studio, nonché dei modi per superare un possibile conflitto cognitivo che alcuni studenti possono manifestare, a causa di eventuali misconcetti accumulati nel corso delle precedenti esperienze scolastiche.

Tutti i lavori mettono in evidenza alcuni spaccati di più percorsi didattici che vanno a rappresentare, seguendo metodi diversi, situazioni problematiche in grado di indurre gli studenti, attraverso la riflessione, a formulare congetture, ipotesi e a concettualizzare. Ciò corrisponde non solo a una pratica didattica utile all'apprendimento, ma si pone anche come momento utile al riconoscimento e all'organizzazione di dati, di orientamento e di comprensione del mondo, vista la ricchezza di fonti di informazione e di immagini che contraddistinguono la società fortemente alfabetizzata in cui viviamo. Ciascuna attività prevede una breve introduzione teorica a cui fa seguito il laboratorio che rappresenta il focus della formazione; esso deve contribuire a sviluppare, tra i docenti in formazione, la capacità di comunicare, di discutere e di argomentare sulle tematiche proposte; rappresenta uno stimolo affinché i docenti possano aprirsi alla ricerca, a conoscenze presentate in modo diverso, a conoscenze alternative, trovando il giusto compromesso tra metodologie tradizionali e metodologie innovative.

I docenti in formazione devono essere parte attiva del laboratorio, pertanto sono stati organizzati in piccoli gruppi, a ciascun gruppo è stata data una scheda di lavoro in cui si è chiesto di formulare ipotesi e prevederne le conseguenze; progettare, discutere e argomentare nuove attività, articolate sulle proprie scelte; ricercare informazioni da altri testi e interpretarli criticamente per costruire conoscenze personali e collettive più significative, con nuove aperture didattiche. Dunque, compito del docente in formazione è quello di riformulare un processo di apprendimento, costruendo situazioni e cogliendo stimoli che favoriscano la ristrutturazione/destrutturazione dei modelli acquisiti.

Tenuto conto che, l'evoluzione del processo di apprendimento da parte degli studenti si compie per gradi, che chiameremo "snodi" (ossia per passaggi cognitivi), l'attività richiesta, a chiusura della formazione, è stata proprio quella di progettare lo sviluppo specifico di uno snodo.

Renata Santarossa

Indice

Una lezione di Robotica Educativa <i>Fabrizio Basciani</i>	Pag. 1
Alla ricerca della matematica che si nasconde tra le pieghe dell'arte <i>Angela Chiefari, Mario Innocenzo Mandrone, Franca Rossetti</i>	Pag. 13
Un percorso didattico per introdurre il ragionamento probabilistico nella Scuola Primaria <i>Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo</i>	Pag. 33
Da un gioco di percezione al modello matematico <i>Bruno Iannamorelli</i>	Pag. 47
Forme differenziali e Campi Vettoriali <i>Ferdinando Casolaro, Giovanna Della Vecchia</i>	Pag. 55
Problemi combinatori per introdurre alcune idee fondamentali della probabilità: dalla Traccia allo Svolgimento <i>Francesco Di Paola Bruno</i>	Pag. 67
Una analisi critica sulla didattica di alcuni concetti di base dell'Analisi Matematica <i>Antonio Maturo</i>	Pag. 81
Metodo Monte Carlo: applicazioni didattiche per quesiti di probabilità <i>Francesco Di Paola Bruno</i>	Pag. 93
Metodologie di ricerca storica e interculturale <i>Giuseppina Ferriello</i>	Pag. 107
Quale Fisica al liceo scientifico? <i>Antonia Travaglione</i>	Pag. 119
Modelli matematici: i tanti volti della realtà. Applicazioni in fisica e biologia <i>Mario Innocenzo Mandrone</i>	Pag. 127

Una Lezione di Robotica Educativa

Fabrizio Basciani

Istituto Comprensivo Pescara 2,
Docente di Tecnologia,
Via Vincenzo Cerulli 15, 65126, Pescara, Italy
fbasciani@wavecon.it

Sunto: la robotica educativa favorisce lo sviluppo di Competenze Chiave ed Obiettivi di Apprendimento i cui cardini sono rappresentati dal Pensiero Computazionale e dalla sua applicazione a semplici forme di automazione. Nato in ambito teatrale come essere di derivazione biologica, creato per evitare agli esseri umani i lavori faticosi e pericolosi, il robot ha assunto nel tempo un'accezione meccanica, antropomorfa, e soprattutto automatica ed autonoma, grazie alle dotazioni di sensori che riproducono la capacità umana di sensi propriocettivi ed esterocezionali. I kit di robotica educativa ripropongono molto bene le macchine automatiche oggi diffuse in tutti gli ambiti, inclusi quelli industriali, essendo dotati di componenti strutturali, meccaniche ed elettriche che consentono all'alunno di cimentarsi nella realizzazione e, successivamente, nella programmazione di oggetti che rispondono a determinati comandi, consentendo di verificare la correttezza della previsione secondo i più validi principi della pedagogia dello sviluppo cognitivo.

Parole Chiave: Robotica, Leggi della Robotica, Sviluppo Cognitivo, Pensiero Computazionale, Programmazione a Blocchi, Kit Lego WeDo 2.0

1. Introduzione

Sia il MIUR, con la circolare PROT. N. 9759 del 08 OTTOBRE 2015 e con il Piano Nazionale Scuola Digitale, sia i singoli Istituti Scolastici italiani, nei Curricula Verticali e nei PTOF, intendono favorire, in maniera trasversale, l'innovazione digitale e la tecnologia nella didattica, e dichiarano manifestamente di convergere, in maniera concreta e sostanziale, verso lo sviluppo di Competenze Chiave ed Obiettivi di Apprendimento i cui cardini sono rappresentati dal Pensiero Computazionale e dalla sua applicazione a semplici forme di automazione (Robot). Mediante la presente Lezione, si intende mostrare ai docenti:

- L'origine della Robotica e dei suoi concetti, basati sul Computational Thinking;
- la modalità operativa "passo-passo" con cui sarà possibile agevolare lo sviluppo, negli alunni, delle suddette competenze, in maniera graduale e continua, integrata

Fabrizio Basciani

con il restante programma scolastico e in modalità interattiva, favorendo l'apprendimento in contesti laboratoriali fortemente pragmatici, intensi e di difficoltà progressiva.

2. Origine del termine

La parola “robotica” deriva dal ceco “robota”, che significa “lavoro pesante, forzato”. Fu coniata dal drammaturgo ceco Karel Capek nel gennaio 1921, nella sua opera teatrale R.U.R. (Rossum's Universal Robots). Nell'accezione originale di Capek, i Robot non erano meccanici, ma creati mediante procedimenti chimico/biologici, allo scopo di evitare agli esseri umani i lavori faticosi e pericolosi.



Karel Capek



Il Manifesto di
R.U.R



Una scena dello spettacolo

L'opera aveva un valore critico nei confronti dell'uso arrogante della scienza da parte dell'uomo.

3. La derivazione inglese ed il significato odierno

Il termine inglese derivato “robotics” compare per la prima volta in un racconto di Isaac Asimov intitolato “Liar!”, nel 1941.

Successivamente, nel Racconto “Circolo Vizioso”, del 1942, lo stesso Asimov enuncia le Tre Leggi della Robotica (poi diventate quattro con l'inserimento della Legge Zero, sempre in un romanzo di Asimov).

Oggi la Robotica è la disciplina dell'Ingegneria che studia e sviluppa metodi che permettono ad un robot di eseguire dei compiti specifici riproducendo in automatico il lavoro umano. E' una branca della mecatronica in cui confluiscono anche discipline di natura umanistica, linguistica, scientifica: biologia, fisiologia, psicologia, informatica, matematica.



Isaac Asimov

4. Le quattro leggi della robotica

- **Legge Zero:** Un robot non può causare danno all'umanità, o, a causa della sua inazione, permettere che l'umanità venga danneggiata.
- **Prima legge:** Un robot non può causare danno ad un essere umano, o permettere che un essere umano venga danneggiato. Purché questo non contrasti con la Legge Zero.
- **Seconda Legge:** Un robot deve obbedire ad un ordine impartito da un essere umano. Purché questo non contrasti con la Legge Zero.
- **Terza Legge:** Un robot deve proteggere sé stesso. Purché questo non contrasti con la Legge Zero.

5. I robot nella mitologia

Nella Mitologia Greca, Vulcano era solito creare servi meccanici, come Talo, gigante di bronzo messo a guardia di Creta, o semplici tavolini semoventi a tre gambe.



Rappresentazione di Talo su una moneta antica

Nella Mitologia Ebraica, il Golem, Gigante di argilla, era forte ed ubbidiente, protettore degli Ebrei, ma anche distruttore implacabile

Fabrizio Basciani



Statuetta del Golem

Nella Mitologia Inuit, Tupilak, creato con pelli e ossa di animali, pezzi di legno e altro, assumeva varie forme animali, ma poteva rivoltarsi contro il creatore, se incontrava un nemico in grado di “riprogrammarlo” con la stregoneria.

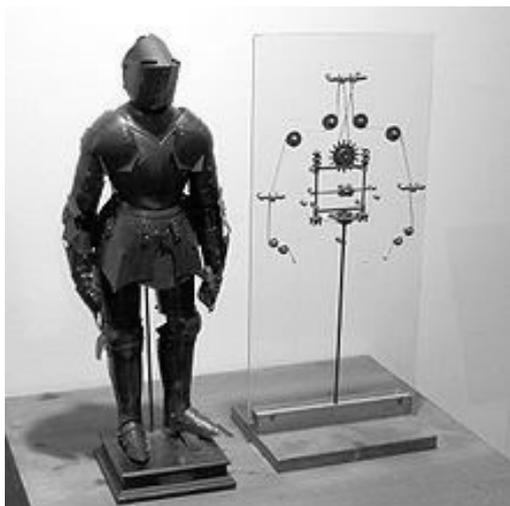


Statuetta di Tupilak

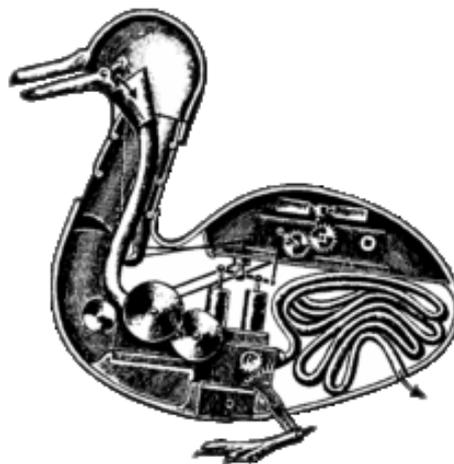
6. I robot nella storia

Il primo progetto documentato di un robot umanoide venne redatto da Leonardo da Vinci attorno al 1495. Degli appunti di Da Vinci, riscoperti negli anni '50, contengono disegni dettagliati per un cavaliere meccanico, che era in grado di alzarsi in piedi, agitare le braccia e muovere la testa e la mascella. Il progetto era basato sulle sue ricerche anatomiche registrate nell'Uomo Vitruviano.

Il primo robot funzionante conosciuto venne creato nel 1738 da Jacques de Vaucanson, che fabbricò un androide che suonava il flauto, nonché l'”anatra digeritrice”, in grado di mangiare e defecare.



Una ricostruzione del progetto di robot di Leonardo



Disegno progetto dell'Anatra Digeritrice

7. I robot nella letteratura: alcuni esempi



Frankenstein, May Shelley, 1818

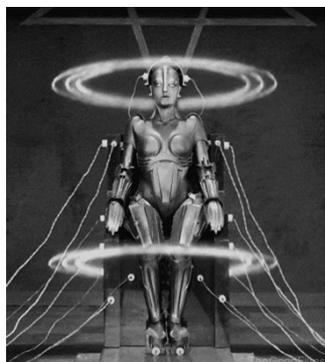


Pinocchio, Carlo Collodi, 1881

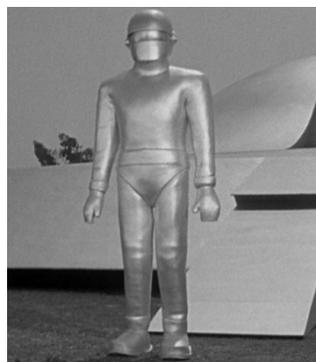


Boscaiolo di latta de
Il Meraviglioso mago di Oz,
L. Frank Baum, 1900

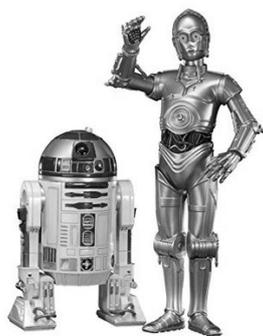
8. I robot nella cinematografia



Maria, in Metropolis, 1926



Gort, in Ultimatum alla Terra, 1951



C3PO e R2-D2 in Star Wars,
1979



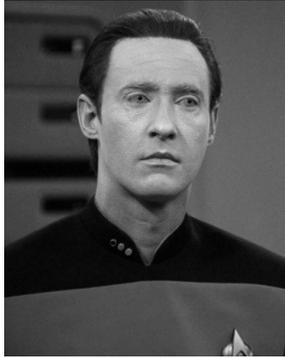
Blade Runner, 1982



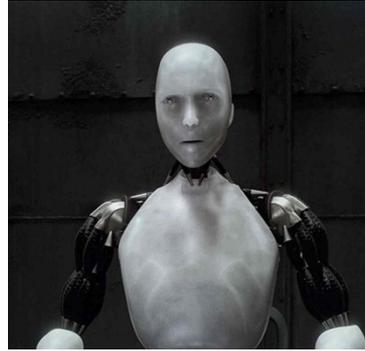
Terminator, 1984



Robocop, 1987



Data, in Star Trek, 1987



Sonny, in Io Robot, 2004

Tutti questi personaggi robotici sono accomunati dalla caratteristica di essere antropomorfi (**androidi, cyborg**).

9. Caratteristiche di un robot

- **Programmabilità:** capacità di elaborazione di dati sulla base di algoritmi forniti da un progettista
- **Mobilità:** possibilità di interagire fisicamente con l'ambiente
- **Flessibilità:** capacità di esibire un comportamento adatto alla situazione

Queste caratteristiche possono essere riassunte in un termine: AUTONOMIA

10. Struttura di un robot

Un Robot può essere scomposto nei seguenti sottosistemi:

- **Struttura meccanica:** struttura portante, braccio, giunti (rotativi, lineari, sferici), end effector (come una mano, una saldatrice, ecc...), trasmissioni
- **Attuatori elettrici, pneumatici, idraulici, piezoelettrici, ad induzione:** sono le parti meccaniche che permettono al robot di agire e muoversi
 - **Sensori:** misurano lo stato del robot e dell'ambiente.
I sensori possono essere:
 - a) Propriocettivi: misurano variabili interne al robot (angolo dei motori e dei giunti, livello batteria, velocità delle ruote)
 - b) Esterocettivi: misurano variabili esterne al robot (distanza dagli ostacoli, posizione degli oggetti, Forza, prossimità, luce, suono, videocamera, campo magnetico, ecc...).
- **Unità di controllo:** calcolatore elettronico, che coordina e supervisiona gli altri componenti.
- **Software comportamentale:** la programmazione interna.

11. Applicazioni

- Esplorazione (Marte, Oceano)
- Lavori pesanti o pericolosi (esoscheletri in ambito militare)
- Divertimento (pet da compagnia)
- Medicina (teleoperazioni, riabilitazione)
- Robot sociali (robot da pulizia, macchine per autoapprendimento)

Nei Robot sociali si inserisce il Ramo Educational, in cui in Italia si sta investendo

12. Perché i robot a scuola

Dal punto di vista didattico, la robotica appartiene alla “cultura maker”, ossia ad una modalità pratica con cui si sperimentano in modo alternativo la scienza, la tecnologia, l'ingegneria, l'arte e la matematica.

È una mentalità ed allo stesso tempo una sperimentazione giocosa per affrontare e risolvere i problemi attraverso l'esperienza diretta e la scoperta di come possono interagire e funzionare, anche diversamente dal solito, gli oggetti che ci circondano.

Il passo successivo, acquisita la manualità necessaria con robot formati da componenti di semplice ed automatico assemblaggio, è rappresentato dal **Tinkering**.

Il termine inglese “tinkering” significa “arrangiarsi”, “arrabattarsi”.

La Tinkering School è nata nel 2005 all'Exploratorium di San Francisco, ed è una scuola che spinge ad imparare facendo, nella maggior parte dei casi giocando, e non viene richiesto uno studio classico o teorico approfondito, ma una buona capacità logica e manuale.

In sostanza, si cerca di costruire oggetti (anche robotici) con oggetti di partenza completamente diversi.

Ma le motivazioni che hanno spinto il MIUR ad inserire la robotica nel contesto scolastico per sviluppare le competenze degli alunni affondano le radici nella storia della pedagogia.

Per **Vygotskij**, ad esempio, la ZSP (Zona di Sviluppo Prossimale) è definita come la distanza tra il livello di sviluppo attuale e il livello di sviluppo potenziale, che può essere raggiunto con l'aiuto di altre persone, che siano adulti o dei pari con un livello di competenza maggiore



Una Lezione di Robotica Educativa

Il Pensiero Computazionale, utilizzato in robotica nella fase di programmazione, è compatibile con questo principio, nella sua tipica forma di didattica laboratoriale, in cui ogni problema viene scomposto in problemi più semplici sotto la guida di un soggetto (il docente) dotato di conoscenza superiore o di pari che si trovano in una zona di sviluppo superiore alla sua.

Secondo **Piaget**, le immagini riprodotte (che evocano oggetti, situazioni ed eventi noti) servono da punto di partenza nella concretizzazione dei simboli verbali e matematici, astratti per natura, ma di cui il solutore di un problema si fa un'immagine.

La logica della visuale a blocchi è utilizzata nella programmazione per la robotica educativa serve proprio a questo: saper usare immagini riprodotte ed immagini anticipatorie (prevedere il prossimo passo) per arrivare alla soluzione di un problema mediante un proprio percorso.

Nella teoria di **Bruner**, infine, lo sviluppo cognitivo attraversa tre fasi:

- **Fase esecutiva:** il bambino rappresenta il mondo mediante una serie di azioni
- **Fase iconica:** il bambino rappresenta il mondo attraverso immagini e simboli astratti
- **Fase simbolica:** il bambino rappresenta il mondo attraverso un codice convenzionale astratto

Nella robotica, queste tre fasi si ripercorrono sempre, partendo dalla esecutiva (si affronta il problema reale, nella sua complessità fatta di tante fasi/azioni), passando per quella iconica (modellizzazione del problema e scomposizione in sottoproblemi più piccoli) e poi quella simbolica (si eseguono le fasi del processo creato, modellizzato mediante simboli e convenzioni condivise).

13. Il kit lego wedo 2.0

Il set LEGO® Education WeDo 2.0 nasce per progettare, costruire e quindi programmare modelli motorizzati basati su mattoncini LEGO® Education, sviluppato per l'insegnamento della robotica educativa, del coding e delle materie STEM nella scuola di base (primaria e secondaria di primo grado).

Il set base è una soluzione pratica, "hands-on" che stimola la curiosità degli studenti e li porta ad approfondire con entusiasmo concetti teorici relativi a robotica, coding, scienze, tecnologia, informatica e matematica. Li porta a interrogarsi sistematicamente sulla realtà, osservandone i fenomeni, facendo ipotesi e creando delle soluzioni concrete a problemi ispirati alla vita reale. Si presenta in un contenitore con un pratico vassoio per l'ordinamento dei pezzi, con etichette per la catalogazione dei diversi componenti, motore, sensori (di movimento e di inclinazione), smarhub e mattoncini sufficienti per lavorare comodamente con 2/3 studenti per ogni set.

Il software WeDo 2.0 - scaricabile gratuitamente - include un progetto d'avvio funzionale alla comprensione del funzionamento delle varie parti "fisiche" che compongono il set e

della programmazione ad icone attraverso la quale è possibile "animare" i modelli motorizzati costruiti con i mattoncini. Comprende anche uno strumento di editing per documentare e condividere le proprie esperienze all'interno della classe. Disponibile per tablet e computer (compatibilità Android, iOS e Win 7 e 8) fornisce un ambiente di programmazione chiaro, semplice da utilizzare e che permette di dar vita ai propri progetti in pochi semplici passi.

È disponibile anche un Curriculum Pack per l'insegnante, scaricabile gratuitamente, con oltre 40 ore di lezione già pronte.

LEGO Education WeDo 2.0 comprende 3 tipologie di progetti già pronti all'uso:

- Un progetto iniziale d'avvio, diviso in 4 parti strutturate per apprendere il funzionamento e le funzioni di base di WeDo 2.0
- 8 progetti guidati con istruzioni passo-dopo-passo (Curriculum Pack)
- 8 progetti aperti, ciascuno caratterizzato da una sfida iniziale che gli studenti dovranno risolvere grazie a soluzioni personali e indipendenti (Curriculum Pack)

Il set include materialmente:

- 280x pezzi LEGO
 - 1x Sensore di Inclinazione
 - 1x Sensore di Movimento
 - 1x Motore
 - 1x Valigetta in plastica con vassoio per l'ordinamento dei pezzi
- Il set per funzionare necessita di **2 batterie AA** (non incluse)



14. Esercizi svolti durante la lezione

- a) MILO'S SENSOR: robot che cammina in avanti e si arresta quando percepisce un ostacolo nella direzione in cui è puntato il sensore di prossimità, emettendo un allarme sonoro.

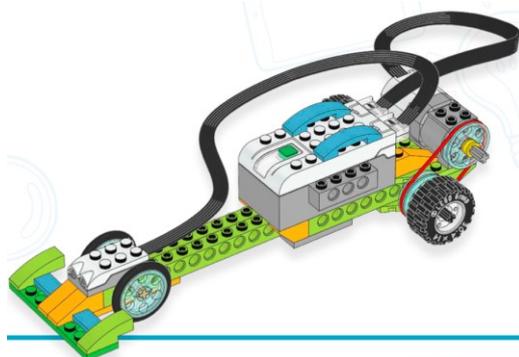


Una Lezione di Robotica Educativa

Le istruzioni di assemblaggio guidate sono consultabili al link riportato nella sitografia, mentre il programma a blocchi sviluppato per il robot è qui di seguito riportato:



b) **SPEED**: macchina da corsa che parte quando il sensore percepisce lo start della bandiera a scacchi e si arresta sulla linea di arrivo.



Le istruzioni di assemblaggio guidate sono consultabili al link riportato nella sitografia, mentre il programma a blocchi sviluppato per il robot è qui di seguito riportato:



c) **EARTHQUAKE**: simulatore di terremoti, per verificare la resistenza delle strutture in base alla loro forma ed altezza.



Le istruzioni di assemblaggio guidate sono consultabili al link riportato nella sitografia, mentre il programma a blocchi sviluppato per il robot è qui di seguito riportato:



15. Conclusioni

Abbiamo visto come la robotica educativa favorisca lo sviluppo di Competenze Chiave ed Obiettivi di Apprendimento che saranno fondamentali, per gli alunni di oggi, ovvero per i lavoratori di domani, per l'inserimento in una realtà dinamica e fortemente flessibile, sia dal punto di vista delle problematiche da risolvere, sia da quello degli approcci risolutivi, sempre più diversificati e trasversali. Il robot, entrato nell'immaginario familiare negli anni '70 come frutto di fantasia di scrittori e registi, oggi è una realtà molto tangibile e fruibile, che necessita di approfondimenti costanti e verticalizzati, affinché, molto presto, la realtà stessa possa superare l'immaginazione.

E allora, buona Robotica Educativa a tutti!

Bibliografia

Isaac Asimov, 1977, *"Liar!"*, Ed. Cambridge University Press

Marco Buttolo, 2016, *"Robotica. Principi e Applicazioni"*, Ed. Sandit Libri

Giovanni Marciano', 2017, *"Robot & scuola. Guida per la progettazione, la realizzazione e la conduzione di un Laboratorio di Robotica Educativa (LRE)"*, Ed. Hoepli

Olga Liverta Sempio, 1998, *"Vygot'skij, Piaget, Bruner. Concezioni dello sviluppo"*, Raffaello Cortina Editore.

Sitografia

Istruzioni di assemblaggio meccanico per Milo's Sensor: https://le-www-live-s.legocdn.com/sc/media/files/building-instructions/wedo-2/45300_16a_milo_arm_1-21fb7aaab3f1b0be7613da5a160a6d2d.pdf

Istruzioni di assemblaggio meccanico per Speed: https://le-www-live-s.legocdn.com/sc/media/files/building-instructions/wedo-2/45300_02a_race_car-598b60f4349319e88a591117771aa909.pdf

Istruzioni di assemblaggio meccanico per Earthquake: https://le-www-live-s.legocdn.com/sc/media/files/building-instructions/wedo-2/45300_03a_earthquake-afc67e89057f5e81fece6402b45b6bac.pdf

Alla ricerca della matematica che si nasconde tra le pieghe dell'arte

Angela Chiefari¹, Mario Innocenzo Mandrone², Franca Rossetti³

¹Convitto Nazionale "P.Giannone"-Benevento- e-mail: angelachiefari@gmail.com;

²Dipartimento di Scienze e Tecnologie- Università degli Studi del Sannio-Benevento-e-mail: almavit@libero.it

³Inserita nella Banca Dati Esperti valutazione e miglioramento, osservatori dei processi di insegnamento e apprendimento- e-mail: rossetti.franca@fastwebnet.it

Sunto

Arte e matematica svolgono un ruolo fondamentale nell'ambito dell'evoluzione infantile. L'arte contribuisce a migliorare le capacità espressive, a favorire l'apprendimento logico-matematico e linguistico e a liberare le potenzialità creative insite negli alunni. La matematica "dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; contribuisce a sviluppare le capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri" (Indicazioni Nazionali 2012). Nel presente lavoro abbiamo cercato, quindi, di coniugare l'aspetto artistico-creativo con quello matematico, osservando linee e forme nella realtà, giochi antichi ed opere d'arte che potessero ispirare la fantasia degli alunni. Le proposte sono state sviluppate secondo la metodologia didattica della flipped-classroom attraverso un'attività laboratoriale di ricerca delle informazioni relative agli artisti, alla corrente alla quale appartengono, al periodo storico, alla collocazione geografica, alla produzione artistica e ai legami tra la loro arte e la matematica. La scelta ha riguardato opere d'arte di famosi pittori quali Mondrian, Kandinsky, Klee, Escher ed altri. Questo percorso nasce dal desiderio di aprire lo sguardo sulla matematica, una disciplina spesso considerata sterile, astratta, piena di regole, fine a sé stessa, per coglierla "in azione" all'interno dell'espressione artistica.

Parole Chiave: Flipped-classroom, canone, sezione aurea, sacred cut, numero d'argento, solidi platonici, simmetria, stomachion, tassellazioni geometriche.

1. Introduzione

G. Harold Hardy, un grande matematico britannico affermava che una delle caratteristiche della matematica fosse la bellezza e che "Le forme create dal matematico, come quelle del pittore o del poeta, devono essere belle". La matematica e l'arte possono essere considerate una coppia indissolubile; esistono infatti numerosi intrecci, sfaccettature, convergenze e divergenze che possono mostrare questo legame. Le due, infatti, sono creazioni umane che hanno alla base la fantasia e un linguaggio rigoroso. Nel

presente lavoro andremo, pertanto, alla ricerca della matematica che si trova nascosta tra le pieghe dell'arte. Ma, può la bellezza parlare il linguaggio della matematica? Sebbene il rapporto fra la scienza dei numeri e la creazione artistica non appare evidente, gli intrecci e le convergenze fra queste due sfere della cultura sono stati, nel corso dei secoli, profondi e fecondi. Molti artisti, in epoche diverse, hanno subito il fascino della matematica e delle sue idee e dalle sue tecniche e dalle sue forme hanno tratto ispirazione per le loro opere e i loro linguaggi. Non v'è né scienza né arte che sia esente dall'apporto della matematica. Andreas Schleicher, statistico di origine tedesca e ricercatore nel campo dell'educazione, capo divisione e coordinatore del programma OCSE per la valutazione internazionale degli studenti (PISA), riconosce che in campo matematico “students need to Know how and why we study mathematics (epistemic belief), be able to think like a mathematician (epistemic understanding) and grasp the practises associated with mathematics (methodological Knowledge); ma omette, a questo riguardo, quel fattore fondamentale che è “the passion of Know” (epistemic love). Pertanto, qualunque proposta o progetto culturale deve alimentare competenze critiche, capacità di affrontare i problemi ed esaltare il ruolo delle dimensioni operative. È indispensabile, pertanto, porre in essere ed attivare non solo un ambiente di apprendimento che stimoli motivazioni, curiosità e partecipazione, ma che offra anche solidi alfabeti e codici per rappresentare il mondo, comprenderlo, comunicarlo. Oggi bisogna insegnare ai ragazzi a muoversi in uno spazio culturale sempre più complesso e ricco di segni, immagini, oggetti, tecnologie. Proprio per questo occorre una interpretazione evoluta dei modelli di apprendimento, del valore “gnoseologico” (formativo) delle discipline di studio (cioè del loro effettivo promuovere processi cognitivi), delle necessarie coerenze sul piano metodologico, ove una didattica laboratoriale, operativa, di stile cooperativo si fa nettamente preferire a didattiche unilaterali, povere e trasmissive.

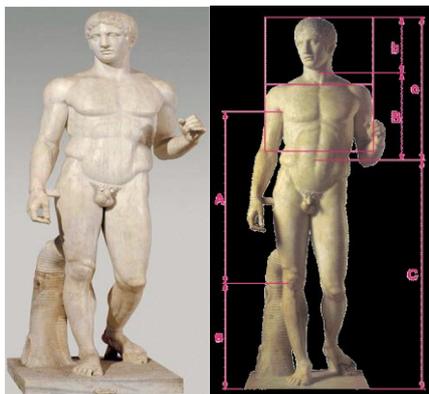
2. Matematica e arte

“A quattro anni dipingevo come Raffaello, poi ho impiegato una vita per imparare a dipingere come un bambino”. Pablo Picasso

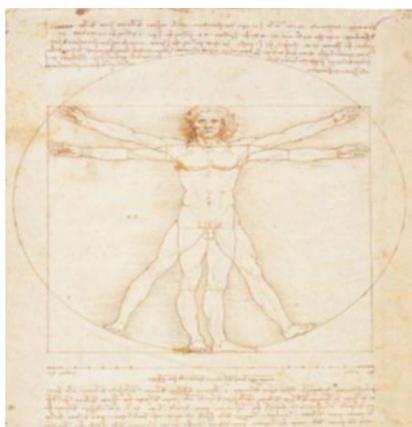
Le figure geometriche, dalle più semplici (quadrati, triangoli, rettangoli, cerchi) alle più complesse (come i poliedri) sono state in tutti i tempi oggetto di rappresentazione artistica: dalle sfere scolpite da Arnaldo Pomodoro ai “concetti spaziali” di Lucio Fontana, alla spirale, legata fra l'altro alla sezione aurea e ai numeri di Fibonacci, spirale che ricorre spesso nei dipinti di G. Klimt. I poliedri regolari, tra l'altro, hanno goduto di enorme fortuna nel Rinascimento, quando divennero un genere artistico alla moda nelle corti italiane, un genere in cui si cimentarono con maestria Piero della Francesca, Leonardo da Vinci e Paolo Uccello. Emblematico è il poliedro stellato intarsiato in marmo realizzato su suo disegno per la basilica di San Marco a Venezia. Secoli dopo i poliedri torneranno e essere protagonisti della pittura con il cubismo e l'astrattismo e anche della scultura moderna astratta, come nei lavori di Naum Gabo degli anni Venti o

nell'imponente e scenografico Cubo rosso (1968) di Isamu Noguchi. Gli artisti del Rinascimento dovevano possedere notevoli competenze tecniche e nozioni relative alle discipline correlate all'arte come la matematica, la geometria e l'ottica. Difatti, in questo periodo, oltre al ruolo centrale attribuito all'uomo, avviene la riscoperta dell'arte classica greca e romana, fonte di conoscenza e riferimento normativo per il nuovo linguaggio dell'arte in cui si vedono espressi gli ideali di ordine e razionalità. Nelle arti figurative, si studiano le corrette proporzioni del corpo umano, considerate riferimento di misura di tutte le cose, in quanto specchio della perfezione del creato. Si afferma e si definisce un nuovo ideale di bellezza, basato sull'applicazione di norme proporzionali armoniche che si traducono nella chiarezza della geometria e nei rapporti matematici. San Tommaso d'Aquino (1225-1274) affermava: "I sensi si diletano con le cose che hanno le giuste proporzioni". Le proporzioni vengono applicate anche all'architettura rinascimentale che, con l'impiego di questi principi, creava opere armoniose, belle e anche resistenti. La ripresa dei modelli formali classici coincide con il recupero del canone, cioè una formula, un insieme di regole a cui l'artista è vincolato. Alla base di tutto si trovava il modulo, ossia un elemento stabilito come misura di riferimento per il proporzionamento dell'edificio (in generale nell'architettura greca il modulo era il diametro della colonna alla base, detto imoscapo, o a volte lo spazio che divide due colonne: l'intercolumnio). Filippo Brunelleschi (1377-1446) architetto fiorentino, amante della matematica, della pittura e della scultura, grande conoscitore dell'arte classica si interessò a tali proporzioni. Si devono a lui oltre alla "scoperta" della prospettiva lineare centrale e il recupero dei principi dell'architettura classica, l'elaborazione di un nuovo sistema progettuale basato sulla geometria e sulla modularità delle strutture. Questa regola proporzionale è quella che nel Rinascimento viene definita "divina proporzione". Per secoli questo numero è stato chiamato con nomi seducenti quali numero aureo, proporzione trascendentale, numero divino, divina proporzione etc. Oggi corrisponde al termine moderno di sezione aurea e non è altro che un numero irrazionale, particolarmente interessante il cui valore è: 1,618033988. Il numero divino è legato misteriosamente a concetti di bellezza e perfezione. Infatti, per qualche misteriosa ragione, tutte le forme geometriche che godono di questa proporzione risultano particolarmente gradevoli alla vista. Il numero aureo fu probabilmente scoperto dai greci (ma forse utilizzato anche prima). Il simbolo ϕ (phi) con cui oggi lo identifichiamo venne attribuito solo all'inizio del XX secolo, quando un matematico americano Mark Barr propose di legare il numero a Fidia e ne prese l'iniziale del nome. Anche Luca Pacioli, religioso, matematico ed economista italiano, dedicherà nel 1509 un intero trattato al numero aureo, intitolandolo De Divina proporzione, un immenso lavoro sulla geometria euclidea che tratta la sezione aurea, l'architettura, i poliedri regolari e quelli da essi derivati. L'influenza della sezione aurea e le sue varie manifestazioni si possono già trovare nella Grecia classica, ma la storia dei suoi rapporti con l'arte comincia, in modo documentabile, con il Rinascimento e con l'inizio di una rigorosa teorizzazione dell'atto creativo. La particolare passione dei greci per l'armonia geometrica ha fatto ritrovare, talora indebitamente, la presenza del rapporto aureo in molte opere d'arte dell'antichità. Policletto il Vecchio, nato ad Argo intorno al 480 a.C. e

morto alla fine del V secolo a.C., grande maestro della scuola peloponnesiaca nell'età d'oro dell'arte classica, definì l'ideale della figura umana. I lineamenti si basano chiaramente sull'osservazione di modelli reali, ma non sono ritratti: il riferimento è astratto e il modello è quello dato dalle proporzioni ideali. Nella sua famosa scultura il Doriforo (ca 450 a.C.) trovano applicazione sia le regole del canone che quelle basate sul rapporto aureo.



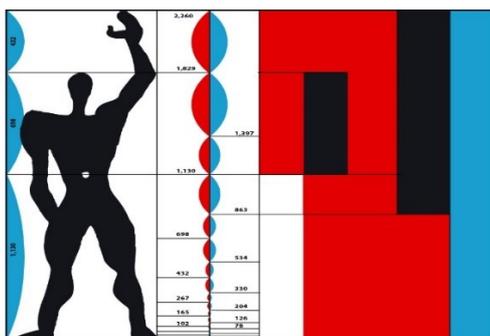
Il Doriforo è una statua che, come il nome ci indica, ritrae un atleta con un giavellotto in mano. In questa copia romana, conservata al Museo Archeologico di Napoli, manca la lancia che era retta dalla mano sinistra e si appoggiava sulla spalla. Policleto suggerisce la suddivisione della figura umana in otto parti, alte ciascuna quanto le dimensioni della testa. Secondo il canone policleteo ogni elemento del corpo umano deve essere rappresentato proporzionalmente a tutti gli altri. Il busto deve corrispondere a tre teste e le gambe a quattro (infatti: $1+3+4=8$). Per illustrare il concetto di proporzione Vitruvio nel suo trattato De Architettura (I secolo d.C.) ricorre continuamente all'esempio del corpo umano e nel suo III libro si esprime in merito alla simmetria e alle proporzioni di un edificio architettonico, basate sulle proporzioni del corpo umano. A questo brano è ispirato l'Uomo Vitruviano di Leonardo, sintesi della concezione armonica e antropocentrica del mondo in età rinascimentale. Le proporzioni ideali del corpo umano derivanti da questa figura corrispondono alla ragione aurea fra il lato del quadrato e il raggio del cerchio. In questo modo la geometria, grazie alla proporzione aurea, univa tecnica e bellezza.



Leonardo Da Vinci, Uomo Vitruviano (ca 1478 – 1490), disegno a penna su carta 34,4 x 24,5 cm., Venezia, Galleria dell'Accademia.

Il disegno mostra le proporzioni ideali del corpo umano, mettendolo in relazione con la geometria, iscrivendolo in un quadrato e un cerchio. Il lato del quadrato e il raggio del cerchio sono in rapporto aureo. Altezza totale = $1,618 \times$ altezza dell'ombelico (distanza dal suolo dell'ombelico).

Si tratta di un disegno a matita e inchiostro. Il nome dell'opera fa riferimento a Vitruvio, il grande architetto romano che aveva tessuto le lodi della proporzione divina nel suo libro "De Architectura". In questa rappresentazione delle proporzioni umane ideali, Leonardo vuole dimostrare che le proporzioni umane sono perfette quando l'ombelico divide il corpo in modo che, prendendo le misure tra piedi e ombelico e tra ombelico e testa, il rapporto sia aureo. Oltre all'uomo vitruviano possiamo citare anche la famosissima "Ultima cena (1494-1497), dove Gesù è dipinto con le proporzioni divine ed è racchiuso in un rettangolo aureo. Nel "Ritratto di Monna Lisa", detta "La Gioconda" (1503-1506), sembra sia stata trovata la sezione aurea in diversi punti. L'uso di questo rapporto è molto diffuso nel Rinascimento (all'incirca dalla metà del XIV al XVI secolo). Per il Rinascimento si può sicuramente citare Piero della Francesca, pittore e matematico, e la sua "Flagellazione di Cristo" (1440-1470): le due diverse aree dell'ambiente in cui avviene la flagellazione sono fra loro in rapporto aureo. Uno degli artisti più noti del periodo è Raffaello Sanzio. Sia nello "Sposalizio della Vergine" (1504) sia nella "Trasfigurazione" (1518-1520), l'area del dipinto viene divisa in due parti come quando si divide un rettangolo con sezione aurea. In un altro dipinto famosissimo "La nascita di Venere" del 1484 di Sandro Botticelli, l'artista applica più volte la sezione aurea: il rapporto tra l'altezza complessiva e l'altezza terra-ombelico di Venere risulta aureo, Possiamo poi citare Mondrian, che ha preso spunto dai rapporti matematici usati nell'architettura e proprio per questo ha spesso accostato quadrati a rettangoli in proporzione aurea, come è ben visibile in "La composizione in grigio e ocra" del 1918. Infine citiamo Le Corbusier (1887-1965), celebre architetto, urbanista, pittore e designer svizzero naturalizzato francese. Con il suo "Modulor" ha presentato lo schema della figura umana suddivisa in parti proporzionali, ognuna sezione aurea dell'altra. "Le Corbusier dimostrò sempre molta attenzione alle proporzioni. In realtà fu un grande musicista. Ma la sua musica, invece di svilupparsi nel tempo, si sviluppa nello spazio a tre dimensioni. E, come il musicista, egli si esprime attraverso rapporti..... Si può dire che il Modulor è una scala, paragonabile approssimativamente alle scale musicali anche se, invece di essere una scala di suoni, è una scala di grandezze spaziali" (André Wogenscky). Il termine Modulor deriva dalle parole francesi *module* (modulo) e *or* (section d'or). Si tratta di una "griglia proporzionale" basata su due scelte fondamentali, una di tipo matematico, una di tipo antropomorfo. Quest'ultima porta Le Corbusier ad associare alcune delle misure della griglia a misure del corpo umano, e ad assumere come valore di riferimento 1.83 m., altezza di un uomo ideale.



Nel “Modulor” il rapporto tra l’altezza dell’uomo (183 cm) e la distanza dell’ombelico dal suolo (113 cm) equivale al numero aureo, come nell’opera di Leonardo; ma molti altri rapporti aurei sono calcolati in quest’opera. È interessante sapere che Le Corbusier basava i suoi progetti architettonici sulla base di queste proporzioni per poter costruire oggetti ergonomici: dalle sedie ai tavoli, dalle maniglie delle porte alle finestre, dai palazzi all’urbanistica, tutto doveva rientrare nelle proporzioni armoniose di questo schema. Oltre al numero aureo esistono anche altri rapporti che hanno preso il nome di numero d’argento, numero di bronzo o altri numeri “metallici”. Il numero d’argento vale $1 + \sqrt{2}$. Abbiamo casi di applicazione di questi numeri nell’arte e nell’architettura, anche se molte di meno rispetto a quelle del numero aureo. Per esempio, il numero d’argento è collegato con il sistema usato dagli antichi Romani per le proporzioni architettoniche. In tre dimensioni il rapporto aureo è legato a solidi particolari, i solidi platonici. In particolare è legato all’icosaedro, composto da 20 triangoli equilateri che è il duale del dodecaedro, fatto con 12 pentagoni regolari. Ne “L’ultima cena” di Salvator Dali (1955), l’ambiente che ospita la cena è un dodecaedro trasparente in cui la parte alta fa da soffitto. Sulla tavola ci sono solo pane spezzato e un bicchiere di vino. Le dodici facce del poliedro possono essere associate ai dodici apostoli. Il numero aureo è legato anche alla famosa successione di Fibonacci che inizia con le due cifre uguali 1 e 1 mentre i termini successivi si ottengono semplicemente sommando i due termini precedenti, per cui otteniamo:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987

La sua importanza è dovuta al fatto che essa trova applicazione in ambiti diversi, tra cui anche l’arte. A Fibonacci si deve l’importante “Liber abaci”, in cui si propone la notazione posizionale decimale e l’utilizzo delle cifre arabe che, nel corso del tempo, sostituì la numerazione romana. La proprietà che lega i numeri di Fibonacci al numero aureo è quella per cui, calcolando il rapporto tra un termine della sequenza e il precedente si ottengono risultati sempre più vicini a ϕ . Un artista che fece grande uso dei numeri di Fibonacci è Mario Merz; dal 1970 introdusse nelle sue opere la successione di Fibonacci come simbolo dell’energia nella materia o anche della crescita organica. Sicuramente l’opera più nota e conosciuta da tutti i torinesi è l’installazione permanente chiamata “Il volo dei numeri” (1984), posta sulla cupola della Mole Antonelliana, e ancora sul soffitto della stazione metropolitana Vanvitelli (metropolitana di Napoli) avente forma a spirale.



Metropolitana Vanvitelli (Napoli)
Il volo dei numeri (1984)



Cupola Mole Antonelliana

Altri artisti che propongono molte volte la successione di Fibonacci sono Tobia Ravà, Nicolas Robert e Van Gogh. La successione di Fibonacci era stata notata in India addirittura nel VI secolo. Il merito fu del matematico Virahankae e la serie fu presentata come soluzione perla poesia. Infatti può essere usata per la metrica di componimenti aventi un numero costante di sillabe ma un numero arbitrario di lettere.

3. Regolarità e simmetria

L'antropologo Irenaus Eibl-Eibesfeldt (la cui madre era una storica dell'arte) fece molti viaggi nei Caraibi e alle isole Galapagos che gli diedero lo spunto per fare ricerca ed esperimenti sul comportamento di diversi animali, tra cui soprattutto scimmie, ma anche uccelli, che mettono in evidenza la loro preferenza per una disposizione di oggetti improntata a regolarità e simmetria. L'idea di simmetria può avere diverse definizioni operative e i relativi concetti sviluppati dalla matematica sono stati molto usati dalle varie forme d'arte. Ci sono diversi tipi di simmetria possibili che dipendono dal tipo di trasformazione che si compie. Esse sono: 1) Simmetria per traslazione; 2) Simmetria di rotazione; 3) Simmetria per riflessione; 4) Simmetria centrale; 5) Simmetria circolare; 6) Glissosimmetria. La glissosimmetria: uno strano nome per un oggetto semplice. Si tratta di una unione di simmetria per riflessione e simmetria per traslazione. Questo tipo di simmetria compare molte volte nei rosoni di moltissime opere, dall'antica Grecia all'antico Egitto fino all'impero romano. La realizzazione dei rosoni è collegata principalmente alla costruzione delle chiese ed ebbe uno dei momenti di massimo splendore nel periodo in cui in tutta Europa si costruivano cattedrali con grandi vetrate, all'incirca tra il XII e il XV secolo. Qualche esempio: lo splendido rosone del Duomo di Orvieto (1538), realizzato dal fiorentino Andrea Cione e il grande rosone di Notre-Dame (1182), la cattedrale di Parigi, in gran parte distrutta dall'incendio sviluppatosi nel tardo pomeriggio del 15 aprile 2019.



Rosone circolare realizzato nel 1257. La composizione è decorata da due guglie ottagonali e da tre sculture che richiamano quelle del portale.

Fonte: https://it.wikipedia.org/wiki/Cattedrale_di_Notre-Dame#Storia

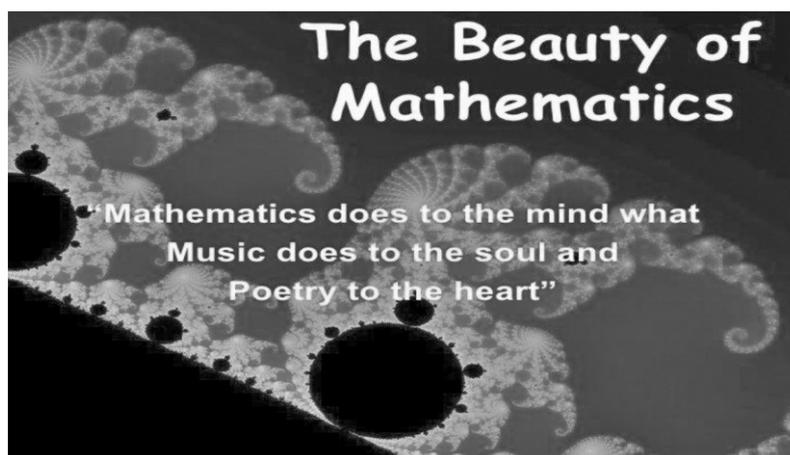


Rosone centrale del duomo di Orvieto. Fonte: www.bellaumbria.net/it/religione-e-spiritualita/

Anche nella musica possiamo notare un tipo particolare di simmetria: la simmetria temporale. Ci sono stati artisti, specie nell'ambito della musica classica, come Beethoven, Bach e Mozart, che hanno fatto corrispondere una simmetria a ciò che scrivevano sul pentagramma. Mozart, ad esempio, con il canone "Scherzetto-Duetto" per due violini. Un unico spartito valido per entrambi i violini, che però va letto e suonato in due direzioni opposte; ognuno suona quello che suona l'altro, ma nel verso opposto. A metà dello spartito i due violini si incontrano emettendo la stessa nota. Da quanto fin qui detto è facile evincere questo strettissimo legame fra matematica ed arti visive anche nel corso del Novecento. Tra le opere più significative che mettono in risalto questo felice connubio ricordiamo: Hyper Cube (1967) di Peter Forakis (1927-2009); La Crocifissione (1954) di Salvator Dali (1904-1984); Le tassellazioni di Maurits Cornelius Escher (1898-1972)-(tassellazioni triangolari ed esagonali); Le tassellazioni di Roger Penrose (1931); Gli arazzi portoghesi; Le tassellature bidimensionali che è possibile ammirare nella Chiesa di Santa Maria in Trastevere a Roma, nel palazzo Topkapi ad Istanbul e l'Alhambra a Granada. Concludiamo questo viaggio tra matematica e arte con l'analisi di alcuni studi di tassellazione geometrica compiuti da un artista del novecento: Maurits Cornelius Escher, di origine olandese che si era sempre interessato all'arte della grafica e dell'incisione. Dai suoi numerosi viaggi in Italia e in Spagna nasce l'interesse per la matematica e per le configurazioni geometriche presenti in natura. In seguito approfondì gli studi sulle infinite possibilità offerte dalla matematica applicata all'arte. Varie forme di simmetria, la ripetizione modulare, la rotazione e il ribaltamento delle figure divennero gli strumenti per dare ampio spazio alla sua fantasia ed alla sua immaginazione. L'opera di Escher riflette appieno la sensibilità e le idee del suo tempo che si concretizzano con le emergenti discipline scientifiche di inizio Novecento. Con le sue opere Escher ha

Alla ricerca della matematica che si nasconde tra le pieghe dell'arte

saputo rappresentare in modo personale il legame tra conoscenze scientifiche ed immaginazione dimostrando come regole matematiche possano diventare strumenti di creatività e la ricerca scientifica e tecnologica possano stimolare la fantasia e l'immaginazione. "L'atteggiamento scientifico e quello artistico coincidono – sosteneva Italo Calvino- Entrambi sono atteggiamenti insieme di ricerca e di progettazione, di scoperta e d'invenzione." E lo stesso Victor Hugo affermava: "..... non vi è alcuna incompatibilità fra l'esatto e il poetico. Il numero è nell'arte come nella scienza..... L'anima dell'uomo ha tre chiavi che aprono tutto: la cifra, la lettera, la nota. Sapere, pensare, sognare. Tutto qui."



Arte e matematica nel primo ciclo

Chi lavora con le sue mani è un lavoratore. Chi lavora con le sue mani e la sua testa è un artigiano. Chi lavora con le sue mani e la sua testa ed il suo cuore è un artista.

San Francesco d'Assisi

Arte e creatività svolgono un ruolo fondamentale nell'ambito dell'evoluzione infantile, collegando la pratica delle attività artistiche alle abilità comunicative e allo sviluppo fisico e cognitivo. L'arte contribuisce a migliorare le capacità espressive, a favorire l'apprendimento logico – matematico e linguistico, a rafforzare la consapevolezza di sé e a liberare le potenzialità creative insite in esso. In definitiva, essa sembra essere determinante al fine di un'evoluzione interiore dell'individuo. La matematica contribuisce...alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il "pensare" e il "fare" e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, eventi quotidiani, concetti e artefatti costruiti dall'uomo (Indicazioni Nazionali 2012). Per John Dewey attraverso l'arte il bambino utilizza proficuamente la propria energia creativa. L'arte non può essere, quindi, considerata come un'esperienza a sé stante ma va messa in relazione alla psicologia dei singoli individui e alle realtà socio-culturali da cui scaturisce. Il fine ultimo dell'attività creativa del bambino non deve essere il manufatto che egli realizza, quanto piuttosto la capacità di osservazione, l'abilità di memorizzare e di immaginare che l'arte contribuisce a sviluppare; abilità che conferiscono all'individuo buone capacità critiche e

di risoluzione dei problemi. Anche per Maria Montessori l'esperienza manipolativo-sensoriale, tipica della produzione artistica, assume un ruolo centrale in chiave evolutiva. La mano infatti può essere considerata una sorta di protesi della mente. Un bambino assorto a dipingere, scrivere, danzare e comporre altro non fa che pensare con i propri sensi e il lavoro creativo, nel suo svolgimento, coinvolge quindi numerose capacità cognitive socio-emozionali e multisensoriali. Durante la crescita dell'individuo, questo tipo di esperienze continua ad influenzare lo sviluppo del cervello, le abilità, la creatività e l'autostima, favorendo inoltre l'interazione con il mondo esterno e fornendo tutta una serie di abilità che agevolano l'espressione di sé e la comunicazione. L'arte permette percorsi di scoperta e di apertura al nuovo, incoraggiando a lasciarsi andare nel manifestare i propri desideri, le proprie emozioni, le proprie conoscenze e nel farsi guidare a sperimentare con coraggio situazioni non conosciute. La matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri. (Indicazioni Nazionali 2012). Attraverso l'arte i bambini imparano a conoscere, ad osservare, ad esprimersi, a scoprire il piacere del fare, a creare, a provare e dire di sì alle proposte con entusiasmo e a sviluppare il senso del bello. Usare l'arte nei percorsi scolastici restituisce centralità al fare con le mani, al pensare a quello che si fa e ad arricchirlo con le proprie emozioni. Tutto questo sostiene l'organizzazione spaziale, l'organizzazione del corpo, l'organizzazione del tempo e favorisce l'aspetto percettivo e logico matematico. Il bambino impara ad esprimersi, a raccontarsi, ad imparare in modo divertente e significativo.

Dimmi e io dimentico! Insegnami e io ricordo! Fammi partecipe e io apprendo!
Benjamin Franklin

Matematica e arte rafforzano quindi le competenze cognitive e socio emozionali favorendo l'interazione fra l'alunno e il mondo esterno. La matematica esamina la realtà attraverso regole che permettono di ricomporla, interpretarla e riprodurla. Attraverso il processo artistico i bambini avviano un percorso di scoperta: sperimentano, analizzano varie possibilità e scoprono nuove soluzioni. Nelle attività scolastiche diventa peculiare un approccio che parta dall'osservazione e che metta al centro l'allievo per... suscitare, attraverso l'osservazione dei fatti riguardanti la tecnica, l'arte e la natura, l'interesse dell'alunno per le proprietà fondamentali delle figure geometriche e, con esso, il gusto e l'entusiasmo per la ricerca. Questo gusto non può nascere se non facendo partecipare l'alunno nel lavoro creativo. È necessario animare la naturale e istintiva curiosità che hanno i ragazzi accompagnandoli nella scoperta delle verità matematiche, trasmettendo l'idea di averlo fatto per sé stessi e, dall'altra parte, far sentire progressivamente la necessità di un ragionamento logico... Emma Castelnuovo. Questo percorso nasce dal desiderio di aprire lo sguardo sulla matematica, una disciplina spesso considerata sterile, astratta, piena di regole, fine a sé stessa, per coglierla "in azione" all'interno dell'espressione artistica. Abbiamo cercato quindi di coniugare l'aspetto

artistico-creativo con quello matematico, osservando linee e forme nella realtà, giochi antichi ed opere d'arte che potessero ispirare la fantasia dei bambini e, allo stesso tempo, facessero riflettere sull'uso delle forme geometriche. Coniugare matematica e arte vuol dire invitare i bambini/ragazzi a dare sfogo alla loro creatività; una forma di intelligenza spesso latente ma che, con opportune attività, emerge facilmente. L'alunno sviluppa le capacità di osservare e descrivere, di leggere e comprendere criticamente le opere d'arte. Lo sviluppo di queste capacità è una condizione necessaria per creare un atteggiamento di curiosità e di interazione positiva con il mondo artistico. È importante infatti che l'alunno apprenda, a partire dai primi anni, gli elementi di base del linguaggio delle immagini e allo stesso tempo sperimenti diversi metodi di approccio alle opere d'arte, anche attraverso esperienze dirette nel territorio e nei musei. (Indicazioni Nazionali 2012). I collegamenti tra arte e matematica si possono trovare anche in alcuni famosi giochi dell'antichità, come, ad esempio, lo Stomachion di Archimede e nell'arte moderna. Parlare dello Stomachion vuol dire non solo giocare con la matematica, in particolare con la geometria con l'opportunità di andare oltre per sconfinare in altri campi scoprendo, per esempio come calcolare aree di poligoni irregolari col teorema di Pick o come introdurre l'idea della Combinatoria, ma anche rivisitare una pagina di storia della matematica di recente rivalutata in seguito al ritrovamento del codice "C" di Archimede. Quanto all'arte moderna, pensiamo all'astrattismo dove, adottando numerose tecniche pittoriche, ci si allontana dall'arte figurativa come imitazione della realtà, sostituendola alla sua rappresentazione, come espressione astratta di sentimenti e idee attraverso forme, linee e colori. Perché allora non proporre un percorso di arte e matematica già dalla scuola dell'Infanzia per svilupparlo attraverso il Curricolo Verticale nel Primo ciclo d'istruzione?

4. Qualche idea per un percorso multidisciplinare tra arte e matematica

Costruzione di un percorso didattico tra arte e matematica per la scuola dell'Infanzia, Primaria e Secondaria di 1° grado

In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive. (Indicazioni Nazionali 2012). Le attività proposte vengono sviluppate secondo la metodologia didattica della flipped classroom attraverso un'attività di ricerca delle informazioni relative agli artisti, alla corrente alla quale appartengono, al periodo storico, alla collocazione geografica, alla produzione artistica e ai legami tra la loro arte e la matematica. In classe inizia l'attività laboratoriale nella quale gli alunni

divisi in piccoli gruppi organizzano il materiale prodotto secondo modalità condivise con i compagni sperimentando forme diverse di collaborazione e cooperazione.

Possibile schematizzazione delle attività

1. Lavoro a casa	indagine, ricerca, raccolta delle conoscenze, ipotesi progettuale
2. Discussione in classe	brainstorming/brainwriting
3. inizio progettazione Lavoro finale	mappe concettuali, realizzazione disegni, costruzioni in 3D, ideazione giochi
4. Presentazione dei risultati	argomentazioni, discussioni, confronti e approfondimenti
5. Studio dei prodotti finiti	in modo individuale e in gruppo
6. Verifica conoscenze	test a domanda aperta/ multipla/ enunciato vero-falso

La scelta degli alunni ha riguardato opere d'arte di famosi pittori scelte tra quelle che li avevano maggiormente colpiti. Dall'osservazione dell'opera scelta sono scaturiti una serie di momenti operativi:

- ✚ Osservazione del quadro e rilevazione sensazioni ed emozioni
- ✚ Contenuti possibili, relativi alle caratteristiche tecniche dell'opera
- ✚ Raccordi interdisciplinari riconoscendo quelli tra arte, matematica e altre discipline
- ✚ Attività collegate all'opera, scelte tra quelle già realizzate, trovate durante l'attività di ricerca o create dagli alunni
- ✚ Giochi riconducibili alle caratteristiche del quadro, realizzati anche come attività di coding unplugged e non
- ✚ Verifiche attraverso la progettazione di attività finali che dimostrino il raggiungimento di nuove conoscenze, abilità e competenze

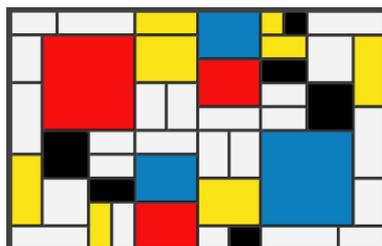
Fin dalla scuola dell'infanzia, nella scuola primaria e nella scuola secondaria di primo grado l'attività didattica è orientata alla qualità dell'apprendimento di ciascun alunno e non ad una sequenza lineare, e necessariamente incompleta, di contenuti disciplinari. I docenti, in stretta collaborazione, promuovono attività significative nelle quali gli strumenti e i metodi caratteristici delle discipline si confrontano e si intrecciano tra loro, evitando trattazioni di argomenti distanti dall'esperienza e frammentati in nozioni da memorizzare. (Indicazioni Nazionali 2012).

5. Alla scoperta dell'arte e dei grandi artisti: Mondrian, Kandinsky, Klee ed Escher.

L'incontro dei bambini con l'arte è occasione per guardare con occhi diversi il mondo che li circonda. I materiali esplorati con i sensi, le tecniche sperimentate e condivise nell'atelier della scuola, le osservazioni di luoghi (piazze, giardini, paesaggi) e di opere (quadri, musei, architetture) aiuteranno a migliorare le capacità percettive, coltivare il piacere della fruizione, della produzione e dell'invenzione e ad avvicinare alla cultura e al patrimonio artistico. (Indicazioni Nazionali 2012)

➤ Piet Mondrian

Nasce il 7 marzo 1872 in Olanda muore a New York il 2 febbraio 1944. Fondatore del **neoplasticismo**, usava il colore come elemento essenziale delle sue composizioni, scegliendo la forma più semplice: i **tre colori primari, cioè rosso, giallo e blu** e i tre non-colori, ossia nero, bianco e grigio.....Cosa voglio esprimere con la mia opera? Niente di diverso da quello che ogni artista cerca: raggiungere l'armonia tramite l'equilibrio dei rapporti fra linee, colori e superfici.



Dall'osservazione alla realizzazione di percorsi operativi:

- ☺ Classificazione delle linee
- ☺ Attività di Coding Unplugged (seguendo le coordinate del codice è possibile colorare il quadro secondo il modello)
- ☺ Il gioco di Mondrian (utilizzando un dado con i colori del quadro procedere alla colorazione secondo il modello)
- ☺ Giochiamo con i polimini
- ☺ Quadrati magici
- ☺ Algoritmi alternativi (bastoncini cinesi e moltiplicazioni arabe)
- ☺ Giochiamo con le linee come Naum Gabo

➤ Paul Klee

Nasce a Berna, nel 1879 e muore a Locarno nel 1940. Era all'inizio un disegnatore e un incisore e approfondì le possibilità espressive della linea intesa come "elemento figurativo indipendente". Dopo il 1908 scoprì i valori della pittura di Cézanne, Van Gogh, poi conobbe Kandinskij, Picasso, Apollinaire, che influenzarono la sua attività successiva.



Dall'osservazione alla realizzazione di percorsi operativi:

- ☺ Poligoni con le cannuce
- ☺ Perimetro e area poligoni
- ☺ Equiestensione e isoperimetria
- ☺ Dalle figure piane ai solidi
- ☺ Area e volume dei solidi
- ☺ Numeri quadrati
- ☺ Numeri rettangolari
- ☺ Numeri triangolari
- ☺ Coding dalla piattaforma di PROGRAMMA IL FUTURO (Disegniamo un quadrato con il gioco "L'artista" <https://studio.code.org/s/course2/stage/4/puzzle/10>)

➤ Vasily Kandinsky

Nasce a Mosca il 4 dicembre 1866 e muore il 13 dicembre 1944 a Neuilly-sur-Seine, in Francia. Fondatore *dell'arte astratta*, che elimina qualsiasi riferimento alla realtà. Ha realizzato composizioni attraverso *forme semplici e colori*. Per lui ogni forma possiede un valore espressivo, che può essere esaltato o attenuato dalla combinazione con altre forme o colori.



“...e uno dopo l'altro quegli esseri straordinari che vengono chiamati colori venivano fuori esultanti festosi, riflessivi, fantastici immersi in sé, vivi in sé e per sé, singolarmente dotati di tutte le qualità necessarie a condurre una vita autonoma e pronti in ogni momento a piegarsi spontaneamente a nuove combinazioni a mescolarsi fra loro e a creare serie infinite di mondi nuovi”. Vasilij Kandinsky - Sguardo al passato

Dall'osservazione alla realizzazione di percorsi operativi:

- ☺ Il cerchio di Kandinsky (drammatizzazione delle sensazioni ed emozioni dell'essere un cerchio)
- ☺ Disegnare il cerchio
- ☺ Le caratteristiche del cerchio
- ☺ Pi greco π (esperimenti, storia, caratteristiche e curiosità)
- ☺ Circonferenza e area
- ☺ Coding dalla piattaforma di PROGRAMMA IL FUTURO (quanti gradi ci sono in un cerchio? Divertiti a creare un cerchio colorato con il gioco “ L'artista”

<https://studio.code.org/s/course3/stage/3/puzzle/5>

➤ Maurits Cornelis Escher

Nasce il 17 giugno 1898 in Olanda e muore il 27 marzo 1972 a Laren, sempre in Olanda. Divenne famoso per i suoi *disegni impossibili*, che sono delle *vere e proprie illusioni ottiche*. Nelle sue opere il basso diventa alto e viceversa, l'acqua scende e poi la stessa sale, i personaggi di sfondo diventano figure in primo piano, i pesci diventano anatre e così via, in un susseguirsi di paradossi.



Dall'osservazione alla realizzazione di percorsi operativi:

- ☺ Simmetria
- ☺ Traslazione
- ☺ Rotazione
- ☺ Tangram
- ☺ Tasselazioni sul quaderno a quadretti
- ☺ Tasselazioni con Paint
- ☺ Giochi di associazioni logiche

Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo. La familiarità con immagini di qualità ed opere d'arte sensibilizza e potenzia nell'alunno le capacità creative, estetiche ed espressive, rafforza la preparazione culturale e contribuisce ad educarlo a una cittadinanza attiva e responsabile. (Indicazioni Nazionali 2012).

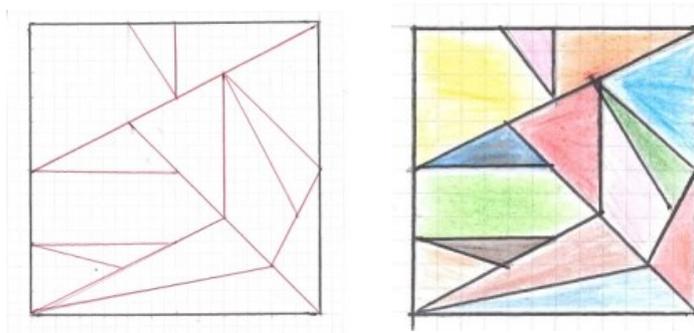
6. E ora giochiamo con lo Stomachion

Stomachion? Un rompicapo di combinatoria dotato di significato geometrico che, letteralmente, fa pensare al mal di stomaco perché pare lo provocasse in chi lo praticava per lungo tempo (anche se Ausonio e Cesio Basso, poeti latini, lo paragonano, il primo ad una poesia in versi e il secondo ad un passatempo per rafforzare la memoria); insomma, comunque sia, un gioco matematico da sperimentare anche in classe, cominciando dalle vicende storiche! Nel 1229, a Gerusalemme, mentre Federico II di Svevia combatte i musulmani, un amanuense sta completando un libro di preghiere destinato al monastero di San Saba, nel deserto del Sinai; non immagina che su quelle vecchie pergamene riciclate si celino copie di antichi testi greci ... Dopo circa 700 anni, esattamente nel 1906, a Istanbul, nella biblioteca della chiesa del Santo Sepolcro, viene rinvenuta un'antica pergamena ritenuta talmente interessante da essere donata al Museo d'arte di Baltimora; qualcuno insinua che celi un'opera di Archimede! Passano ancora circa 90 anni, così nel 1998, a New York un anonimo miliardario si aggiudica ad un'asta, un libro per 2000000 di dollari; si tratta, evidentemente, di un libro prezioso: infatti, all'interno dei fogli di pergamena, cancellati e ricoperti da preghiere medioevali, si nascondono le parole e i disegni di Archimede di Siracusa (III secolo a. C). L'anonimo affida a scienziati e accademici l'analisi dell'opera e così, grazie a tecniche sofisticatissime, viene riportato alla luce uno dei tre soli manoscritti in lingua greca, risalenti al nono secolo, opera di Archimede. Si tratta del codice "C", chiamato anche "Palinsesto di Costantinopoli", formato da un insieme di fogli di pergamena antichi, raschiati per essere utilizzati, tagliati, ruotati di 90°, rilegati in ordine diverso e sovrascritti come libro di preghiera che, al loro interno, nascondono due grandi novità a proposito di quello che il mondo già sapeva del

grande genio siracusano: Il “Metodo” e lo Stomachion. Il manoscritto dedica alcune pagine alla presentazione del gioco, simile al più celebre Tangram cinese, la differenza sta nel fatto che, invece di 7 tessere, lo Stomachion ne utilizza il doppio e, di tipo geometrico. Le tessere, al tempo di Archimede, erano fatte di ossicini di avorio e si conservavano in una scatola detta “loculus”; il gioco consisteva nel comporre, con le tessere, sagome di figure fantasiose ispirate alla natura come il famoso l'elefantino o figure geometriche composite.



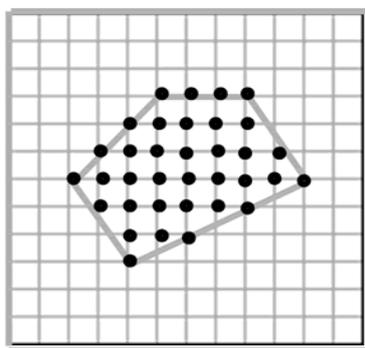
Il problema sottostante, frutto di un'elaborazione successiva del gioco, che nasceva spontaneo in un matematico che lo praticava, era quello di interrogarsi sul numero dei modi possibili in cui le tessere (11 triangoli, 2 quadrilateri e un pentagono, come rappresentati in figura) potevano essere composte per riempire un quadrato, posto su una base quadrettata di 12 quadretti per lato; nel 2003 un gruppo di matematici di Stanford, provò che ciò poteva essere realizzato in almeno 17152 modi! Di seguito rappresentazioni effettuate nel corso del gioco con una classe:



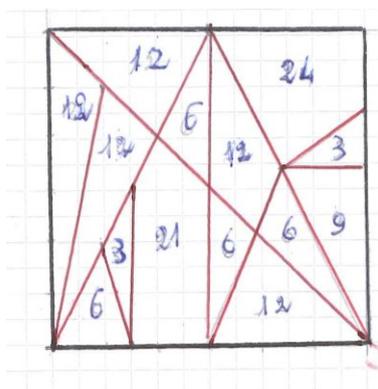
La valenza didattica del gioco

Componendo le tessere si può ragionare geometricamente, per esempio si può discutere di come calcolare l'area di queste figure irregolari, quando ciò non sia strettamente palese. Una proposta può essere quella di far ricorso al teorema di George Alexander Pick secondo il quale “L' area di una figura geometrica, i cui vertici siano punti di un reticolo, è uguale alla somma del numero dei punti interni e della metà dei punti toccati dal contorno della figura, meno un'unità”. Dalla figura sotto riportata, è facile dedurre che

l'area, in termini di quadretti, è pari a 28,5 poiché i punti interni alla figura sono 24 mentre quelli toccati dal contorno sono 11.



Il teorema può essere, con soddisfazione, applicato alle combinazioni realizzate dagli alunni che possono verificare come l'area del quadrato che contiene le tessere risulti dalla somma delle aree dei poligoni componenti. Il calcolo può essere riassunto come nella tabella seguente:



Poligoni	Numero pezzi	Area (quadretti)	Totale
Triangoli	2	3	6
Triangoli	4	6	24
Triangoli	1	9	9
4 triangoli e un quadrilatero	5	12	60
Pentagono	1	21	21
Quadrilatero	1	24	24
Totale	14		144 = 12x12

Sono molte le opportunità che il gioco offre in termini di attività didattiche: dalla scuola dell'infanzia alla scuola secondaria e non solo di primo grado! È possibile, ad esempio, recuperare manualità favorendo gli alunni più deboli fornendo loro proposte di

Alla ricerca della matematica che si nasconde tra le pieghe dell'arte

combinazioni, forbici, cartoncino, pennarelli, ecc per ricreare composizioni anche astratte, con creatività e fantasia, oppure discutere sulle proprietà delle tessere (figure geometriche non proprio usuali). Anche ragionare sui numeri contenuti nella tabella per cercare di scoprire una loro logica interna, o qualche possibile ricorrenza, può essere di stimolo per i più dotati, come suggerito dai docenti che, con molto interesse, hanno seguito il laboratorio alla scuola estiva di Pescasseroli.

Il matematico, come il pittore o il poeta, è un creatore di forme. E se le forme che crea sono più durature delle loro è perché le sue, sono fatte di idee." Godfrey H. Hardy

Bibliografia

B. Russell, *The analysis of mind*, London

E. Panofsky, *La prospettiva come forma simbolica*, Feltrinelli

P. Halmos, *Mathematics is a creative art*, *American Scientist* 56 (1968), 375-389

Istvan Harittaj, *Symmetry Unifying Human Understanding*, N.York, Pergamon Press, 1986

S. Marcus, *Poetica matematica*, Casa Editrice dell'Accademia, Bucarest, 1970. (trad.ital.)

H. Poincare, *Mathematical creation*, *American Scientist*, 179, 54-97, 1948

C.B. Boyer, *Storia della matematica*, Oscar Mondadori, 1997

M. Kline, *Storia del pensiero matematico*, Biblioteca Einaudi, 1999

Michele Emmer, *La perfezione visibile: matematica e arte*, Edizioni Theoria, Roma 1991.

Michele Emmer, *The Visual Mind: Art and Mathematics*, The MIT Press, Cambridge, 1993.

Michele Emmer, *Visibili armonie: Arte, Cinema, Teatro e Matematica*, Bollati Boringhieri, 2006.

Michele Emmer, *Bolle di sapone tra arte e matematica*, Bollati Boringhieri, 2009.

Sitografia (principali riferimenti)

Matepristem, <http://matematica.unibocconi.it>

Progetto Polymath, <http://areweb.polito.it/didattica/polymath>

Un percorso didattico per introdurre il ragionamento probabilistico nella Scuola Primaria

Luciana Delli Rocili¹, Antonio Maturo²

¹Istituto Comprensivo Statale Pescara 5, Via Gioberti n. 15, 65100 Pescara
e-mail: lucianadr@live.it

²Mathesis Abruzzo, Via Pianacci 21, 65015, Montesilvano
e-mail: antomato75@gmail.com

Sunto Si presenta un possibile percorso per introdurre il ragionamento probabilistico nella scuola elementare. In una prima fase, abbiamo ritenuto preferibile un approccio logico ad uno numerico. In una esperienza condotta in classe i ragazzi sono stati portati ad approfondire il concetto di evento, le operazioni fra eventi e il confronto di eventi in base alla stima della loro maggiore o minore facilità di verificarsi. È stata quindi introdotta la probabilità qualitativa ed in un secondo tempo la probabilità soggettiva.

Parole Chiave Eventi. Probabilità qualitativa. Probabilità soggettiva. Sperimentazione nella scuola primaria.

1. Il concetto di evento

Il punto di partenza fondamentale per la probabilità soggettiva, che è l'impostazione generale al ragionamento probabilistico, essenziale per le decisioni in condizioni di incertezza, è il *concetto di evento*.

Esso va definito come una proposizione della logica binaria, ossia una affermazione che può assumere solo i valori "vero" o "falso".

Nella logica del certo si ammette, in generale, che ci sia una adeguata *informazione* e un adeguato *criterio di verifica* per:

- stabilire che una data affermazione è una proposizione della logica binaria;
- verificare se l'affermazione è vera o falsa.

In condizioni di incertezza la situazione è più complessa, in quanto si ammette che:

- il decisore può stabilire che una data affermazione A può assumere solo uno dei valori "vero" o "falso";
- in caso di informazione completa, il decisore può verificare se l'affermazione è vera o falsa;

- in caso di informazione incompleta, il decisore può esprimere, per mezzo di un numero reale appartenente all'intervallo $[0, 1]$, il suo *grado di fiducia* che l'affermazione A sia vera. Il grado di fiducia si dice "*probabilità di A* " e si indica con $p(A)$.

Per evitare che l'assegnazione del grado di fiducia sia arbitraria si introducono una serie di procedure e condizioni da rispettare. In particolare:

- si introduce una relazione di preordine totale \angle fra gli eventi che si considerano, scrivendo $A \angle B$ se il decisore ritiene che A abbia una "facilità di verificarsi" minore o uguale a quella di B . La relazione di preordine è detta "*probabilità qualitativa*" se soddisfa alcune "condizioni di coerenza".
- si assume il vincolo che le probabilità soggettive della famiglia \mathcal{E} di eventi che si considerano siano "compatibili" con la probabilità qualitativa. Ossia:

$$A \angle B \Rightarrow p(A) \leq p(B).$$

Si può notare che in generale non è possibile avere la "stretta compatibilità", ossia

$$A \angle B \Leftrightarrow p(A) \leq p(B).$$

Per avere una stretta compatibilità può infatti essere necessario ricorrere all'Analisi Non Standard, considerando campi ordinati che sono una estensione di quello dei numeri reali. In questo caso i valori assunti si ottengono da valutazioni di probabilità condizionate.

2. Un percorso didattico sulla logica degli eventi

2.1 Riconoscere quali affermazioni sono eventi

La prima parte di un itinerario didattico sulla logica degli eventi, di preparazione all'assegnazione di probabilità, consiste nel chiedere agli studenti di scrivere (in forma anonima) delle affermazioni che essi ritengono siano *eventi* e delle affermazioni che essi considerano *non eventi*. Tali affermazioni sono poi analizzate da un comitato di due studenti più il docente e sono classificate con i seguenti criteri:

- Evento certo Ω , è un evento che si riconosce essere vero;
- Evento impossibile \emptyset , è un evento che si riconosce essere falso;
- Evento aleatorio, è un evento per il quale le informazioni in possesso dei decisori non permettono di stabilire se è vero o falso;
- Evento fuzzy, è una proposizione che può avere più di due valori di verità. Ossia è una proposizione ben strutturata da un punto di vista linguistico, interpretabile come una domanda, che può avere come risposte anche valori intermedi fra "falso" e "vero";
- Proposizioni non ben strutturate da un punto di vista linguistico.

2.2 Stabilire le relazioni logiche fra gli eventi che si considerano

Per ogni evento E , scriviamo $E = 1$ se l'evento è vero, $E = 0$ se è falso.

Indichiamo con $\neg E$ l'evento (detto *contrario* di E) che è vero se e solo se E è falso.

Dati due eventi A e B diciamo che essi sono *logicamente indipendenti* se la coppia (A, B) può assumere tutti i valori dell'insieme $V = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$.

Diciamo che A e B sono *logicamente dipendenti* se almeno una di tali coppie di valori non può essere assunta. In particolare, se i valori assunti da (A, B) sono tre si dice che la dipendenza è *semplice*, se invece sono due la dipendenza è *doppia*.

In particolare, A e B si dicono:

- *incompatibili*, se (A, B) non può assumere il valore $(1, 1)$;
- *esaustivi*, se (A, B) non può assumere il valore $(0, 0)$;
- si dice che A *implica* B (oppure che è *contenuto* in B , $A \subseteq B$) se (A, B) non può assumere il valore $(1, 0)$;
- si dice che A è *implicato* da B (oppure che *contiene* B , $A \supseteq B$) se (A, B) non può assumere il valore $(0, 1)$.

Si ha una dipendenza doppia se (A, B) può assumere solo due dei valori di V . Casi particolari (per eventi aleatori) sono:

- *uguaglianza* $A = B$, se (A, B) assume solo i valori $(0, 0)$ e $(1, 1)$;
- *contrario* $A = \neg B$, se (A, B) assume solo i valori $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

I concetti di indipendenza e dipendenza logica si estendono a tre o più eventi. Tre eventi A, B, C si dicono *logicamente indipendenti* se la terna (A, B, C) può assumere tutti i valori dell'insieme $V = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$. A, B, C sono *logicamente dipendenti* se almeno una di tali terne di valori non può essere assunta. In particolare, A, B, C si dicono:

- *a due a due incompatibili*, se i valori di V che sono possibili hanno al più un solo 1, ossia l'insieme dei valori assunti da (A, B, C) è $\{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$;
- *esaustivi*, se (A, B, C) non può assumere il valore $(0, 0, 0)$.

Le definizioni di dipendenza e indipendenza logica si estendono ad un numero qualsiasi n di eventi, con $n \geq 2$. In particolare, dati n eventi non impossibili, $n \geq 2$, si dice che essi formano una "*partizione dell'evento certo*" se essi sono a due a due incompatibili ed esaustivi. In altre parole, due di essi non si possono verificare insieme e almeno uno di essi si deve verificare.

2.3 Operazioni logiche e costituenti

Dati due eventi A e B , si possono considerare le seguenti operazioni:

- *unione* (o *disgiunzione*), indicata con $A \cup B$, talvolta anche con $A + B$, è l'evento vero se almeno uno dei due è vero;

- *intersezione (o congiunzione)*, indicata con $A \cap B$, più spesso semplicemente con $A B$, è l'evento vero se entrambi A e B sono veri.

Dati due eventi A e B si dicono *costituenti* (o *atomi*) di $\{A, B\}$ gli eventi non impossibili appartenenti all'insieme $\{A B, A (-B), (-A) B, (-A) (-B)\}$. Al più ci sono quattro costituenti. Precisamente, i costituenti sono quattro se gli eventi sono logicamente indipendenti.

Dati tre eventi A, B, C i costituenti di $\{A, B, C\}$ sono gli eventi non impossibili appartenenti all'insieme $\{A B C, A B (-C), A (-B) C, (-A) B C, A (-B)(-C), (-A) B (-C), (-A) (-B) C, (-A) (-B) (-C)\}$. Al più ci sono otto costituenti.

La definizione si estende ad n eventi. Osserviamo che l'insieme dei costituenti è una partizione dell'evento certo.

L'analisi dei costituenti è indispensabile nella probabilità soggettiva e nelle decisioni in condizioni di incertezza.

3. La probabilità qualitativa

3.1 Disporre gli eventi per righe (ossia introdurre una relazione di preordine totale)

Un individuo confronta gli eventi appartenenti ad una famiglia \mathcal{E} , contenente $\{\emptyset, \Omega\}$. Per ogni coppia di eventi (A, B) esprime uno dei seguenti giudizi:

- (a) A ha *maggiore* facilità di verificarsi di B (si scrive $A > B$);
- (b) A ha *minore* facilità di verificarsi di B (si scrive $A < B$);
- (c) A e B hanno *uguale* facilità di verificarsi (si scrive $A \sim B$ e si legge A equivalente a B).

I ragazzi sono invitati a *svolgere il ruolo del decisore* e a collocare su una bacheca gli eventi per righe.

Se $A > B$, A va messo su una riga che sta sopra la riga di B .

Se $A < B$, A va messo su una riga che sta sotto quella di B .

Se $A \sim B$, A e B vanno messi sulla stessa riga.

3.2 Verificare le condizioni di coerenza

Il decisore deve fare attenzione a rispettare le seguenti regole, dette "*principi di coerenza*":

(C1) (*Coerenza rispetto all'evento impossibile*)

Un percorso didattico per introdurre il ragionamento probabilistico nella Scuola Primaria

Se A è un evento non impossibile deve essere $A > \emptyset$, dove \emptyset indica un evento impossibile. Questo significa che sull'ultima riga, quella più in basso, ci sono tutti e soli gli eventi impossibili.

(C2) (*Coerenza rispetto all'evento certo*)

Se A non è un evento certo deve essere $A < \Omega$, dove Ω indica un evento certo. Questo significa che sulla prima riga, quella più in alto, ci sono tutti e soli gli eventi certi.

(C3) (*Coerenza rispetto all'unione*)

Se C è un evento incompatibile con A e con B (ossia $C \cap A = \emptyset$, $C \cap B = \emptyset$), allora:

$$A > B \Rightarrow A \cup C > B \cup C. \quad (3.1)$$

Ossia, se A è su una riga superiore a quella di B , anche $A \cup C$ è sopra $B \cup C$.

(Si può usare una metafora: se A è più ricco di B e si regala una stessa somma C ad entrambi, allora A continua ad essere più ricco di B).

(C4) (*Coerenza rispetto alla differenza*)

Se C è un evento contenuto in A e in B (ossia $C \subseteq A \cap B$), allora:

$$A > B \Rightarrow A - C > B - C. \quad (3.2)$$

Ossia, se A è su una riga superiore a quella di B , anche $A - C$ è sopra $B - C$.

(Con una metafora: se A è più ricco di B e entrambi pagano una stessa somma C , allora A continua ad essere più ricco di B).

Nota Si può osservare che le condizioni di coerenza sopraelencate non sono indipendenti. Ad esempio, dalle condizioni (C1), (C3) e (C4) si può dedurre la (C2). Infatti, se valgono (C1), (C3) e (C4) ed A è un evento non certo, allora $-A$ è non impossibile e quindi $-A > \emptyset$.

Dalla (C3) segue $\Omega = -A \cup A > A = \emptyset \cup A$, e quindi vale (C2).

3.3 Alcune conseguenze delle condizioni di coerenza

(C5) (*Coerenza rispetto all'inclusione*)

Se C è strettamente contenuto in A ($C \subset A$) allora $C < A$.

[Infatti, essendo $\emptyset < A - C$ segue $C = C \cup \emptyset < A = C \cup (A - C)$]

(C6) (*Coerenza rispetto ad una aggiunta*)

Se $C \cap A = \emptyset$, $C \neq \emptyset$, allora $A < A \cup C$.

[Infatti, se $C \cap A = \emptyset$ allora $A \subset A \cup C$].

Dalle condizioni di coerenza (C3) e (C4) seguono anche le seguenti condizioni di "conservazione dell'equivalenza":

(C7) (*Conservazione dell'equivalenza rispetto all'unione*)

Se C è un evento incompatibile con A e con B (ossia $C \cap A = \emptyset$, $C \cap B = \emptyset$), allora:

$$A \sim B \Rightarrow A \cup C \sim B \cup C. \quad (3.3)$$

[Infatti, se $A \sim B$ non può essere $A \cup C > B \cup C$, poiché altrimenti, sottraendo C ad ambo i membri, sarebbe $A > B$. Analogamente non può essere $A \cup C < B \cup C$, poiché altrimenti, sottraendo C ad ambo i membri, sarebbe $A < B$].

(C8) (*Conservazione dell'equivalenza rispetto alla differenza*)

Se C è un evento contenuto in A e in B (ossia $C \subseteq A \cap B$), allora:

$$A \sim B \Rightarrow A - C \sim B - C. \quad (3.4)$$

[Infatti, se $A \sim B$ non può essere $A - C > B - C$, poiché altrimenti, aggiungendo C ad ambo i membri, sarebbe $A > B$. Analogamente non può essere $A - C < B - C$, poiché altrimenti, aggiungendo C ad ambo i membri, sarebbe $A < B$].

Naturalmente i ragazzi della Scuola Primaria non lavorano con formule matematiche per loro incomprensibili, ma attivano processi mentali che stimolano il ragionamento e le capacità logiche nel momento in cui sono chiamati a formulare proposizioni secondo precise richieste, a valutarle confrontandole e classificandole in base alla loro “facilità di verificarsi”, alla coerenza e così via. Il docente, in un secondo momento, può interpretare i dati che vengono raccolti e che spesso rivelano aspetti molto interessanti.

3.4 La probabilità qualitativa nel lancio di un dado.

Gli eventi associati al lancio di un dado sono rappresentati da sottoinsiemi di $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, “insieme degli esiti o eventi elementari”.

Ogni evento certo Ω è rappresentato da S ed ogni evento impossibile dal sottoinsieme vuoto di S .

Se il decisore D fa l'ipotesi

$H =$ “tutte le facce del dado hanno la stessa facilità di verificarsi”,

allora i principi di coerenza implicano che gli eventi devono essere collocati in 7 righe.

Contando le righe dall'alto in basso si ha:

La riga 1, quella più in alto, contiene solo S ;

La riga 2 ha i sottoinsiemi di S con 5 elementi;

La riga 3 ha i sottoinsiemi di S con 4 elementi;

La riga 4 ha i sottoinsiemi di S con 3 elementi;

La riga 5 ha i sottoinsiemi di S con 2 elementi;

La riga 6 ha i sottoinsiemi di S con 1 elemento;

La riga 7 quella più in basso, contiene solo \emptyset .

3.5 La probabilità qualitativa nel caso classico

Si generalizza l'esempio del dado. Data una partizione $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dell'evento certo, ogni evento è rappresentato da un sottoinsieme di S .

Se il decisore D fa l'ipotesi

$H =$ "tutti gli eventi $\{a_i\}$ hanno la stessa facilità di verificarsi" allora dai principi di coerenza segue che due eventi A e B sono sulla stessa riga se e solo se il numero di elementi di A è uguale al numero di elementi di B .

Gli eventi sono quindi collocati su $n+1$ righe.

3.6 La probabilità qualitativa ottenuta dalle frequenze

Si ammette che "si possa fare un numero finito m di prove (osservazioni o esperimenti) sempre nelle stesse condizioni e che per ogni prova si possa vedere se un dato evento E si verifica o meno".

Sia $n(E)$ (detto *frequenza assoluta* di E) il numero di volte che si verifica E .

Se A e B sono due eventi si pone:

$$A > B \Leftrightarrow n(A) > n(B). \quad (3.5)$$

Dalla (5) segue:

$$A \sim B \Leftrightarrow n(A) = n(B). \quad (3.6)$$

Se si assume l'ipotesi

$H =$ "un evento che non si è verificato mai è impossibile", (oppure l'ipotesi equivalente "un evento che si è verificato sempre è certo"),

allora valgono le condizioni di coerenza (C1), (C2), (C3) e (C4). In questo caso le (3.5) e (3.6) definiscono una probabilità qualitativa sull'insieme degli eventi osservati, soddisfacente le condizioni di coerenza.

4. La probabilità soggettiva: esperienze didattiche

Nel nostro percorso didattico, una volta preparati gli studenti alla comprensione dei concetti logici fondamentali, è apparso naturale introdurre la probabilità dal punto di vista soggettivo, più generale rispetto alle altre impostazioni, non legato ad assunzioni, più o meno sottintese, di equiprobabilità di eventi di una particolare partizione dell'evento certo.

Inoltre, la probabilità soggettiva è meno dipendente dal calcolo rispetto alle altre impostazioni, mette maggiormente in luce gli aspetti logici del ragionamento probabilistico e può essere introdotta facilmente ed efficacemente in maniera ludica.

L'idea definetiana di introdurre la probabilità attraverso le scommesse ha avuto un successo entusiastico da parte dei bambini, che, vedendo la scommessa come un gioco, hanno avuto lo stimolo per l'avvio alla comprensione dei fondamenti e delle procedure della logica dell'incerto.

Inoltre, è stato esaltato il collegamento interdisciplinare, in quanto lo sforzo di comprensione logica degli enunciati, del loro collocamento spaziale e temporale, ha portato ad uno spontaneo approfondimento dei concetti grammaticali, sintattici, storici, ottenendo, in particolare, un arricchimento del vocabolario e una velocizzazione nel processo di assimilazione dei concetti espressi in forma analitica, scritta o verbale.

Definito un evento, un bambino ha assunto il ruolo di banco e gli altri il ruolo di scommettitori.

Come monete sono state usate le figurine dei calciatori.

All'inizio sono stati presi in considerazione alcuni eventi legati alle squadre di calcio come i seguenti:

A = "Il Pescara Calcio vincerà la prossima partita",

B = "La Juventus vincerà domenica prossima",

C = "Il Milan vincerà la prossima partita in casa".

Successivamente sono stati considerati eventi legati alla vita quotidiana:

D = "Lunedì prossimo pioverà",

F = "Il maestro Alberto fra 15 giorni avrà i capelli rasati",

Una sperimentazione numericamente efficace avrebbe richiesto l'uso di 100 o almeno 50 figurine. Tuttavia, essendo in una prima elementare, è stato necessario limitarsi all'uso di 20 figurine, in quanto 20 rappresenta concretamente "*tutto un uomo*", il numero delle sue dita di mani e piedi, e ciò porta gli alunni ad avere consapevolezza dei concetti di quantità e di numero.

Un bambino (lo scommettitore) doveva decidere la quantità di figurine P (la puntata) da puntare sul verificarsi dell'evento E considerato; in cambio il banco doveva pagare 20 figurine se l'evento E si verificava. Il rapporto $p = P/20$ è la probabilità che il bambino attribuiva (implicitamente) all'evento E.

4.1 Le fasi del lavoro

Il lavoro è stato organizzato nelle seguenti fasi:

Fase 1. Gli scommettitori sono stati lasciati liberi di decidere la loro puntata sugli eventi considerati.

Fase 2. I bambini, sempre con la vincita fissa di 20 figurine, sono stati invitati a puntare anche sugli eventi contrari.

Fase 3. Si è aperta una discussione sul significato delle puntate sia sugli eventi e sia sui loro contrari. Ciò ci ha permesso di individuare, per ogni bambino, la *propensione*, l'*avversione* o l'*indifferenza* al rischio. Per ogni evento E, indicando con P(E) e con Q(E) le puntate, rispettivamente su E e -E, abbiamo calcolato il valore:

$$I = (P(E) + Q(E) - 20) / 20. \quad (4.1)$$

Il numero I , che chiamiamo “*indice di propensione al rischio*”, per puntate che non superano la vincita, appartiene all’intervallo $[-1, 1]$. Esso è positivo in caso di propensione al rischio, negativo in caso di avversione al rischio e nullo per indifferenza al rischio.

Fase 4. A partire dalle idee emerse nella fase precedente è stato introdotto il concetto di *coerenza* della scommessa, invitando i bambini a riflettere sulla opportunità di accettare i seguenti *principi di coerenza*:

- (a) la puntata non può superare la vincita, in quanto altrimenti il bambino ha una perdita certa;
- (b) se l’evento è impossibile la puntata è nulla;
- (c) la puntata non può essere negativa, perché ciò significherebbe che il banco paga il bambino per puntare e poi lo paga se vince;
- (d) se un bambino punta contemporaneamente le somme $P(E)$ e $Q(E)$ rispettivamente sull’evento E e sul suo contrario $-E$, con la vincita uguale alla stessa quantità di figurine, allora possono verificarsi 3 casi:

- I) $P(E) + Q(E) < 20$;
- II) $P(E) + Q(E) > 20$;
- III) $P(E) + Q(E) = 20$.

Nel primo caso il bambino ha un guadagno certo, nel secondo una perdita certa. Per evitare queste due circostanze inaccettabili, la prima dal banco, la seconda dal bambino, allora è necessario concordare la “condizione di coerenza” che la somma delle due puntate deve essere uguale alla vincita. Essendo $p(E) = P(E)/20$, $p(-E) = Q(E)/20$, le condizioni di coerenza equivalgono alle formule matematiche

$$p(\emptyset) = 0, p(E) \geq 0, p(-E) \geq 0, p(E) + p(-E) = 1. \quad (4.2)$$

Fase 5. Tenendo conto dei principi di coerenza i bambini sono stati invitati ad aggiornare gradualmente (una figurina alla volta) le loro puntate fino ad arrivare ad un insieme di puntate coerenti.

4.2 Le puntate dei bambini e l’atteggiamento verso il rischio

In riferimento agli eventi A , B e C legati alle squadre di calcio i bambini si sono sentiti particolarmente coinvolti come tifosi e ciò ha influenzato negativamente la razionalità delle loro valutazioni, basate più sulle loro speranze, aspettative e delusioni. Ad esempio, i bambini sono stati molto restii a puntare sull’evento A , avendo un bassissimo grado di fiducia sulla vittoria del Pescara, scoraggiati dalle informazioni che tutti possedevano sui recenti risultati negativi della squadra locale.

Il bambino che ha osato di più, sollecitato dal banco, ha puntato solo 2 figurine, attribuendo implicitamente alla vittoria del Pescara la probabilità $2/20 = 0,1$.

In riferimento all'evento B i bambini hanno osservato che la domenica successiva la Juventus non avrebbe giocato in quanto giocava la Nazionale. Questo ha portato ad introdurre una discussione sul concetto di evento condizionato B|H, dove il condizionante H è l'evento "La Juventus domenica giocherà". Non verificandosi l'evento condizionante, coerentemente con le teorie di de Finetti, la scommessa è annullata con restituzione della puntata.

Per quanto riguarda l'evento C riferendoci ad una vincita di 20 figurine, le puntate dei ragazzi sono state, nelle fasi 1 e 2 di puntata libera, molto variabili, da un minimo di 0 figurine ad un massimo di 20 figurine.

Riportiamo in una tabella le puntate di 10 bambini ed i valori dell'indice I di ciascuno nella fase di puntata libera, relativamente ad alcuni degli eventi considerati.

Scommettitori	Evento C	Evento -C	Evento F	Evento -F	Evento D	Evento -D
1 Alice	10	1	0	10	10	0
2 Nicolò	6	2	1	18	20	3
3 Filippo S.	3	1	0	10	10	20
4 Nadia	4	10	0	10	10	10
5 Francesco T.	10	9	10	0	20	3
6 Leonardo	8	2	20	1	19	0
7 Ludovica	9	1	0	10	10	8
8 Ilaria	1	20	0	20	20	1
9 Silvia	7	0	20	5	10	11
10 Alessio	20	0	0	12	30	19

Tabella delle scommesse libere dei bambini

I risultati della tabella a prima vista possono sembrare contraddittori. Nella valutazione degli eventi C e F i bambini mostrano in generale un'avversione al rischio, mentre per l'evento D si ha in media una propensione al rischio.

Probabilmente il bambino 10 (Alessio) pensava che la vincita fosse di 30 figurine perché il primo approccio al gioco era avvenuto con la possibile vincita di 30 figurine. Alcuni bambini (Alice e Ilaria) hanno avuto un comportamento costante per i vari eventi, la prima con marcata avversione al rischio, la seconda praticamente indifferente al rischio. Altri bambini (Filippo S. e Alessio) hanno cambiato nettamente atteggiamento nel passare dai primi due eventi al terzo.

Un percorso didattico per introdurre il ragionamento probabilistico nella Scuola Primaria

Interessante notare che alcuni bambini hanno puntato 0 figurine su alcuni eventi. Implicitamente essi hanno compreso che anche eventi non impossibili possono avere probabilità nulla!

Riportiamo di seguito i valori dell'indice I di propensione al rischio.

Scommettitori	Evento C	Evento F	Evento D	Media	CalcoloMedia
1 Alice	-9/20	-10/20	-10/20	-29/60	-0,48
2 Nicolò	-12/20	-1/20	3/20	-10/60	-0,17
3 Filippo S.	-16/20	-10/20	10/20	-16/60	-0,27
4 Nadia	-6/20	-10/20	0/20	-16/60	-0,27
5 Francesco T.	-1/20	-10/20	3/20	-8/60	-0,13
6 Leonardo	-10/20	1/20	-1/20	-10/60	-0,17
7 Ludovica	-10/20	-10/20	-2/20	-22/60	-0,37
8 Ilaria	1/20	0/20	1/20	2/60	0,03
9 Silvia	-13/20	5/20	1/20	-7/60	-0,12
10 Alessio	0/20	-8/20	29/20	21/60	0,35
Media di I	-0,38	-0,27	0,19	-0,16	-0,16

Tabella dei valori dell'indice I di propensione al rischio dei bambini

I bambini appaiono mediamente molto prudenti nelle scommesse riguardanti il Milan e il maestro Alberto, mentre sembrano propensi al rischio per l'evento collegato alle condizioni metereologiche del lunedì. Quest'ultimo dato è però alterato dalla valutazione anomala del bambino 10, Alessio. Escludendo questo dato, la scommessa sull'evento D sembra essere mediamente coerente.

4.3 Un percorso verso la coerenza

Per mostrare come si può arrivare a scommesse coerenti (Fase 5) sono state proposte puntate sugli eventi:

G = "La maestra Luciana a giugno avrà i capelli corti",

L = "Fra due lunedì a mensa si mangerà la carne".

La maestra ha chiesto ai ragazzi il rispetto delle condizioni di coerenza invitandoli a diminuire o aumentare le puntate su un evento e sul contrario secondo le loro opinioni, ma in maniera tale che la somma delle due puntate fosse uguale a 20.

I risultati ottenuti sono riportati nella seguente tabella:

Scommettitori	Evento G	Evento -G	Evento L	Evento -L
1 Alice	0	20	10	10
2 Nicolò	12	8	4	16
3 Filippo S.	0	20	4	16
4 Nadia	0	20	18	2
5 Francesco T.	12	8	4	16
6 Leonardo	20	0	20	0
7 Ludovica	12	8	20	0
8 Ilaria	0	20	1	19
9 Silvia	10	10	17	3
10 Alessio	1	19	2	18

Tabella delle scommesse coerenti dei bambini

L'atteggiamento dei bambini appare molto variabile. Molti bambini, precisamente i numeri 1, 3, 4, 6, 8 per l'evento G e i numeri 6, 7 per l'evento L, tendono a rimanere nella logica del certo.

Altri bambini, ossia i numeri 10 per l'evento G e 8, 10 per l'evento L si allontanano molto timidamente dalla logica del certo. I bambini 2, 5, 7, 9 applicano la logica dell'incerto per l'evento G con valutazioni molto vicine fra loro.

Le opinioni dei bambini sull'evento L appaiono divise in due contrapposte fazioni, una con alta fiducia sul verificarsi di L, uno con bassa fiducia. Solo il bambino 1 attribuisce una equiprobabilità a L e al suo contrario.

5. Conclusioni e prospettive di ricerca

Complessivamente gli esperimenti svolti hanno evidenziato una buona attitudine dei bambini, se opportunamente guidati, a comprendere il concetto logico di evento e i fondamenti della probabilità qualitativa.

Un utile esercizio può essere l'attribuzione di probabilità qualitativa all'algebra di eventi generata da una partizione finita in cui non si fa l'ipotesi di equiprobabilità per gli eventi appartenenti alla partizione.

La probabilità soggettiva con lo strumento della scommessa è stata accolta con entusiasmo dai bambini, desiderosi di vincere le figurine. L'idea di scommessa coerente è stata utile anche per far imparare ai bambini a fare una valutazione sufficientemente

Un percorso didattico per introdurre il ragionamento probabilistico nella Scuola Primaria

corretta dei fatti reali, né ottimistica, né pessimistica, importante per prendere in maniera razionale le decisioni che si presentano nella vita quotidiana.

Nelle prime classi non sembra necessario andare avanti rispetto alla teoria svolta introducendo le probabilità coerenti per una famiglia di eventi, mentre nella quarta e nella quinta si può introdurre il concetto di scommessa coerente per due o più eventi e svolgere alcuni esercizi classici di probabilità.

Infine, per poter comprendere a fondo il significato e l'importanza della probabilità soggettiva, è importante concludere il programma presentando qualche semplice esempio di decisione in condizione di incertezza a partire dai problemi più sentiti dai bambini.

L'aspetto ludico di queste attività costituisce un valido strumento metodologico che promuove l'inclusione sociale degli alunni, i quali si sentono più sicuri, accettati e riescono a partecipare nel gruppo offrendo il proprio contributo in un ambito che sembra al di fuori di specifiche discipline tradizionali.

Le Nuove Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'Infanzia e del Primo Ciclo di istruzione del 2012 e le otto competenze chiave Europee (metacompetenze) ci ricordano l'importanza che la matematica assume nella realtà quotidiana.

Il linguaggio matematico ci permette di interpretare e rappresentare la realtà, gli eventi e i fenomeni che ci circondano, di leggere i dati rilevati con spirito critico, di assumere decisioni più consapevoli nella soluzione di problemi di vita quotidiana.

Il ragionamento probabilistico permette, a differenza della matematica tradizionale, di rappresentare la realtà e capire i fenomeni anche se ci si trova in condizioni di incertezza. Ciò è molto formativo per i bambini, in quanto essi quasi mai, nella vita, si troveranno ad operare con una completa conoscenza dei dati su cui basarsi per le proprie decisioni e quindi, senza un controllo numerico o almeno qualitativo dell'incertezza, potrebbero cadere in situazioni anomale di pessimismo o eccessivo ottimismo e quindi prendere decisioni irrazionali.

Le unità didattiche sopra descritte, attraverso il *gioco*, il *fare*, l'*agire*, offrono agli alunni l'occasione di confrontarsi, di fare ipotesi, di collaborare reciprocamente tra pari, di problematizzare, di mettere in atto il pensiero logico, induttivo e deduttivo, di costruire la propria competenza attraverso l'esperienza.

Inoltre, il ragionamento probabilistico fornisce ai ragazzi strumenti diversificati, strategie operative alternative, attraverso una didattica flessibile e in grado di adattarsi agli stili cognitivi di ciascuno.

L'obiettivo prioritario è quello di portare gli alunni a diventare più consapevoli delle proprie potenzialità, a imparare ad assumere decisioni, a verbalizzare i procedimenti adottati per affrontare e risolvere un compito o una situazione, a rispondere in modo differente sviluppando la capacità di attivare e utilizzare strategie solutive e stili di apprendimento "misti" e "flessibili".

Bibliografia

- Coletti G., Scozzafava R., (2002), *Probabilistic logic in a coherent setting*, Kluwer Academic Publishers, London
- Da Re F., (2013), *La didattica per competenze*, Pearson Italia, Milano-Torino
- de Finetti B. (1970), *Teoria delle Probabilità*, vol. 1 and 2, Einaudi, Torino
- Delli Rocili L., Maturo A., (2013), Logica del certo e dell'incerto per la scuola primaria, *Science & Philosophy* Vol. 1, No 1, (2013) pp. 37 – 58.
- Delli Rocili L., Maturo A., (2015). Interdisciplinarity, logic of uncertainty and fuzzy logic in primary school. *Science & Philosophy*, 3(2), pp.11-26.
- Dubins, L.E., (1975), Finitely additive conditional probabilities, conglomerability and disintegrations, *The Annals of Probability*, 3, 89-99.
- Fadini, A., (1979), *Introduzione alla teoria degli insiemi sfocati*, Liguori, Napoli.
- Gentilhomme, M.Y., (1968), Les ensembles flous en linguistiques, *Cahiers de linguistique theorique et appliquee*, Bucarest, (5) 47, pp. 47-65.
- Lindley D. V., (1990), *La logica della decisione*, Il Saggiatore, Milano
- Luce, R.D. and Raiffa, H. (1957). *Games and Decisions*. Wiley. New York.
- March J.G. (1994). *A primer on decision making. How decisions happen*. The Free Press, New York.
- Maturo A., (1993), Struttura algebrica degli eventi generalizzati, *Periodico di Matematiche*, 4, 1993, p. 18-26.
- MIUR, (2012), *Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*, Le Monnier, Firenze
- Saaty, T.L. (1980). *The Analytic Hierarchy Process*, New York: McGraw-Hill.
- Reichenbach H., (1944), *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica*, tr. it. Einaudi, Torino, 1954
- Russell B., (1962), *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milano.
- Scozzafava R., (1996), *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*, Zanichelli, Bologna.
- Scozzafava R., (2001), *Incertezza e probabilità. Significato, valutazione, applicazioni della probabilità soggettiva*, Zanichelli, Bologna.
- Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Da un gioco di percezione al modello matematico

Bruno Iannamorelli¹

¹Università degli Studi dell'Aquila,
Dipartimento di Scienze Umane,
Viale Nizza, 2, 67100, L'Aquila, Italy
jannab@tiscali.it

Sunto

Un banale gioco di percezione per contare il numero di triangoli disegnati in una figura può fornire l'occasione di fare matematica. Dopo aver raccolto i numeri di triangoli percepiti dalle persone alle quali è stato proposto il gioco si inizia ad argomentare, a semplificare il gioco sostituendo la figura con una contenente tutti quadrati. È seguita la razionalizzazione con l'uso di tessere ritagliate da cartoncino e l'uso di tabelle a doppia entrata. Si ripropone, in tal modo, il lavoro quotidiano del matematico professionista: si semplifica il problema, si trova una strategia, si torna al problema fino a scoprire un modello risolutivo. Con questo gioco si ha l'opportunità di imbattersi nei numeri figurati tanto cari ai pitagorici. I modelli geometrici tridimensionali per calcolare la somma di numeri quadrati o triangolari rendono semplici problemi altrimenti risolvibili solo verso la fine degli studi nella scuola secondaria di secondo grado. Il risultato finale è di grande soddisfazione perché il giocatore ha la sensazione di essere stato un matematico.

Parole chiave: triangolo equilatero, modelli geometrici, numeri triangolari, numeri quadrati.

1. Quanti triangoli? ... Tanti.

Per anni ho conservato nella memoria l'immagine di una bambina di dieci anni, con il grembiolino azzurro, piazzata davanti a un poster con un disegno simile a quello riportato in fig.1.

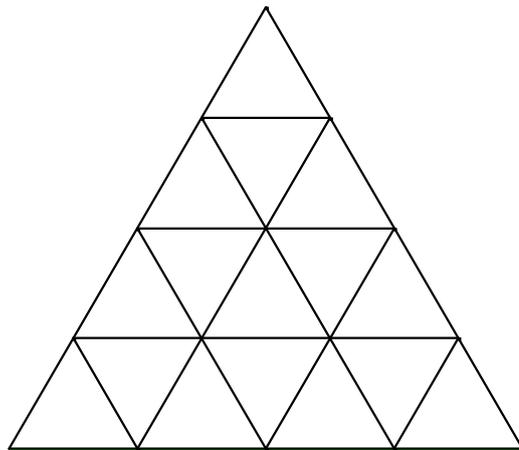


Fig.1

Si trattava di un poster inserito in una delle tante mostre didattiche allestita in una scuola elementare di Bologna. La bambina cercava di catturare l'attenzione dei visitatori e quando fu certa di avermi in pugno, tutto d'un fiato mi chiese: "Quanti triangoli vedi in questa figura?". Ora questa domanda si trova su facebook, con un triangolo di lato tre, e passa come test d'intelligenza.

Ho riproposto tante volte la domanda di quella bambina a gruppi di ragazzi e ragazze dai quindici ai quarant'anni raccogliendo le risposte più varie, ad esempio 16 o 25 triangoli. Un giorno, con un gruppetto ... è sorto il problema: come si fa a contarli tutti? Esiste un modello matematico per contarli tutti, in ogni caso? È possibile vincere la percezione con la matematica?

2. Dalla percezione al modello matematico

Un primo passo per vincere la percezione, cioè per evitare che qualcuno riesca a vedere meno triangoli di un altro e per questo sentirsi meno intelligente, consiste nel razionalizzare il conteggio. Si contano prima i triangoli di lato 1, poi quelli di lato 2 ecc., senza dimenticare che ci sono triangoli rivolti "in su" e altri rivolti "in giù", come mi aveva fatto osservare la bambina dal grembiolino azzurro. Ma vogliamo andare oltre e cercare una formula capace di contare tutti i triangoli in funzione del numero n che indica il lato del triangolo grande. Per questo adottiamo una metodologia laboratoriale e, prima di tutto, semplifichiamo il problema. Poniamo un problema più semplice: quanti quadrati ci sono in questa figura?

Da un gioco di percezione al modello matematico

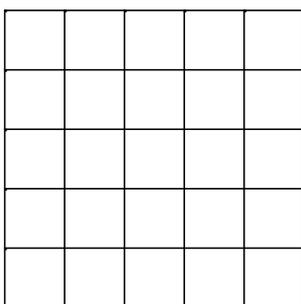


Fig. 2

- C'è un quadrato di lato 5.
- Ci sono 4 quadrati di lato 4 (per scoprirli si può sovrapporre alla fig. 2 una tessera quadrata di lato 4: questa può occupare quattro posizioni diverse per ricoprire i sedici quadratini unitari).
- Ci sono 9 quadrati di lato 3 (si scoprono come sopra usando una tessera quadrata di lato 3).
- Ci sono 16 quadrati di lato 2 (si utilizza una tessera quadrata di lato 2).
- Ci sono 25 quadrati di lato 1 (sono i più evidenti).

Compiliamo una tabella:

Lato	5	4	3	2	1
Numero di quadrati	1	4	9	16	25

Il numero di quadrati della fig. 2 è dato dalla somma $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$.

Osserviamo bene la seconda riga: $25 = 5^2$, $16 = 4^2$, $9 = 3^2$, $4 = 2^2$, $1 = 1^2$; è formata da “numeri quadrati”.

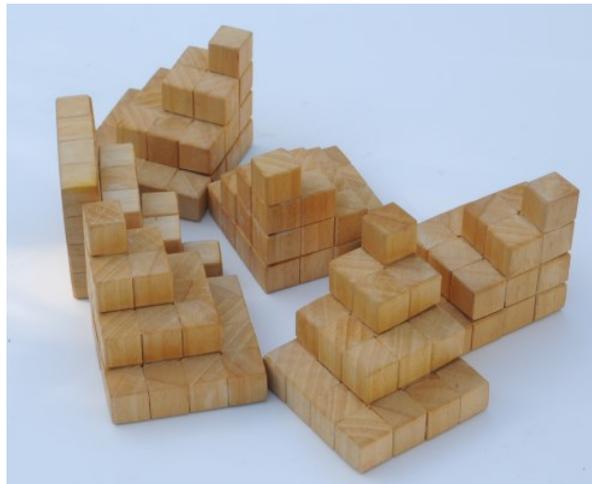
Se il quadrato grande ha lato n , per calcolare il numero di quadrati in esso contenuti basta sommare i primi n numeri quadrati: $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$. E come si determina questa somma senza ricorrere a conoscenze avanzate di algebra? Si ricorre a un modello geometrico tridimensionale. I numeri quadrati vengono rappresentati da un cubo, quattro cubi, nove cubi ecc. e la loro somma è un solido come quello della foto 1.

Bruno Iannamorelli



Foto 1 (Modello realizzato da B. Iannamorelli)

Dopo aver costruito 6 di questi modelli



si cerca di comporre con essi un prisma e, dopo qualche tentativo, si assembla un puzzle tridimensionale come quello della foto 2.

Da un gioco di percezione al modello matematico



Foto 2

Nel solido della foto 2 ci sono $\frac{5(5+1)(2*5+1)}{6} = 55$ cubetti. Ma 55 è la somma dei primi cinque numeri quadrati e, pertanto, la somma dei primi n numeri quadrati sarà:

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

3. Contiamo i triangoli

Applichiamo la stessa metodologia usata per contare i quadrati al caso dei triangoli contenuti in un triangolo equilatero. Anzi, procediamo con maggiore cautela e gradualità.

1° caso Se il triangolo equilatero ha lato 1, in esso c'è un solo triangolo.

2° caso Se il triangolo equilatero ha lato 2 contiene:

- 1 triangolo di lato 2
- 3 triangoli di lato 1 “*in su*”
- 1 triangolo di lato 1 “*in giù*”.

3° caso Se il triangolo equilatero ha lato 3, contiene:

- 1 triangolo di lato 3 “*in su*”
- 3 triangoli di lato 2 “*in su*”
- 6 triangoli di lato 1 “*in su*”
- 3 triangoli di lato 1 “*in giù*”.

4° caso Se il triangolo equilatero ha lato 4, contiene:

- 1 triangolo di lato 4 “*in su*”
- 3 triangoli di lato 3 “*in su*”
- 6 triangoli di lato 2 “*in su*” (per facilitare la loro individuazione si può sovrapporre al triangolo equilatero una tessera formata da un triangolo equilatero di lato 2)
- 10 triangoli di lato 1 “*in su*”
- 1 triangolo di lato 2 “*in giù*”
- 6 triangoli di lato 1 “*in giù*”.

Potremmo continuare con triangoli equilateri di lato 5 o 6, ma, riflettendo sul conteggio già effettuato, si nota che i triangoli “*in su*” sono 1, 3, 6, 10 e bisognerà aggiungerne 15, se partiamo da un triangolo di lato 5, oppure 21 se il triangolo di partenza ha lato 6. Si tratta di una successione di numeri così fatta:

$$1, 1+2 = 3, 1+2+3 = 6, 1+2+3+4 = 10, 1+2+3+4+5 = 15, \dots$$

Quale sarà l'*n*-esimo numero di questa successione?

Se non vogliamo ricorrere all'algoritmo del piccolo Gauss per scoprire qual è la somma dei primi *n* numeri naturali, possiamo raffigurare geometricamente i numeri della suddetta successione:

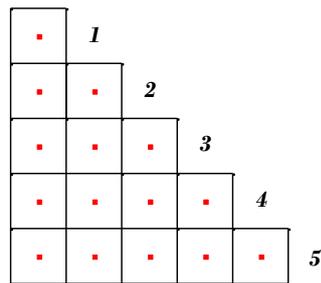


Fig. 3

A queste configurazioni geometriche di punti unità i pitagorici davano il nome di numeri triangolari e altre configurazioni le indicavano come numeri quadrati, pentagonali, esagonali ecc., avviando così quella che è stata chiamata aritmo-geometria. Ritagliando su cartoncino due copie del 5° numero triangolare e accostandole come in fig. 4, si forma un rettangolo contenente $5(5 + 1) = 30$ quadratini.

Da un gioco di percezione al modello matematico

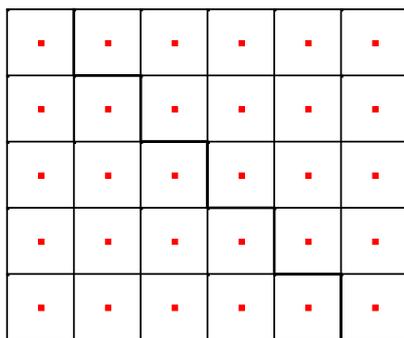


Fig. 4

Il quinto numero triangolare, cioè la somma dei primi cinque numeri naturali, è $\frac{5(5+1)}{2} = 14$.

Generalizzando, l' n -esimo numero triangolare T_n , cioè la somma dei primi n numeri naturali, è:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Secondo quanto riferisce Nicomaco di Gerasa, la scuola pitagorica avrebbe scoperto la formula per determinare l' n -esimo numero triangolare, l' n -esimo numero quadrato e anche il legame che esiste tra questi numeri: un numero quadrato è dato dalla somma di due numeri triangolari successivi.

Torniamo al problema del conteggio dei triangoli contenuti in un triangolo equilatero di lato n : il numero di triangoli "in su" è dato dalla somma dei primi n numeri triangolari. Nel caso dei quadrati bisognava sommare i primi n numeri quadrati e, per analogia, nel caso dei triangoli equilateri è necessario sommare i primi n numeri triangolari. Come si fa? Proviamo a seguire una via analoga a quella percorsa per i numeri quadrati. Rappresentiamo la somma dei primi 4 numeri triangolari con due modelli tridimensionali come quelli delle foto 3.a, 3.b.



Foto 3.a



Foto 3.b

Assemblando tre copie del modulo (a) e tre del modulo (b) si ottiene un prisma come nella foto.

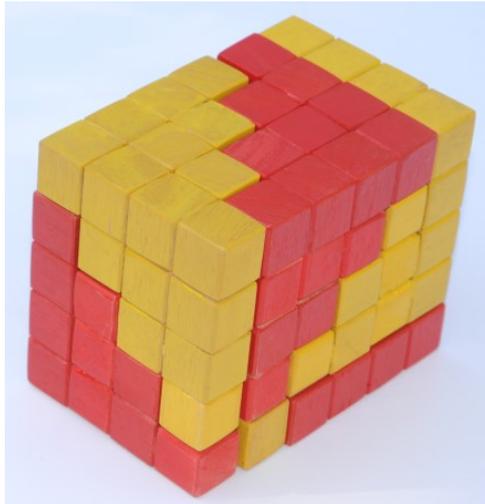


Foto 4 (Modello realizzato da B. Iannamorelli)

Il prisma contiene $4(4 + 1)(4 + 2)$ cubetti e quindi nel modulo (a) o nel modulo (b) ci sono $\frac{4(4+1)(4+2)}{6}$ cubetti: tale numero rappresenta la somma dei primi 4 numeri triangolari.

Generalizzando, la somma dei primi n numeri triangolari è:

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} .$$

A questo punto è risolto il conteggio di tutti i triangoli “*in su*” contenuti in un triangolo equilatero di lato n . A questi vanno aggiunti i triangoli “*in giù*”:

- Se n è pari bisogna sommare i numeri che occupano il $1^\circ, 3^\circ, 5^\circ, \dots$ posto nella successione dei numeri triangolari con triangoli di lato $n-3, \dots, 3, 2, 1$. ($n > 4$).
- Se n è dispari bisogna sommare i numeri che occupano il $2^\circ, 4^\circ, 6^\circ, \dots$ posto nella successione dei numeri triangolari con triangoli di lato $n-3, \dots, 3, 2, 1$. ($n > 3$).

Bibliografia

Boyer C. B., (1990). Storia della Matematica. Milano: Arnoldo Mondadori.

D'Amore B. – Sbaragli S., (2017), La Matematica e la sua Storia vol.1. Bari: Ed. Dedalo

Giacardi L. – Roero S. C., (2010). La matematica delle civiltà arcaiche. Torino: Università popolare di Torino.

Kline M., (1999). Storia del pensiero matematico vol. 1. Torino: Einaudi.

Loria G., (1914). Le scienze esatte nell'antica Grecia. Milano: Hoepli.

Forme differenziali e Campi Vettoriali

Ferdinando Casolaro¹, Giovanna Della Vecchia²

¹Dipartimento di Architettura Università Federico II di Napoli, Via Toledo, 402 - Napoli

²I.I.S. Minzoni Giugliano in Campania - Napoli

Sunto Si presenta una sintetica trattazione della teoria dei vettori, in particolare del loro utilizzo in alcuni fenomeni fisici attraverso le procedure dell'Analisi Matematica. Si approfondiscono le operazioni di prodotto scalare e prodotto vettoriale, fondamentali per la comprensione di gran parte degli argomenti nelle scienze applicate.

Parole Chiave Forme differenziali, spazi vettoriali.

1. Introduzione

Già nella Scuola secondaria di Primo grado si introduce il concetto di vettore utilizzando la classica rappresentazione della *freccetta*. Ovviamente non si approfondisce il significato, ma si presentano le prime applicazioni della legge del parallelogramma attraverso esempi. Nel percorso di studi successivo si passa alla rappresentazione nel piano cartesiano ed alle prime applicazioni ai fenomeni fisici operando con vettori a componenti costanti.

Non riteniamo superfluo ricordare che una grandezza fisica è esprimibile come vettore se:

- a. vale la legge del parallelogramma;
- b. è invariante rispetto ai sistemi di riferimento ottenuti uno dall'altro per traslazione.

Le proprietà dei vettori e i teoremi ad essi relativi, sono trattati in modo esaustivo nei lavori citati in bibliografia (F. Casolaro 1996).

Nella realtà, però, le componenti del vettore non sono in generale costanti, come si può evidenziare anche nelle applicazioni di Fisica moderna, in particolare nella descrizione della Relatività Generale (Casolaro F., Pisano R. 2011) (Casolaro F., Pisano R. 2012), dove la curvatura dell'universo comporta in ogni punto la variazione della direzione del vettore normale al piano tangente allo spazio.

In tal caso, per le applicazioni, si utilizzano i risultati del 1885 di Levi-Civita e Ricci Cubastro che introdussero il concetto di tensore (F. Casolaro 2002) e non vale la proprietà b) dell'invarianza per traslazione.

Nel paragrafo (4) si richiama, attraverso lo studio delle forme differenziali, un esempio di calcolo del potenziale di un campo vettoriale conservativo; il tema è noto agli studenti dei corsi di Matematica, Fisica e Ingegneria dallo studio dell'Analisi matematica, ma con l'introduzione della Fisica moderna nelle Indicazioni ministeriali e Linee Guida per la Scuola secondaria di secondo grado, si ritiene opportuno presentare tale argomento agli studenti nella parte finale del percorso di studi.

2. Struttura di spazio vettoriale su un campo

La definizione di *Spazio Vettoriale* richiede le conoscenze di alcune strutture algebriche (gruppo, anello, campo) che sono note già dai primi anni della Scuola secondaria di secondo grado.

Gli elementi dello spazio vettoriale che indicheremo in generale con S e, relativamente allo spazio con dimensione specificata $(1,2,\dots,n)$, con S_1, S_2, \dots, S_n , sono chiamati *vettori* (o *punti*).

Sono chiamati *scalari* gli elementi del campo (per i nostri obiettivi, il campo R dei numeri reali) su cui è strutturato lo spazio vettoriale.

In questo lavoro inizialmente, per caratterizzare le più semplici applicazioni dei prodotti scalare e vettoriale, il nostro studio sarà limitato allo spazio dei *vettori ordinari* (che si utilizzano nelle scienze applicate) a componenti costanti come elementi di S ed all'insieme dei *numeri reali* come elementi del campo R .

Nei paragrafi successivi si presenteranno applicazioni allo spazio fisico, dove le componenti sono variabili (*tensore e campo vettoriale*).

Si dice che la struttura (S,R) è uno **spazio vettoriale** sul campo R [in generale, una struttura (V,K) , con K campo reale o complesso] se in S è definita un'operazione binaria interna (nel nostro caso l'ordinaria addizione $+$) per la quale $(S,+)$ è un gruppo commutativo ed una legge di composizione esterna (nel nostro caso l'ordinaria moltiplicazione di un vettore per un numero reale), detta *moltiplicazione per uno scalare*, per le quale valgono le seguenti proprietà:

1) Associativa rispetto al prodotto esterno:

$$\forall \alpha, \beta \in R, \forall \vec{v} \in S \Rightarrow \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}) = (\alpha\beta) \vec{v}$$

2) Esiste l'elemento neutro 1 rispetto al prodotto esterno:

$$\forall \vec{v} \in S \Rightarrow 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

3) Distributiva del prodotto esterno rispetto all'addizione di vettori:

$$\forall \alpha \in R, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in S \Rightarrow \alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v}$$

4) Distributiva del prodotto esterno rispetto all'addizione di scalari:

$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall \vec{v} \in S \Rightarrow (\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v}$$

Nei punti 1), 2), 3), 4) sono inserite le note operazioni di prodotto di uno scalare per un vettore e di somma tra vettori attraverso la legge del parallelogramma e le proprietà relative a tali operazioni. Nel prossimo paragrafo tali operazioni, con l'introduzione di un sistema di riferimento del piano, saranno utili per dedurre espressioni analitiche delle due operazioni essenziali allo studio dei fenomeni fisici: il prodotto scalare nel piano e il prodotto vettoriale nello spazio tridimensionale S_3 .

3. Prodotto scalare e prodotto vettoriale

Definizione 3.1 - Se $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}$ e $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j}$ sono due vettori che in un riferimento cartesiano del piano sono rappresentati da segmenti orientati che formano un angolo α , si definisce **prodotto scalare** $\vec{a} \circ \vec{b}$, il numero reale ottenuto dal prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo α che essi formano:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

Tenendo conto delle proprietà degli spazi vettoriali, da tale relazione e dalla rappresentazione cartesiana dei vettori, si ha (Casolaro F. 2019):

$$\begin{aligned} \vec{a} \circ \vec{b} &= (a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j}) \circ (b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j}) = \\ &= (a_x b_x) \vec{i} \circ \vec{i} + (a_x b_y) \vec{i} \circ \vec{j} + (a_y b_x) \vec{j} \circ \vec{i} + a_y b_y (a_y b_y) \vec{j} \circ \vec{j} = a_x b_x + a_y b_y \end{aligned}$$

in quanto risulta:

$$\vec{i} \circ \vec{i} = \vec{j} \circ \vec{j} = 1; \quad \vec{i} \circ \vec{j} = \vec{j} \circ \vec{i} = 0$$

Definizione 3.2 - Dati due “vettori” \vec{u} e \vec{v} in uno spazio euclideo tridimensionale S_3 , le cui semirette orientate positive formano un angolo α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), si definisce **prodotto vettoriale** (o *prodotto esterno*) $\vec{u} \times \vec{v}$ [nei testi italiani è indicato anche con il simbolo \wedge] il “vettore” ortogonale al piano individuato da \vec{u} e da \vec{v} , il cui modulo è dato da:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha,$$

che è l'area del parallelogramma individuato dai segmenti orientati che rappresentano i due vettori \vec{u} e \vec{v} ; infatti, $|\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha$ è la misura dell'altezza se si fissa \vec{u} come base e, viceversa, $|\vec{u}| \operatorname{sen} \alpha$ è la misura dell'altezza se si fissa \vec{v} come base.

A differenza del prodotto scalare, il *prodotto vettoriale* è un *vettore* e non uno *scalare*. Nella definizione di *prodotto vettoriale* si può notare che ci sono *due* vettori che la soddisfano, uno opposto all'altro, in quanto se il vettore $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ è perpendicolare ad \vec{u} ed a \vec{v} , allora lo è anche il vettore $-\vec{n} = -(\vec{u} \times \vec{v})$, per cui bisogna scegliere per convenzione un verso. La scelta di tale verso dipende dall'orientamento dei vettori nello spazio.

Il verso del prodotto vettoriale $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ è definito in modo tale che $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ diventa destrogiro se $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è destrogiro e sinistrogiro se $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ è sinistrogiro.

Un modo semplice per determinare la direzione del vettore prodotto è la “regola della mano destra”. In un sistema destrogiro si punta il pollice nella direzione del primo vettore, l'indice in quella del secondo, il medio dà la direzione del prodotto vettoriale. In un sistema di riferimento sinistrogiro basta invertire il verso del prodotto vettoriale, ovvero usare la mano sinistra.

Osservazione - E' opportuno osservare che il *prodotto vettoriale* è un vettore che non appartiene alla giacitura individuata dai vettori di partenza; infatti, si può sempre individuare un piano su cui rappresentare due vettori mediante segmenti orientati, il cui prodotto vettoriale è ortogonale a tale piano e quindi non appartiene ad esso; ciò è dovuto all'origine della caratterizzazione del prodotto vettoriale che, in ambito fisico, doveva rappresentare il momento di una forza, generalizzato poi ad individuare le rotazioni nello spazio. Infatti, per caratterizzare una rotazione mediante vettore, la direzione del vettore non deve cambiare durante la rotazione.

L'esempio più semplice è rappresentato dalla rotazione di una porta che si apre o si chiude a causa di una forza, parallela al piano del pavimento, applicata all'estremità mobile della porta (fig. 3.1); tale rotazione è individuata dal *prodotto vettoriale tra il vettore posizione (il cui modulo è la distanza dal vincolo) ed il vettore forza, entrambi paralleli al piano orizzontale: l'unica direzione che resta invariata è quella dell'asse di rotazione che individua, dunque, la direzione del vettore prodotto vettoriale.*

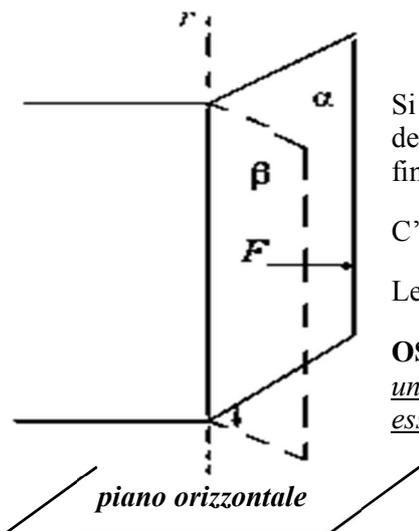


fig. 3.1

I vettori nella rotazione

Problema

Si applichi una forza F , parallela al piano orizzontale, in un punto del piano α in modo da far ruotare il piano α intorno alla retta r fino a sovrapporsi al piano β .

C'è una retta nello spazio che non cambia la propria direzione?

Le rette parallele alla retta r restano ancora parallele ad r ?

OSSERVAZIONE. Una rotazione nel piano è individuata da una retta che non appartiene al piano, ma è perpendicolare ad esso.

4. Campi vettoriali e Forme differenziali

Nelle scienze applicate si fa largo uso del campo vettoriale come strumento per descrivere fenomeni fisici quali la gravità o l'elettromagnetismo. In generale, esso viene introdotto e studiato con le varie operazioni, considerando costanti in ogni punto le componenti dei vettori. In realtà, il vettore che rappresenta il campo vettoriale che descrive un fenomeno fisico è tale che la sua direzione e le sue componenti dipendono dalle coordinate del punto, per cui è opportuno indicare tali componenti con tre funzioni scalari:

$$X(x, y, z), \quad Y(x, y, z), \quad Z(x, y, z)$$

che considereremo continue e di classe C^2 , in un dominio di S_3 semplicemente connesso (Fusco N., Marcellini P., Sbordone C., 1996):

Pertanto, il campo vettoriale in un punto $P(x, y, z)$ è rappresentato da

$$\vec{v}(P) = X(x, y, z)\vec{i} + Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

nello spazio tridimensionale e

$$\vec{v}(P) = X(x, y)\vec{i} + Y(x, y)\vec{j}$$

nel piano o in uno spazio bidimensionale in generale.

Tali notazioni, come già specificato nell'introduzione al paragrafo (1), si ritrovano con la "definizione di tensore" nei risultati di **Levi-Civita e Ricci Cubastro** nel 1885 nello studio dello spazio curvo utilizzato da Einstein per lo sviluppo della teoria della relatività generale (F. Casolaro 2019).

Generalizzando a un campo vettoriale qualsiasi il concetto di lavoro come prodotto scalare fra il vettore $\vec{v}(P)$ e il vettore spostamento infinitesimo $d\vec{P}$:

$$d\vec{P} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$$

si ha:

$$(4.1) \quad \omega(x, y, z) = X(x, y, z) \cdot dx + Y(x, y, z) \cdot dy + Z(x, y, z) \cdot dz$$

$$(4.2) \quad \omega(x, y) = X(x, y) \cdot dx + Y(x, y) \cdot dy$$

dove con (4.1) si è indicato il lavoro nello spazio tridimensionale e con (4.2) quello nel piano o in uno spazio bidimensionale generico.

L'espressione (4.1) è detta **forma differenziale di componenti X, Y, Z**; analogamente la (4.2) è detta **forma differenziale di componenti X, Y**.

Nelle applicazioni si pone il problema di determinare il lavoro del campo vettoriale lungo una generica curva γ di estremi A e B, che è dato da:

$$\int_{\gamma} \omega(x, y, z) ds = \int_{\gamma} [X(x, y, z) \cdot dx + Y(x, y, z) \cdot dy + Z(x, y, z) \cdot dz] \quad (4.3)$$

dove, in generale, si procede con le note relazioni per il calcolo dell'integrale curvilineo. In alcuni casi, però, non c'è bisogno di calcolare l'integrale lungo la curva γ della (4.3) in quanto la $\omega(x, y, z)$ presenta alcune ipotesi che ne caratterizzano anche il significato in ambito fisico, come dalla seguente:

Definizione 4.1 - Se l'integrale non dipende dalla particolare curva γ ma solo dagli estremi A e B, la forma differenziale si dice **esatta** ed esiste una funzione $U(x, y, z)$, il cui differenziale dU è uguale a $\omega(x, y, z)$, cioè:

$$(4.4) \quad dU(x, y, z) = X(x, y, z) \cdot dx + Y(x, y, z) \cdot dy + Z(x, y, z) \cdot dz$$

$$(4.5) \quad dU(x, y) = X(x, y) \cdot dx + Y(x, y) \cdot dy$$

dove l'espressione (4.4) è in S_3 , la (4.5) in S_2 .

Integrando ambo i membri della (4.3), si ha:

$$U(x, y, z) = \int [X(x, y, z) \cdot dx + Y(x, y, z) \cdot dy + Z(x, y, z) \cdot dz]$$

In tal caso, il campo vettoriale si dice **conservativo** e la funzione $U(x, y, z)$, **primitiva della forma differenziale** $\omega(x, y, z)$, è il suo **potenziale**. Del tutto analogo è il caso di due variabili, riferito alla (4.4).

Osserviamo che il differenziale di una funzione $U(x, y, z)$, è dato da:

$$(4.6) \quad dU(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot dz$$

per cui, confrontando la (4.3) e la (4.5), risulta:

$$(4.7) \quad \frac{\partial U}{\partial x} = X(x, y, z); \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y(x, y, z); \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z(x, y, z)$$

Nel caso di due variabili si ha:

$$(4.8) \quad \frac{\partial U}{\partial x} = X(x, y); \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y(x, y)$$

5. Calcolo operativo della primitiva $U(x, y)$

In quel che segue, ci limitiamo, per brevità alle funzioni di due variabili. E' analogo l'ampliamento allo spazio tridimensionale. Premettiamo il seguente:

Teorema 5.1 - Sia $\vec{v}(P) = X(x, y)\vec{i} + Y(x, y)\vec{j}$ un campo vettoriale e $X(x, y)$, $Y(x, y)$ funzioni di classe C^2 definite in un aperto A del piano. Condizione necessaria affinché il campo sia conservativo è che risulti:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (5.1)$$

Se il dominio A è semplicemente connesso, la (5.1) è anche condizione sufficiente.

La (5.1) giustifica anche la valenza del teorema di Schwartz per la funzione potenziale $U(x, y)$. Infatti, dalle (4.8), nell'ipotesi che $U(x, y)$ sia dotata di derivate seconde miste, si ha:

Ferdinando Casolaro, Giovanna Della Vecchia

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \frac{\partial X}{\partial y} = U_{xy} \quad \text{cioè: } X_y = U_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial Y}{\partial x} = U_{yx} \quad \text{cioè: } Y_x = U_{yx}$$

Per il teorema di Schwartz risulta dunque:

$$U_{xy} = U_{yx} \quad \text{cioè} \quad X_y = Y_x \quad (5.2)$$

La (5.2) esprime anche la condizione necessaria e sufficiente affinché la forma differenziale $\omega(x, y)$ sia esatta.

Pertanto, l'esistenza della funzione primitiva $U(x, y)$ impone che i coefficienti $X(x, y)$ e $Y(x, y)$ dell'espressione analitica della forma differenziale $\omega(x, y) = X(x, y) \cdot dx + Y(x, y) \cdot dy$ debbano verificare le

$$(4.8) \quad \frac{\partial U}{\partial x} = X(x, y); \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y(x, y)$$

Per calcolare la primitiva (Miranda C., Picone M., 1965)

$$U(x, y) = \int [X(x, y) \cdot dx + Y(x, y) \cdot dy]$$

della forma differenziale $\omega(x, y, z)$ si procede con i seguenti passi:

a) si integra la funzione $X(x, y)$ rispetto a x , considerando costante la y , per cui la costante additiva sarà una funzione $\varphi(y)$ della variabile y che non è variabile di integrazione:

$$U(x, y) = \int X(x, y) dx + \varphi(y) \quad (5.3)$$

b) Per la seconda delle (4.8) deve risultare:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Y(x, y) \quad (5.4)$$

cioè:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\int X(x, y) dx + \varphi(y) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \int X(x, y) dx + \varphi'(y) = Y(x, y)$$

Ricavando $\varphi'(y)$ e integrando, si ha:

$$\varphi'(y) = Y(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int X(x, y) dx$$

$$\varphi(y) = \int \left[Y(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int X(x, y) dx \right] dy + \psi(x)$$

con $\psi(x)$ funzione della variabile x , costante rispetto a y .

In definitiva risulta:

$$U(x, y) = \int X(x, y) dx + \int \left[Y(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int X(x, y) dx \right] dy + \psi(x)$$

da cui, con semplici calcoli si trova:

$$U(x, y) = \int Y(x, y) dy + \psi(x) \quad (5.5)$$

Dalle (5.3) e (5.4) si evince che nel calcolo della primitiva è indifferente integrare la $X(x, y)$ rispetto a x , tenendo costante la y , o integrare la $Y(x, y)$ rispetto a y tenendo costante la x .

Esempio: Verificare che il campo vettoriale

$$\vec{v}(x, y) = \frac{2y}{3x-1} \vec{i} + \left[\frac{2}{3} \ln(3x-1) + 2y \right] \vec{j}$$

è conservativo e calcolare il potenziale.

Moltiplicando scalarmente il vettore $\vec{v}(x, y)$ per il vettore spostamento infinitesimo $d\vec{P}$ si ha:

$$\omega(x, y) = \vec{v}(x, y) \circ d\vec{P} = \frac{2y}{3x-1} dx + \left[\frac{2}{3} \ln(3x-1) + 2y \right] dy$$

per cui il problema si può trovare anche nella forma:

Verificare che la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{2y}{3x-1} dx + \left[\frac{2}{3} \ln(3x-1) + 2y \right] dy$$

è esatta e calcolare la funzione primitiva.

Soluzione: Dalle (5.1):

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Risulta:

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{2y}{3x-1} = \frac{2}{3x-1}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2}{3} \ln(3x-1) + 2y \right] dy = \frac{2}{3x-1}$$

che verifica le (5.1), per cui la forma differenziale è esatta [il campo vettoriale è conservativo].

Dalla (5.3) una primitiva $U(x, y)$ è data da:

$$U(x, y) = \int \frac{2y}{3x-1} dx + \varphi(y) = \frac{2}{3} y \ln(3x-1) + \varphi(y)$$

Per la (5.4): $\frac{\partial U}{\partial y} = Y(x, y)$, deve risultare:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2}{3} \ln(3x-1) + 2y.$$

Si ha di seguito:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left[\frac{2}{3} y \ln(3x-1) + \varphi(y) \right] = \frac{2}{3} \ln(3x-1) + 2y$$

$$\frac{2}{3} \ln(3x-1) + \varphi'(y) = \frac{2}{3} \ln(3x-1) + 2y$$

da cui:

$$\varphi'(y) = 2y \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = y^2$$

Pertanto la primitiva della forma differenziale [il potenziale del campo conservativo] è:

$$U(x, y) = \frac{2}{3} y \ln(3x-1) + y^2$$

Si può verificare l'esattezza del risultato calcolando il differenziale dU che deve coincidere con l'espressione analitica della forma differenziale data:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = \frac{y}{3x-1} dx + \left[\frac{2}{3} \ln(3x-1) + 2y \right] dy = \omega(x, y)$$

6. Conclusioni

Ritornando alle riflessioni fatte nel paragrafo (1) si spera che il presente articolo possa favorire il lavoro del docente che voglia affrontare nella Scuola secondaria di secondo grado una trattazione semplificata e più elementare possibile di concetti che si studiano nei corsi universitari a Matematica forte (Luigi Berzolari ed. 1979), e farne comprendere il vasto campo di applicazione senza rinunciare al rigore logico e formale.

Lo sviluppo della Fisica nel XX secolo è basato in gran parte sui risultati dei matematici anche del secolo precedente senza trascurare l'evoluzione storica già dall'antichità (Casolaro F., Prospero R., 2008); in particolare l'ampliamento affine del modello euclideo ha permesso una rappresentazione analitica dei fenomeni meglio visualizzata (Morris Kline 1992).

Tale evoluzione impone di proporre, anche nell'insegnamento secondario, percorsi che tengano conto della visione reale dell'Universo attraverso gli strumenti più idonei, come il calcolo vettoriale e tensoriale (Casolaro F., Pisano R. 2006).

Bibliografia

Luigi Berzolari (a cura; ultima edizione 1979): Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi. Ed. Hoepli.

Morris Kline 1992: "Storia del pensiero matematico" - Einaudi Editori.

Casolaro F. 1996: "La Matematica nello insegnamento della Fisica". Atti del Convegno Nazionale Mathesis 1995, Roma, pag. 363-368.

Fusco N., Marcellini P., Sbordone C. 1996: "Analisi Matematica 2". Edizione Liguori 1996.

Miranda C., Picone M. 1966, Esercizi di Analisi Matematica. Edizione Liguori 1965.

Casolaro F. 2002, Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo". Congresso Nazionale Mathesis Bergamo 2002, pag.185-198.

Casolaro F., Pisano R. 2006: "Riflessioni sulla geometria nella Teoria della relatività", XXVI Congresso Nazionale di Storia della Fisica e Astronomia SISFA, pag. 221-231.

Casolaro F., Prospero R. 2008: "L'evoluzione della Matematica attraverso quattro congetture fondamentali sull'osservazione del mondo fisico". Rivista di Epistemologia Didattica, anno III, n. 5-6, 2008, pag. 71-83.

Casolaro F., Pisano R. 2011: "An Historical Inquiry on Geometry in Relativity Reflections on Early Relationship Geometry-Physics" - History Research pag. 47-60.

Casolaro F., Pisano R. 2012: "An Historical Inquiry on Geometry in Relativity Reflections on Early Relationship Geometry-Physics" - History Research, pag. 57-65.

Casolaro F. 2019: "Quale Geometria per lo spazio fisico?". Corso di Formazione per l'insegnamento della Fisica nella Scuola secondaria" - Quaderno APAV n. 4-2019.

Problemi combinatori per introdurre alcune idee fondamentali della probabilità: dalla Traccia allo Svolgimento

Francesco di Paola Bruno

Liceo Scientifico Statale "F. Severi" - Castellammare di Stabia (NA)
francescobruno.severi@gmail.com

Sunto

La traccia di lavoro, fornita dal prof. Mauro Cerasoli nella sua relazione "Problemi combinatori per introdurre alcune idee fondamentali della probabilità", viene analizzata punto per punto nelle richieste a cui si cerca di dare una possibile risposta. Partendo dal modello delle biglie nelle scatole per fissare alcune idee di base del calcolo combinatorio, vengono poi sviluppati i concetti teorici e la loro applicazione in contesti diversi. Si affrontano alcuni problemi classici di probabilità, come quello dei compleanni, del collezionista, del lancio di più dadi, di giochi con le carte e del lotto, facendo emergere collegamenti inaspettati con altre parti della matematica, come il calcolo con i polinomi.

Parole chiave: biglie e scatole, calcolo combinatorio, probabilità.

1. Introduzione

Nella relazione del prof. Mauro Cerasoli dal titolo "Problemi combinatori per introdurre alcune idee fondamentali della probabilità" è stata fornita una traccia articolata in vari spunti di lavoro per avviare riflessioni ed elaborare contenuti da utilizzare nella didattica del calcolo combinatorio e della probabilità. Nel seguito, gli spunti originali sono riportati in corsivo e, a seguire per ognuno, nei limiti dello spazio disponibile, viene illustrato un possibile svolgimento della traccia assegnata.

2. Il modello delle biglie nelle scatole (statistica di Maxwell-Boltzmann)

Abbiamo un insieme di n oggetti (biglie) ed un insieme di s scatole: le biglie vengono collocate nelle scatole a caso. Ad esempio, consideriamo la seguente disposizione di 5 biglie in 4 scatole a, b, c, d . La prima e la terza biglia cadono nella scatola b , la seconda e la quinta in c , la quarta in a .

Esprimere la situazione in termini di funzioni tra insiemi finiti.

Chiarire il significato di disposizione a caso.

Mettere n biglie in s scatole equivale ad abbinare ogni biglia con una e una sola scatola, cosa che matematicamente equivale a definire una funzione dall'insieme delle n biglie all'insieme delle s scatole, ovviamente non è detto che tale funzione sia iniettiva perché in ogni scatola potrebbero finire anche più biglie, né è detto che sia suriettiva perché ci potrebbe essere qualche scatola che rimane vuota. La situazione, riportata come esempio nella traccia, potrebbe essere descritta in maniera naturale dal punto di vista delle scatole (tabella di sinistra) o più semplicemente come funzione, dal punto di vista delle biglie (tabella di destra), nel qual caso, sottinteso l'ordine delle biglie 1 2 3 4 5, basterebbe la sola sequenza delle scatole "bcbac".

scatole	a	b	c	d
biglie	4	1, 3	2, 5	

biglie	1	2	3	4	5
scatole	b	c	b	a	c

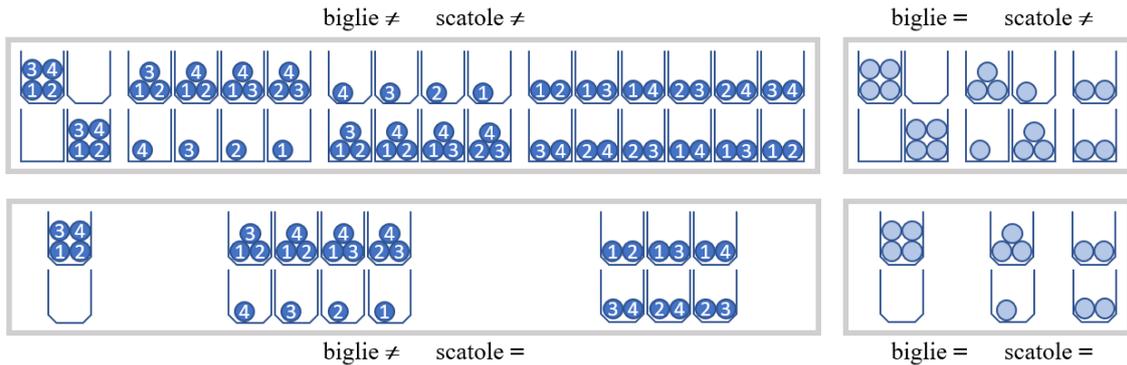
La disposizione a caso delle biglie nelle scatole corrisponde quindi alla formazione di qualsiasi parola di lunghezza 5 ottenuta disponendo a caso anche con ripetizione le 4 lettere a, b, c, d. È interessante, nella didattica, analizzare le situazioni secondo i due diversi modelli che potremmo chiamare, rispettivamente, di "biglie e scatole" e di "lettere e parole", dove per parola intenderemo una sequenza di caratteri comunque disposti e in genere priva di significato.

Per modellizzare in altra maniera il concetto di disposizione a caso, oltre che di "biglie e scatole", potremmo parlare di "palline e urne", dove per urna si intende una scatola dalla quale si estrae una pallina numerata o colorata senza sapere quale, pallina che eventualmente può essere rimessa nell'urna. Allora per disporre a caso le n biglie nelle s scatole, abbiamo bisogno anche di un'urna in cui ci sono s palline numerate da 1 a s per procedere come segue: si estrae una pallina dall'urna; il numero che mostra indica in quale scatola mettere la biglia di turno; si reinserisce la pallina nell'urna e si ripete questa procedura, in modo da eseguirla n volte, una per ognuna delle n biglie.

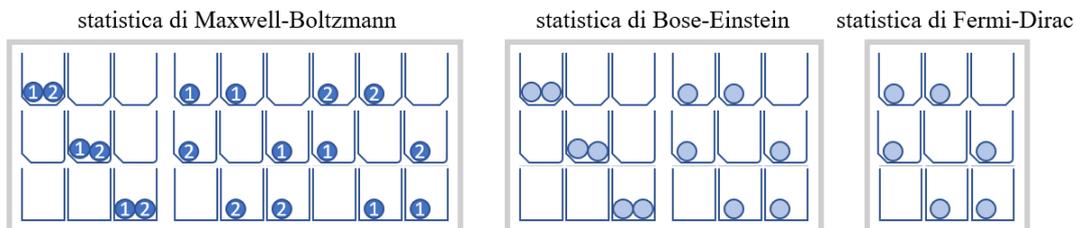
- Illustrare la disposizione quando: le biglie sono tutte uguali, indistinguibili (multiset); le biglie sono diverse ma le scatole uguali; sia le biglie che le scatole sono uguali. Determinare esempi concreti di disposizione di biglie in scatole. Illustrare le statistiche di Bose-Einstein e Fermi-Dirac.

Considerando 4 biglie con 2 scatole, si hanno 16 casi se biglie e scatole sono diverse, 8 casi con biglie diverse e scatole uguali, 5 casi con biglie uguali e scatole diverse, 3 casi se biglie e scatole sono uguali. Le scatole sono rappresentate una sull'altra e hanno stessa forma o forma differente a seconda che siano uguali o diverse.

Problemi combinatori per introdurre alcune idee fondamentali della probabilità



Il modello delle biglie nelle scatole, sempre con scatole diverse, può essere usato per studiare in che modo le particelle elementari possono occupare i vari livelli energetici. In particolare in fisica classica, dove ogni particella è considerata diversa dalle altre, vale lo schema delle biglie diverse con la distribuzione di Maxwell-Boltzmann. In fisica quantistica, invece, le particelle sono indistinguibili e possono essere di due tipi: bosoni e fermioni. Per i bosoni vale lo schema delle biglie uguali e si parla di distribuzione di Bose-Einstein. I fermioni invece sono particelle “asociali” che preferiscono starsene da sole, per cui in ogni livello ci può essere al più un solo fermione e si parla di distribuzione di Fermi-Dirac [2][p.432-434]. In seguito vengono riportate, ad esempio, le distribuzioni dei 3 tipi con $n = 2$ particelle ed $s = 3$ livelli energetici (scatole diverse), in cui si nota che esistono 9 casi per la statistica di Maxwell-Boltzmann, 6 casi per quella di Bose-Einstein e solo 3 per quella di Fermi-Dirac.



3. Disposizioni, permutazioni, combinazioni (Triangolo di Tartaglia)

- In quanti modi puoi mettere n biglie in s scatole?

Una sola biglia può essere abbinata con ognuna delle s scatole. Con due biglie, per ognuno degli s abbinamenti della prima biglia, la seconda potrebbe essere abbinata in altrettanti s modi per cui due biglie possono essere messe nelle s scatole in $s \cdot s = s^2$ modi. Così procedendo si arriva a dire che n biglie possono essere messe in s scatole in s^n modi, che corrispondono alle disposizioni con ripetizione di n elementi distinti di classe s , o equivalentemente al numero di tutte le possibili “parole” di lunghezza n che si possono formare con s lettere, anche ripetute [1, p.58].

Ovviamente in particolare, n biglie possono essere messe in 2 scatole in 2^n modi, così come sono 2^n le possibili sequenze di lunghezza n delle cifre binarie 0 e 1.

- In quanti modi puoi mettere n biglie in s scatole in modo che ogni scatola contenga al più una sola biglia?

Questo significa che la funzione che abbina le biglie con le scatole deve essere iniettiva, quindi $n \leq s$, ciò equivale a dire che la sequenza delle n lettere che la rappresenta non può contenere lettere ripetute. Con due biglie, per la prima ci sono s scatole disponibili mentre per la seconda ce ne sono solo $(s-1)$. Così procedendo si arriva a dire che n biglie possono essere messe in s scatole, con al più una biglia in ogni scatola, in un numero di modi dati dal prodotto degli n fattori $s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)$, che fornisce il numero di disposizioni semplici di n elementi distinti di classe s , o equivalentemente al numero di tutte le possibili “parole” di lunghezza n che si possono formare con s lettere tutte diverse.

- In quanti modi puoi mettere n biglie in 2 scatole (chiamate c e t) in modo che k siano in c e le altre in t ?

Nella scatola c possiamo scegliere di mettere come prima biglia una delle n disponibili, come seconda biglia una delle $n-1$ rimaste, come k^{ma} biglia una delle $n-k+1$ ancora disponibili, con un numero di $n(n-1)\dots(n-k+1)$ modi diversi. Essendo le k biglie indistinguibili tra di loro, tale numero va diviso per i modi in cui si possono permutare k oggetti cioè $k(k-1)\dots 1 = k!$

Una volta riempita la scatola c , le rimanti biglie vengono messe nella scatola t . In conclusione, il numero di modi in cui si possono mettere n biglie in 2 scatole con k nella prima ed $n-k$ nella seconda, cioè il numero di combinazioni semplici di n oggetti distinti di classe k , è dato dalla formula:

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Questo equivale a trovare quante sono le “parole” di n lettere in cui compare k volte la lettera c ed $(n-k)$ volte la lettera t . La prima lettera c può occupare una delle n posizioni, la seconda lettera c può occupare una delle $n-1$ posizioni rimaste, la k^{ma} lettera c può occupare una delle $n-k+1$ posizioni ancora disponibili. Pertanto le k lettere c possono essere messe in $n(n-1)\dots(n-k+1)$ modi diversi; ovviamente nelle rimanenti $n-k$ posizioni ci sarà la lettera t . Essendo le k lettere c indistinguibili tra di loro, tale numero va diviso per i modi in cui si possono permutare k oggetti cioè $k(k-1)\dots 1 = k!$

Si potrebbe procedere in modo completamente diverso, partendo alla rovescia e ponendo come primitivo il concetto di probabilità di un evento, definita uguale al rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili. Se si conosce la probabilità, si può ricavare da essa il numero di casi possibili una volta noti quelli favorevoli.

Notiamo che è importante ragionare solo sulle biglie che vanno nella prima scatola, perché nella seconda cadono automaticamente quelle rimaste. L’evento che un fissato gruppo di k biglie sia presente nella prima scatola può essere visto come il fatto che la prima biglia cade nella scatola (una delle k scelte tra tutte le n , con probabilità $= k/n$) e la seconda biglia cade nella scatola (una delle $(k-1)$ scelta tra le $(n-1)$ disponibili, con

Problemi combinatori per introdurre alcune idee fondamentali della probabilità

probabilità = $(k-1)/(n-1)$ e così via fino alla k^{ma} biglia (che è la sola rimasta tra le $(n-k+1)$ ancora disponibili, con probabilità $1/(n-k+1)$). La probabilità che si verifichi l'evento in esame è $p = 1/(\text{casi possibili})$. Essendo prodotto logico di k eventi indipendenti, la sua probabilità è il prodotto delle probabilità dei singoli eventi:

$$p = \frac{k}{n} \cdot \frac{(k-1)}{(n-1)} \cdots \frac{1}{(n-k+1)}$$

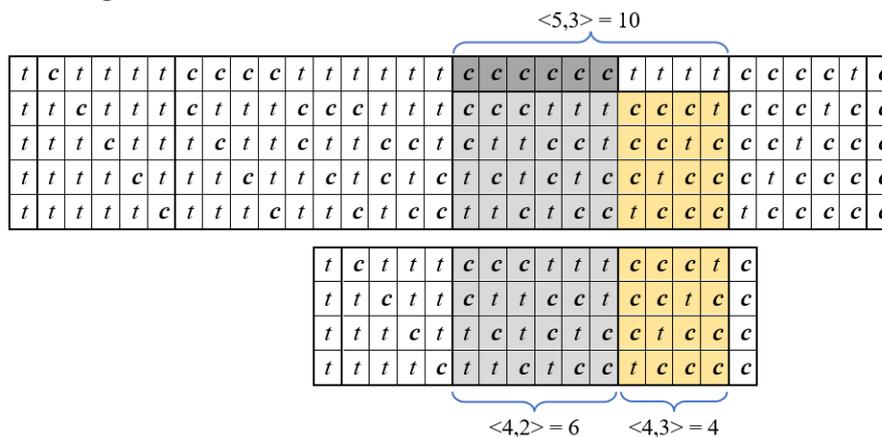
da cui si ricava che:

$$\text{casi possibili} = \frac{1}{p} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)}{(k-1)} \cdots \frac{(n-k+1)}{1} = \binom{n}{k}$$

- Indicato con $\langle n, k \rangle$ tale numero, dimostrare la sua proprietà caratteristica

$$\langle n, k \rangle = \langle n-1, k \rangle + \langle n-1, k-1 \rangle$$

Per fissare le idee supponiamo che $n=5$ e $k=3$, in modo da dover sistemare 5 biglie in due scatole con 3 biglie nella prima (detta c = "croce") e 2 nella seconda (detta t = "testa"), ciò equivale anche a lanciare in aria 5 volte una moneta ed avere 3 volte "croce" e 2 volte "testa", cosa che può avvenire in $\langle 5, 3 \rangle = 10$ modi.



Possiamo poi pensare di dividere la sequenza di 5 lanci in due fasi: la prima costituita dal 1° lancio e la seconda costituita dai successivi 4. Affinché escano 3 "croci", può capitare che nella prima fase esca "testa" e quindi le 3 "croci" escano tutte nella seconda fase (cosa che può avvenire in $\langle 4, 3 \rangle = 4$ modi), oppure che nella prima fase esca "croce" e quindi nella seconda fase devono uscire 2 "croci" (cosa che può avvenire in $\langle 4, 2 \rangle = 6$ modi). In totale $\langle 5, 3 \rangle = \langle 4, 3 \rangle + \langle 4, 2 \rangle$.

Generalizzando il ragionamento, suddividendo i k lanci nel primo e nei successivi $k-1$ si giunge alla proprietà caratteristica che si voleva dimostrare [1][p.57].

- Trovare analogie con n lanci di una moneta o la nascita di n figli.

Illustrare come dal problema precedente, o dal gioco del lotto, nasce il Triangolo di Tartaglia.

In quasi tutti i mammiferi le cellule delle femmine sono caratterizzate da 2 cromosomi uguali XX, mentre quelle dei maschi da 2 cromosomi diversi XY. Mediante il processo di gametogenesi una cellula femminile dà origine solo a gameti con un cromosoma X,

mentre una cellula maschile dà origine ad un ugual numero di gameti con un cromosoma X o un cromosoma Y. Durante la fecondazione la fusione di un gamete femminile con uno maschile, può dare origine a cellule con cromosomi XX o XY, dove la scelta del cromosoma femminile è indifferente, per cui la scelta del sesso del nascituro equivale al lancio di una moneta che stabilisce quale dei 2 gameti maschili viene coinvolto, con probabilità che può ritenersi $1/2$. Il caso di n figli, equivale a lanciare n volte una moneta, o mettere n biglie in due scatole, che invece di chiamare “testa” e “croce” si possono chiamare “maschio” e “femmina”. Ad esempio nella generazione di 4 figli, indipendentemente dall’ordine, la probabilità di avere 4 maschi è $\langle 4,4 \rangle / 2^4 = 1/16$, quella di avere 3 maschi e 1 femmina è $\langle 4,3 \rangle / 2^4 = 4/16$, quella di avere 2 maschi e 2 femmine è $\langle 4,2 \rangle / 2^4 = 6/16$, quella di avere 1 maschio e 3 femmine è $\langle 4,1 \rangle / 2^4 = 4/16$, quella di avere 4 femmine è $\langle 4,0 \rangle / 2^4 = 1/16$, con una perfetta parità nei sessi!

Se si costruisce una tabella in cui il numero $\langle n, k \rangle$ occupa la k^{ma} posizione della riga n^{ma} , con $0 \leq k \leq n$, la proprietà caratteristica $\langle n, k \rangle = \langle n-1, k \rangle + \langle n-1, k-1 \rangle$ dice tra l’altro che ogni numero della riga n^{ma} , tranne il primo e l’ultimo, si può ottenere come somma dei due numeri che nella riga $(n-1)^{\text{ma}}$ occupano lo stesso posto e il precedente, cosa che costituisce il classico metodo per generare il Triangolo di Tartaglia.

- Qual è la probabilità che di n biglie messe a caso in n scatole nessuna cada nella prima? Che cosa accade quando il numero n è molto grande, tende all’infinito?

Essendoci n scatole, la probabilità che una biglia cada nella prima scatola è $1/n$, pertanto la probabilità che non cada nella prima scatola è la probabilità contraria $1-1/n$, o equivalentemente $(n-1)/n$ vista come la probabilità che cada nelle altre $n-1$ scatole. Se ci sono n biglie da collocare, vuol dire che la prima biglia non può cadere nella prima scatola e la seconda biglia non può cadere nella prima scatola e così via fino all’ultima, pertanto, essendo questi n eventi indipendenti, la probabilità dell’evento prodotto logico di essi è il prodotto delle n probabilità $(1-1/n)(1-1/n) \dots (1-1/n) = (1-1/n)^n$

Si può verificare che se n cresce indefinitamente, tale espressione tende al valore $0,3678794\dots$ il cui reciproco è il famoso numero di Nepero $e = 2,7182818\dots$ come si ritrova in analisi matematica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

4. Il paradosso dei compleanni

- Si ritrovano a caso n persone in una stanza: discutere e risolvere il problema che vi siano almeno due persone che festeggiano il compleanno lo stesso giorno.

Essendo richiesto che un certo evento si verifichi “almeno” una volta, è preferibile calcolare la probabilità con cui l’evento non si verifichi mai e poi ricavare la probabilità contraria. Supponiamo che le persone entrino una per volta nella stanza. La prima persona che entra ha la certezza, quindi la probabilità $p_1 = 1 = 365/365$, di essere l’unica

a festeggiare il compleanno in un certo giorno. La seconda persona che entra ha la probabilità $p_2 = 364/365$ di festeggiare il compleanno in un giorno diverso dalla prima. La terza persona che entra ha la probabilità $p_3 = 363/365$ di festeggiare il compleanno in un giorno diverso dalla prima e dalla seconda. Così procedendo è facile immaginare che la n^{ma} persona che entra avrà la probabilità $p_n = (365-(n-1))/365$ di festeggiare il compleanno in un giorno diverso dalle $n-1$ persone entrate precedentemente. È da notare che se $n > 365$ sicuramente ci saranno almeno due persone che festeggiano il compleanno nello stesso giorno. La probabilità che si verifichino tutti gli eventi esposti è data dal prodotto delle loro probabilità di cui va considerata la probabilità contraria, pertanto la probabilità che almeno due persone festeggino il compleanno nello stesso giorno sarà:

$$p = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365 - n + 1)}{365^n}$$

L'intuizione direbbe che tale probabilità sia molto bassa, invece si vede che già con $n = 23$ tale probabilità supera il valore di 0,5 [1][p.142-143]. L'apparente situazione paradossale nasce dal fatto che la mente tende ad interpretare il problema in una forma diversa: "quale è la probabilità che nella stanza ci sia una persona che festeggia il compleanno nello stesso giorno del tuo?". Invece è richiesta la probabilità che almeno due persone (non si sa quali), festeggino il compleanno nello stesso giorno (non si sa quale). Per comprendere la diversità tra i due problemi basta immaginare di avere un lungo elenco di nomi di persone non in ordine alfabetico; una cosa è scorrere l'elenco per cercare se è presente un nome prefissato, tutt'altra cosa è cercare se ci sono due persone con lo stesso nome, senza sapere però quale sia questo nome!

5. Somma delle facce nel lancio di n dadi

- Calcolare la probabilità che lanciando n dadi la somma delle facce uscite sia k .

Risolvere il problema di Galileo per $n = 3$ e $k = 9$.

Presentare un modello matematico di soluzione utilizzando polinomi.

Lanciando 3 dadi, la somma delle facce uscite è un numero compreso tra 3 e 18. Per trovare la probabilità che la somma delle facce uscite sia 9, occorre determinare in quanti modi si può ottenere la somma 9. È abbastanza semplice trovare che i casi favorevoli sono dati da 6 combinazioni di 3 addendi, ognuna delle quali va considerata tante volte quante sono le permutazioni degli addendi: 6 permutazioni se gli addendi sono tutti e tre diversi, 3 permutazioni se ci sono solo due addendi uguali; 1 permutazione se gli addendi sono tutti e tre uguali.

facce	1+2+6	1+3+5	1+4+4	2+2+5	2+3+4	3+3+3
permutazioni	6	6	3	3	6	1

In totale ci sono $6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$ modi possibili per avere somma 9.

I casi possibili sono $6^3 = 216$ per cui la probabilità cercata è $p = 25/216$

La soluzione generale del problema, soprattutto se il numero n di dadi cresce, non è immediata, né è agevole contare tutte le possibilità. Se però consideriamo il polinomio:

$$\frac{1}{6}t^1 + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{6}t^6$$

dove gli esponenti della variabile simbolica t sono i possibili punteggi e i relativi coefficienti sono le probabilità con le quali ogni punteggio può uscire, è facile verificare che il quadrato e il cubo di tale polinomio sono polinomi che simbolicamente, nella stessa maniera, forniscono le somme delle facce con le relative probabilità di uscita nel lancio rispettivamente di 2 o 3 dadi.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6}t^1 + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{6}t^6 \right)^2 = \\ & = \frac{1}{36}(t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 4t^5 + 5t^6 + 6t^7 + 5t^8 + 4t^9 + 3t^{10} + 2t^{11} + t^{12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6}t^1 + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{6}t^6 \right)^3 = \\ & = \frac{1}{216}(t^3 + 3t^4 + 6t^5 + 10t^6 + 15t^7 + 21t^8 + 25t^9 + 27t^{10} + 27t^{11} + 25t^{12} \\ & \quad + 21t^{13} + 15t^{14} + 10t^{15} + 6t^{16} + 3t^{17} + t^{18}) \end{aligned}$$

La probabilità precedentemente cercata è $25/216$, coefficiente del termine con t^9 .

Il discorso può essere generalizzato, tenendo presente che fare il prodotto dei polinomi, equivale a sommare le variabili aleatorie che essi simbolicamente rappresentano [1][p.132-133].

6. Somma delle facce nel lancio di un numero aleatorio di dadi

- Si lancia un dado e si vede la faccia uscita: sia n . Si rilancia il dado n volte: qual è la probabilità che la somma dei punti sia k ?

Fornire esempi reali di tale processo stocastico.

Presentare un modello matematico di soluzione utilizzando polinomi.

Chiarire la falsità del detto: crescete e moltiplicatevi!

Il processo indicato è applicabile a un individuo che può generare un numero aleatorio n di figli, ognuno dei quali a sua volta può generare un numero aleatorio di figli, in tal caso il problema consiste nel calcolare la probabilità che in tutto ci siano k nipoti. Naturalmente il modello si presta a descrivere anche fenomeni legati alla generazione di particelle in una reazione a catena di tipo atomico.

È interessante notare che a partire dal polinomio simbolico del caso precedente:

$$p(t) = \frac{1}{6}t^1 + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{6}t^5 + \frac{1}{6}t^6$$

come per lancio di 2 dadi il polinomio veniva moltiplicato per sé stesso $p(t) \cdot p(t)$, ottenendone uno di grado $12 = 6+6$, ora si può risolvere il problema posto componendo il polinomio con sé stesso $p(p(t))$, ottenendone uno di grado $36 = 6 \cdot 6$ [1][p.134-135].

$$p(p(t)) = \frac{1}{36}t^1 + \frac{7}{216}t^2 + \frac{49}{1296}t^3 + \frac{343}{7776}t^4 + \dots + \frac{1}{46656}t^{35} + \frac{1}{279936}t^{36}$$

In esso si riconosce che il totale può valere 1 solo se al lancio preventivo esce 1 e all'unico lancio successivo esce ancora 1, con probabilità $(1/6)(1/6) = 1/36$. Il totale può valere 2 se al lancio preventivo esce 1 e al successivo esce 2 oppure al lancio preventivo esce 2 e ai 2 lanci successivi esce due volte 1, con probabilità $(1/6)(1/6) + (1/6)(1/6)(1/6) = 7/216$. Infine il totale può valere 36 solo se al lancio preventivo esce 6 e ai successivi 6 lanci esce sempre 6, con probabilità $(1/6)^7 = 1/279936$

Di seguito vengono riportati i numeratori dei 36 coefficienti del polinomio $p(p(t))$ il cui denominatore comune è 279936, a partire dal grado 1 fino al grado 36:

7776, 9072, 10584, 12348, 14406, 16807, 11832, 12507, 13076, 13482, 13650, 13482, 12852, 12897, 12772, 12453, 11928, 11207, 10332, 9387, 8292, 7101, 5880, 4697, 3612, 2667, 1876, 1251, 786, 462, 252, 126, 56, 21, 6, 1.

In effetti "crescete e moltiplicatevi" è applicabile correttamente al grado dei polinomi ma non certo al processo aleatorio. Vale la pena di notare, infine, che se volessimo considerare appena 3 generazioni riproduttive il problema da un punto di vista teorico-formale si risolve "elegantemente" con la formula $p(p(p(t)))$, che "mostruosamente" genererà un polinomio di grado 216. In generale per valori successivi di n i problemi di calcolo diventano notevoli. È per questo che nell'ambito del Progetto Manhattan, E. Fermi, J. von Neumann e S. Ulam, negli anni '40 del secolo scorso, ebbero l'esigenza di procedere in maniera diversa ed inventarono il Metodo Monte Carlo, per calcolare quante particelle venivano generate da un'ipotetica reazione a catena di fissione nucleare.

7. Dal solitario delle concordanze alla base naturale dei logaritmi

- Le 10 carte di coppe vengono messe a caso sul tavolo chiamando uno, due, tre, ..., dieci; il solitario riesce se nessuna carta esce corrispondente al numero chiamato. Ad esempio, con le uscite "re, asso, due, tre, cavallo, fante, sei, cinque, quattro, sette" il solitario riesce, mentre con "cavallo, fante, tre, ..." no!

Illustrare il solitario in termini di permutazioni e punti fissi.

Discutere il solitario con due, tre o quattro carte e calcolare la probabilità che riesca.

Simulare il solitario con 5 carte e stimare la probabilità di riuscita giocandolo 1000 o più volte. Illustrare il significato logaritmico del reciproco di tale probabilità.

Per fissare le idee [1][p.100-102], provando con 2 carte si può avere la sequenza "12" e il solitario non riesce oppure "21" nel qual caso riesce, quindi con $n = 2$ la probabilità di riuscita è $1/2$. I numeri sottolineati sono relativi alle carte che hanno fatto fallire il solitario perché sono uscite in corrispondenza della chiamata del loro stesso numero e li diremo punti fissi della permutazione. Provando con 3 carte si possono avere 6 possibili

sequenze: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Si vede che solo 2 sono prive di punti fissi per cui il solitario riesce in 2 casi su 6, con probabilità 2/6. Con 4 carte sono possibili 24 sequenze: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321. Si vede che una ha 4 punti fissi, 6 hanno 2 punti fissi, 8 hanno 1 punto fisso, 9 sono prive di punti fissi e sono quelle per cui il solitario riesce, quindi con la probabilità 9/24. Se si prova con 5 carte le cose incominciano a complicarsi, ma con un po' di pazienza si trovano 120 permutazioni, di cui una con 5 punti fissi, 10 con 3 punti fissi, 20 con 2 punti fissi, 45 con 1 punto fisso, 44 prive di punti fissi. Il solitario con 5 carte quindi riesce con probabilità 44/120.

Riepilogando:

n	1	2	3	4	5
probabilità p_n	0/1 0	1/2 0,5	2/6 0,3333...	9/24 0,375	44/120 0,3666...
$\ln(1/p_n)$		0,693...	1,098...	0,9808...	1,0033...
$p_n - p_{n-1}$		1/2 - 0 +1/2	2/6 - 1/2 -1/6	9/24 - 2/6 +1/24	44/120 - 9/24 -1/120

Si nota che al crescere di n la probabilità tende rapidamente a un certo limite con valori alternativamente per eccesso e per difetto. Il logaritmo del reciproco della probabilità tende a 1. Inoltre osservando che $p_n - p_{n-1} = \pm 1/n!$ si può dedurre la formula generale:

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

Con 10 carte $p_{10} = 0,3678794\dots$ e si ritrova la tendenza a $1/e$ (con e base dei logaritmi naturali) che è la probabilità trovata per n biglie messe a caso in n scatole in modo che nessuna cadesse nella prima, con n tendente a infinito. Da notare anche che se la somma trovata si estende all'infinito, essa rappresenta lo sviluppo in serie di Mac Laurin di e^{-1} .

8. Problema del collezionista

- *Il tempo d'attesa per riempire un album di figurine e simulazione Monte Carlo:*

Quante figurine bisogna acquistare per riempire un album di n caselle?

Con quale formula si esprime il fatto che ci vogliono tante figurine?

Quanti lanci di un dado bisogna effettuare per vedere uscire tutte le facce?

Osserviamo che, come per un fenomeno periodico di frequenza f il periodo è $T = 1/f$, così per un fenomeno aleatorio di probabilità p si potrebbe dire che il tempo medio di attesa sia $T = 1/p$. Senza addentrarci nella dimostrazione teorica, il risultato è abbastanza intuitivo se si pensa che per la legge dei grandi numeri la probabilità p di un evento si può stimare con la frequenza media f con cui l'evento si presenta in un numero elevato di casi.

Ad esempio la faccia 4 di un dado, avendo probabilità $1/6$ di uscire, mediamente si presenterà con un tempo medio di attesa di 6 lanci. Questo significa che lanciando la prima volta un dado si ha la certezza che esca una qualsiasi faccia, essendo la probabilità uguale ad 1, quindi per l'evento che esca una qualsiasi faccia il tempo medio di attesa è 1 lancio. Lanciando successivamente il dado, la probabilità che esca una faccia diversa da quella uscita per prima è $5/6$, quindi con un tempo medio di attesa di $6/5$. Poi la probabilità che esca una faccia diversa da quelle già uscite scende a $4/6$, con un tempo medio di attesa di $6/4$, così le probabilità di avere sempre facce diverse saranno $3/6$, $2/6$, $1/6$, con rispettivi tempi medi di attesa $6/3$, $6/2$, $6/1$. Allora il tempo medio di attesa totale, affinché escano tutte e 6 le facce diverse, è $T = 6/6 + 6/5 + 6/4 + 6/3 + 6/2 + 6/1$ o anche:

$$T = 6 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) = 14,7$$

Ossia occorrono mediamente 15 lanci affinché un dado presenti tutte le facce [1][p.30]. La formula può essere facilmente generalizzata per un dado con n facce nel caso del classico "problema del collezionista" in cui un bambino sta collezionando le figurine da attaccare in un album. Supponendo che le figurine che acquista siano distribuite casualmente nelle bustine e abbiano tutte la stessa probabilità di uscire, si vuole sapere qual è il numero medio di figurine da acquistare per completare la raccolta. Ovviamente il numero di figurine corrisponde al tempo medio di attesa affinché escano tutte le n figurine diverse:

$$T = n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

Se ad esempio $n = 100$ tale valore è $518,73\dots$ per cui occorre acquistare mediamente 519 figurine. È da notare che quindi le case editrici di figurine guadagnano già abbondantemente, anche senza rendere "rare" alcune figurine! Si rimanda al lavoro sul Metodo Monte Carlo per vedere come arrivare allo stesso risultato in un modo completamente diverso.

9. Distribuzione binomiale e paradosso del terno al lotto

- Lanciando n volte una moneta quante teste escono? Con quale probabilità?

Lanciare n volte una moneta equivale a mettere a caso n biglie in 2 scatole, che potremmo chiamare "testa" e "croce". Si è già visto che ciò si può fare in 2^n modi. Ovviamente k teste possono presentarsi in $\langle n, k \rangle$ modi. Ad esempio lanciando $n = 4$ volte una moneta, si avranno $2^4 = 16$ casi possibili, di cui $\langle 4,0 \rangle = 1$ con 0 teste, $\langle 4,1 \rangle = 4$ con 1 testa, $\langle 4,2 \rangle = 6$ con 2 teste, $\langle 4,3 \rangle = 4$ con 3 teste, $\langle 4,4 \rangle = 1$ con 4 teste. Pertanto in generale la probabilità di avere k teste lanciando n volte una moneta è $p = \langle n, k \rangle / 2^n$.

- È più facile fare un terno al lotto o avere più di 560 maschi su 1000 nati?

Su di una ruota del lotto, dai 90 numeri si possono estrarre $\langle 90, 5 \rangle = 43949268$ possibili cinque. I casi favorevoli, tali che in queste cinque compaiano i 3 numeri del terno

giocato, corrispondono a quanti sono i modi in cui i restanti 87 numeri (che non ci interessano) possono occupare gli altri 2 posti della cinquina, cioè $\langle 87, 2 \rangle = 3741$.

Pertanto la probabilità di fare un terno al lotto è:

$$3741/43949268 = 1/11748 = 0,00008512\dots$$

La probabilità che su 1000 nati nascano esattamente m maschi è la stessa che lanciando 1000 volte una moneta escano m teste, cioè $p_m = \langle 1000, m \rangle / 2^{1000}$.

Allora la probabilità che nascano più di m maschi è la sommatoria di tutte le probabilità da $m+1$ a 1000 $p = p_{m+1} + p_{m+2} + \dots + p_{1000}$.

In conclusione la probabilità che ci siano più di 560 maschi su 1000 nati è:

$$\sum_{m=561}^{1000} \frac{\binom{1000}{m}}{2^{1000}} = 0,0000638 \dots$$

Risulta evidente, quindi, che è più probabile vincere un terno al lotto che avere oltre 560 maschi su 1000 nati. Se la natura si affida al caso, vuol dire che questo, paradossalmente, è il migliore modo per garantire risultati certi!

Calcolare il risultato della formula con la calcolatrice non è semplice, a causa dell'ordine di grandezza dei numeri coinvolti. Allora si potrebbe essere tentati di calcolare la probabilità di avere più di 56 maschi su 100 nati, che intuitivamente ci dovrebbe apparire più o meno la stessa, ma ci si imbatte in un fatto inaspettato che forse rappresenta il vero paradosso del problema. La probabilità di avere più di 560 maschi su 1000 nati è completamente diversa da quella di avere più di 56 maschi su 100 nati:

$$\sum_{m=57}^{100} \frac{\binom{100}{m}}{2^{100}} = 0,0966739 \dots$$

In ogni caso il problema si può risolvere in maniera completamente diversa, come illustrato nel lavoro sul Metodo Monte Carlo, a cui si rimanda.

- Costruire istogrammi sul numero di spicchi di un limone, di un arancio, o sul numero di raggi della capsula dei semi di un papavero.

Interessante esercizio da far fare agli studenti durante l'anno scolastico [1][p.59-60].

10. Distribuzione ipergeometrica

- Calcolare le probabilità delle uscite al gioco del lotto

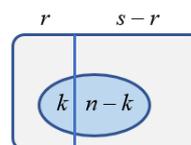
Nell'estrazione su di una ruota del lotto si hanno $\langle 90,5 \rangle$ casi possibili. Se si giocano 3 numeri e si vuole calcolare la probabilità di fare terno, i casi favorevoli sono $\langle 3,3 \rangle \cdot \langle 87,2 \rangle$ perché ci interessano le cinque composte da tutte le terne che si possono formare con i 3 numeri giocati e tutte le coppie che si possono formare con gli altri 87 numeri. Se giocando sempre 3 numeri si vuole calcolare, invece, la probabilità di fare ambo, i casi favorevoli saranno $\langle 3,2 \rangle \cdot \langle 87,3 \rangle$, pertanto le probabilità di fare terno o ambo giocando 3 numeri sono rispettivamente:

Problemi combinatori per introdurre alcune idee fondamentali della probabilità

$$p_{terno} = \frac{\binom{3}{3} \binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{11748} \quad p_{ambo} = \frac{\binom{3}{2} \binom{87}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{85}{11748}$$

In effetti date le 90 palline numerate nell'urna del lotto, 3 di esse hanno la particolarità di essere i numeri giocati (immaginiamole rosse), le altre 87 non hanno nessuna importanza (immaginiamole bianche). Si estraggono a caso 5 palline e si vuole sapere, nel caso dell'ambo, la probabilità che tra esse ci siano 2 dei numeri giocati (2 rosse tra le 5 estratte). In generale se si hanno s oggetti dei quali r hanno una certa proprietà e ovviamente gli altri $(s-r)$ non ce l'hanno, la formula caratterizzante la cosiddetta "distribuzione ipergeometrica", della probabilità che estraendo a caso n oggetti, tra essi ce ne siano k che presentano quella proprietà è:

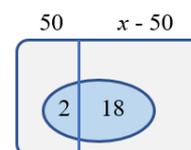
$$p = \frac{\binom{r}{k} \binom{s-r}{n-k}}{\binom{s}{n}}$$



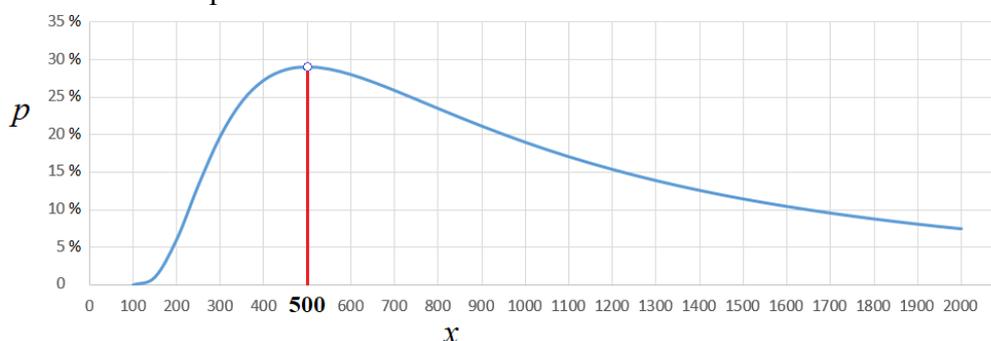
- *Quanti pesci ci sono in un lago?*

La precedente formula si può applicare al classico problema della stima di quanti pesci ci siano in un lago. Per determinare il numero incognito x di pesci, si può procedere col catturarne r , ad esempio 50 e marcarli con speciali etichette per poi rilasciarli in libertà. Dopo un certo tempo che garantisca il rimescolamento casuale dei pesci marcati in mezzo agli altri, se ne pescano n e si osserva il numero k di essi che risultano marchiati; ad esempio $n = 20$, $k = 2$, $(n-k) = 18$. In tal caso la probabilità di avere 2 pesci marcati su 20 pescati è:

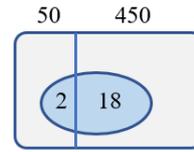
$$p = \frac{\binom{50}{2} \binom{x-50}{18}}{\binom{x}{20}}$$



Ovviamente p è funzione di x il cui valore è incognito. Potremmo però calcolare $p(x)$ in corrispondenza di vari valori assegnati a x e osservare i risultati. Appare evidente che la massima probabilità di trovare 2 pesci marcati su 20 pescati si ottiene se nel lago ci fossero in totale 500 pesci di cui 50 marcati e 450 no.



$$p = \frac{\binom{50}{2} \binom{450}{18}}{\binom{500}{20}} = 0,2910399$$

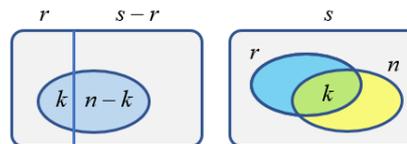


D'altra parte è abbastanza intuitivo pensare che se il campione di 20 pesci è casuale, deve rispecchiare nella sua composizione la stessa proporzione che esiste nell'intero lago, per cui bastava scrivere

$$2 : 20 = 50 : x \quad x = \frac{50 \cdot 20}{2} = 500$$

È incredibile come, a volte, basta cambiare la forma del grafico di Eulero-Venn per scoprire un significato diverso della stessa formula. Ad esempio se la bozza di un libro contiene un certo numero s di errori di stampa e due revisori trovano rispettivamente r ed n errori di cui k in comune, la stima del numero totale di errori è [3][p.192-193]:

$$s = \frac{r \cdot n}{k}$$



- Come si calcolano le probabilità del poker

La formula della distribuzione ipergeometrica trova applicazione anche in altri casi come i giochi con le carte. Ad esempio nel poker che si gioca con 32 carte, 8 per ogni colore, la probabilità che il primo giocatore riceva tra le sue 5 carte, 4 carte di fiori è:

$$p = \frac{\binom{8}{4} \binom{24}{1}}{\binom{32}{5}} = \frac{15}{1798} = 0,00834 \dots$$

Infatti l'insieme di $s = 32$ carte è composto da $r = 8$ carte di fiori e $(s-r) = 24$ carte di altri colori, quindi p è la probabilità che tra le $n = 5$ carte estratte, ce ne siano $k = 4$ di fiori.

Bibliografia

- [1] Cerasoli M. (2019). Dialoghi con un matematico strano.
- [2] Ciccacci F. (2012). Fondamenti di Fisica Atomica e Quantistica, EdiSES.
- [3] Eastaway R., Wyndham J. (2002). Coppie, numeri e frattali, edizioni Dedalo.

Una analisi critica sulla didattica di alcuni concetti di base dell'Analisi Matematica

Antonio Maturo

Mathesis Abruzzo, via Pianacci 21, Montesilvano, email antomato75@gmail.com

Sunto Si propone una riflessione sulla didattica di alcuni concetti di base dell'Analisi Matematica, con l'obiettivo di aiutare gli studenti a capire i fondamenti della disciplina e ad evitare gli errori grossolani che si possono commettere con un approccio approssimativo alle nozioni teoriche. Purtroppo, anche alcuni diffusi libri di testo, nell'intento di semplificare l'esposizione, hanno finito per dare un approccio errato e fuorviante di alcuni concetti fondamentali. Infine, si mostra che è possibile avere una semplificazione dei concetti con un approccio basato sulle funzioni monotone. Estendendo tale teoria alle funzioni monotone a tratti si ottiene una trattazione che può essere sufficientemente generale per gli scopi di una scuola media superiore.

Parole chiave: campi ordinati, funzioni monotone, funzioni continue, geometria su un campo

1. I campi ordinati

Il primo passo per lo studio consapevole dell'Analisi Matematica è chiarire prima il concetto di *campo* $(K, +, \cdot)$ e poi quello di *campo ordinato* $(K, +, \cdot, \leq)$.

Si fa notare che vale la "regola del 4". In un campo ci sono:

- 4 assiomi dell'addizione,
- 4 assiomi della moltiplicazione,
- Un assioma di legame fra addizione e moltiplicazione (la proprietà distributiva).

Si fa notare che le 9 proprietà di un campo sono tutte necessarie e sufficienti sia per risolvere equazioni e sistemi lineari, sia per costruire geometrie su un campo, a partire dal concetto di retta. Si può evidenziare che esistono campi finiti e infiniti e quindi geometrie in cui ogni retta ha un numero finito di punti e geometrie in cui il numero di punti di una retta è infinito.

Successivamente, a partire dalla necessità di risolvere le disequazioni, si introduce il concetto di campo ordinato $(K, +, \cdot, \leq)$.

Anche in un campo ordinato vale la “regola del 4” e la necessità di avere un legame per ogni coppia di elementi dell’insieme $\{+, \cdot, \leq\}$. Quindi si evidenzia che ci sono:

- 4 assiomi dell’addizione,
- 4 assiomi della moltiplicazione,
- 4 assiomi dell’ordinamento,
- tre proprietà di legame (addizione-moltiplicazione, addizione-ordinamento, moltiplicazione-ordinamento).

In tutto 15 assiomi, necessari e sufficienti per sistemi di equazioni e disequazioni di primo grado.

Conviene a questo punto introdurre il concetto di isomorfismo fra campi e quello fra campi ordinati. Poi si passa a considerare campi ordinati specifici. Si fa osservare che:

- esistono infiniti campi ordinati (non isomorfi);
- il campo dei razionali è contenuto in ogni campo ordinato (a meno di isomorfismi).

Occorre far notare che per ogni campo ordinato si costruisce una Analisi Matematica e si ottiene una idea di retta (e quindi di Geometria) specifica, per cui si pone il problema pratico di capire con quale campo ordinato lo studio della matematica è più agevole.

In particolare, si pone il problema di vedere quale campo ordinato conviene considerare per costruire una Analisi Matematica più comprensibile ed efficiente dal punto di vista applicativo e si introducono i due problemi classici:

- *il problema della radice quadrata*, ossia il desiderio di avere un campo in cui esiste un elemento x tale che $x^2 = a$, per ogni numero razionale a ;
- *il problema dell’infinitesimo*, basato sull’idea di avere un elemento positivo del campo x (detto elemento infinitesimo) minore di ogni numero razionale;
- *il problema dell’infinito*, basato sull’idea di avere un elemento positivo del campo x (detto elemento infinito) maggiore di ogni numero razionale.

Si fa vedere che introducendo un 16° assioma (*assioma di completezza*), definito come esistenza dell’elemento di separazione di due insiemi separati, oppure (ciò che è equivalente) come esistenza dell’estremo superiore di un insieme limitato, si ottengono campi ordinati in cui non solo si risolve il problema della radice quadrata, ma si ottiene una soluzione anche di numerosi altri problemi, per cui sembra che in un campo ordinato in cui vale il 16° assioma, detto *campo ordinato completo*, tutte le teorie matematiche si sviluppano meglio, ossia in maniera più semplice e efficiente.

Si evidenzia che, a meno di isomorfismi, esiste un solo campo ordinato completo, detto *campo dei numeri reali*. Si presentano poi come modelli dei numeri reali: i numeri decimali con infinite cifre decimali e la retta euclidea (con l’accettazione come fatto intuitivo dell’esistenza del punto di separazione di due insiemi di punti separati).

A questo punto si potrebbe pensare di aver concluso con le basi teoriche e poter passare a costruire in maniera definitiva l'Analisi Matematica. Dal punto di vista formativo conviene però presentare ai ragazzi alcuni interrogativi che li inducono a pensare e ad approfondire il legame fra matematica, intuizione e mondo reale:

- È proprio vero che con i numeri reali abbiamo tutte le basi teoriche necessarie per rappresentare il mondo che ci circonda?
- È proprio vero che l'intuito ci suggerisce solo la retta reale, in cui un punto è indivisibile?
- Non può convenire considerare campi ordinati in cui esistono elementi infinitesimi o elementi infiniti?

Non va inoltre trascurato il fatto che esistono campi ordinati intermedi fra i razionali ed i reali, utili per scopi particolari.

Si fa notare che i numeri reali non possiedono né elementi infinitesimi, né elementi infiniti, mentre esistono campi ordinati che contengono strettamente i reali ed hanno elementi infinitesimi e infiniti rispetto ai reali.

Molte persone non considerano utili queste analisi teoriche e le ritengono solo perdite di tempo rispetto ai calcoli. Ma non è così. Esse sono necessarie per avere consapevolezza di ciò che si fa e quindi avere una visione aperta a cambiamenti futuri, in cui l'osservazione di fenomeni reali o di nuove teorie della fisica può far ritenere utile partire da fondamenti matematici diversi.

L'Analisi Matematica che si studia in Italia all'estero è solitamente chiamata "Analisi Reale", perché si basa esclusivamente sul campo dei numeri reali. Ma bisogna sottolineare che per ogni campo ordinato c'è una Analisi matematica (e una Geometria) specifica, con proprietà proprie.

Si usa chiamare "campi ordinati non standard" quelli in cui esistono elementi infinitesimi e infiniti e "campi ordinati standard" quelli contenuti nel campo dei reali.

In una scuola superiore sperimentale o in un corso di aggiornamento per insegnanti sarebbe opportuna la formazione di gruppi di lavoro per il confronto delle proprietà teoriche e le applicazioni di campi ordinati standard e non standard e per esaminare le possibili ricadute didattiche nelle Scuole Superiori.

2. Intervalli, intorno e insieme \mathbf{R} ampliato

Alcuni libri di testo, ampiamente adottati per lunghi periodi, sembrano fatti apposta per confondere le idee a studenti e docenti che li adottano. Purtroppo, essi presentano in maniera approssimativa e spesso errata dei concetti iniziali, con l'inconveniente che gli studenti più attenti non hanno elementi adeguati a comprendere il seguito.

Indichiamo con T1, T2, T3, T4 dei libri di testo per gli istituti tecnici che abbiamo preso in esame.

In T1 si legge:

(1a) “si chiama *intervallo limitato* l’insieme di tutti i numeri reali *compresi* fra due numeri reali prefissati a, b , con $a < b$...”;

(1b) “si chiama *intervallo illimitato* l’insieme di tutti i numeri reali *maggiori* di un numero reale prefissato a (*minori* di a) ...”;

(1c) “un *particolare* tipo di intervallo è il cosiddetto *intorno* di un punto... Dato un punto x , si dice intorno di x ogni intervallo aperto che lo contiene”.

In T2 si legge:

(2a) “gli intervalli possono essere di *due tipi*: aperti o chiusi...dati due numeri reali qualsiasi a, b , tali che $a < b$, si chiama intervallo *finito* l’insieme di tutti i numeri reali compresi fra a e b ...”;

(2b) “gli intervalli *infiniti* sono quelli che non sono limitati, cioè che non hanno estremi (retta), o hanno un estremo solo (semiretta)...”;

(2c) “si dice intorno di un numero a un qualsiasi intervallo *chiuso* che contiene *internamente* a ...”.

I testi T3 e T4 risolvono “brillantemente” le questioni su intervalli e intorni. Semplicemente non li definiscono!!!!

Una prima osservazione è la necessità di chiarire la differenza fra insiemi infiniti e insiemi illimitati, confusi nelle definizioni (2a) e (2b).

La definizione (1a) fa pensare che c’è un solo tipo di intervallo limitato, mentre considerando gli intervalli chiusi, aperti, semiaperti a destra e semiaperti a sinistra, si vede che ci sono 4 tipi. Strano proprio per un libro dell’Istituto Tecnico Commerciale, in cui, ad es. in Statistica, gli intervalli semiaperti sono fondamentali per le classificazioni.

La definizione (2a) dice che ci sono due tipi di intervalli, ma poi ne definisce uno solo parlando di “numeri *compresi* fra a e b ” e poi sbaglia usando il termine “intervallo finito” invece di “intervallo limitato”.

Da entrambe le definizioni nasce la necessità di definire il termine “compresi fra” importante sia in Analisi sia in Geometria (Hilbert, 1970).

Ma perché tutta questa confusione e approssimazione? Forse perché si vede un intervallo come un segmento (e nella Geometria Euclidea non si chiarisce mai se i segmenti sono chiusi o aperti. Notiamo che in entrambi i casi sarebbe impossibile la divisione di un segmento in parti uguali...).

La definizione (2b) è incomprensibile. Un intervallo senza un estremo? Cos’è?

Per evitare queste definizioni discutibili va introdotto subito l'insieme "R ampliato" ossia $\mathbb{R}^{\wedge} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, in modo che un intervallo abbia sempre due estremi.

Si può discutere se i due simboli $-\infty$ e $+\infty$ possono essere trattati come numeri. Sotto alcuni aspetti sì. In realtà si dovrebbe cominciare a pensare che sotto ciascuno di questi simboli non c'è solo un numero, ma un insieme molto ampio di numeri...

Un altro punto da considerare è la necessità di considerare gli intervalli degeneri, in cui primo e secondo estremo coincidono. Perché sono evitati nei libri di testo? Forse perché non ritengono che un segmento si può ridurre ad un punto o addirittura all'insieme vuoto.

Una giustificazione può essere quella di decidere che per "intervallo" senza aggettivi si intende un intervallo aperto e in generale per "segmento" senza aggettivi si intende quello aperto. Recenti impostazioni della geometria (Prenowitz, Jantosciak, 1979) e la stessa Topologia mostrano che questa impostazione ha notevoli vantaggi. Vi sono però delle circostanze, legate al concetto generale di geometria proiettiva, in cui sembra più opportuno il segmento chiuso (Beutelspacher, Rosembaum, 1998). Inoltre, in Statistica e, in generale, in problemi di classificazione, è essenziale considerare intervalli semiaperti.

Per chiarire da un punto di vista intuitivo il significato di $\mathbb{R}^{\wedge} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, la figura seguente può convincere gli studenti che l'insieme dei punti di una retta (quella in basso nella figura) può essere rappresentato da quelli di una semicirconferenza (quella inferiore) o del suo diametro, in modo da conservare l'ordinamento.

I punti $-\infty$, $+\infty$ sono rappresentati dagli estremi a e b della semicirconferenza. Proiettando i punti della semicirconferenza sul diametro ab, si vede che la retta ampliata è rappresentata dal segmento chiuso ab, orientato nel verso che va da a fino a b.

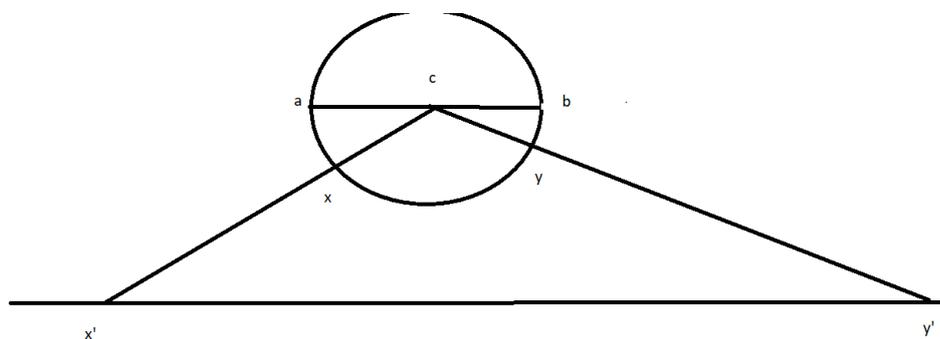


Figura 1

Per proseguire è necessario chiarire il concetto di intorno di un punto di \mathbb{R} , e più in generale, di $\mathbb{R}^\wedge = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

La definizione (1c) vede un intorno di un punto $x \in \mathbb{R}$ come un intervallo aperto che contiene x ; la definizione (2c) vede un intorno di un punto c come un intervallo chiuso “che contiene internamente c ”, senza precisare che vuol dire “internamente”.

Il concetto preciso di intorno di x , come un insieme che contiene un intervallo aperto a cui appartiene x , potrebbe essere dato in due passi.

Prima definire un intorno di x in senso stretto come un intervallo aperto che contiene x , e poi definire un intorno di x (in senso lato) come un insieme che contiene un intorno in senso stretto.

Per estendere il concetto di intorno a \mathbb{R}^\wedge è necessario assumere la convenzione che un intervallo $(a, +\infty]$, $a \in \mathbb{R}$, è da considerarsi come un intervallo aperto contenente $+\infty$ e un intervallo $[-\infty, a)$ come un intervallo aperto contenente $-\infty$.

Alcuni sono contrari a tale convenzione, perché la ritengono poco intuitiva, non ritenendo che “punti al finito” possono essere trattati in maniera analoga a “punti all’infinito”. Tuttavia, tutta la Geometria Proiettiva, la Topologia e in particolare la corrispondenza biunivoca della Figura 1, fra i punti di una retta e i punti di un segmento, che conserva l’ordinamento, mostrano che è molto utile una trattazione unitaria di punti “al finito” e “all’infinito”. In particolare, ciò ci consente di dare una sola definizione di limite e una sola dimostrazione dei teoremi sui limiti invece di considerare in maniera distinta 9 casi particolari.

A partire dal concetto di intorno si definiscono poi i punti di accumulazione in $\mathbb{R}^\wedge = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ e siamo pronti per dare la definizione di limite (Maturo A., 1986).

Un piccolo sforzo inevitabile è quello di presentare i concetti di estremo inferiore e superiore, mostrando come in \mathbb{R}^\wedge si ha il vantaggio che ogni sottoinsieme è dotato di estremo inferiore e estremo superiore.

A questo punto ci si può anche chiedere se in ogni campo ordinato $(K, +, \cdot, \leq)$ si possono estendere i concetti precedenti. In particolare, se si può considerare $K^\wedge = K \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Presentando la teoria agli studenti o ai corsisti, si può fare in modo che essi riconoscano che tutti i concetti precedenti (intervalli, intorni, limite) si possono estendere a K ed a K^\wedge , tranne l’esistenza dell’estremo inferiore e dell’estremo superiore di un sottoinsieme di K^\wedge .

Definendo le operazioni in \mathbb{R}^\wedge escono fuori le forme indeterminate. Ma ciò non è un problema, il fenomeno si può inquadrare da due punti di vista:

a) Il punto di vista delle iperstrutture algebriche

Si ammette che una operazione possa avere più risultati (Marty, 1934; Corsini, 1993; Prenowitz, Jantosciak, 1979; Beutelspacher, Rosembaum, 1998; Corsini, Leoreanu, 2003; Di Gennaro, Maturo 2002).

In questo caso l'operazione è anche detta *iperoperazione* o *iperprodotto*. Ciò ha un significato importante dal punto di vista geometrico.

In geometria:

- un segmento può essere considerato come l'iperprodotto dei suoi estremi;
- una retta può essere considerata l'iperprodotto di due dei suoi punti.

Allora in Analisi Matematica una forma indeterminata può essere vista come un iperprodotto con più risultati.

b) Il punto di vista insiemistico.

Data una struttura algebrica (K, \bullet) con \bullet operazione in K , se A e B sono due sottoinsiemi di K , si può definire il prodotto $A \bullet B$ come l'insieme dei prodotti $a \bullet b$, con $a \in A$ e $b \in B$. In generale $A \bullet B$ è un sottoinsieme di K che non si riduce ad un solo elemento. Allora, tenuto conto che $-\infty$ e $+\infty$ sono simboli che rappresentano due insiemi di elementi, è possibile che si abbiano più risultati in operazioni in cui compaiono tali simboli.

3. Il ruolo fondamentale delle funzioni monotone

Nelle Scuole Superiori e anche nel primo anno di Università una nozione che i docenti vorrebbero fosse posseduta con chiarezza dagli studenti è quella di funzione crescente o decrescente.

Perché agli esami universitari di Matematica del primo anno (esclusi al più i corsi di laurea in Matematica e Ingegneria) quasi tutti gli studenti hanno difficoltà a definire le funzioni crescenti e decrescenti?

Le funzioni monotone sono funzioni privilegiate. In particolare:

- sono le più importanti in Economia, nelle Scienze Sociali e nella maggior parte delle applicazioni;
- le definizioni di limite e di funzione continua si possono introdurre con percorsi privilegiati, senza scomodare le definizioni generali che adottano simboli logici non sempre compresi dagli studenti;
- il concetto di limite per le funzioni monotone è ottenuto con una definizione di limite "costruttiva", mentre nella definizione generale di limite non si capisce da dove esce fuori il numero $\ell \in [-\infty, +\infty]$ di cui parla la definizione.

Anche per definire la derivata e l'integrale esteso ad un intervallo le funzioni monotone hanno un ruolo essenziale, dei percorsi privilegiati e costruttivi.

Considerare le funzioni monotone significa trattare un caso molto particolare, che sminuisce l'importanza della teoria svolta?

Direi di no, perché i discorsi sulle funzioni monotone si estendono immediatamente alle funzioni “monotone a tratti”, ossia tali che, se A è un sottoinsieme limitato dell'insieme di definizione della funzione, è possibile dividere A in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali la funzione è crescente o decrescente.

I limiti delle funzioni monotone si riducono a estremi inferiori e superiori. Per chi ha capito il concetto di punto di accumulazione ed il 16° assioma dei reali il compito è facile.

Per le funzioni monotone, in un punto x_0 di accumulazione sia per la restrizione a destra sia per la restrizione a sinistra della funzione, i limiti destro e sinistro possono essere diversi, ma esistono sempre.

Inoltre, le definizioni sulle discontinuità sono molto bene comprensibili, essendoci solo discontinuità eliminabili o di prima specie.

Un errore frequente è di attribuire a funzioni generiche delle proprietà e definizioni tipiche delle funzioni monotone!

Bisogna anche chiarire bene le differenze fra funzioni:

- monotone in un punto;
- monotone in un intervallo;
- monotone in un insieme.

Ci sono aspetti intuitivi differenti da prendere in considerazione.

Eviterei:

- a) di parlare di “intorno destro e sinistro di un punto”. Invece va definito il concetto di *restrizione* di una funzione, che vale non solo se si considera la parte dell'insieme di definizione a destra o a sinistra di un punto x_0 , ma anche se si considera un qualsiasi sottoinsieme dell'insieme di definizione, ad esempio una successione che ha x_0 come punto di accumulazione;
- b) di usare i termini “non decrescente” e “non crescente”. Non sono corretti e esprimersi con una negazione depista il cervello. Meglio parlare di funzioni: “crescenti ($x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$)”, “strettamente crescenti ($x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$)” e analogamente “decrescenti” e “strettamente decrescenti”.

In una Scuola Superiore sperimentale oppure in un Corso di aggiornamento per docenti può essere opportuna la formazione di un gruppo di lavoro per l'approfondimento delle proprietà delle funzioni monotone, in particolare:

Una analisi critica sulla didattica di alcuni concetti di base dell'Analisi Matematica

- valutare l'efficacia dei percorsi privilegiati per definire i loro limiti e la continuità;
- valutare l'estensione di questi percorsi all'insieme delle funzioni monotone a tratti, per le quali limiti e continuità (ma anche derivata e integrale) hanno proprietà immediatamente desumibili da quelle delle funzioni monotone;
- vedere per quali funzioni si possono definire limite e continuità a partire dalle definizioni relative alle funzioni monotone, sfruttando il fatto che sono maggiorate o minorate da funzioni monotone.

In particolare, si consiglia di partire dalle proprietà di monotonia o monotonia a tratti delle funzioni elementari.

È opportuno mettere in evidenza che in un campo ordinato in cui non vale il 16° assioma (ad es. il campo dei razionali) può non esistere, in un punto di accumulazione x_0 , rispettivamente a destra o a sinistra, il limite destro o sinistro di una funzione monotona. Ciò è essenziale per chiarire definitivamente l'importanza dell'assioma di completezza.

Un aspetto importante legato alla considerazione di \mathbb{R}^{\wedge} e dei limiti delle funzioni monotone è quello di introdurre una metrica d in \mathbb{R}^{\wedge} tale che il concetto di limite in \mathbb{R}^{\wedge} si riduce al concetto di limite rispetto a tale metrica. A tale scopo basta considerare la Figura 1 e assumere come distanza di due punti x' e y' sulla retta la distanza dei punti corrispondenti sulla semicirconferenza.

Un'alternativa analitica è di prendere una funzione $y = f(x)$ strettamente crescente e limitata in \mathbb{R} , prolungarla su \mathbb{R}^{\wedge} ponendo $f(-\infty)$ uguale al limite di $f(x)$ per $x \rightarrow -\infty$, $f(+\infty)$ uguale al limite di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ e assumendo come distanza fra due punti x e y in \mathbb{R}^{\wedge} il numero reale $|f(x) - f(y)|$. Si vede subito che la definizione di limite in questo spazio metrico (con i classici ε , δ) si riduce alla definizione di limite in \mathbb{R}^{\wedge} basata sugli intorni. Ad esempio, si può assumere $f(x) = \arctg x$.

4. Funzioni monotone e funzioni continue

Valutiamo le definizioni di funzione continua date nei libri di testo citati.

In T1 si legge: "...una funzione definita su un intervallo, su una semiretta o su tutto l'asse reale, è *continua* se il suo diagramma è una linea continua: se il suo diagramma può essere tracciato senza mai staccare la penna dal foglio. I punti in cui, eventualmente, il diagramma della funzione si interrompe, si chiamano punti di discontinuità...".

In T2 si legge: "...sia data una funzione $y = f(x)$ definita in un dato intervallo. Essa è continua in un punto k di tale intervallo se, in corrispondenza di valori di x sempre più prossimi a k , otteniamo valori di $f(x)$ sempre più prossimi a $f(k)$... una funzione $y = f(x)$

si dice *continua* in un dato intervallo quando verifica la condizione di continuità in ogni punto di detto intervallo... una funzione $y = f(x)$ si dice discontinua in un dato intervallo quando non è continua in qualche punto dell'intervallo e cioè quando l'andamento della curva che la rappresenta ha punti di discontinuità (*salti o interruzioni*)..."

In T3 si legge: "...si dice che la funzione $y = f(x)$, definita nell'intervallo (a, b) , è *continua* nel punto di ascissa x_0 se, fissato ad arbitrio un numero positivo ε è possibile determinare un intervallo (c, d) che contiene x_0 ed interno ad (a, b) , tale che per ogni suo punto di ascissa x diverso da x_0 , la differenza fra le ordinate $f(x)$ ed $f(x_0)$ si mantenga sempre più piccola del numero ε fissato ad arbitrio...in genere sono discontinue le funzioni fratte..."

In T4 si legge: "...nel caso delle funzioni finora considerate i diagrammi erano costituiti da una linea continua, cioè una linea che si può tracciare senza staccare la punta scrivente dal foglio. In questi casi si dice che la funzione è *continua*. Una funzione si dice invece *discontinua* quando presenta dei salti, che, nel tracciare il diagramma della funzione, obbligano a staccare la punta scrivente dal foglio..."

Le definizioni date in T1 e T4 sono le classiche "definizioni intuitive" di funzione continua, ampiamente criticate nella letteratura scientifica. Esse si ispirano ai seguenti:

Teorema di Bolzano: Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Se A è un intervallo allora anche $f(A)$ è un intervallo.

Corollario del Teorema di Bolzano: Il grafico di una funzione continua definita in un intervallo è un insieme connesso.

Ci si basa sulla presunzione di invertire tale corollario e di interpretare la connessione di un grafico come la possibilità di disegnarlo senza staccare la penna dal foglio.

A partire da tali definizioni resta molto difficoltosa la definizione di punto di discontinuità. Intanto perché non è definita la continuità in un punto (ma solo in un intervallo).

Poi il riferimento a non ben definiti "salti" o "interruzioni" fa pensare che ci si riferisca solo a discontinuità eliminabili o di prima specie, ciò che è accettabile solo se le funzioni considerate sono monotone o, più in generale, monotone a tratti.

A questo punto sarebbe stato molto più facile definire la continuità per le funzioni monotone, sfruttando il fatto che una funzione monotona definita in un intervallo è continua se l'insieme dei valori assunti è un intervallo (ossia si può invertire il teorema di Bolzano).

La definizione data in T3 è sostanzialmente corretta nella parte iniziale, anche se contiene molte parti inutili ed è espressa in un linguaggio pesante dal punto di vista didattico e scientifico. Le precisazioni dopo la prima parte sono discutibili. L'ultima, sulle funzioni fratte, è proprio errata. La continuità vale in ogni punto dell'insieme di definizione.

La definizione data in T2 ci ha incuriosito. Apparentemente il concetto di continuità è presentato in maniera semplice, completa in quanto si occupa della continuità in un punto e anche ben evidenziata tipograficamente. Però ad una analisi approfondita si vede che la definizione data individua una classe di funzioni che non corrispondono al concetto di funzione continua e che sono “più vicine” alle funzioni monotone.

Abbiamo studiato tali funzioni in alcuni lavori (Maturo, Varone, 1994, 1995) e sono emersi risultati imprevisti. Allora abbiamo chiamato “pseudocontinue” le funzioni che soddisfano la definizione data.

5. Conclusioni

Le considerazioni svolte sono state originate da un problema pratico, la difficoltà di una docente scrupolosa di un Istituto Tecnico Commerciale a preparare i suoi studenti per l'Esame di Stato utilizzando i libri di testo presenti nella scuola. Purtroppo, delle definizioni approssimative e quindi scorrette impediscono agli studenti di comprendere i fondamenti della disciplina. Esse o sono incomprensibili o finiscono per definire concetti diversi da quelli che si vogliono presentare.

Se proprio si vuole semplificare allora conviene rinunciare a dare definizioni generali e dare le definizioni più delicate (limiti, funzioni continue) per una classe di funzioni più ristretta (ad esempio le funzioni monotone a tratti) ma sufficiente per gli scopi della scuola che si considera. Importante ribadire che, a differenza del caso generale, per le funzioni monotone o monotone a tratti la definizione di limite è costruttiva e anche la definizione di funzione continua è intuitiva, potendosi invertire il corollario del teorema di Bolzano.

Anche in una scuola di livello più elevato per la matematica può essere utile seguire in una prima fase questo itinerario didattico, per poi riservarsi di dare la definizione generale in una successiva fase di approfondimento.

Bibliografia

Beutelspacher A., Rosembaum U., (1998), *Projective Geometry*, Cambridge University Press

Corsini P., (1993), *Prolegomena of hypergroup theory*, Aviani Ed. Udine, (1993).

Corsini P., Leoreanu L., (2003), *Applications of the Hyperstructure Theory*, Kluwer Academic Publishers London

Di Gennaro F., Maturo A., (2002), La teoria delle iperstrutture: un efficace strumento per una visione unitaria di algebra e geometria, *Periodico di Matematiche*, Serie VIII, Vol 2, n. 4, 5-16

Hilbert G., (1970), *Fondamenti della geometria*, Feltrinelli, Milano.

Maturo A., (1986) *Spazi topologici, limiti e funzioni continue*, Libreria dell'Università, Pescara

Maturo A., Varone G., (1994), *I concetti intuitivi di analisi matematica presenti sui testi scolastici: fino a che punto si identificano con quelli rigorosi? Il caso delle funzioni continue*, in Atti del Convegno N.R.D. "FUNZIONI, LIMITI, DERIVATE: come perchè quando, con quali strumenti insegnare l'Analisi nei diversi ordini di scuola", Siena, 10-12 Marzo 1994, pp.101-106.

Maturo A., Varone G., (1995), *Su una particolare classe di funzioni numeriche: le funzioni pseudo-continue*. In "Periodico di matematiche", 1,1995, pp.11-22.

Marty F., (1934), Sur une généralization de la notion de group, *IV Congres des Mathematiciens Scandinave*, Stockholm.

Prenowitz W., Jantosciak J., (1979), *Join Geometries*, Springer-Verlag UTM, New York, (1979).

Metodo Monte Carlo: applicazioni didattiche per quesiti di probabilità

Francesco di Paola Bruno

Liceo Scientifico Statale "F. Severi" - Castellammare di Stabia (NA)
francescobruno.severi@gmail.com

Sunto

Vengono illustrati vari esempi di applicazione del metodo Monte Carlo come strada alternativa per la risoluzione o la verifica di alcuni quesiti di probabilità, proposti dal MIUR all'Esame di Stato del Liceo Scientifico del 2019 o nelle simulazioni precedenti, e di alcuni problemi classici sulla probabilità. Nel metodo Monte Carlo il fenomeno in esame viene simulato un elevato numero di volte, per poi stimare le probabilità coinvolte con le frequenze dei successi. Negli esempi riportati le simulazioni sono effettuate col foglio elettronico, con la programmazione in Javascript o Scratch, con l'uso di calcolatrici programmabili.

Parole chiave: probabilità, simulazioni, metodo Monte Carlo, foglio elettronico, Javascript, Scratch, calcolatrici programmabili.

1. Introduzione

Di fronte a problemi di calcolo combinatorio e di probabilità può capitare di provare un certo senso di disorientamento nell'individuare la strada risolutiva, talvolta non proprio agevole e immediata. Disorientamento che spesso conduce alla domanda: "Sarà giusto?". Probabilmente ciò è dovuto anche al fatto che, a differenza di altre parti della matematica, è difficile trovare un metodo "certo" che, per altra via, consenta di verificare un procedimento o un risultato probabilistico.

Il metodo Monte Carlo consente di determinare la probabilità di un dato evento, semplicemente simulando tale evento un elevato numero di volte per poi stimare la probabilità dell'evento mediante la frequenza dei successi. Ovviamente l'elevato numero di simulazioni, che garantisce l'efficacia del metodo e l'attendibilità dei risultati, richiede necessariamente l'uso di un computer o di un dispositivo programmabile.

Un primo strumento utilizzabile è il foglio elettronico, di cui si presuppone la conoscenza almeno a livello base. In genere ogni riga del foglio elettronico corrisponde a una singola simulazione dell'evento, per cui appaiono subito evidenti due punti di debolezza: le dimensioni del foglio e l'impossibilità di simulare fenomeni non estremamente

elementari. Se si vuole simulare un evento, ad esempio 100000 volte, si dovrà costruire un foglio con 100000 righe, cosa talvolta non agevole che rende “pesante” il funzionamento dell’applicazione. Se la simulazione da programmare è leggermente più articolata rispetto alla semplice generazione di numeri casuali, in genere non è possibile inserirla sulla singola riga del foglio elettronico.

Un metodo alternativo, meno immediato ma praticamente più elegante e privo dei limiti precedenti, è quello di scrivere un programma che possa eseguire un numero fissato di volte il blocco di istruzioni che realizzano la simulazione. Verranno riportati esempi con “Javascript” che, se da un lato presenta qualche difficoltà nell’uso di un linguaggio di programmazione e della corretta sintassi delle istruzioni, dall’altro però non ha limiti per i fenomeni da simulare, anche milioni di volte in brevissimo tempo. Verranno anche mostrate le stesse simulazioni con “Scratch”, un ambiente di programmazione gratuito sviluppato dal M.I.T. da scaricare e installare o anche da usare online. Scratch non ha istruzioni scritte, ma blocchi di vario colore e forma che si possono trascinare e incastrare per comporre il programma. Nonostante Scratch possa sembrare un giocattolo e sia stato creato con lo scopo più generale di sperimentare “coding” e “digital storytelling” fin dalla scuola primaria, il suo set di istruzioni ne fa uno strumento potente e di tutto rispetto per realizzare cose estremamente “serie” in maniera abbastanza facile e immediata. Infine viene mostrato come risolvere il quesito di probabilità dell’Esame di Stato col metodo Monte Carlo, usando una calcolatrice programmabile.

2. Esame di Stato Liceo Scientifico 20/06/2019 - [Quesito 5]

Si lanciano 4 dadi con facce numerate da 1 a 6.

- Qual è la probabilità che la somma dei 4 numeri usciti non superi 5?
- Qual è la probabilità che il prodotto dei 4 numeri usciti sia multiplo di 3?
- Qual è la probabilità che il massimo numero uscito sia 4?

2.1 Soluzione con Excel

Aperto un nuovo foglio elettronico Excel, nelle celle B1 C1 D1 E1 F1 G1 H1 I1 J1 K1 M1 N1 O1 L2 L3 L4 inserire le intestazioni, come indicato in figura.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1		dado1	dado2	dado3	dado4	somma	<= 5	prodotto	divisib 3	max	= 4		<= 5	divisib 3	= 4	
2	1	5	4	1	6	16	0	120	1	6	0	successi	378	80242	13394	
3	2	6	2	3	3	14	0	108	1	6	0	Monte Carlo	0,003780	0,802420	0,133940	
4	3	3	1	6	6	16	0	108	1	6	0	probabilità teorica	0,003858	0,802469	0,135031	
5	4	6	3	2	3	14	0	108	1	6	0					
6	5	4	3	4	6	17	0	288	1	6	0					
7	6	6	1	4	6	17	0	144	1	6	0					
8	7	1	1	3	4	9	0	12	1	4	1					
9	8	3	1	5	1	10	0	15	1	5	0					
10	9	4	1	6	4	15	0	96	1	6	0					

Inserire poi nelle celle specificate il contenuto indicato, con lo scopo illustrato.

Metodo Monte Carlo: applicazioni didattiche per quesiti di probabilità

celle	contenuto	spiegazione
A2	=A1+1	numerazione dei lanci
B2 C2 D2 E2	=CASUALE.TRA(1;6)	4 numeri usciti dal lancio dei 4 dadi
F2	=SOMMA(B2:E2)	somma dei 4 numeri usciti
G2	=SE(F2<=5;1;0)	1, se la somma è ≤ 5 ; altrimenti 0
H2	=PRODOTTO(B2:E2)	prodotto dei 4 numeri usciti
I2	=SE(RESTO(H2;3)=0;1;0)	1, se il prodotto è divisibile per 3; altrimenti 0
J2	=MAX(B2:E2)	massimo dei 4 numeri usciti
K2	=SE(J2=4;1;0)	1, se il massimo è 4; altrimenti 0

Selezionando le celle da A2 a K2 e copiandone il contenuto fino alla riga 1001, saranno simulati 1000 lanci dei 4 dadi.

998	997	3	1	5	2	11	0	30	1	5	0
999	998	4	2	2	5	13	0	80	0	5	0
1000	999	6	2	2	2	12	0	48	1	6	0
1001	1000	2	6	5	4	17	0	240	1	6	0
1002											
1003											

celle	contenuto	spiegazione
M2	=SOMMA(G2:G 1001)	totale successi (somma ≤ 5)
N2	=SOMMA(I2:I 1001)	totale successi (prodotto multiplo di 3)
O2	=SOMMA(K2:K 1001)	totale successi (massimo = 4)
M3	=M2/ 1000	frequenza successi (somma ≤ 5)
N3	=N2/ 1000	frequenza successi (prodotto multiplo di 3)
O3	=O2/ 1000	frequenza successi (massimo = 4)
M4	=5/1296	probabilità teorica (somma ≤ 5)
N4	=1040/1296	probabilità teorica (prodotto multiplo di 3)
O4	=175/1296	probabilità teorica (massimo = 4)

Si può poi modificare il numero di iterazioni del metodo Monte Carlo, selezionando le celle da A1001 a K1001 e copiandone il contenuto, ad esempio, fino alla riga 100001, in modo da simulare 100000 lanci dei 4 dadi.

99999	99998	1	3	1	4	9	0	12	1	4	1
100000	99999	4	5	6	6	21	0	720	1	6	0
100001	100000	6	5	1	3	15	0	90	1	6	0
100002											
100003											

Infine, sostituendo in M2 N2 O2 il valore 1001 (in grassetto) con il valore 100001, si totalizzano i successi sui 100000 lanci e sostituendo in M3 N3 O3 il valore 1000 (in grassetto) con il valore 100000 verranno calcolate le frequenze su 100000 lanci, che permettono di stimare le probabilità richieste.

2.2 Soluzione con Javascript

In un nuovo documento di testo inserire le seguenti righe di codice:

```
<!DOCTYPE html>
<html>
<body>

<script language="javascript">
  n = prompt("numero di iterazioni","100000");
  successi1 = 0;
  successi2 = 0;
  successi3 = 0;
  for (i=0; i<n; i++) {
    dado1 = 1 + Math.floor(6 * Math.random());
    dado2 = 1 + Math.floor(6 * Math.random());
    dado3 = 1 + Math.floor(6 * Math.random());
    dado4 = 1 + Math.floor(6 * Math.random());
    somma = dado1 + dado2 + dado3 + dado4;
    prodotto = dado1 * dado2 * dado3 * dado4;
    massimo = Math.max(dado1, dado2, dado3, dado4);
    if(somma <= 5) {
      successi1++;
    }
    if((prodotto%3) == 0) {
      successi2++;
    }
    if(massimo == 4) {
      successi3++;
    }
  }
  alert("prob(SOMMA <= 5)\n\n stimata = " + (successi1/n) + "\n teorica = "
    + (5/1296).toFixed(7));
  alert("prob(PROD MUL 3)\n\n stimata = " + (successi2/n) + "\n teorica = "
    + (1040/1296).toFixed(7));
  alert("prob(MAX = 4) \n\n stimata = " + (successi3/n) + "\n teorica = "
    + (175/1296).toFixed(7));
</script>

</body>
</html>
```

Salvare con nome a piacere, inserendo l'estensione **.htm** (ad esempio Q5_esame.htm). Aprendo il file con un browser web, lo script "Javascript" sarà mandato in esecuzione. All'inizio verrà richiesto il numero di iterazioni n (proposto per default 100000). Dopo aver azzerato i contatori dei successi nei 3 casi, viene eseguito n volte il blocco di istruzioni in grassetto, racchiuso tra parentesi graffe. Non è difficile individuare le 4 istruzioni per generare l'uscita dei 4 dadi e le 3 istruzioni per calcolarne *somma*, *prodotto* e *massimo*. Successivamente vengono eseguite 3 istruzioni "if" che permettono di incrementare i 3 contatori dei successi quando si verificano le condizioni richieste: $somma \leq 5$, prodotto divisibile per 3, massimo = 4. Alla fine delle n esecuzioni del blocco, le istruzioni "alert" permettono di visualizzare i 3 rapporti tra successi ed n che forniscono la stima delle 3 probabilità richieste, insieme ai valori teorici, che consentono di verificare come i valori prodotti dalle simulazioni si avvicinino sempre di più ai valori teorici, al crescere di n .



2.3 Soluzione con Scratch

Una volta entrati nel sito <https://scratch.mit.edu> è possibile creare il nuovo progetto. Innanzi tutto con “Crea una Variabile” occorre definire le 18 variabili come in figura. La spunta permette di visualizzarle sullo schermo; quelle senza spunta saranno nascoste. Vengono impostate le 3 probabilità teoriche, viene azzerato l’indice i delle iterazioni, viene richiesto in input il numero n di iterazioni, vengono azzerati i 3 contatori dei successi. Viene poi eseguito n volte il blocco di istruzioni che genera la simulazione, nel quale viene incrementato di 1 l’indice i che mostra l’avanzare delle simulazioni. Vengono generati i 4 numeri casuali da 1 a 6 che simulano il lancio dei 4 dadi. Vengono poi calcolati somma e prodotto dei numeri usciti. Successivamente viene determinato il massimo tra le 4 uscite, caricando inizialmente il valore *dado1* nella variabile *massimo*; se *dado2* risulta maggiore, va a sostituire il precedente, così per *dado3* e infine per *dado4*. Se la somma dei numeri usciti è minore o uguale di 5 viene incrementata di 1 la variabile *successi1*. Se il prodotto è divisibile per 3 viene incrementata di 1 la variabile *successi2*. Se il massimo è uguale a 4 viene incrementata di 1 la variabile *successi3*.

```

quando si clicca su
  porta probabilità teorica 1 a 5 / 1296
  porta probabilità teorica 2 a 1040 / 1296
  porta probabilità teorica 3 a 175 / 1296
  porta i a 0
  chiedi n iterazioni e attendi
  porta n a risposta
  porta successi1 a 0
  porta successi2 a 0
  porta successi3 a 0
  ripeti n volte
    cambia i di 1
    porta dado1 a numero a caso tra 1 e 6
    porta dado2 a numero a caso tra 1 e 6
    porta dado3 a numero a caso tra 1 e 6
    porta dado4 a numero a caso tra 1 e 6
    porta somma a dado1 + dado2 + dado3 + dado4
    porta prodotto a dado1 * dado2 * dado3 * dado4
    porta massimo a dado1
    se dado2 > massimo allora
      porta massimo a dado2
    se dado3 > massimo allora
      porta massimo a dado3
    se dado4 > massimo allora
      porta massimo a dado4
    se somma < 5 o somma = 5 allora
      cambia successi1 di 1
    se resto della divisione di prodotto diviso 3 = 0 allora
      cambia successi2 di 1
    se massimo = 4 allora
      cambia successi3 di 1
  porta probabilità stimata 1 a successi1 / n
  porta probabilità stimata 2 a successi2 / n
  porta probabilità stimata 3 a successi3 / n
  
```

Crea una Variabile

- dado1
- dado2
- dado3
- dado4
- i
- massimo
- n
- probabilità stimata 1
- probabilità stimata 2
- probabilità stimata 3
- probabilità teorica 1
- probabilità teorica 2
- probabilità teorica 3
- prodotto
- somma
- successi1
- successi2
- successi3

n 1000000 i 1000000

successi1	3829	probabilità stimata 1	0.003829	probabilità teorica 1	0.003858
successi2	802595	probabilità stimata 2	0.802595	probabilità teorica 2	0.802469
successi3	135249	probabilità stimata 3	0.135249	probabilità teorica 3	0.135031

Cliccando sulla bandierina verde il programma parte, chiede in input il numero di iterazioni da eseguire e alla fine fornisce in output le 3 probabilità stimate col metodo Monte Carlo.

2.4 Soluzione con calcolatrice programmabile CASIO fx-CG50

```
"N"?→N
0→A: 0→B: 0→C
For 1→I To N
  RanInt#(1,6)→P
  RanInt#(1,6)→Q
  RanInt#(1,6)→R
  RanInt#(1,6)→S
  If P+Q+R+S≤5 Then
    A+1→A IfEnd
  If MOD(P*Q*R*S,3)=0 Then
    B+1→B IfEnd
  Max({P,Q,R,S})→T
  If T=4 Then
    C+1→C IfEnd
Next
A/N▶ B/N▶ C/N▶
```



La possibilità di usare anche agli Esami di Stato calcolatrici grafiche, in genere programmabili, apre un nuovo scenario, forse imprevisto, ma sicuramente inesplorato. Uno studente potrebbe svolgere il quesito dell'esame in cui gli si chiede di calcolare una certa probabilità, semplicemente scrivendo ed eseguendo il programmino per applicare Monte Carlo sulla sua calcolatrice in modo tale da fornire il risultato corretto con la dovuta approssimazione, eventualmente motivando il procedimento seguito. La richiesta del compito sarebbe soddisfatta correttamente anche senza “*Determinare la probabilità di un evento utilizzando i teoremi fondamentali della probabilità, il calcolo combinatorio, il calcolo integrale.*” come si legge nel Quadro di riferimento per la redazione e lo svolgimento della seconda prova scritta dell'esame di Stato, emanato il 26 novembre 2018 dal MIUR.

3. Simulazione MIUR Esame Liceo Scientifico 02/04/2019 - [Quesito 5]

Emma fa questo gioco: lancia un dado con facce numerate da 1 a 6; se esce il numero 3 guadagna 3 punti, altrimenti perde 1 punto. Il punteggio iniziale è 0.

- *Qual è la probabilità che, dopo 4 lanci, il suo punteggio sia ancora 0?*
- *Qual è la probabilità che, in una sequenza di 6 lanci, il punteggio non scenda mai sotto lo 0?*

3.1 Soluzione con Excel

Aperto un nuovo foglio elettronico Excel, nelle celle da B1 a G1, da H1 a M1, N1 O1 Q1 R1 P2 P3 P4 inserire le intestazioni, come indicato in figura.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1		dado1	dado2	dado3	dado4	dado5	dado6	punti1	punti2	punti3	punti4	punti5	punti6	p4=0	p1-6 >= 0		p4=0	p1-6 >= 0
2	1	4	1	5	6	1	3	-1	-2	-3	-4	-5	-2	0	0	successi	3810	877
3	2	5	3	6	3	5	2	-1	2	1	4	3	2	0	0	Monte Carlo	0,381000	0,087700
4	3	3	2	1	5	6	3	3	2	1	0	-1	2	1	0	probabilità teorica	0,385802	0,086291
5	4	3	5	6	6	3	5	3	2	1	0	3	2	1	1			
6	5	4	4	2	3	6	2	-1	-2	-3	0	-1	-2	1	0			
7	6	6	1	1	6	3	5	-1	-2	-3	-4	-1	-2	0	0			
8	7	1	4	2	6	2	3	-1	-2	-3	-4	-5	-2	0	0			
9	8	1	3	2	4	6	6	-1	2	1	0	-1	-2	1	0			
10	9	5	3	2	1	2	6	-1	2	1	0	-1	-2	1	0			
11	10	2	6	4	6	3	5	-1	-2	-3	-4	-1	-2	0	0			

Inserire poi nelle celle specificate il contenuto indicato, con lo scopo illustrato.

celle	contenuto	spiegazione
A2	=A1+1	numerazione dei lanci
B2 a G2	=CASUALE.TRA(1;6)	6 numeri usciti dal lancio dei 6 dadi
H2	=SE(B2=3;3;-1)	punteggio dopo il 1° lancio
I2	=SE(C2=3;H2+3;H2-1)	punteggio dopo il 2° lancio
J2	=SE(D2=3;I2+3;I2-1)	punteggio dopo il 3° lancio (copia da I2)
K2	=SE(E2=3;J2+3;J2-1)	punteggio dopo il 4° lancio (copia da J2)
L2	=SE(F2=3;K2+3;K2-1)	punteggio dopo il 5° lancio (copia da K2)
M2	=SE(G2=3;L2+3;L2-1)	punteggio dopo il 6° lancio (copia da L2)
N2	=SE(K2=0;1;0)	1, se il punteggio dopo il 4° lancio è 0; altrimenti 0
O2	=SE(E(H2>=0;I2>=0;J2>=0;K2>=0;L2>=0;M2>=0);1;0)	1, se tutti i punteggi sono non negativi; altrimenti 0

Selezionando le celle da A2 a O2 e copiandone il contenuto fino alla riga 10001, saranno simulati 10000 lanci dei 6 dadi.

9998	9997	3	6	5	5	1	6	3	2	1	0	-1	-2	1	0
9999	9998	6	1	6	3	4	6	-1	-2	-3	0	-1	-2	1	0
10000	9999	2	1	4	5	2	3	-1	-2	-3	-4	-5	-2	0	0
10001	10000	4	6	2	3	1	4	-1	-2	-3	0	-1	-2	1	0
10002															
10003															

celle	contenuto	spiegazione
Q2	=SOMMA(N2:N10001)	totale successi (punteggio dopo 4 lanci = 0)
R2	=SOMMA(O2:O10001)	totale successi (nessun punteggio negativo)
Q3	=Q2/10000	frequenza successi (punteggio dopo 4 lanci = 0)
R3	=R2/10000	frequenza successi (nessun punteggio negativo)
Q4	=125/324	probabilità teorica (punteggio dopo 4 lanci = 0)
R4	=671/7776	probabilità teorica (nessun punteggio negativo)

Anche in questo caso si può cambiare il numero di simulazioni, selezionando le celle da A10001 a O10001 e copiandone il contenuto fino a un'altra riga successiva, oltre ad aggiornare i relativi valori delle celle Q2 R2 Q3 R3.

4. Probabilità di avere m maschi su 1000 nati

Ipotizzando equiprobabile la nascita di un maschio o di una femmina, qual è la probabilità che su 1000 nati ci siano più di un certo numero m fissato (ad esempio 560) di maschi?

4.1 Soluzione con Javascript

In un nuovo documento di testo inserire le seguenti righe di codice:

```
<!DOCTYPE html>
<html>
<body>

<script language="javascript">
  soglia = prompt("soglia di maschi nati","560");
  n = prompt("numero di iterazioni","1000000");
  successi = 0;
  for (i=0; i<n; i++) {
    maschi = 0;
    for (nascita=0; nascita<1000; nascita++) {
      if (Math.random() < 0.5) {
        maschi++;
      }
    }
    if (maschi > soglia) {
      successi++;
    }
  }
  alert("probabilità stimata maschi > " + soglia + " su 1000 nati = " +
    (successi/n));
</script>

</body>
</html>
```

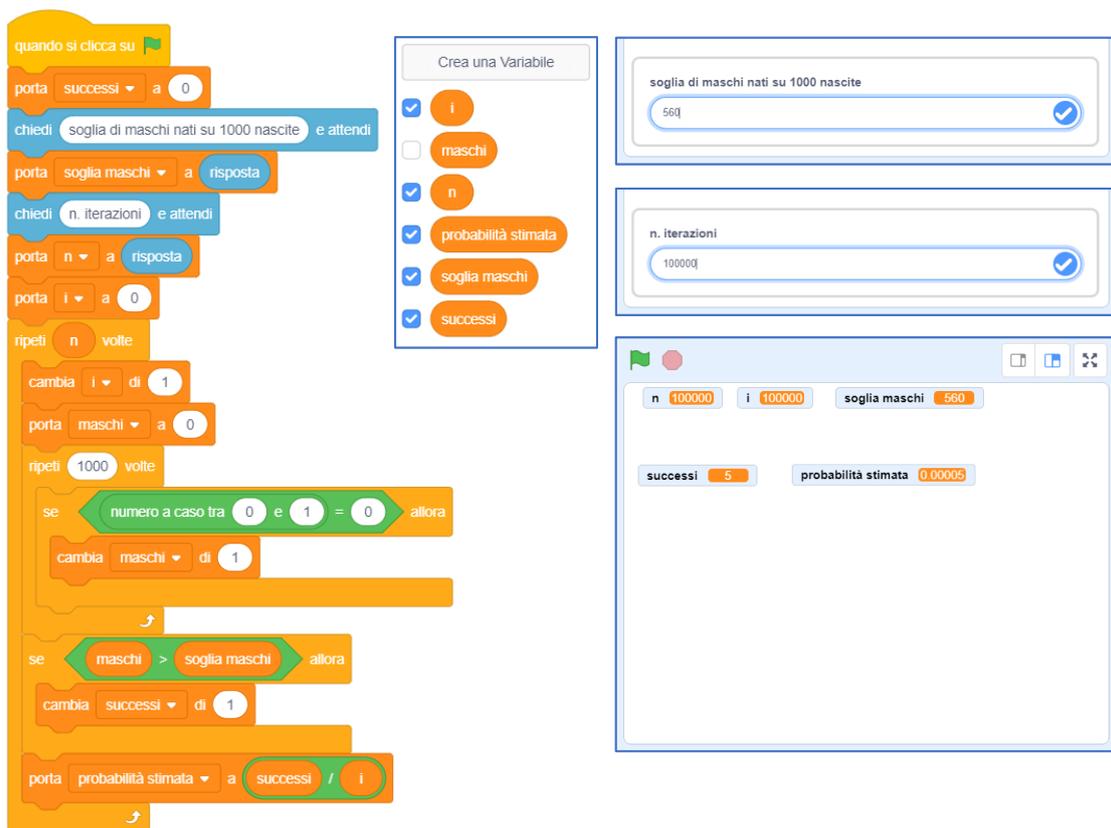
Salvare con nome a piacere, inserendo l'estensione **.htm** (ad esempio `maschi_su_1000_nati.htm`). Aprendo il file con un browser web, lo script "Javascript" sarà mandato in esecuzione. All'inizio verranno richiesti il valore *soglia* dei maschi nati (proposto per default 560) e il numero di iterazioni n (proposto per default 1000000). Dopo aver azzerato il contatore dei *successi*, viene eseguito n volte il blocco di istruzioni in grassetto, racchiuso tra parentesi graffe. Per ogni iterazione viene azzerato il numero di *maschi*, successivamente vengono simulate 1000 nascite mediante la generazione di 1000 numeri casuali compresi tra 0 e 1. Se il numero estratto è minore di 0,5 è nato un maschio e viene incrementato il relativo contatore, in caso contrario è nata una femmina.

Terminate le 1000 nascite, se i *maschi* sono più del valore *soglia* viene incrementato il contatore di *successi*.

Alla fine delle n esecuzioni del blocco, l'istruzione "alert" permette di visualizzare il rapporto tra *successi* ed n , che fornisce la stima della probabilità richiesta.



4.2 Soluzione con Scratch



Una volta entrati nel sito <https://scratch.mit.edu> è possibile creare il nuovo progetto. Innanzi tutto con "Crea una Variabile" occorre definire le 6 variabili come in figura. La spunta permette di visualizzarle sullo schermo; quelle senza spunta saranno nascoste.

Quando si clicca sulla bandierina verde il programma parte, azzera la variabile *successi* e l'indice i , poi richiede in input la *soglia* dei maschi e il numero n di iterazioni.

Nel ciclo da ripetere n volte, si incrementa l'indice i , si azzera il numero di *maschi nati* e vengono simulate 1000 nascite generando 1000 numeri casuali 0 oppure 1, se esce 0 (nascita di un maschio) viene incrementato di 1 il numero dei *maschi nati*; alla fine delle 1000 nascite se i *maschi nati* sono più della *soglia*, viene incrementato di 1 il numero di

successi, infine viene stimata la probabilità come frequenza dei *successi* sul numero i di iterazioni fino a quel punto eseguite.

In esecuzione vengono chiesti i due dati di input, poi appaiono le variabili che si aggiornano in tempo reale durante l'elaborazione.

5. Problema del collezionista

Un ragazzo colleziona le figurine da attaccare in un album che ha un dato numero di caselle. Ipotizzando equiprobabile l'uscita di qualsiasi figurina e tenendo conto che andando avanti ci saranno sempre più doppioni, qual è il numero medio di figurine da acquistare per completare la raccolta?

5.1 Soluzione con Javascript

In un nuovo documento di testo inserire le seguenti righe di codice:

```
<!DOCTYPE html>
<html>
<body>

<script language="javascript">
  f_album = prompt("numero di figurine album","100");
  n = prompt("numero di iterazioni","100000");
  tot_acq = 0;
  for (i=0; i<n; i++) {
    var fig = new Array();
    for (f=0; f<f_album; f++) {
      fig[f] = 0;
    }
    conta_acq = 0;
    conta_ok = 0;
    while (conta_ok < f_album) {
      acq = Math.floor(f_album * Math.random());
      conta_acq++;
      if (fig[acq] == 0) {
        fig[acq] = 1;
        conta_ok++;
      }
    }
    tot_acq += conta_acq;
  }
  media_acq = tot_acq / n;
  alert("per completare la raccolta di " + f_album +
    " figurine, occorre acquistarne mediamente " + media_acq);
</script>

</body>
</html>
```

Salvare con nome a piacere, inserendo l'estensione **.htm** (ad esempio collezionista.htm). Aprendo il file con un browser web, lo script "Javascript" sarà mandato in esecuzione. All'inizio verranno richiesti il numero f_album di figurine da attaccare nell'album (proposto per default 100) e il numero di iterazioni n (proposto per default 100000). Dopo

aver azzerato il totale di figurine acquistate in tutte le n simulazioni, viene eseguito n volte il blocco di istruzioni in grassetto, racchiuso tra parentesi graffe. Per ogni iterazione viene creato il vettore fig formato da f_album componenti inizialmente tutte nulle, che rappresentano le caselle vuote dell'album da riempire. Successivamente vengono azzerati il contatore $conta_acq$ di figurine acquistate per quella singola simulazione e il contatore $conta_ok$ di figurine attaccate. Nel ciclo “while”, che continua a essere eseguito fintanto che le figurine attaccate sono meno di quelle da attaccare per completare l'album, viene simulato l'acquisto di una figurina mediante la generazione di un numero casuale acq compreso tra 1 e f_album . Se la componente $fig[acq]$ del vettore fig corrispondente al numero generato è nulla, allora la casella dell'album è ancora vuota, per cui la figurina viene “attaccata” portando tale componente al valore 1 e incrementando il numero $conta_ok$ di figurine attaccate. Alla fine, quando il ciclo “while” di acquisto di figurine termina perché l'album è completato, viene accumulato il numero $conta_acq$ di figurine acquistate in quella simulazione nel totale tot_acq di figurine acquistate in tutto durante le n simulazioni.

Alla fine delle n esecuzioni del blocco, l'istruzione “alert” permette di visualizzare il rapporto tra tot_acq ed n , che fornisce il numero medio di figurine acquistate per completare un album.



5.2 Soluzione con Scratch

Entrati nel sito <https://scratch.mit.edu> è possibile creare il nuovo progetto. Con “Crea una Variabile” occorre definire le 8 variabili come in figura e con “Crea una Lista” occorre creare la lista $album$ che verrà riempita con le figurine che via via saranno incollate. La spunta permette di visualizzare variabili e liste; quelle senza spunta saranno nascoste.

Il programma parte quando si clicca sulla bandierina verde; vengono richiesti in input numero di figurine della raccolta e numero di iterazioni, vengono azzerati l'indice i e il totale figurine acquistate; poi viene eseguito il ciclo di n iterazioni in cui si incrementa l'indice i , si genera un nuovo album vuoto (lista con tutti 0); per ogni iterazione viene eseguito un ciclo che genera figurine casuali fin quando si riempie l'album. Ogni volta che una figurina trova il posto vuoto (elemento lista a 0) lo riempie (porta l'elemento lista a 1) e viene incrementato il contatore di figurine attaccate. Ad ogni iterazione vengono totalizzate le figurine acquistate; il numero medio di figurine da acquistare è ottenuto dividendo il numero totale di figurine acquistate nelle n iterazioni per il numero di iterazioni.

Metodo Monte Carlo: applicazioni didattiche per quesiti di probabilità

The image displays a Scratch script and its corresponding interface for a Monte Carlo simulation of a coupon collector problem. The script, written in Italian, starts with a 'quando si clicca su' (when clicked) event, followed by a 'chiedi' (ask) block for 'n. di figurine da attaccare nell'album' (number of stickers to attach to the album) and 'e attendi' (and wait). It then sets 'n figurine album' to 'risposta' and asks for 'n. iterazioni' (number of iterations), waiting for the response. The script initializes 'n' to the user input, 'i' to 0, and 'totale acquistate' (total bought) to 0. It enters a 'ripeti n volte' (repeat n times) loop. Inside the loop, it increments 'i' by 1, resets 'album' (the list of stickers) to empty, and repeats 'n figurine album volte' (repeat n times). In each iteration, it adds 0 to 'album' and then enters a 'ripeti fino a quando' (repeat until) loop where 'conta attaccate' (count attached) equals 'n figurine album'. Inside this loop, it asks for a random number between 1 and 'n figurine album', increments 'conta acquistate' by 1, and checks if the random number is 0. If it is, it replaces the element at that index in 'album' with 1 and increments 'conta attaccate' by 1. After the 'ripeti fino a quando' loop, it increments 'totale acquistate' by 'conta acquistate' and calculates the 'media acquistate' (average bought) as 'totale acquistate / i'. The interface on the right shows a 'Crea una Variabile' (Create a Variable) panel with variables for 'conta acquistate', 'conta attaccate', 'figurina uscita', 'i', 'media acquistate', 'n', 'n figurine album', 'totale acquistate', and 'album'. It also shows input fields for 'n. di figurine da attaccare nell'album' (set to 100) and 'n. iterazioni' (set to 100000). The main interface displays the current state: 'n 100000', 'i 100000', 'n figurine album 100', 'conta acquistate 642', 'conta attaccate 100', 'totale acquistate 51869913', and 'media acquistate 518.69913'.

6. Conclusioni

Nel presente lavoro non è stato possibile approfondire gli aspetti teorici del metodo Monte Carlo, né quelli tecnici relativi agli strumenti informatici adoperati. Si è preferito, invece, concentrare l'attenzione su esempi concreti già pronti all'uso, sperando che possano costituire un utile spunto di lavoro per sperimentare, in classe, come l'approccio stocastico a un determinato problema, generando numeri a caso, riesce a fornire risultati sorprendentemente precisi. Inoltre pensare a come poter simulare un dato fenomeno sviluppa fantasia e creatività, oltre all'abilità di formulare congetture. D'altra parte il vocabolo greco "*stochastikos*", da cui deriva "stocastico", ha il significato di "abile nel congetturare" oppure "che mira bene" ed è il caso di dire che il metodo Monte Carlo oltre a mirare bene, fa proprio centro, purché ci si affidi alla legge dei grandi numeri.

Bibliografia

Barbieri M. M. *Metodi MCMC nell'inferenza statistica*, CISU, Roma, 1996

Cugiani M., *Metodi Numerico Statistici*, UTET, Torino, 1980

Knuth D.E., *The art of computer programming, vol 2: Seminumerical algorithms*, Addison-Wesley Pub. Co. Readings, 1969

Maturo A., *Numeri Pseudocasuali*, Libreria dell'Università Editrice, Pescara, 1989

Rizzi A., *Metodi di Monte Carlo*, Accademia dei Lincei, 1975

Metodologie di ricerca storica e interculturale applicata alle Matematiche

Giuseppina Ferriello¹

Mathesis Napoli, email [<giuseppina.ferriello@virgilio.it>](mailto:giuseppina.ferriello@virgilio.it)

Sunto: Lo studio della Storia della Scienza, e in particolare della Storia delle Matematiche, oggi rappresenta per noi uno strumento importantissimo e ineliminabile per comprendere - insieme all'evoluzione storica della disciplina - anche e soprattutto il contributo corale offerto da Popoli di differente estrazione educazione culturale e linguistica.

Lo studio analizza in linea generale il ruolo delle traduzioni di testi di matematiche fatte da studiosi iraniani durante il periodo che per gli Occidentali corrisponde al Medioevo occidentale e per il Mondo islamico coincide col periodo formativo. Nelle ricerche che sono alla base di questa sintesi, sono stati considerati lo stato delle conoscenze matematiche, le istituzioni culturali in cui operarono gli studiosi, i loro contributi che hanno arricchito il patrimonio della conoscenza greco-romana nel campo delle tecniche e delle Scienze matematiche trasmettendole al Rinascimento grazie alle versioni effettuate in arabo ed in Persiano. Particolarmente importanti sono queste ultime finora trascurate benché il patrimonio in esse presente sia davvero consistente e notevole.

La visione interculturale e multiculturale – applicabile concretamente nell'insegnamento - consente di cogliere i contributi ed il ruolo dei vari Popoli nel progresso scientifico e tecnico.

Parole chiave: Matematica, meccanica, cultura multietnica ed interculturale, Medio Evo, tradizioni e traduzioni

1. Introduzione

Lo studio delle Matematiche e della Storia delle Matematiche coinvolge vari e vasti campi ed è un valido strumento per comprendere il contributo dato dai vari Popoli, anche di quelli che superficiali 'genericismi' - oggi molto diffusi - tendono di inserire in contesti antitetici, quasi che la cultura possa essere circoscritta a singoli gruppi o, peggio, costituire elemento di preponderanza degli uni sugli altri.

L'analisi attuata utilizzando le fonti e l'indagine storico-culturale – che ricorre anche all'analisi linguistica e filologica e storica – può essere un valido strumento per un

¹ Architetto, Specializzata in Restauro dei monumenti, Laureata in Lingue e Letterature straniere orientali, Ph.D. in Studi Iranici. È stata docente, Dirigente Scolastica fino all'a.s. 2006-2017, Supervisore S.I.C.S.I. di Storia dell'Arte dal 2000 al 2007.

approccio interdisciplinare e multiculturale, che sia anche strumento di comprensione 'dell'altro' e di quanto appare lontano nello spazio e nel tempo, ma che spesso è l'esito di un andirivieni continuo di idee ed anche di persone.

La cultura non può avere confini, e questo è stato compreso molto bene in passato, quando la traduzione di testi greci e latini nella nuova lingua internazionale del nascente mondo islamico consentì di conservare un vasto patrimonio che altrimenti sarebbe stato disperso. Gli stessi testi saranno tradotti, nel periodo dell'umanesimo, nella lingua internazionale dell'occidente – il latino – per arrivare fino ai nostri giorni. La rivisitazione e la traduzione di manoscritti mette in evidenza – ove mai ce ne fosse bisogno – che i confini non sono mai serviti né servono a fermare la trasmissione del pensiero, premessa indispensabile all'evoluzione del sapere.

2. L'utilizzo delle fonti per una visione interculturale e multiculturale

L'utilizzo delle fonti scritte, citate possibilmente nella loro integrità, è un mezzo di indagine rispettoso del manufatto studiato e della personalità che lo ha prodotto, la quale rappresenta essa stessa un'espressione tipica del proprio tempo e della propria storia. La corretta interpretazione di uno scritto presuppone la conoscenza della lingua in cui sono espressi i testi utilizzabili ai fini della ricerca; senza questa conoscenza è impossibile accedere alle fonti scritte per la difficoltà di rimanere fedeli al testo, di conseguenza, non è possibile interpretare i riferimenti e i dati esistenti e si trascura un considerevole patrimonio di informazioni.

Lo studio condotto direttamente sulle fonti in una lingua straniera - senza ricorrere alle altrui interpretazioni o traduzioni interpretative - evita passaggi intermedi, che potrebbero falsare il testo; le frasi estrapolate dal loro contesto, infatti, si prestano a manipolazioni e ad errate interpretazioni portando troppo spesso a conclusioni infondate e per di più non sempre verificabili.

I problemi di tipo linguistico assumono una dimensione significativa quando l'approccio conoscitivo riguarda manufatti di Paesi lontani prodotti da Persone che non parlano una delle lingue europee, con le quali una certa dimestichezza oggi si acquisisce attraverso l'insegnamento scolastico di primo e di secondo grado.

Non meno importanti sono, tuttavia, i pregiudizi. Per un 'Occidentale medio' infatti, è praticamente quasi impossibile - ancora oggi - dismettere il proprio *habitus* mentale, esito di una formazione tanto radicata da apparire quasi naturale: la convinzione che vede dapprima nel mondo greco-romano e poi in quello rinascimentale italiano un modello culturale irripetibile per magnificenza ed originalità, un esempio da additare a tutti nella presunzione che altri popoli, vissuti altrove - anche se portatori di una antica e consolidata tradizione culturale -, non siano stati capaci di pervenire a risultati confrontabili qualitativamente con i nostri, né si pensa che essi abbiano potuto utilizzare

il mezzo scritto per trasmettere le proprie conoscenze acquisite con lo studio e con la pratica ed a questa utili, come avviene, per esempio, nel settore delle Matematiche.

Ad avvalorare la presunta superiorità culturale del mondo occidentale e la sua originalità rispetto ad altri popoli hanno contribuito spesso ed in misura determinante, da un lato, la lontananza geografica e la mancata conoscenza della lingua in cui sono scritte le fonti e, dall'altro lato, il sistematico e fatale ricorso agli studi altrui i quali, per quanto possano essere corretti, sono pur sempre il frutto degli interessi specifici dei singoli autori e pertanto sono calibrati sui loro specifici interessi ed angolati o circoscritti a limitati settori di indagine.

Uno studio sperimentale ed applicativo attuato da oltre trent'anni riguarda l'utilizzo delle fonti in lingua persiana; esso ha avuto origine alla fine degli anni Ottanta,² è ancora in corso e si va definendo sempre più nei dettagli grazie al ritrovamento di vari codici inediti che consentono di integrare e ampliare la conoscenza di vari settori, come quello della Meccanica. Detto studio strutturato riguarda il mondo islamico con particolare riferimento a quello iranico. Infatti, l'analisi dell'onomastica attuata attraverso nisbe e kunye³ ha rivelato una netta prevalenza di studiosi di provenienza e/o formazione iranica fra quanti hanno tradotto e sono intervenuti su testi greci e latini. Determinante - come in ogni ricerca - è l'analisi l'inquadramento storico-culturale che, nel caso specifico, è costituito dalla più ampia trattazione della cultura e innanzitutto della scienza musulmana in genere.

Uno dei maggiori iranisti, Alessandro Bausani, nella prolusione ad una sua conferenza tenuta nel 1957 all'Università di Tehrān, e successivamente pubblicata col titolo *Iran, Islām e Italia nel Medio Evo*, affermava che:

«/.../ Italia e Iran non sono entità culturali facilmente definibili /.../, sia Iran sia Italia sono nomi applicabili ad elementi culturali molto più vasti della loro sfera d'influenza, più universali, dei limiti etnici e razziali che hanno loro dato il nome»,⁴

infatti, anche per la Persia - oggi Iran -, come per l'Italia, non è possibile definire chiaramente e precisamente l'ambito geografico nel quale essa esprime la sua cultura e la sua influenza. Innanzitutto, l'area geografica che oggi è territorio iraniano non coincide con quella storica, la quale comprendeva in passato ambiti come l'attuale Afghanistan, parte della Turchia e di alcune Repubbliche ex sovietiche, oggi indipendenti, quali l'Azerbajān, il Turkmenistān, l'Armenia e la Georgia, oltre ai territori abitati da persofoni come l'Uzbekistān e il Tajikistān attuali; il suo influsso

² A quel tempo, i rari testi sulle relazioni culturali fra Occidente e Oriente erano limitati a temi di carattere generale e non ricorrevano alle fonti; pertanto, il ricorso allo studio delle lingue per potere accedere a testi originari fu una naturale conseguenza per appagare la curiosità. Scaturirono da questo interesse la tesi di laurea in Lingue e letterature straniere moderne *“Le tecniche costruttive nel Medio Evo Islamico attraverso le fonti persiane”* (1993) e la tesi di Ph.D. in studi Iranici *“Il Sapere tecnico-scientifico fra Iran e Occidente, una ricerca nelle fonti”* (1998), mentre più recenti studi sono concentrati sulla Storia della Meccanica.

³ Sono i termini che indicano, accanto al nome e al patronimico, la provenienza ed il mestiere.

⁴ Alessandro Bausani, *Iran, Islam e Italia nel Medio Evo*, in: ACTA Iranica, II/1974, pp. 310 – 320.

culturale si estendeva, perciò, su spazi ben più ampi degli attuali e, indirettamente, arrivava ben oltre i confini del suo già vasto territorio.

Senza volere ripercorrere le tappe storiche della trasformazione dell'antico Iran - e tanto meno dei suoi sviluppi politici conseguenti la dominazione islamica - occorre precisare che, troppo spesso, si sono ingenerate confusioni connesse all'uso della lingua araba da parte degli studiosi: durante i primi secoli di propaganda della nuova fede religiosa l'arabo, infatti, era la lingua internazionale nell'Oriente musulmano. Basti pensare, per esempio, ad Avicenna, a Khwārazmī ed al-Birūnī - per citare soltanto i nomi di studiosi universalmente noti - i quali, pur essendo di nascita e di formazione culturale iranica, si esprimevano da dotti in arabo, ad esempio il matematico-ingegnere Karajī, cui sono stati dedicati specifici approfondimenti,⁵ in quanto autore di un trattato tecnico-scientifico risalente all'anno Mille, nel quale sono evidenti influssi e riferimenti alla cultura greca e latina.

Dall'utilizzo della lingua 'internazionale del mondo islamico' - l'arabo - sono derivati una serie di equivoci e di mancate distinzioni fra l'uso della lingua araba come mezzo espressivo universalmente diffuso fra i dotti musulmani e l'appartenenza del singolo studioso alla cultura araba. Trattando della Persia sarebbe perciò più corretto parlare propriamente di cultura iranica espressa in arabo.

Analizzare la cultura - e più precisamente lo stato delle conoscenze scientifiche - in Persia intorno i primi secoli dell'Egira comporta, perciò, un *excursus* sul mondo scientifico islamico in generale, cioè su quel vasto mondo culturale che utilizzò preferibilmente l'arabo come mezzo espressivo di dottrine religiose, scientifiche e filosofiche ma anche poetico - letterarie ed occorrerebbe prendere in considerazione almeno territori confinanti con la Persia fra i quali l'Irāq - dove la capitale fu Baghdād, che fu uno dei più importanti centri di diffusione della cultura scientifica durante i primi secoli di dominazione abbasside.

Assieme all'Islām, le conoscenze scientifiche e culturali iraniche si diffusero fino nel lontano Maghreb, in Spagna ed in Portogallo; da qui successivamente esse raggiunsero più o meno direttamente e in tempi differenziati tutta l'Europa. La netta demarcazione

⁵ «L'Art de la construction et les Constructeurs persans dans le Kitab encyclopédique du monde islamique entre le X^e et le XVII^e siècle» in: *ATTI: XXth International Congress of History of Science; Symposium Between Mechanics and Architecture*, Liegi, 20 - 26 July, 1997, preprint, Vol. Symposia, p. 467, Sezione "Meccanica e Architettura"; G. Ferriello, *I "costruttori" ed Il "costruire", nel Kitāb (Libro) del mondo islamico fra il VII ed il XVII secolo*, Accademia Pontaniana, 2004, pp.127-146; G. Ferriello, *Strumenti topografici dell'anno mille nel Kitab Inbat al-Miyyah al-Xafiyah del matematico-ingegnere Karajī*, in Atti C23.1-C23-5; G. Ferriello, *L'estrazione delle acque nascoste, Trattato tecnico-scientifico di Karajī, matematico-ingegnere persiano*, Kim Williams Books, Torino, 2007 (<https://www.kimwilliamsbooks.com/open-access/87-l-estrazione-delle-acque-nascoste-trattato-tecnico-scientifico-di-karaji.html>); G. Ferriello, Le competenze dell'ingegnere nel mondo islamico fra il X e il XVII secolo, in: *Atti, International Conference on History of Engineering*, Naples 2018, Cuzzolin, Vol. II, pp. 619-630; G. Ferriello, "la formazione ed il ruolo del tecnico medievale musulmano nelle fonti persiane ed arabe", Università Bocconi di Milano, Matepristem, 2009 (<http://matematica.unibocconi.it/articoli/la-formazione-ed-il-ruolo-del-tecnico-medievale-musulmano>),

fra il mondo orientale ed il mondo occidentale è un retaggio piuttosto recente. In passato, per esempio, e specialmente durante il Medio Evo, non erano rari gli scambi culturali favoriti da quelli commerciali e mercantili, né esisteva una netta demarcazione e suddivisione settoriale nel vasto campo dello scibile umano: dalla scienza alla poesia, dalla letteratura all'arte in tutte le sue espressioni.

Scienza ed arte sono strettamente connesse ed anche consequenziali l'una all'altra se si consideri, per esempio, l'influenza dell'evoluzione tecnologica sull'espressione artistica. Gli studi specialistici che trattano della scienza musulmana oggi sono relativamente numerosi; infatti, il carattere enciclopedico del sapere come concepito in passato offre molteplici possibilità di approccio conoscitivo. La globalità dello scibile tuttavia complica enormemente la scelta quando si vuole o si deve analizzare soltanto qualche settore. Infatti, lo studioso del passato, prima che l'Illuminismo apportasse varie suddivisioni nelle differenti branche della conoscenza determinandone la specializzazione, era un esperto in molte e diverse discipline, anche apparentemente distanti fra loro come la religione o la scienza e la tecnologia; non di rado i suoi scritti, quindi, contengono, assieme, i più svariati argomenti.

3. Lo stato della conoscenza scientifica in ambito iranico durante il Medio Evo

Il principio informatore della vita di un Musulmano indipendentemente dalla sua origine etnica era e resta quello dell'Unità: attraverso l'idea dell'univocità divina la religione permea ogni aspetto della sua vita anche non prettamente religioso come, per esempio, il diritto, la scienza, la filosofia.

Se per un Occidentale di oggi è difficile comprendere e comunque giustificare tale concezione di vita, occorre tuttavia ricordare che in passato tale atteggiamento era comune anche nell'Occidente cristiano; successivamente qui si sono nettamente separate la sfera religiosa e la sfera scientifica benché ancora oggi alcune problematiche di ordine etico - morale costituiscano un freno per la sperimentazione scientifica. Gli studiosi della Storia delle Scienze nell'Islām concordano nell'individuare in esse la permanenza di idee ermetico-pitagoriche connesse alla numerologia ed al carattere magico attribuito ai numeri accanto a idee platoniche ed aristoteliche. Questi filoni scientifico-filosofici permearono la scienza islamica grazie alle traduzioni in arabo delle più antiche opere greche e, in base all'analisi filologica di vari manoscritti, anche latine. Il sapiente musulmano - l' *Hākīm* (il saggio) - era soprattutto un esperto in Astronomia, Matematica e Medicina, ma era anche poeta e scrittore di Belle Lettere; basti pensare, per esempio, al persiano Avicenna ed ai suoi scritti relativi all'esperienza di medico.

Come per l'uomo di cultura dell'Occidente medioevale, anche per gli studiosi dell'Islām la formazione culturale si realizzava attraverso l'apprendimento delle Arti del Quadrivio (Astronomia, Matematica, Geometria, Musica) ed attraverso quelle del Trivio (Arti Liberali). Occorre, comunque, tenere presente che il nostro punto di osservazione - in

quanto occidentale - potrebbe condurre ad interpretazioni anche errate e comunque incomplete. Se, infatti, volessimo contenere entro le nostre definizioni - che rispecchiano le convinzioni - i rami della scienza e della tecnica islamiche commetteremmo facilmente degli errori.

Il periodo storico considerato come inizio per una ricerca più dettagliata coincide con la diffusione della religione islamica in Occidente e con la sistematizzazione graduale delle conoscenze. La scelta dell'intervallo cronologico conseguiva riflessioni e considerazioni su tracce di testi antichi greci e romani presenti in autori rinascimentali, ma non più rintracciabili in lingua originaria. Bisognava, perciò, indagare sul veicolo utilizzato per la trasmissione. Di conseguenza le indagini si spostarono sulla cultura e in particolare sulla scienza e sulle tecniche costruttive utilizzate nel mondo islamico, che aveva ereditato - ed arricchito e rimaneggiato - la cultura occidentale tramite i testi tradotti.

La soluzione più ovvia - e probabilmente anche più corretta - per spiegare il concetto di scienza nell'Islām è di ricorrere alla definizione formulata da uno studioso iraniano nostro contemporaneo, per il quale la Scienza viene intesa come

«/.../ Un insieme di informazioni logiche o di un insieme di ipotesi o di esperimenti o di teorie in ogni campo /.../». «Diversi rami della scienza non vengono considerati assieme quale ordine comune, ma è possibile che tra di loro vi siano delle strette relazioni, come tra la Chimica e la Fisica. Senza dubbio, la più antica scienza si collega alla Terra, all'Astrologia e magari alla Medicina. I nostri predecessori hanno considerato le relazioni fra queste. Così come ancora oggi tanta gente crede ancora nell'Astrologia considerata, invece, una superstizione dal punto di vista razionale. I nostri antenati o quelli che credevano in ciò collegavano il proprio destino alla posizione delle stelle. Fra le scienze relative alla conoscenza della Terra o delle stelle esiste qualche relazione sulla quale, col passare del tempo, i nostri antenati si sono messi ad indagare /.../».⁶

Dallo studio delle scienze islamiche emerge certo ed indiscusso il riferimento al mondo greco che sopravvisse e pervenne in Occidente grazie alle traduzioni degli arabografi. Non mancavano a quel tempo nemmeno nuove elaborazioni e nuovi esperimenti, i quali costituirono la costante dei processi di invenzione, di ricerca e di sviluppo scientifico. A quel tempo era frequente l'utilizzo del disegno con cui si fissavano le nuove idee. Basti ricordare al ruolo ed all'importanza dei progetti dei Bānū Musā figli di Ben Shakir vissuti nel IX secolo per le loro macchine che si collegavano ai congegni dell'alessandrino Erone;⁷ oppure basti il riferimento all'opera di al-Jāziri, vissuto nel XII secolo, col suo *Compendio di Teoria e Pratica delle Arti Meccaniche* per comprendere

⁶ Gholāmrezā Quros, *Āb va fann-e Ābyārī dal Irān-e Bastān*, Tehrān, 1350 H.(c.1971), p. 69.

⁷ Erone d'Alessandria, nato nel 62 d. C. aveva descritto molti artifici nell'opera "*Pneumatica*", nella "*Mechanica*", invece, trattò in particolare di ingranaggi, corone, pulegge multiple, della trasmissione del moto attraverso alberi dentati fra loro perpendicolari; effettuò, inoltre, alcune ricerche nel campo dell'Ottica, cfr.: Charles Singer, *Breve storia del pensiero scientifico*, Torino, 1961, p.88.

come fosse avanzata la ricerca teorico-pratica nel mondo islamico e come essa fosse priva di diletterismo.

L'organizzazione statale delle *Madrise* o delle *Casa della Scienza* - come la *Bāyt al-Hikma* - fondata a Baghdād da al-Mā'mūn agli inizi del IX secolo⁸, oppure la *Dār al-Hikma*, fondata da al-Hākīm nel 1004 e le varie Università - come la *Nezāmiyye* - avranno un notevole sviluppo, specialmente con i Selgiuchidi. Esse danno prova dell'importanza attribuita alla ricerca scientifica, alla sua sistematizzazione, all'incremento della conoscenza che avevano scopi anche pratici come quello della più razionale distribuzione delle risorse idriche e degli scambi commerciali. Non a caso, trovarono sviluppo ed applicazione immediata discipline come la Matematica, la Geometria e la Meccanica accanto ad altre di carattere speculativo come la Filosofia e il Diritto.

Un'affermazione del noto scienziato al-Jāziri consente di comprendere quanto fosse avanzata, già durante il XII secolo, l'idea della scientificità:

«/.../ se una scienza applicativa non è verificata sperimentalmente, è una scienza dubbia /.../».⁹

In particolare, la conoscenza delle leggi della Meccanica - specie quelle relative alla forza di gravità che consentivano di determinare i pesi - rendeva possibile la realizzazione di bilance di precisione utili agli alchimisti - i futuri chimici intesi in senso moderno - i quali tentavano la trasmutazione dei metalli. Le leggi della Statica e della Dinamica, invece, rendevano possibile la costruzione di congegni di sollevamento idrico, più direttamente utili all'ingegneria. Anche la conoscenza della topografia è avanzata sulla scia dell'analoga disciplina iniziata in precedenza dai Greci grazie all'Ottica. La Topografia consentì di misurare le distanze e le altezze anche di montagne lontane ma, soprattutto, consentì di disegnare nuove mappe, sulle quali riportare le nuove terre esplorate e di aggiornare così la cartografia esistente.

Benchè uno degli scopi principali dei viaggi fosse la diffusione della nuova fede tra il maggior numero possibile di persone, è indubbio che essi contribuirono all'acquisizione di un vasto patrimonio di nuovi dati. Infatti, accanto alle notizie di carattere commerciale non erano da trascurare la possibilità e l'importanza degli scambi di carattere speculativo.

I contatti fra il mondo bizantino, il mondo cristiano dell'Occidente latino ed il mondo islamico si incrementano durante il VII secolo in gran parte per la espansione musulmana finalizzata anche alla propaganda della nuova fede religiosa. Durante il dominio abbasside, alcuni esponenti della famiglia dei nestoriani Bukht Yishū costituirono il tramite per la trasmissione delle idee scientifiche grazie alla loro padronanza di varie lingue fra le quali la greca, la siriana e la persiana. La nuova capitale abbasside - Baghdād divenne il luogo di scambio delle conoscenze in campo scientifico: in questa città apparvero le prime traduzioni dal greco delle opere di

⁸ Ahmad Y. Al-Hassan and Donald Hill, *Islamic Technology*, Cambridge, 1992, p.11.

⁹ Hassan e Hill, op. cit., p.16.

Aristotele e più tardi esse arriveranno in Europa attraverso le traduzioni degli arabografi.¹⁰

Assieme alla nuova religione - l'Islām - nella Spagna dei califfi Abd al-Rahmān III e di al-Hākam II di Cordova troverà diffusione la scienza islamica grazie alle iniziali traduzioni di uno studioso ebreo (che fu anche medico di corte, ministro e patrono della Scienza) Husdai ben Sharpūt, il quale tradusse un manoscritto di Dioscoride inviato in dono al califfo da Costantino VI di Bisanzio.¹¹ Qualche secolo più tardi, nella Spagna musulmana, comparirono pure le prime traduzioni di alchimia e specialmente le idee di Jabir e di Rāzi. In Europa un ramo avanzato della scienza era rappresentato dall'Astronomia, molto studiata soprattutto nelle scuole di Toledo e di Cordova.

Mentre in Occidente il terrore dovuto all'approssimarsi della preannunciata fine del Mondo - collocata intorno al Mille – avvicinava la gente ad atteggiamenti irrazionali ed a movimenti ascetici, portando alla decadenza della scienza, in Oriente - dove l'unità della scienza è rappresentata dall'intuizione -¹² prese forma e si delineò chiaramente la cultura scientifica la quale si esplicò principalmente nella Matematica, nella Geometria e nell'Astronomia, oltre che nella Medicina ancora permeata, come le altre branche scientifiche, da credenze e superstizioni.

Per le traduzioni dal greco furono privilegiate discipline che avevano un prevalente carattere applicativo, fra le quali le matematiche caratterizzate dall'inserimento di influssi derivati dall'estremo Oriente - attraverso la mediazione dell'India – e dalla Grecia.

Un discorso a parte meriterebbe la Meccanica per il consistente contributo ad essa dato da studiosi e traduttori di origine iranica nelle cui opere si individuano con secoli di anticipo più note macchine rinascimentali.¹³

Il processo di traduzione dall'arabo si avvale, oltre che di studiosi occidentali, di ebrei fra i quali citiamo Salomon ibn Gabirol (1021-1058?), di Saragozza - più noto in Occidente come Avicembron - e Moses ben Maimon (1135-1204), di Cordova (più noto come Maimonide) il quale tradusse soprattutto testi di medicina, mentre scrisse *ex novo* alcuni trattati di igiene.

Gli studi relativi alla diffusione della scienza islamica in genere non fanno distinzione tra le opere degli Arabi e dei Persiani. Infatti, la cultura non è da considerare un elemento di carattere campanilistico, ma sovranazionale e atemporale. Tuttavia, la mancata distinzione tra le due culture orientali delle quali si sta trattando, non è

¹⁰ C. Singer, *Breve storia del pensiero scientifico*, Piccola Biblioteca Einaudi, 1961, pp.137 - 138.

¹¹ C. Singer, *Breve storia cit.*, pp.148 - 149.

¹² Seyyed Hossein Nasr, *Scienza e civiltà nell'Islam*, Feltrinelli, Milano, 1977, p. 51.

¹³ G. Ferriello, 2003 "La meccanica di Erone in una inedita versione persiana medievale annotata dall'emissario di Luigi XIV" convegno AIMETA Atti, Memorie pp. 175-183; G. Ferriello, *The lifter of Heavy Bodies of Heron of Alexandria in the Iranian World*, in: *Nuncius*, Firenze, Leo S. Olschki Editore, MMV, pp. 327 – 345, G. Ferriello: La diffusione della meccanica di Erone in ambito Iranico, Atti: AA.VV. *Scienza e Rappresentazioni*, Colloque International "En mémoire de Pierre Souffrin": Science et Représentation, Vinci, Biblioteca Leonardiana, 26 - 29 settembre 2012, Leo S. Olschki editore, Firenze, 2016, G. Ferriello Maurizio Gatto Romano Gatto, *The Baoukos and the Mechanics of Heron*, a cura di Giuseppina Ferriello, Maurizio Gatto e Romano Gatto, Leo S. Olschki editore, Firenze, 2016,

connessa a questa puntualizzazione bensì ad una generale e generica attribuzione al mondo arabo di qualunque arabografo. Così, anche nell'affrontare il problema relativo alle traduzioni ed alla conseguente diffusione in Occidente di testi antichi (greci) o più recenti (in arabo) occorrerà attingere a più fronti, sia per il carattere enciclopedico del sapere medioevale, sia per la problematica di carattere linguistico - culturale.

E' appena il caso di ricordare che l'insufficiente corredo di termini tecnici in lingua latina determinò la trasposizione di molti vocaboli arabi e persiani i quali non vennero tradotti, bensì semplicemente traslitterati nelle lingue europee. Si ricordino, per esempio, i termini arabi "*alcali, alambicco, ammoniaca, ambra, talco*", oppure i termini persiani "*alcool, canfora, limone e sciroppo*", per citarne solo alcuni d'uso ricorrente ancora oggi.¹⁴

L'attenzione dei traduttori in latino, soprattutto agli inizi, era diretta verso le materie scientifiche. I primi testi divulgati nella lingua dotta occidentale riguardarono l'Astronomia, la Matematica - come le opere di Khwārazmī oppure i commenti di Nayrizī ad Euclide - ma furono tradotti anche testi di medicina, specialmente quelli del persiano Ibn Sinā' noto come Avicenna, che ebbero un peso considerevole sulla medicina occidentale di ispirazione islamica - come la famosa Scuola Salernitana.

D'altro canto, l'uso di un'unica 'lingua dotta' comportò, come fattore positivo, una più rapida diffusione ed omogeneizzazione delle idee espresse dai vari gruppi e pervenute in Occidente attraverso le opere dei traduttori. Anche questi si esprimevano tutti in un'unica lingua dotta (il latino), non certo nella moltitudine di 'Lingue volgari'. Una frammentazione linguistica, sia in Oriente sia in Occidente, per quell'epoca avrebbe forse determinato una selezione degli argomenti - quindi dei testi scritti - ed una ridotta diffusione delle idee scientifiche e culturali in senso lato.

Oggi, alla luce degli approfondimenti - soprattutto linguistici - sarebbe più logico individuare i singoli apporti culturali che rappresentarono il bagaglio culturale dei vari gruppi per potere correttamente riferire alla cultura di origine le conoscenze. Si potrebbe, pertanto, indirizzare la ricerca, in maniera appropriata, verso le radici linguistico-culturali.

Tuttavia non è facile, nemmeno ai nostri giorni, individuare uno stesso livello di approfondimento delle conoscenze delle varie branche del sapere. Infatti, mentre per alcuni campi si arriva a distinguere addirittura il carattere regionale - come per esempio nell'architettura -, per quanto concerne altri settori si generalizza limitando le indagini alle fasi generali.

¹⁴ C. Singer, op. cit., pp.154 -155.

Bibliografia in ordine cronologico:

Gian Battista. Venturi, *Commentari sopra la storia e le teorie dell'ottica*, Bologna, Masi, 1814

Camille Marie Bernard Carra de vaux, “Les Mécaniques ou l’élèveur de Héron d’Alexandrie, publiées pour la première fois sur la version arabe de Qustâ’ Ibn Lûqâ, et traduit en français par M. Le Baron Carra de Vaux”, *Journal Asiatique*, Neuvième Série, Tome Premier, mai-juin 1893, pp. 386- 472, Tome Deuxième, juillet-août 1893, pp. 152-269; Tome Quatrième, novembre-décembre 1893, pp. 420-514

Suter, Heinrich (1900), *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre werke*, in Mieli, Aldo (1938), *La Science arabe et son rôle dans l’évolution scientifique mondiale*, Leiden, 1938; Amsterdam, 1900, 2^a ed. 1902, p. 16

Mieli, Aldo (1938), *La Science arabe et son rôle dans l’évolution scientifique mondiale*, Leiden, Sarton, 1938

Charles Singer, *Breve storia del pensiero scientifico*, Piccola Biblioteca Einaudi, 1961

Al-Nadim, Muhammad Ibn Ishaq (1970), *The Firhist. A Tenth-Century Servay of Muslim Culture*, Edited and Translated by Bayard Dodge, New York, Columbia University Press, 1970

Banū (sons of) Mūsà Shākīr (1979), *The Book of Ingenious Devices / Kitāb al- Hījāl, Translated and Annotated by Donald R. Hill*, Dordrech-Boston-London, D. Reidel Publishing Company, 1979

Nezāmi, Ganjavi (1982), *Le Sette Principesse* (tr. by Alessandro Bausani), Milano, Rizzoli-BUR, 1982

Gholāmrezā Quros, *Āb va fann-e Ābyārī dal Irān-e Bastān*, Tehrān, 1350 H.(c.1971),Alessandro Bausani, *Iran, Islam e Italia nel Medio Evo*, in: ACTA Iranica, II/1974

Ahmad Y. Al-Hassan and Donald Hill, *Islamic Technology*, Cambridge, 1992

Giuseppina Ferriello, “*Le tecniche costruttive nel Medio Evo Islamico attraverso le fonti persiane*” (1993)

Steingass, Francis Joseph (1993), *A Comprehensive Persian-English Dictionary*

Including the Arabic Words and Phrases to be met with in Persian Literature, London,

Routledge & Kegan, 1st Ed. 1892, 5th impression 1993

Giuseppina Ferriello, «*L'Art de la construction et les Constructeurs persans dans le Kitab encyclopédique du monde islamique entre le X^e et le XVII^e siècle*» in: *ATTI: XXth International Congress of History of Science; Symposium Between Mechanics and Architecture*, Liegi, 20 - 26 July, 1997, preprint, Vol. Symposia, p. 467, Sezione “Meccanica e Architettura

Giuseppina Ferriello “*Il Sapere tecnico-scientifico fra Iran e Occidente, una ricerca nelle fonti*” tesi di Ph.D. in studi Iranici, I.U.O. (1998);

Abattouy, Mohammed (2001), *Greek Mechanics in Arabic Context: Thābit ibn Qurra, al-Isfizārī and the Arabic Traditions of Aristotelian and Euclidean Mechanics*, «*Science in Context*», 14, 2001, pp. 179-247

Giuseppina Ferriello, “*La meccanica di Erone in una inedita versione persiana medievale annotata dall'emissario di Luigi XIV*” convegno AIMETA Atti, Memorie, 2003pp. 175-183;

Giuseppina Ferriello, *I “costruttori” ed Il “costruire”, nel Kitāb (Libro) del mondo islamico fra il VII ed il XVII secolo*, Accademia Pontaniana, 2004, pp.127-146

Giuseppina Ferriello , *Strumenti topografici dell'anno mille nel Kitāb Inbat al-Miyyah al-Xafiyah del matematico-ingegnere Karaji*, in Atti C23.1-C23-5

Giuseppina Ferriello, *L'estrazione delle acque nascoste, Trattato tecnico-scientifico di Karagi, matematico-ingegnere persiano*, Kim Williams Books, Torino, 2007 (<https://www.kimwilliamsbooks.com/open-access/87-l-estrazione-delle-acque-nascoste-trattato-tecnico-scientifico-di-karaji.html>)

Abattouy, Mohammed and al-Hassani Salim (2015), *The corpus of al-Isfizārī in the Sciences of Weights and Mechanical Devices*, London, Al-Furqān, 2015

Abattouy, Mohammed (2016a), *The Corpus of Mechanics of al-Isfizārī: its Structure and Signification in the Context of Arabic Mechanics* (all in Persian language) English translation of H. R. Nafisi, «*Miras-e Elmi-ye Eslam va Iran, Scientific Heritage of Islam & Iran*», n° 9, vol. 5, N° 1, Spring & Summer 2016, pp. 6-34

Giuseppina Ferriello, *The lifter of Heavy Bodies of Heron of Alexandria in the Iranian World*, in: *Nuncius*, Firenze, Leo S. Olschki Editore, MMV, 2016, pp. 327 – 345

Giuseppina Ferriello, “*la formazione ed il ruolo del tecnico medievale musulmano nelle fonti persiane ed arabe*”, Università Bocconi di Milano, Matepristem, 2009

Giuseppina Ferriello

<http://matematica.unibocconi.it/articoli/la-formazione-ed-il-ruolo-del-tecnico-medievale-musulmano>)

Giuseppina Ferriello: La diffusione della meccanica di Erone in ambito Iranico, Atti: AA.VV. *Scienza e Rappresentazioni, Colloque International "En mémoire de Pierre Souffrin": Science et Représentation*, Vinci, Biblioteca Leonardiana, 26 - 29 settembre 2012, Leo S. Olschki editore, Firenze, 2016

Giuseppina Ferriello Maurizio Gatto Romano Gatto, *The Baoukos and the Mechanics of Heron*, a cura di Giuseppina Ferriello, Maurizio Gatto e Romano Gatto, Leo S. Olschki editore, Firenze, 2016

Giuseppina Ferriello, Le competenze dell'ingegnere nel mondo islamico fra il X e il XVII secolo, in: *Atti, International Conference on History of Engineering*, Naples 2018, Cuzzolin, Vol. II, pp. 619-630.

Quale Fisica al liceo scientifico?

Antonia Travaglione

Università degli Studi del Sannio
travaglione96@gmail.com

Sunto

Quest'anno la seconda prova dell'esame di Stato per i licei scientifici, per la prima volta, ha inserito la Fisica all'interno del compito di Matematica.

Alla luce di questa novità, abbiamo voluto avviare una discussione con i docenti al fine di costruire percorsi nuovi per le due discipline, soprattutto per l'ultimo anno di corso.

1. Introduzione

Nei licei scientifici le ore assegnate alla Fisica, nonostante la riforma, risultano ancora esigue e, spesso, almeno finora, assorbite dalla matematica.

Non poco, infatti, ha, giustamente, preoccupato docenti e studenti l'alea della traccia di matematica all'esame conclusivo del ciclo di studi così che la fisica è stata spesso considerata figlia di un dio minore.

Sic stantibus rebus, è stato trascurato anche il semplice approccio con argomenti quali:

- relatività
- fisica atomica e nucleare

per non parlare della fisica quantistica che richiede una matematica forse un po' complessa per un liceo.

Se, però, si va ad approfondire qualche quesito della traccia del compito del 2019, si nota come il Miur tenda ad introdurre gli argomenti di cui sopra, anche se in maniera soft, cioè tra gli argomenti a scelta dello studente e, quindi, che quest'ultimo può evitare se non li ha approfonditi o addirittura mai affrontati.

Tuttavia bisogna considerare che questa è la prima volta di una nuova formulazione della traccia, quindi ci si può attendere che negli anni futuri si possa andare in questa direzione.

Io ho proposto ai colleghi di invertire la tendenza.

Devo precisare che, a priori, la mia proposta non è stata molto condivisa, ma attribuisco ciò soprattutto al fatto che in molti licei scientifici l'insegnamento della fisica è attribuito ancora a docenti laureati in matematica che, ovviamente, almeno finora, hanno preferito dare, giustamente, priorità alla disciplina più consona ai loro studi, il tutto a scapito della fisica troppo spesso non amata neanche dagli studenti.

Tra l'altro per la forte carenza di laureati in fisica, è spesso giocoforza assegnare la disciplina al docente di matematica.

In paesi anglofoni e non, la tendenza è quella di spostare l'attenzione sulla fisica moderna, piuttosto che fermarsi su percorsi che, oramai, fanno parte della storia della fisica, mentre i ragazzi hanno i piedi piantati nell'attualità dei fenomeni.

Così appare, per esempio, in :

Cackett-Kennedy-Steven Core Physics Ed. Oxford

Dunque, il mio intento è:

- partire da problematiche che fanno parte della quotidianità dei nostri allievi e che, quindi, possono suscitare il loro interesse per una disciplina che non sempre risulta semplice.
- eliminare il concetto di frammentarietà dei fenomeni fisici fornendo il senso di come questi ultimi siano un tutt'uno, a partire dal concetto di unificazione delle forze fino all'unitarietà dei fenomeni elettrici e magnetici che, purtroppo, anche nei testi in uso, vengono trattati prima come fenomeni distinti e solo alla fine unificati.

Ma, spesso, per il numero esiguo di ore, non si riesce ad arrivare fino in fondo al programma, per cui lo studente completa il suo ciclo di studi al liceo senza avere una visione di insieme dei fenomeni studiati.

2. Una razionalizzazione del percorso didattico

Il biennio potrebbe essere dedicato anzitutto alla storia della fisica, troppo spesso ignorata dai docenti che non sempre ne percepiscono l'importanza al fine di conoscere l'evoluzione e le faticose conquiste della scienza.

Importante sarebbe evidenziare la relazione con altre discipline, quali filosofia, matematica, astronomia, chimica, biologia, geologia, etc. affinché la fisica non venga percepita come a sé stante e disgiunta da fenomeni che non la riguardano strettamente.

Intanto in laboratorio potrebbe essere avviato lo studio di:

- Misura e rappresentazione delle grandezze fisiche
- Elementi di teoria degli errori
- Vettori e calcolo vettoriale
- Grafici
- Moto
- Conduttori ed isolanti
- Amperometri e voltmetri
- Costruzione di semplici circuiti elettrici
- Esperimenti con le cariche elettriche
- Calamite e treno a levitazione magnetica
- Campo magnetico terrestre.

Quale Fisica al liceo scientifico?

Potrebbero, intanto, essere introdotti, in maniera discorsiva, i concetti di limite, derivata, ed integrale, in concomitanza con i concetti di velocità e accelerazione istantanea, rinviando la sistemazione di tali concetti al momento in cui questi ultimi saranno affrontati in maniera sistematica in matematica.

Sarebbe possibile dare l'idea di velocità e accelerazione istantanea con un esperimento in laboratorio disponendo, ad esempio, una tabella del tipo

Tempo t (s)	Spostamento x (m)	velocità (m/s)
-------------	-------------------	----------------

La velocità istantanea si può far corrispondere, in prima istanza, al valore che assume la

velocità media $\vec{v} \equiv \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ quando l'intervallo di tempo durante il quale si effettua la

misura diventa sempre più piccolo, ovvero "tende" a zero. Si può anche accennare che tutto questo può essere meglio scritto:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Questa espressione prende il nome di derivata. Naturalmente non si va oltre, rinviando la formalizzazione e il calcolo al triennio.

Lo stesso dicasi per l'accelerazione.

Sarebbe anche possibile introdurre il simbolo di \sum per indicare la somma di tanti piccoli intervalli (n) e chiamare "integrale" il limite di tale somma per $n \rightarrow \infty$, soltanto, però, sottolineando la possibilità di calcolo di aree di figure geometriche che abbiano una forma diversa da quelle già studiate fin dalle scuole elementari.

Si potrebbe far capire che talvolta ci si trova a dover calcolare aree, per esempio, di coste frastagliate, cioè di frattali che tante applicazioni hanno in natura e nell'arte, oltre che nel nostro quotidiano.

Facendoci aiutare dalla storia, non dovrebbe mancare il capitolo riguardante la nascita e lo sviluppo dell'analisi matematica di Newton e Leibniz insieme alla diatriba tra loro due per attribuirsi la paternità, soprattutto per il caratteraccio di Newton. Il sorriso così non mancherebbe per evitare ciò che secondo Gabriele Lolli è l'immagine diffusa del matematico come persona piuttosto "deprimente". Naturalmente questo vale anche per il fisico, soprattutto teorico e per tutti gli uomini di scienza.

Andiamo adesso ad affrontare la parte più spinosa della nostra discussione: come presentare la Fisica nell'ultimo anno del liceo?

Nella mia lunga esperienza didattica ho verificato due fondamentali lacune nella comprensione della fisica da parte degli studenti:

Con le dovute eccezioni, gli studenti:

- non comprendono quanto, allo stato, tutti gli strumenti che usano nel loro quotidiano siano da ascrivere a leggi fisiche che pur conoscono e di cui, però, non capiscono il nesso
- vedono la fisica come una serie di leggi disgiunte e non ne capiscono l'unitarietà, cosa che mi sembra gravissima. Spesso, proprio per questo, addirittura ne odiano lo studio.

Mi sono chiesta talvolta se siamo noi docenti, purtroppo sostenuti dalla maggior parte dei libri di testo, a continuare a presentare la fisica in maniera distorta.

Ho provato a capovolgere lo svolgimento del programma. Naturalmente è una mia ipotesi che può essere migliorata in tutte le sue fasi.

Ad esempio, nella prima lezione potremmo chiedere ai nostri studenti di mettere sul banco i loro cellulari e di chiedersi come si è arrivati a questo punto. Dovremmo farci aiutare dalla storia della disciplina che, purtroppo, come ho sottolineato più volte, viene trascurata nell'insegnamento.

Nessun docente farebbe leggere la Divina Commedia prima che gli studenti abbiano studiato Dante e le sue opere.

In fisica, a parte Einstein, spesso conosciuto sulla rete solo per l'improbabile immagine della sua linguaccia o attraverso i suoi altrettanto improbabili aforismi riportati dai social, gli studenti, al massimo hanno sentito parlare di Newton e della sua leggendaria mela, tutto il resto è, spesso, buio pesto. A volte si documentano, ma non sempre si preoccupano di scegliere siti scientificamente rigorosi o non li conoscono affatto.

Allora, che fare?

Insieme ai colleghi abbiamo cercato di capire come modificare l'ordine di presentazione degli argomenti disciplinari in modo che gli studenti possano sentirla più vicina alla loro realtà e alla realtà dei tempi che vivono.

L'input da me fornito non ha trovato tutti i colleghi d'accordo, ma la discussione tra noi è stata, sì accesa, ma molto interessante.

Sulla scia di esperienze diverse dalle nostre ho proposto di rompere con il passato.

Solo le grandi rivoluzioni e i grandi visionari hanno cambiato la scienza!

Non è mia intenzione confrontarmi con rivoluzioni o visionari, non ne sarei all'altezza, ma un certo mutamento della presentazione della fisica mi sembra indispensabile.

La radio, la televisione, il telecomando, i giochi telecomandati e i telefoni cellulari sono solo alcune delle applicazioni di ciò che andremo a proporre.

3. Alcune idee per il triennio

Forti del fatto che gli studenti hanno già affrontato nel biennio alcuni argomenti, si potrebbe capovolgere la trattazione dell'elettromagnetismo presentando, fin da subito, il nocciolo dell'elettromagnetismo, cioè

Le quattro equazioni di Maxwell (all'inizio in forma semplificata)

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{Teorema di Gauss per il campo elettrico}$$

$$\Phi(\vec{B}) = 0 \quad \text{Teorema di Gauss per il campo magnetico}$$

$$C(\vec{E}) = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t} \quad \text{Teorema di Faraday-Neumann}$$

$$C(\vec{B}) = \mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{\Delta\Phi(\vec{E})}{\Delta t} \right) \quad \text{Teorema della circuitazione di Ampère-Maxwell}$$

Naturalmente bisognerebbe spiegare che queste quattro equazioni sono a loro sconosciute e, soprattutto, che sono espresse in forma semplificata e saranno sistemate in seguito in forma rigorosa, tuttavia da queste quattro equazioni è possibile dedurre tutte le proprietà dei campi elettromagnetici, il tutto per dare immediatamente il senso dell'unitarietà dei fenomeni elettrici e magnetici che giustificano molte applicazioni che vediamo nel nostro quotidiano.

Si potrebbe cominciare, quindi, a chiarire che tali equazioni che avevano avuto una sistemazione esclusivamente matematica da parte di Maxwell sono state alla base delle onde hertziane, ottenute sperimentalmente solo dopo venti anni dall'espressione delle quattro equazioni. In seguito, la scoperta delle onde radio, ovvero delle onde elettromagnetiche che riescono a trasmettere immagini e parole attraverso l'aria avviarono con Marconi la storia dei dispositivi che funzionano utilizzando onde elettromagnetiche, ovvero la radio, i forni a microonde, i telefoni cordless, i giocattoli telecomandati, i televisori, e altro ancora.

In realtà, Maxwell arrivò a tale sintesi dopo quasi un secolo di studi ed esperimenti di altri, aggiungendo un piccolo dettaglio matematico che, però, cambiò la storia della fisica.

Già Oersted, prima di Faraday, sulla scia dei filosofi naturalisti tedeschi, aveva evidenziato il nesso tra elettricità e magnetismo, ma Faraday, partendo dal presupposto che tutte le forze della natura hanno la stessa radice, aveva ritenuto che elettricità e magnetismo fossero manifestazioni diverse dello stesso fenomeno.

La successione degli argomenti dovrebbe essere la seguente:

- Le onde meccaniche
- La luce
- Le onde elettromagnetiche

I primi due argomenti dovrebbero essere stati già acquisiti negli anni precedenti, quindi a questo punto andrebbero sottolineate le analogie con il terzo, il tutto al fine di evidenziare l'unitarietà della fisica, rinviando l'esame della grande rivoluzione apportata dalle equazioni in esame al momento in cui gli studenti abbiano una conoscenza delle onde elettromagnetiche più approfondita.

Si potrebbe passare, poi, passare alla nomenclatura matematica, già acquisita nel penultimo anno del liceo, quali limiti, derivate ed integrali e contenuta nelle equazioni, esaminando, punto per punto, il significato fisico di ciascuno dei termini delle equazioni stesse.

Agli studenti bisogna dare l'idea che il campo elettrico e il campo magnetico non costituiscono fenomeni separati, così come fanno la maggioranza dei testi in uso nei quali la suddivisione per capitoli tende necessariamente a separare i due fenomeni per unificarli solo alla fine, mentre le onde elettromagnetiche che ci consentono di usare tutte le apparecchiature che i giovani hanno sempre tra le mani viaggiano insieme, mai separate.

Dunque è possibile introdurre il concetto di campo senza distinzione tra campo elettrico e campo magnetico e, di conseguenza, quello di flusso.

Il teorema di Gauss sarà presentato insieme sia per il campo elettrico che per quello magnetico.

Oltre al riferimento storico, si evidenzierà come per l'espressione matematica del secondo valga l'uguaglianza a zero perché, a suo tempo, vigeva la convinzione che esistesse la carica singola, ma non il monopolo magnetico.

Gli ultimi studi, però, vanno verso la ricerca del monopolo magnetico che sovverte anche le equazioni di cui trattasi.

Dunque la fisica non è statica, ma, come tutte le scienze, è in continua evoluzione.

In realtà, il monopolo magnetico, ipotizzato da Paul Dirac quasi ottanta anni prima, è stato rilevato con un esperimento su atomi di rubidio pubblicato su Nature nel 2014.

A questo punto anche le esperienze come quella sulla calamita spezzata possono andare in soffitta.

La legge di Gauss per il campo magnetico andrebbe a diventare:

Quale Fisica al liceo scientifico?

$$\Phi(\vec{B}) = \frac{m}{\mu_0} \quad \text{con } m = \text{carica magnetica}$$

I due teoremi di Gauss evidenzerebbero una vera e propria simmetria, anche se non perfetta e darebbero ancora più peso all'idea di unificazione dei fenomeni elettrici e magnetici.

Il testo che ho su citato apre con la trattazione delle onde meccaniche e arriva alle onde elettromagnetiche.

Solo in seguito, nel sedicesimo capitolo comincia la trattazione dell'elettrostatica cui seguono gli effetti magnetici della corrente.

Dunque, dopo aver trattato in matematica le equazioni differenziali e gli integrali lungo una linea chiusa (ovvero lungo un circuito) si potrà dare una sistemazione corretta alle equazioni di Maxwell, rese pubbliche nel 1873.

Va sottolineato che le onde elettromagnetiche, a differenza delle onde meccaniche che si propagano solo nella materia, si propagano anche nel vuoto.

Le equazioni risultano le seguenti:

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{Legge di Gauss per il campo elettrico}$$

$$\oint \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad \text{Legge di Gauss per il campo magnetico}$$

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad \text{Legge dell'induzione di Faraday}$$

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 i \quad \text{legge di Ampère-Maxwell}$$

Maxwell, in maniera intuitiva e attenendosi alle sue conoscenze matematiche, chiamò i corrente di spostamento.

In realtà, la velocità delle onde elettromagnetiche risultò esattamente uguale alla velocità della luce:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Dunque Maxwell aveva compreso che la luce altro non è che una forma di radiazione elettromagnetica.

Nel 1861 vennero, così, unificate le teorie dell'elettromagnetismo: il valore della velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto coincideva con buona approssimazione con quello della velocità della luce, già noto dalle esperienze di Fizeau e Foucault. Questo fu un risultato clamoroso che mise in evidenza lo straordinario potere unificante delle equazioni di Maxwell.

Egli, avendo notato che le onde elettromagnetiche e la luce, oltre ad essere caratterizzate entrambe da vibrazioni trasversali, si propagano con la stessa velocità, avanzò l'ipotesi della natura elettromagnetica della luce, e così l'ottica divenne un capitolo dell'elettromagnetismo. E scusate se è poco.

4. Conclusioni

A questo punto la scomparsa del concetto di etere, i quanti di Planck insieme alla condizione della costanza della velocità della luce ci porterebbero direttamente ad Einstein secondo cui l'energia trasportata dalle onde elettromagnetiche assumono sia la forma di onde che di particelle.

Dunque si potrebbe passare alla trattazione della teoria della Relatività ristretta e generalizzata.

Ma questa è un'altra storia.

Bibliografia

Cackett, Kennedy, Steven, *Core Physics*, Oxford University Press, 1979.

Bernardini, Tarsitani, Vicentini, *Thinking Physics for Teaching*, Plenum Press, 1995.

Halliday, Resnick, Walker, *Fondamenti di Fisica*, Editrice Ambrosiana, Milano, 1995.

Modelli matematici: i tanti volti della realtà. Applicazioni in fisica e biologia

Mario Innocenzo Mandrone

Dipartimento di scienze e tecnologie. Università degli studi del Sannio - Benevento

Email: almavit@libero.it

Sunto

L'atteggiamento tipico degli allievi nei confronti della matematica è spesso di distacco e scarso interesse, motivato da una costante dichiarazione di difficoltà nello studio della disciplina, vista come materia noiosa e poco stimolante. Per provare a "contrastare" questa visione diffusa, bisogna creare situazioni di apprendimento, favorire l'attivazione di esplorazioni cognitivamente significative e creare inoltre campi di esperienze esterne alla matematica, ma fortemente matematizzate o matematizzabili puntando ad una didattica attenta alla costruzione dei concetti più che all'acquisizione di regole. Agganciare la matematica al mondo reale, oltre a stimolare l'interesse, promuove un apprendimento attivo, aiuta ad affrontare lo studio come scoperta, favorisce la comprensione dei concetti, stimola il ragionamento e lo sviluppo di competenze, amplia il campo delle applicazioni. L'obiettivo del lavoro è quello di introdurre un approccio sperimentale alla Matematica e proporre un possibile itinerario didattico per una educazione alla modellizzazione rivolta a tutti gli studenti, indipendentemente dalla futura prosecuzione dei loro studi. Educare alla modellizzazione comporta un modo diverso di proporre lo studio della matematica, rivolto alla descrizione e comprensione del mondo reale. Punto centrale della proposta è una interazione dinamica tra mondo reale e mondo matematico. Si propone, pertanto, una attività di modellizzazione basata sulla costruzione di modelli matematici utilizzando la tecnica delle equazioni differenziali, prendendo in esame la crescita logistica. In particolare si considera il Modello a crescita limitata o Modello logistico di Verhulst con applicazioni alla crescita di una popolazione animale. Oltre alla crescita esponenziale ed alla crescita logistica, esistono molte altre curve di crescita, chiamate "curve di logistica generalizzata". In questo lavoro ci si limita a considerare il modello di Gompertz applicato allo sviluppo delle masse tumorali. Il modello di Kermack - McKendich, simile a quello di Volterra, viene utilizzato per studiare la dinamica delle epidemie. Questa applicazione della modellistica matematica è molto utile perché, poter fare delle previsioni sullo sviluppo

di un contagio, permette, in molti casi, di approntare tempestivamente cure e profilassi adeguate e, quindi, consente di salvare vite umane.

Tra i possibili modelli matematici applicati allo studio di fenomeni fisici si evidenziano: il modello matematico che permette di determinare il numero di fulmini che mediamente cadono in un giorno sulla Terra, il modello che conduce alla determinazione della distribuzione maxwelliana delle velocità molecolari, anche per sottolineare come, per opera di Maxwell e Boltzmann, le leggi statistiche, legate al concetto di probabilità, fanno per la prima volta il loro ingresso nella fisica.

Parole chiave: Modello malthusiano per popolazioni isolate ed omogenee, crescita logistica, curve di logistica generalizzata, modello di Gompertz per lo sviluppo delle masse tumorali, distribuzione maxwelliana delle velocità molecolari.

1. Introduzione

Nel presente lavoro si discuterà dei modelli matematici in fisica e in biologia. In particolare ci interesseremo di alcuni modelli matematici di tipo continuo relativo alla dinamica di una popolazione e alla diffusione delle malattie. La matematica applicata allo studio dei fenomeni biologici e fisici consiste nella formulazione di detti modelli, nello studio dei problemi di carattere strettamente matematico ad essi associati, nell'interpretazione dei risultati di questo studio in termini del problema reale cui si riferisce il modello ed infine nella validazione del modello stesso. Senza pretese di completezza possiamo dire che ci sono diversi tipi di modelli che possiamo così, dicotomicamente, classificare: deterministici e aleatori, discreti e continui, quantitativi e qualitativi, locali e globali, a parametri concentrati e a parametri distribuiti. Appare evidente che, nella costruzione di un modello matematico, è di fondamentale importanza la scelta delle variabili che caratterizzano le grandezze che vogliamo porre alla base della descrizione del fenomeno in causa e la chiara specificazione delle ipotesi che vengono fatte. E' forse il caso di osservare che la validità delle conclusioni che si possono trarre da un modello matematico non costituisce di per sé garanzia sufficiente della correttezza delle ipotesi sulle quali si basa la costruzione del modello stesso. La costruzione di un modello matematico può essere sintetizzata in quattro fasi: 1) L'analisi del fenomeno che si intende studiare; 2) La costruzione vera e propria del modello; 3) Il suo studio matematico; 4) La verifica sperimentale. L'obiettivo è quello di introdurre un approccio sperimentale alla Matematica e proporre un possibile itinerario didattico per una educazione alla modellizzazione rivolta a tutti gli studenti, indipendentemente dalla futura prosecuzione dei loro studi. L'intento è quello di delineare: a) un insegnamento più aperto alla innovazione tecnologica, fornendo un ampio ventaglio di modelli (per il cui sviluppo è indispensabile il ricorso alle nuove tecnologie); b) un insegnamento

aperto all'innovazione didattica, proponendo un percorso di educazione alla modellizzazione. Educare alla modellizzazione comporta un modo diverso di proporre lo studio della matematica, rivolto alla descrizione e comprensione del mondo reale. Punto centrale della proposta è una interazione dinamica tra mondo reale e mondo matematico. Nel mondo intellettuale e nella pratica scientifica, la parola modello ha una storia antica, che ha portato via via a sottolineare determinati aspetti di questa riproduzione della realtà. La novità del Novecento (o degli ultimi decenni dell'Ottocento) sta nel non essersi limitata alla modellizzazione dei soli fenomeni fisici e astronomici, ma nell'aver preso in considerazione anche altre discipline come l'Economia, la Biologia, la Chimica. È maturata, così, la consapevolezza che lo sviluppo della matematica avviene lungo percorsi complessi, non sempre lineari, che presentano talora delle biforcazioni. La storia ci dice anche che il percorso matematico non si sviluppa nel vuoto, ma nell'interazione con le altre discipline scientifiche, con le altre esperienze culturali, con il contesto sociale, in un gioco di suggerimenti e condizionamenti reciproci.

2. Modelli matematici per la crescita di popolazioni isolate: tecnica delle equazioni differenziali

Si definisce popolazione un insieme di esseri viventi che condividono una porzione di spazio, aventi delle caratteristiche comuni. Generalmente si usa il termine popolazione per definire un gruppo di individui della stessa specie, ma ha senso anche utilizzare questo termine per individuare genericamente una popolazione di predatori, o per specificare all'interno della stessa specie una popolazione di individui giovani, malati, maschi etc... Una popolazione si può considerare isolata se non è possibile individuare, all'interno dell'ecosistema, un partner privilegiato, una popolazione cioè la cui presenza o assenza determini direttamente una mutazione sulla composizione della prima popolazione. Consideriamo popolazioni per cui è possibile fare la seguente ipotesi di omogeneità: in ogni istante ogni individuo può riprodursi o morire indipendentemente dall'età. In tal caso è possibile descrivere la variazione della popolazione in dipendenza dal tempo e dalla densità della popolazione stessa. Questo numero, a rigor di logica, assume solo valori interi. Tuttavia, assumiamo che esso possa essere approssimato da una funzione continua e derivabile. Cominceremo proprio con l'esaminare modelli di crescita di una popolazione isolata. Esamineremo, poi, modelli di crescita per popolazioni conviventi, tra cui il più antico e famoso è il modello preda-predatore di Lotka - Volterra. Supponiamo che nel generico istante $t \geq 0$ il numero di individui di una popolazione, omogenea ed isolata, sia pari a $x(t)$. Vogliamo determinare come varia nel tempo tale funzione nelle seguenti ipotesi: 1) la crescita della popolazione di individui è indipendente dalla numerosità della popolazione stessa al tempo t . 2) la condizioni di crescita non dipendono dal tempo (ad esempio per il mutare delle condizioni ambientali), il che vuol dire che la popolazione cresce in modo autonomo.

Dalle ipotesi di omogeneità risulta che, in prima approssimazione, il numero $N(x, t, \Delta t)$ degli individui nati durante l'intervallo di tempo Δt è pari a:

$$N(x, t, \Delta t) = n(x, t) * x(t) * \Delta t + o(\Delta t)$$

e il numero di individui morti durante lo stesso intervallo di tempo è pari a:

$$M(x, t, \Delta t) = m(x, t) * x(t) * \Delta t + o(\Delta t)$$

dove $o(\Delta t)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δt . Pertanto, trascurando termini di ordine superiore a Δt , possiamo dire che il numero di individui nati durante questo intervallo di tempo risulta proporzionale a Δt . Poiché non vi sono fenomeni migratori in quanto la popolazione è isolata:

$$\Delta x = N(x, t, \Delta t) - M(x, t, \Delta t)$$

Quindi, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, avremo:

$$\Delta x = n(x, t) * x(t) * \Delta t - m(x, t) * x(t) * \Delta t$$

$$\Delta x = [n(x, t) - m(x, t)] * x(t) * \Delta t$$

Ponendo:

$$\gamma(x, t) = [n(x, t) - m(x, t)]$$

dove $n(x, t)$ rappresenta il tasso istantaneo di natalità, $m(x, t)$ il tasso istantaneo di mortalità e $r(x, t)$ il tasso istantaneo di crescita della popolazione, si ha:

$$\Delta x = \gamma(x, t) * x(t) * \Delta t$$

Dividendo ambo i membri per Δt e passando al limite per $\Delta t \rightarrow 0$, si ottiene:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \gamma(x, t) * x(t)$$

Se questo limite esiste ed è finito, per definizione non è altro che la derivata prima della funzione $x = x(t)$ rispetto al tempo. Quindi, assumendo la differenziabilità della funzione $x = x(t)$, avremo:

$$x'(t) = \gamma(x, t) * x(t)$$

Pertanto, la curva di crescita della popolazione è una soluzione della precedente equazione differenziale a cui va associata la condizione iniziale: $x(0) = x_0$ dove x_0 è la popolazione originaria, cioè quella presente all'istante $t = 0$.

3. Il modello malthusiano per popolazioni isolate ed omogenee

Passiamo ora al modello di crescita, stabilito da Malthus, relativo all'evoluzione di una popolazione isolata ed omogenea, in presenza di risorse limitate ed in assenza di

predatori o antagonisti all'utilizzo delle risorse. Supponiamo che i tassi istantanei (di natalità e di mortalità) siano costanti, ovvero: $n(x, t) \geq 0$ (*costante*); $m(x, t) \geq 0$ (*costante*). Ciò equivale a dire che accettiamo l'ipotesi di indipendenza dei tassi sia dalla grandezza attuale della popolazione x , sia dal tempo t . In termini biologici detta ipotesi significa che l'ambiente e gli individui non cambiano col tempo. Questo modello fu proposto da Malthus nel 1798 in un famoso trattato socio-economico. Malthus (1766-1834) fu professore di Economia Politica presso l'Halleybury College e, nel 1798, pubblicò il famoso "Trattato sui principi della popolazione" sulla cui teoria si basa il modello malthusiano o esponenziale. Le ipotesi del modello sono: a) La popolazione è omogenea, cioè è tale che tutti i suoi individui si possano ritenere identici nel comportamento e che per essi siano trascurabili fattori come l'età, il sesso, il ceto sociale, etc.; b) la popolazione possa ritenersi isolata in un habitat invariante, cioè che essa non sia soggetta a fenomeni di immigrazione ed emigrazione e che le condizioni di vita cui è sottoposta non siano influenzate da fattori esterni né dalla propria stessa presenza. Nelle condizioni descritte, la variazione nel tempo del numero di individui della popolazione è legata solo al numero di nascite e morti e l'evoluzione nel tempo di una tale popolazione può essere descritta da una funzione $N = N(t)$ che ne rappresenta il numero di individui presenti al tempo t . Poiché il tasso di crescita (o velocità di crescita) di una popolazione è rappresentato matematicamente dalla derivata della funzione $N = N(t)$, il modello di Malthus si traduce nella seguente equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = \alpha N(t) - \beta N(t) = (\alpha - \beta) * x(t)$$

dove i parametri α e β sono non negativi e rappresentano, rispettivamente, il numero di nuovi nati per individuo e la frazione di individui che muore nell'unità di tempo. Posto $\gamma = \alpha - \beta$ l'equazione precedente si scrive:

$$\frac{dx}{dt} = \gamma * x(t)$$

Il coefficiente γ è detto "potenziale biologico della popolazione". Se nell'istante iniziale $t = t_0$ sono presenti x_0 individui, il modello proposto è regolato dal seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \gamma * x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

L'equazione differenziale così ottenuta può essere integrata per separazione di variabili, ottenendo

$$x(t) = x_0 * e^{\gamma t}$$

Si può, pertanto, affermare che la popolazione segue una legge di crescita esponenziale. Avremo i seguenti casi: 1) Se $\gamma > 0$ (ovvero se le nascite superano le morti) la funzione $x(t) = x_0 * e^{\gamma t}$ è strettamente crescente; 2) Se $\gamma < 0$ (ovvero se le morti superano le nascite) la funzione $x(t) = x_0 * e^{\gamma t}$ è strettamente decrescente; 3) Se $\gamma = 0$ c'è completo equilibrio tra le nascite e le morti e quindi tale funzione è costante. Tale caso corrisponde alla crescita zero. I tre casi esaminati sono rappresentati nei seguenti grafici:

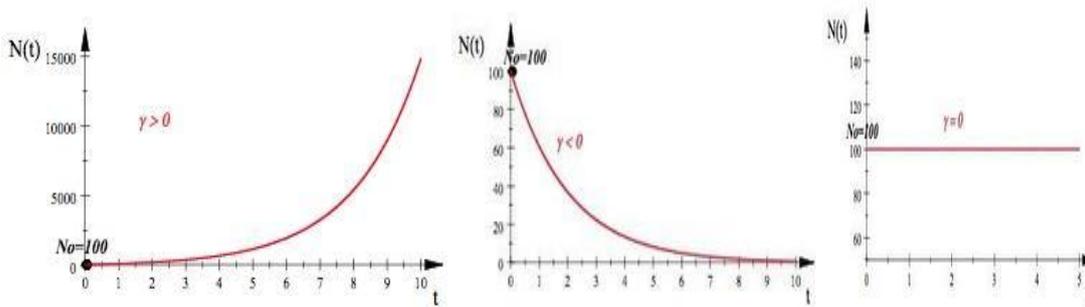


Grafico di N(t) per $\gamma > 0$

Grafico di N(t) per $\gamma = 0$

Grafico di N(t) per $\gamma < 0$

Nel caso di crescita esponenziale (cioè $\gamma > 0$), possiamo calcolare il tempo necessario affinché una data popolazione di individui raddoppi. Indicando con t_2 il tempo del raddoppio, si avrà:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 * e^{\gamma t} \\ x(t_2) = 2x_0 \end{cases} \quad x(t_2) = x_0 * e^{\gamma t_2} = 2x_0 \quad e^{\gamma t_2} = 2 \quad \ln(e^{\gamma t_2}) = \ln 2$$

$$\gamma * t_2 = \ln 2 \quad t_2 = \frac{\ln 2}{\gamma} \cong \frac{0,693}{\gamma}$$

Allo stesso modo, nel caso $\gamma < 0$, ovvero nel caso di decrescita esponenziale, possiamo calcolare il tempo di dimezzamento, ovvero in quanto tempo una data popolazione di individui dimezzi la sua consistenza. Indicando con $t_{1/2}$ questo tempo, detto “emivita”, si avrà:

$$\begin{cases} x(t_{1/2}) = x_0 * e^{\gamma t_{1/2}} \\ x(t_{1/2}) = \frac{x_0}{2} \end{cases} \quad x_0 * e^{\gamma t_{1/2}} = \frac{x_0}{2} \quad e^{\gamma t_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \ln(e^{\gamma t_{1/2}}) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\gamma t_{1/2} = -\ln 2$$

Pertanto, il tempo di dimezzamento o emivita è dato da:

$$t_{1/2} = \frac{-\ln 2}{\gamma} = -\frac{0,693}{\gamma}$$

Da notare che tutte le conseguenze dedotte dal modello in esame sono state ottenute tenendo conto dell'ipotesi di omogeneità; il che vuol dire che non si è tenuto conto della struttura di età della popolazione. In particolare, i coefficienti di natalità e di mortalità n e m non dipendono dall'età degli individui. Si dice, perciò, che in questo caso abbiamo

costruito un modello a “parametri concentrati” per quanto riguarda l’età. In generale possiamo supporre che n e m dipendano dall’età cronologica e costruire un modello a “parametri distribuiti” per l’età. Dal punto di vista matematico l’equazione che governa l’evoluzione della popolazione, in questo secondo caso ovvero nel caso di “parametri distribuiti, non è più un’equazione differenziale ordinaria bensì un’equazione alle derivate parziali non altrettanto semplice da risolvere come nel caso appena esaminato.

4. La crescita logistica: Modello a crescita limitata o Modello logistico di Verhulst

Nei modelli che abbiamo descritto la popolazione cresce o decresce con il tempo in modo esponenziale. Tuttavia nessun organismo e nessuna popolazione cresce indefinitamente. Infatti ci sono dei limiti ovvi posti dalla scarsità di cibo o di alloggio o da cause fisiche e oggettive. Pertanto, non è ragionevole supporre, in generale, un accrescimento illimitato della popolazione come descritto dal modello di Malthus. È più realista introdurre qualche fattore esterno che limiti tale accrescimento; per esempio, l’esistenza di predatori che riducono il numero di individui di una popolazione, la limitazione di risorse alimentari, il confinamento spaziale della popolazione, o altro. Supponiamo, quindi, che l’accrescimento di una popolazione abbia un limite superiore e, quindi, il numero degli individui $N(t)$ tenda asintoticamente ad un valore costante. Tenendo conto di queste limitazioni descriviamo ora una serie di modelli che prevedono un accrescimento limitato da fattori esterni e che furono proposti da diversi autori per descrivere sistemi più realistici di quelli descritti dal modello di Malthus. Il modello logistico fu proposto da Pierre Francois Verhulst nel 1838 per descrivere l’evoluzione di una popolazione il cui accrescimento risulta inizialmente di tipo esponenziale (come nel modello di Malthus), ma, dopo un tempo t , la comparsa di determinate condizioni (ad esempio la competizione tra i membri della stessa popolazione, o il confinamento spaziale della popolazione di individui o, ancora, la limitazione delle risorse disponibili) ne frenano l’accrescimento. Tale modello descrive bene l’evoluzione temporale di popolazioni confinate in un ambiente in cui la disponibilità di risorse è limitato. Allo stesso modo serve per descrivere l’accrescimento del numero di cellule di un embrione che inizialmente è esponenziale ma che poi rallenta fino a raggiungere un valore massimo per il fatto stesso che il feto è confinato in uno spazio fisico limitato. Consideriamo, pertanto, una popolazione isolata ed omogenea. In questo caso, secondo quanto visto precedentemente possiamo scrivere:

$$x'(t) = \gamma(x, t) * x(t)$$

dove:

$$\gamma(x, t) = n(x, t) - m(x, t)$$

rappresenta il tasso istantaneo di crescita della popolazione. La bontà del modello poggia sulle seguenti ipotesi:

1. la popolazione cresce in modo autonomo (cioè che le condizioni di crescita non dipendano dal tempo, ad esempio per il mutare delle condizioni ambientali),
2. il tasso di crescita è indipendente dal tempo e dipende solo dalla dimensione attuale della popolazione.

L'equazione che descrive il modello matematico ipotizzato è pertanto:

$$x'(t) = \gamma(x) * x(t)$$

Dal punto di vista modellistico il prossimo passo è quello di scrivere esplicitamente l'espressione per $\gamma(x)$ che più si adatta alle particolari condizioni di crescita di una determinata popolazione. Un altro punto di vista consiste nello scegliere a priori una classe di funzioni $\gamma(x)$ e studiare le corrispondenti curve di crescita, soluzioni dell'equazione: $x'(t) = \gamma(x) * x(t)$. In quel che segue noi adotteremo questo secondo punto di vista allo scopo di introdurre una funzione molto importante nella teoria delle popolazioni: la curva logistica. Infatti prendiamo come $\gamma(x)$ la generica funzione lineare:

$$\gamma(x) = a + bx$$

con a e b costanti. L'equazione differenziale che governa la crescita di un'ipotetica popolazione è pertanto:

$$x'(t) = \gamma(x) * x(t)$$

$$x'(t) = (a + bx) * x(t)$$

a cui associamo la condizione iniziale

$$x(0) = x_0 > 0$$

Si ottiene, quindi, il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = (a + bx) * x(t) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

Se $b = 0$, si ha:

$$\begin{cases} x'(t) = a * x(t) \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

che non è altro che un'equazione differenziale a variabili separabili il cui integrale generale è:

$$x(t) = x_0 * e^{at}$$

che rappresenta la legge di crescita esponenziale precedentemente esaminata. Supponiamo, quindi, che sia $a = 0$ e $b \neq 0$. Si ottiene l'equazione differenziale a variabili separabili:

$$x'(t) = b * x^2(t)$$

la cui soluzione è:

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - bx_0 t}$$

ovvero una legge di crescita iperbolica. Supponiamo, ora, che sia $a \neq 0$ e $b \neq 0$. In questo caso, l'equazione differenziale completa, si presenta nella forma:

$$x'(t) = a x(t) + b x^2(t)$$

Si tratta di un'equazione differenziale non lineare di Bernoulli del tipo:

$$x'(t) = a(t) * x(t) + b(t) * [x(t)^\alpha]$$

dove $a(t)$ e $b(t)$ sono funzioni continue e l'esponente α è un numero reale diverso da zero e da uno. Nel caso in esame, poiché $\alpha = 2$; $a(t) = a$; $b(t) = b$, si ottiene:

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = a x(t) + b x^2(t)$$

Dividendo per $x^2(t)$ e supponendo di considerare soluzioni non nulle, si ottiene:

$$\frac{x'}{x^2} = a * x^{-1} + b$$

Effettuando la sostituzione: $z = x^{-1}$ e derivando membro a membro applicando la regola di derivazione delle funzioni composte, si ottiene:

$$z' = -x^{-2} * x' = -\frac{x'}{x^2}$$

Sostituendo in:

$$\frac{x'}{x^2} = a * x^{-1} + b$$

si ottiene la seguente equazione lineare:

$$z'(t) = -a z(t) - b$$

il cui integrale generale è dato da:

$$z(t) = e^{-at} * \left(\int b * e^{at} dt + C \right) = e^{-at} * \left(\frac{b}{a} * e^{at} + C \right) = \frac{b}{a} + c * e^{-at}$$

Poiché $z(t) = x^{-1}(t)$, l'integrale generale dell'equazione differenziale risulta:

$$x(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{1}{\left(\frac{b}{a} + c * e^{-at} \right)}$$

Tenendo conto della condizione iniziale $x(0) = x_0$, è possibile calcolare la costante di integrazione c , ottenendo :

$$x(t) = \frac{a}{\left(\frac{a}{x_0} + b\right) * e^{-at} - b}$$

Tale funzione definisce una logistica crescente se $a > 0, b < 0$ ed $0 < x_0 < -a/b$ ed una logistica decrescente se $a < 0, b > 0$ ed $0 < x_0 < -a/b$. Qualora una popolazione cresca in accordo con tale funzione, si dice che essa segue una legge di crescita logistica. Se a e b hanno segni diversi la soluzione così determinata presenta un asintoto orizzontale di equazione:

$$x = -\frac{a}{b}$$

Difatti, calcolando il limite per $t \rightarrow +\infty$, si ottiene:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{\left(\frac{a}{x_0} + b\right) * e^{-at} - b} \right) = -\frac{a}{b}$$

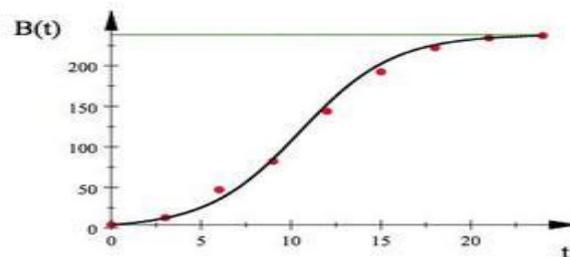
Inoltre essa risulta strettamente decrescente se $a < 0$ e $b > 0$, strettamente crescente se $a > 0$ e $b < 0$ e presenta inoltre un punto di flesso per

$$t = t_F = \frac{1}{a} * \log \left(-1 - \frac{a}{x_0 b} \right)$$

che si ottiene imponendo la condizione $f''(t) > 0$. L'ordinata del punto di flesso per $x = x(t_F)$. Avremo, pertanto: $x(t_F) = -\frac{a}{2b}$ Le coordinate del punto di flesso sono, pertanto:

$$F \equiv \left[\frac{1}{a} * \ln \left(-1 - \frac{a}{x_0 b} \right); -\frac{a}{2b} \right]$$

Il grafico della curva, nel caso $a > 0, b < 0$, detto "curva logistica", è rappresentato in figura:



In genere prende il nome di "curva logistica" una funzione $l = l(t)$ aventel'espressione:

$$l(t) = \frac{a}{b * e^{-ct} + 1}$$

con $a > 0, b > 0$ e $c \neq 0$. E' evidente che se $c > 0$ la funzione in esame risulta strettamente crescente, se $c < 0$, risulta strettamente decrescente. In entrambi i casi detta funzione ammette come asintoto le rette di equazione:

$$l = 0 \text{ e } l = a$$

e presenta un flesso per:

$$t = t_F = \frac{1}{c} * \ln b$$

rispetto al quale il grafico della funzione è simmetrico. Osserviamo che $l = l(t)$ è soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} l'(t) = c * l(t) - \frac{c}{a} l^2(t) \\ l(0) = \frac{a}{b+1} \text{ oppure } l(t_F) = \frac{a}{2} \end{cases}$$

L'equazione:

$$x'(t) = a x(t) + b x^2(t)$$

che governa la crescita di una ipotetica popolazione, fu considerata per la prima volta da Verhulst in una sua memoria del 1838 e, successivamente, riconsiderata in altre due successive memorie, rispettivamente del 1845 e del 1847. La funzione logistica da alcuni autori viene anche denominata "sigmoide", sebbene tale termine indichi, in genere, una qualsiasi funzione il cui grafico assume la forma di una S allungata. Non è chiara la ragione della scelta del termine "logistica" data a questa curva.

5. Applicazioni del modello logistico

In precedenza si è osservato che le ipotesi fenomenologiche poste a base del modello di Malthus sono spesso non realistiche per una popolazione biologica. Infatti, l'ipotesi di un habitat invariante poco si accorda, per esempio, con la limitatezza delle risorse, con l'inquinamento che una popolazione produce e soprattutto con la complessa fenomenologia che va sotto il nome di effetto logistico: "ad alte densità, un aumento della popolazione produce un incremento della mortalità e una diminuzione della fertilità". In questi casi, ovviamente, il potenziale biologico non può ritenersi costante. Supponiamo, pertanto, che tale parametro risulti funzione del numero di individui secondo la relazione:

$$\gamma^*(t) = \gamma * \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

La costante K rappresenta la cosiddetta "capacità portante dell'ambiente", definita da:

$$K = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)$$

dove α e β sono, rispettivamente, il tasso di natalità e quello di mortalità della popolazione. Il parametro γ , detto “potenziale biologico intrinseco” è definito da:

$$\gamma = (\alpha - \beta)$$

Il modello è quindi descritto dal seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = \gamma^*(t) * N(t) = \gamma * \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) * N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

che, come precedentemente detto, ammette per soluzione la funzione:

$$N(t) = \frac{K N_0}{N_0 + (K - N_0) * e^{-\gamma t}}$$

Nell'ipotesi in cui $\gamma \geq 0$, si ha che:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{K N_0}{N_0 + (K - N_0) * e^{-\gamma t}} = \frac{K N_0}{N_0} = K$$

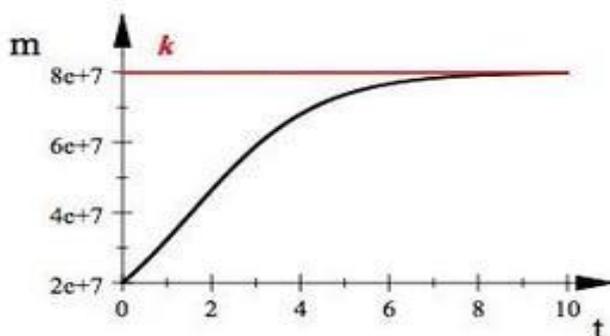
cioè l'evoluzione del sistema descritto dalla funzione $N = N(t)$ tende asintoticamente alla capacità portante dell'ambiente K qualunque sia il suo stato iniziale N_0 . Misure sperimentali condotte dal microbiologo Gause su alcune specie di protozoi, ad esempio il *Paramecium caudatum* e il *Glaucoma Scintillans*, confermano la validità del modello logistico. Esistono, però, casi in cui il modello di Verhulst non può ritenersi soddisfacente. Lo stesso Gause provò che i dati sperimentali raccolti nel caso della “*Drosophila Melanogaster*” (moscerino della frutta) si accordano con il modello logistico solo nei primi giorni di osservazioni. Infatti, le mutazioni genetiche che si verificano durante la crescita non rientrano nelle ipotesi fenomenologiche poste a base del modello di Verhulst. Come esempio, applichiamo il modello logistico alla crescita di una popolazione animale. Ci riferiamo, in questo caso, ad una popolazione di ippoglossi del Pacifico. La biomassa di tale popolazione può modellarsi utilizzando l'equazione logistica:

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = \gamma^*(t) * m(t) = \gamma * \left(1 - \frac{m(t)}{K} \right) * m(t) \\ m(0) = m_0 \end{cases}$$

dove $m(t)$ rappresenta la biomassa, cioè la massa totale di individui della popolazione (in Kg) al tempo t (in anni). Supposto che la capacità portante dell'ambiente sia $K = 8 * 10^7$ Kg, che il potenziale biologico intrinseco della popolazione sia $\gamma = 0,71$ per anno e che la biomassa iniziale sia $m_0 = 2 * 10^7$ Kg, la funzione biomassa per questa popolazione di ippoglossi si scrive:

$$\begin{aligned}
 m(t) &= \frac{K m_0}{m_0 + (K - m_0) * e^{-\gamma t}} = \frac{(8 * 10^7 \text{ Kg} * 2 * 10^7 \text{ Kg})}{2 * 10^7 \text{ Kg} + (8 * 10^7 \text{ Kg} - 2 * 10^7 \text{ Kg}) * e^{-0,71 t}} \\
 &= \frac{(16 * 10^{14} \text{ Kg}^2)}{2 * 10^7 \text{ Kg} + (6 * 10^7 \text{ Kg}) * e^{-0,71 t}} = \frac{2 * (8 * 10^{14} \text{ Kg}^2)}{2 * (1 + 3 * e^{-0,71 t}) * 10^7 \text{ Kg}} = \\
 &= \frac{(8 * 10^{14} \text{ Kg}^2)}{(1 + 3 * e^{-0,71 t}) * 10^7 \text{ Kg}} = \frac{(8 * 10^7)}{(1 + 3 * e^{-0,71 t})} \text{ Kg}
 \end{aligned}$$

e ammette il grafico riportato in figura:



6. Curve di logistica generalizzata: Modello di Gompertz per le masse tumorali

Oltre alla crescita esponenziale ed alla crescita logistica, esistono molte altre curve di crescita, chiamate “curve di logistica generalizzata”. Noi qui ci limitiamo a considerare la cosiddetta curva di Gompertz poiché è la più citata in letteratura. La curva di Gompertz è la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = a x(t) - b x(t) \ln x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

dove a e b sono costanti non nulle dello stesso segno e $0 < x_0 < e^{a/b}$. Al fine di risolvere tale equazione differenziale poniamo $y = \ln x$. La derivata prima di questa funzione è:

$$y' = \frac{x'}{x}$$

Dividendo per $x \neq 0$, l'equazione differenziale in esame può essere riscritta, nel seguente modo:

$$\frac{x'}{x} = a - b \ln x$$

Poiché $y = \ln x$ e $y' = x'/x$, sostituendo, si ha:

$$y' = a - b y$$

con la condizione iniziale: $y(0) = \ln x_0$

La soluzione di tale equazione differenziale è data da:

$$y(t) = \frac{a}{b} + \left(\ln x_0 - \frac{a}{b} \right) * e^{-bt}$$

Poiché $y(t) = \ln x(t)$, si ha:

$$x(t) = e^{y(t)}$$

Pertanto la soluzione del problema è data da:

$$x(t) = e^{\left[\frac{a}{b} + \left(\ln x_0 - \frac{a}{b} \right) * e^{-bt} \right]}$$

Questa funzione fu introdotta da Benjamin Gompertz (1779-1865) in una sua memoria dal titolo: “ On the nature of the function expressive of the law of human mortality and a new mode of determining the value of life contingencies”, inviata nel 1825 a Francis Bayly.

Il modello di Gompertz è un modello fenomenologico applicato alla crescita di masse tumorali solide. In un tumore solido le cellule sono attaccate le une alle altre e formano una struttura tridimensionale, Le cellule che proliferano attivamente si trovano nel bordo della massa, ovvero nella zona più ricca di nutrienti ed ossigeno. Ciò che a noi interessa, ora, è che gli sferoidi crescono aumentando il loro volume in funzione della proliferazione cellulare e che è possibile, in laboratorio, misurare effettivamente questo volume con una certa precisione mediante TAC. Sulla base di questi dati sappiamo che gli sferoidi seguono cinetiche descritte dal modello fenomenologico di Gompertz. Tenendo presente quanto detto, possiamo formulare le ipotesi del nostro modello come segue:

- La dimensione del tumore cresce nel tempo con una cinetica esponenziale caratterizzata da una velocità $\chi(t)$ che decresce esponenzialmente nel tempo con costante β ;
- La crescita delle dimensioni tumorali è limitata superiormente da una dimensione massima y_m .

Ora, se indichiamo con $y(t)$ la dimensione del tumore al tempo t (volume, numero di cellule, etc.), stante le ipotesi formulate, il modello di Gompertz può essere descritto dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \chi(t) * y(t) \\ \frac{d\chi}{dt} = -\beta * \chi(t) \end{cases}$$

Da cui:

$$\frac{dy}{dt} = \beta * y(t) * \ln \left[\frac{y_m}{y(t)} \right]$$

Risolvendo tale equazione differenziale, si ottiene $y(t)$, ovvero la dimensione della massa tumorale al tempo t :

$$y(t) = y(0) * e^{\frac{\alpha_0}{\beta}(1-e^{-\beta t})}$$

dove α_0 e β sono due parametri. In particolare il parametro α_0 assume il significato di tasso istantaneo di crescita del tumore al tempo $t = 0$. La dimensione massima della massa tumorale può essere facilmente calcolata utilizzando l'espressione analitica del modello, ovvero da:

$$y(t) = y(0) * e^{\frac{\alpha_0}{\beta}(1-e^{-\beta t})}$$

calcolando il limite per $t \rightarrow +\infty$. Si ha, difatti:

$$y_m = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(0) * e^{\frac{\alpha_0}{\beta}(1-e^{-\beta t})} = y(0) * e^{\frac{\alpha_0}{\beta}}$$

Tale equazione pone un vincolo alla scelta dei parametri α_0 e β per la simulazione della crescita delle masse tumorali.

7. La competizione preda-predatore

Una situazione reale complessa, che spesso necessita di un modello di rappresentazione per essere analizzata, è quella relativa alle comunità biologiche. Un interessante modello differenziale di comunità biologica è quello relativo alla cosiddetta "competizione preda-predatore. Tale modello, formulato negli anni venti del secolo scorso da Alfred J. Lotka e Vito Volterra e, successivamente, perfezionato dal solo Volterra, permette di modellizzare l'andamento in funzione del tempo del numero di esemplari di due specie biologiche in competizione tra loro (per esempio due popolazioni che vivono della stessa risorsa, e quindi se la contendono oppure quella che si genera tra una popolazione di leoni che si nutre di gazzelle e la popolazione di gazzelle, da cui il nome del modello: (sistema preda-predatore). Proviamo ad analizzare un modello semplificato di sistema preda-predatore formulando le seguenti ipotesi: a) La velocità di accrescimento di una popolazione è indipendente dall'entità della popolazione stessa; b) La rapidità con cui aumenta il numero di leoni è direttamente proporzionale al numero di gazzelle; c) La rapidità con cui la popolazione di gazzelle decresce è proporzionale al numero di leoni. Indichiamo con $x(t)$ il numero dei componenti di un branco di gazzelle in funzione del tempo e $y(t)$ il numero dei componenti di un branco di leoni che si nutre di queste gazzelle. L'ipotesi b) del modello permette di scrivere la seguente equazione differenziale:

$$y'(t) = a * x(t), a > 0$$

in quanto la rapidità con cui aumenta il numero di leoni è data dalla derivata prima della funzione $y = y(t)$, che rappresenta il numero di leoni presenti al tempo t .

L'ipotesi c), invece, fornisce:

$$x'(t) = -b * y(t), \quad b > 0$$

in quanto $x'(t)$, cambiata di segno, rappresenta la rapidità con cui la popolazione di gazzelle decresce e tale rapidità è proporzionale, per l'ipotesi fatta, al numero di leoni presenti al tempo t . Il modello di Lotka - Volterra conduce dunque alle seguenti equazioni differenziali:

$$\begin{cases} y'(t) = a * x(t) \\ x'(t) = -b * y(t) \end{cases}$$

Risolvendo queste equazioni, quindi, saremo in grado di predire come varia nel tempo sia il numero di leoni che quello delle gazzelle. A tale scopo, calcoliamo la derivata prima dell'equazione: $y'(t) = a * x(t)$, ottenendo:

$$y''(t) = a * x'(t) = -ab * y(t)$$

Essendo a e b costanti positive, possiamo porre: $K^2 = ab$. L'equazione differenziale da risolvere, pertanto, è:

$$y''(t) = -K^2 y(t)$$

$$y''(t) + K^2 y(t) = 0$$

che rappresenta un'equazione differenziale del secondo ordine lineare, omogenea a coefficienti costanti, il cui polinomio caratteristico è dato da:

$$\lambda^2 + K^2 = 0$$

Le radici, che risultano complesse coniugate, sono:

$$\lambda_1 = -Ki \quad \lambda_2 = Ki$$

Essendo il wronskiano diverso da zero ($W(x) \neq 0$), un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione differenziale è costituito da: $(e^{(\alpha+i\beta)t}, e^{(\alpha-i\beta)t})$. L'integrale generale, quindi, è dato da una combinazione lineare di tali integrali particolari, ovvero:

$$y(x) = A e^{(\alpha+i\beta)t} + B e^{(\alpha-i\beta)t}$$

Avremo, pertanto: $y(x) = A e^{\alpha t} \cos \beta t + B e^{\alpha t} \sin \beta t$

Poiché, in questo caso, $\alpha = 0$ e $\beta = K$,

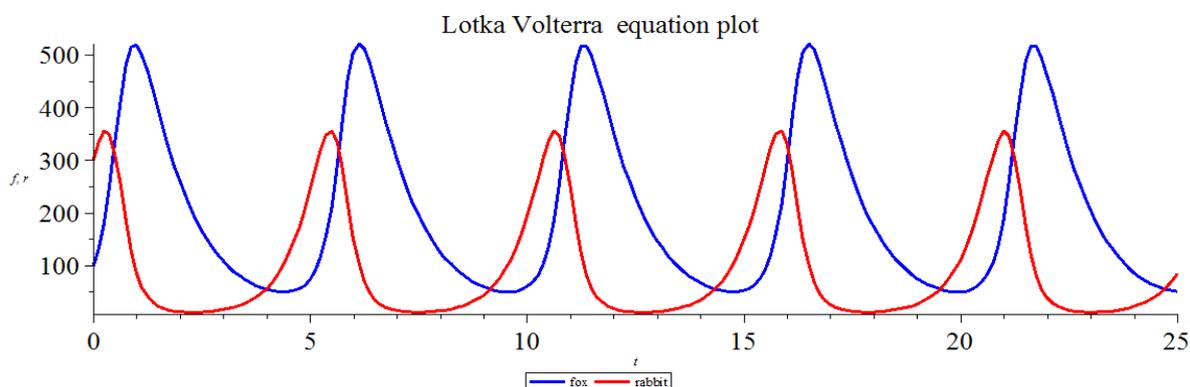
l'integrale generale è: $y(t) = A \sin Kt + B \cos Kt$

Analogamente, per la funzione $x(t)$ si ottiene:

$$x(t) = C \sin Kt + D \cos Kt$$

Le quantità A, B, C e D sono costanti e solo due di esse sono indipendenti. Esse vengono fissate mediante i valori all'istante iniziale ($t=0$) delle funzioni $x(t)$ e $y(t)$: le costanti dipendono cioè dalla consistenza iniziale delle due popolazioni, ovvero dalle cosiddette condizioni iniziali. Le funzioni $x(t)$ e $y(t)$ sono entrambe sinusoidali di periodo $T = \frac{2\pi}{K}$.

Quindi, poiché entrambe le funzioni hanno zeri, questo modello predice che una delle due popolazioni è destinata all'estinzione. Quale delle due si estingua, dipende dalle condizioni iniziali.



Andamento in funzione del tempo di due popolazioni in competizione, gazzelle e leoni. Dopo un certo tempo le gazzelle si estinguono.

Il modello usato finora è molto elementare, ma didatticamente efficace. Il modello di Volterra completo, infatti, usa un sistema di equazioni differenziali non lineari che risultano più difficili da trattare e quindi non proponibile nelle classi terminali di un istituto di istruzione secondaria di secondo grado. Ma, dal punto di vista applicativo, questa opzione è comunque del tutto soddisfacente. Il modello più raffinato, ovviamente, raggiunge conclusioni più realistiche.

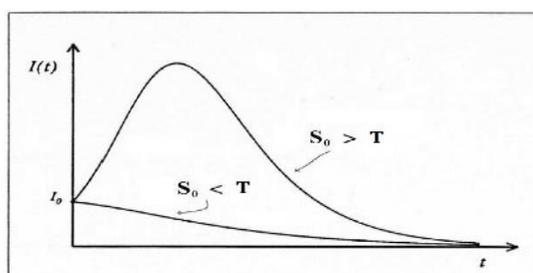
8. La dinamica delle epidemie

Modelli simili a quello di Volterra vengono utilizzati per studiare la dinamica delle epidemie. Questa applicazione della modellistica matematica è molto utile perché, poter fare delle previsioni sullo sviluppo di un contagio, permette, in molti casi, di approntare tempestivamente cure e profilassi adeguate e, quindi, consente di salvare vite umane. Il modello risulta un po' più complicato del modello di Volterra in quanto, anche nella sua versione più semplice - il cosiddetto modello di Kermack - McKendich - prevede l'esistenza di tre popolazioni: 1) gli infettivi I, ovvero coloro che già hanno contratto la malattia e sono contagiosi; 2) la popolazione suscettibile S, ovvero coloro che non hanno contratto la malattia, ma possono essere contagiati; 3) i guariti G, ovvero coloro che, avendo già avuto la malattia, ne sono immuni. Le ipotesi del modello sono: a) Il

ritmo relativo $S'(t)/S(t)$ con cui la popolazione suscettibile decresce, a causa del fatto che si ammala, è proporzionale al numero degli infettivi $I(t)$; b) il ritmo relativo $I'(t)/I(t)$ con cui la popolazione degli infettivi varia nel tempo dipende da due contributi: uno proporzionale al numero di persone contagiabili e l'altro proporzionale al numero degli infettivi $I(t)$. c) la velocità con cui la popolazione dei guariti $G = G(t)$ aumenta è proporzionale al numero degli infettivi $I(t)$. Il modello consiste, quindi, di tre equazioni differenziali nelle funzioni $S = S(t)$, $I = I(t)$, $G = G(t)$. Tali equazioni contengono, inoltre, due parametri: il tasso di contagio "c" e il tasso di guarigione "β". Il modello SIG (S=suscettibili; I= infettivi; G= guariti) è descritto dal seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -c I(t) * S(t) \\ \frac{dI}{dt} = c S(t) * I(t) - \beta * I(t) \\ \frac{dG}{dt} = \beta I(t) \end{cases}$$

Si tratta di un complesso sistema di equazioni differenziali ordinarie la cui soluzione può essere affidata a un adeguato software. Non ci occupiamo, pertanto, del suo studio analitico ma riportiamo solo l'andamento grafico qualitativo delle soluzioni nel diagramma sottostante:



Dall'andamento grafico è facile evincere che ci sono due possibili scenari:1) se il numero iniziale di suscettibili è inferiore ad un certo valore di soglia T, allora l'epidemia non si innesca e il numero di infetti decresce fino ad annullarsi; 2) nell'altro caso, invece, ovvero se il numero iniziale di suscettibili è superiore al valore di soglia T, il numero di individui infettivi inizialmente cresce (si innesca cioè una epidemia), raggiunge un massimo e poi, quando la popolazione suscettibile è stata sufficientemente ridimensionata, l'epidemia si attenua fino all'estinzione della malattia. Alla base dell'elaborazione di tali modelli c'è sicuramente l'analisi statistica: la raccolta dei dati su larga scala e la loro elaborazione ha infatti permesso di sviluppare ipotesi sulla diffusione e sull'evoluzione delle varie malattie, che sono caratterizzate da una

particolare periodicità. Uno dei primi scienziati ad occuparsi del problema del controllo e della diffusione delle epidemie fu Daniel Bernoulli (1700-1782). Il matematico-fisico francese, servendosi di un'argomentazione teorica ispirata al modello di crescita esponenziale, mostrò i vantaggi possibili conseguenti da una vaccinazione preventiva che fino ad allora era stata considerata pericolosa per la salute. Il prototipo da cui è seguito ogni altro modello matematico di evoluzione epidemica risale ai primi del Novecento, ed è dovuto a Kermack e McKendrick, contemporaneo dei modelli di popolazione di Lotka e Volterra. Successivamente questi modelli vengono ripresi e sviluppati a partire dagli anni '70, nel corso della ripresa generale di interesse per i problemi di dinamica delle popolazioni.

9. Modelli matematici applicati allo studio di fenomeni fisici: determinare il numero di fulmini che mediamente cadono sulla Terra in un giorno

Nello studio dei condensatori con aria fra le armature si adotta il modello semplificato di considerare l'aria come un isolante perfetto. Sebbene questo sia un buon modello per le tipiche differenze di potenziale (d.d.p.) applicate ai condensatori, si sa che, in particolari condizioni, l'aria può diventare conduttrice e i fulmini sono un esempio di questa possibilità. In presenza di un forte campo elettrico la resistività dell'aria diventa molto bassa diventando, quindi, conduttrice. Pertanto, sulla superficie terrestre e nell'atmosfera, un certo numero di processi creano distribuzioni di cariche uguali ed opposte dando luogo, così, a un campo elettrico nell'atmosfera. Questi processi determinano una carica media negativa distribuita sulla superficie della Terra di circa $5 * 10^4 C$, che è una quantità di carica enorme. La terra, nel suo insieme è neutra e, quindi, la corrispondente carica positiva è distribuita nell'atmosfera. Considerando la Terra come un enorme conduttore sferico, la densità superficiale media di carica e l'intensità media del campo elettrico sulla superficie terrestre sono dati da:

$$\sigma_m = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{5 * 10^4 C}{4\pi * (6,37 * 10^6 m)^2} = \sim 10^{-9} \frac{C}{m^2}$$

$$E_m = \frac{\sigma_m}{\epsilon_0} = \frac{10^{-9} \frac{C}{m^2}}{8,85 * 10^{-12} \frac{C^2}{N * m^2}} = \sim 10^2 \frac{N}{C}$$

Questo è un tipico valore del campo elettrico in assenza di temporali. Durante un temporale, invece, il campo elettrico al di sotto delle nuvole è significativamente più intenso a causa della distribuzione di carica nelle nubi. Questa alta concentrazione di carica nelle nubi temporalesche è responsabile dei campi elettrici estremamente intensi che causano la scarica di fulmini fra le nubi e il suolo. Campi elettrici tipici durante un fenomeno temporalesco hanno intensità pari a circa $25.000 \frac{N}{C}$.

I processi citati che avvengono sulla superficie terrestre e nell'atmosfera danno luogo a distribuzioni di cariche negative sulla superficie terrestre e di cariche positive attraverso l'aria. Questa separazione di carica può essere assimilata a un condensatore le cui armature sono la superficie terrestre, carica negativamente, e l'atmosfera, carica positivamente, ad una altezza h dalla superficie della Terra. Tale altezza, secondo alcune modellizzazioni, risulta essere pari a circa 5 Km . Considerando che la distribuzione di carica sulla superficie terrestre presenta una simmetria sferica, la differenza di potenziale fra le armature del condensatore atmosferico è pari a:

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} * \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \right)$$

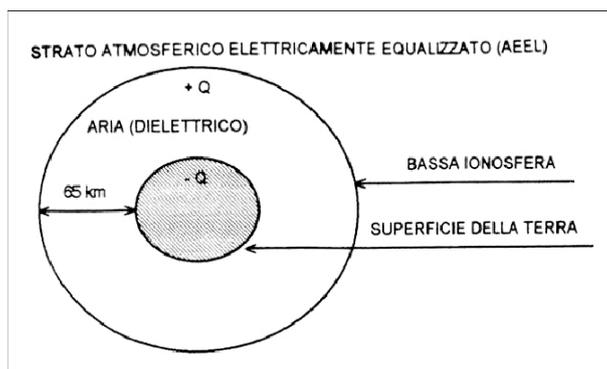
dove R_T è il raggio della Terra e $h = 5 \text{ Km}$. Pertanto, la capacità di tale condensatore è:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} * \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \right)} = \frac{4\pi\epsilon_0 * R_T * (R_T + h)}{h}$$

Sostituendo i valori numerici, otteniamo:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 * R_T * (R_T + h)}{h} = \frac{4\pi \left(8,85 * 10^{-12} \frac{C^2}{N * m^2} \right) * (6,4 * 10^3 \text{ Km}) (6,4 * 10^3 \text{ Km} + 5 \text{ Km})}{5 \text{ Km}} \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ Km}} \right) = 0,9 \text{ F}$$

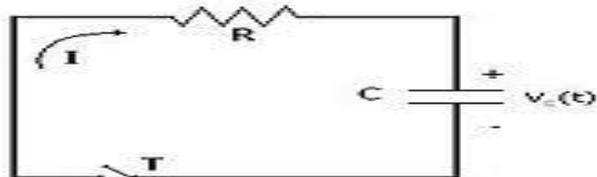
Questo valore è molto grande rispetto ai valori tipici dei condensatori utilizzati nei circuiti elettrici che sono dell'ordine di grandezza dei microfarad (10^{-6} F) o, addirittura dei nanofarad (10^{-9} F). In ciò che segue, useremo questo modello di condensatore per calcolare il numero di fulmini che colpiscono la Terra ogni giorno. Quando la ionosfera raggiunge una carica molto elevata, possiamo assimilare la ionosfera e la Terra a un condensatore in fase di carica. Il fulmine è la manifestazione della scarica di questo enorme condensatore naturale. Le armature del condensatore atmosferico sono separate da uno strato d'aria contenente un grande numero di ioni liberi che possono trasportare la corrente elettrica. L'aria, in condizioni normali, è un buon isolante, in quanto la sua resistività, è pari a circa $3 * 10^{13} \Omega * m$. In determinate condizioni, però, diventa conduttrice. Calcoliamo, pertanto, in queste condizioni, quanto vale la resistenza dell'aria fra le armature del condensatore. La forma del resistore è quella di un guscio sferico (vedi figura):



Poiché la distanza di 5 Km tra le due armature del condensatore è molto piccola rispetto al raggio medio della Terra, pari a circa 6400 Km , possiamo calcolare la resistenza elettrica di tale resistore utilizzando la seconda legge di Ohm:

$$R = \rho * \frac{l}{S} = (3 * 10^{13} \text{ } \Omega * m) * \left(\frac{5 * 10^3 m}{4\pi * (6,37 * 10^6 m)^2} \right) \approx 3 * 10^2 \text{ } \Omega$$

dove l è la lunghezza del resistore; in questo caso $l = 5\text{ Km}$ ed S è l'area della superficie della Terra data da $S = 4\pi R_T^2$, con $R_T = 6400\text{ Km}$, pari al raggio medio della Terra. Da quanto detto segue che un modello significativamente accettabile per descrivere il fenomeno in esame è quello di un circuito RC con i valori di R e C calcolati precedentemente. (vedi figura).



La costante di tempo di questo circuito è data da:

$$\tau = RC = (0,9\text{ F}) * (3 * 10^2 \text{ } \Omega) \cong 3 * 10^2\text{ s} = 5\text{ min.}$$

Quindi, dopo appena 5 minuti, la carica sul condensatore scende al valore $e^{-1} = 37\%$ rispetto al suo valore iniziale. Il condensatore si scarica quasi completamente attraverso l'aria in circa 30 minuti in quanto, dopo 30 minuti, la carica sulle armature risulta essere inferiore allo 0,3% della carica iniziale. Quindi che cosa mantiene carico il condensatore? La risposta è: i fulmini. Difatti, il processo che avviene nelle nubi che si caricano causa la caduta dei fulmini che forniscono cariche negative al suolo le quali sostituiscono quelle neutralizzate dal flusso di carica attraverso l'aria. Poiché la carica totale sulla superficie terrestre è di circa $5 * 10^5\text{ C}$, tale è la carica che si trova distribuita sulle armature del condensatore atmosferico. Una tipica caduta di un fulmine spedisce al suolo circa 25 C di carica negativa. Pertanto, dividendo la carica totale che si

trova sul condensatore per la carica dovuta alla caduta dei fulmini, si ottiene il numero di fulmini necessari per caricare il condensatore. Indicando con N il numero di fulmini caduti, Q_C la carica totale sulle armature del condensatore e con q_F la carica per ogni fulmine caduto, si avrà:

$$N = \frac{Q_C}{q_F} = \frac{5 * 10^5 C}{25 C} = 2 * 10^4$$

La costante di tempo τ del circuito RC che abbiamo assunto come modello del fenomeno che stiamo considerando risulta pari a:

$$\tau = RC = (0,9 F) * (3 * 10^2 \Omega) \cong 3 * 10^2 s = 5 \text{ min.}$$

Il condensatore atmosferico si scarica quasi completamente attraverso l'aria in circa 30 minuti. Quindi, ogni 30 minuti deve avvenire la caduta di $2 * 10^4$ fulmini, ossia $4 * 10^4 \text{ fulmini/h}$ per mantenere il processo di carica e scarica in equilibrio. Il numero

di fulmini caduti in un giorno sarà pertanto:

$$N_g = \left(4 * 10^4 \text{ fulmini/h} \right) * \left(24 \text{ h/1 d} \right) \cong 1 * 10^6 \text{ fulmini/giorno}$$

Nonostante le semplificazioni adottate nel modello proposto, questo numero è dell'ordine di grandezza del numero reale di fulmini che cadono mediamente sulla Terra in un giorno tipico: 1 milione!

10. La distribuzione maxwelliana delle velocità molecolari

Anche a distanza di molti anni dalla sua iniziale formulazione, la teoria cinetica dei gas rappresenta una delle teorie fisiche di maggior importanza e di maggior successo. I principali protagonisti che con le loro ricerche hanno ampliato l'orizzonte della meccanica newtoniana fino alle dimensioni atomiche sono stati Bernoulli, Brown, Joule, Einstein, Maxwell, Boltzmann, Gibbs, Perrin, Stern e molti altri. Dopo le prime stimolanti idee, la teoria cinetica molecolare entrò ufficialmente nella storia scientifica nella seconda metà dell'Ottocento per merito di Maxwell e Boltzmann. Mentre Maxwell risolse per primo il problema della distribuzione più probabile delle velocità molecolari nel caso di un gas costituito da un gran numero di particelle, Boltzmann pose le basi della termodinamica statistica, trasformando la teoria dei fenomeni termici dal primitivo contenuto puramente meccanicistico al più profondo e valido aspetto fondato sul moto incessante e disordinato delle invisibili molecole. Per poter procedere nello studio teorico dei gas introduciamo il cosiddetto modello cinetico dei gas, detto anche modello molecolare, caratterizzato da un certo numero di ipotesi giustificabili a posteriori dalla bontà dei risultati sperimentali. Le principali caratteristiche del modello cinetico del gas

perfetto sono: 1) Ogni massa gassosa è costituita da un numero enorme di particelle indistinguibili e, per una stessa specie chimica, identiche. 2) Le particelle sono immaginate come sferette rigide, indeformabili e di dimensioni così piccole da venire rappresentate come oggetti essenzialmente puntiformi il cui volume proprio è una frazione trascurabile del volume del recipiente che le contiene; 3) Le particelle si trovano in continuo e disordinato movimento (caos molecolare), sicché tutte le direzioni di moto sono ugualmente probabili (casualità del moto) 4) Nell'intervallo di temperatura e di pressione in cui è valido il modello, le forze di interazione fra le molecole si considerano praticamente nulle, sicché fra un urto e il successivo il moto è rettilineo uniforme; 5) Durante il loro moto, in uno spazio in larga parte vuoto, gli urti delle particelle fra loro e contro le pareti del recipiente che le contiene sono perfettamente elastici, per cui l'energia cinetica complessiva si conserva. E' evidente che nella realtà un gas non potrà rigorosamente rispettare tutte le condizioni elencate. Anche se il modello non è perfettamente aderente alla realtà, l'accordo con i fatti sperimentali è tanto più marcato quanto più il gas è rarefatto. Ci proponiamo, utilizzando il modello cinetico del gas perfetto, nonché le leggi della meccanica del punto materiale, di determinare la distribuzione delle velocità molecolari, ricavata per la prima volta da Maxwell nel 1859. Le ipotesi su cui si fonda tale modello fisico sono:

1. Il sistema deve essere in equilibrio termodinamico;
2. Tale sistema non deve interagire con l'ambiente esterno;
3. Dopo un dato intervallo di tempo, il sistema assume uno stato stazionario durante il quale la ripartizione delle velocità molecolari non cambia nel tempo;
4. Le componenti v_x , v_y , v_z del vettore velocità \vec{v} sono uguali, cioè indipendenti dagli indici x , y , z , nell'ipotesi che il gas sia macroscopicamente in quiete;
5. Tali componenti non dipendono dal segno dell'argomento, cioè un valore v_x è altrettanto probabile del valore opposto $-v_x$;
6. Tutte le componenti sono indipendenti fra loro.

Precisiamo che un sistema può considerarsi in equilibrio termodinamico quando si trova: a) in equilibrio meccanico, nel senso che non esistono forze non equilibrate tra gli elementi del sistema e fra il sistema e l'ambiente esterno; b) in equilibrio termico, nel senso che a parte eventuali fluttuazioni microscopiche, la temperatura delle varie parti del sistema sia uniforme e che non vi siano scambi termici fra il sistema e l'ambiente esterno; c) in equilibrio chimico, nel senso che la struttura interna del sistema non sia soggetta a reazioni chimiche spontanee o a cambiamenti di fase

Rappresentando lo stato di moto di una molecola mediante un punto nello spazio sotteso dagli assi v_x , v_y , v_z , detto spazio delle velocità, la probabilità: $F(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$ di trovare il punto rappresentativo in un certo elemento di volume $dv_x dv_y dv_z$ di tale spazio potrà dipendere, nelle ipotesi poste, dalla distanza dell'elemento dall'origine (uguale al modulo della velocità), ma non dalla direzione. D'altra parte la medesima probabilità dovrà essere, per l'ipotesi 6 del modello, il

prodotto di tre funzioni (le stesse, per l'ipotesi 4) delle componenti v_x, v_y, v_z , cioè delle coordinate dell'elemento scelto. Ne segue l'equazione: $f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \varphi(v_x^2) * \varphi(v_y^2) * \varphi(v_z^2)$ dove l'introduzione dei quadrati è fatta per tener conto dell'ipotesi 5. Per risolvere questa equazione funzionale deriviamone i due membri rispetto a v_x^2 . Si ottiene:

$$f'(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \varphi'(v_x^2) * \varphi(v_y^2) * \varphi(v_z^2)$$

Dividendo membro a membro le due equazioni precedenti, si ottiene:

$$\frac{f'(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} = \frac{\varphi'(v_x^2) * \varphi(v_y^2) * \varphi(v_z^2)}{\varphi(v_x^2) * \varphi(v_y^2) * \varphi(v_z^2)}$$

ovvero:

$$\frac{f'}{f} = \frac{\varphi'(v_x^2)}{\varphi(v_x^2)}$$

Come si vede, il secondo membro di questa equazione non dipende da v_y e v_z . Ora, operando allo stesso modo rispetto a v_y^2 oppure v_z^2 , se ne conclude che f'/f non può

dipendere nemmeno da v_x ossia è una costante. Posto dunque:

$$\frac{f'}{f} = \frac{\varphi'}{\varphi} = -\lambda$$

si riconosce che f e φ sono funzioni esponenziali dei rispettivi argomenti. Difatti, poiché:

$$\frac{f'}{f} = -\lambda$$

Integrando membro a membro per separazione di variabili, si ottiene: $\int \frac{df}{f} = -\lambda \int dv_x^2$

Da cui:

$$\ln f(v_x^2) = -\lambda v_x^2 + K$$

Pertanto:

$$f(v_x^2) = A * e^{-\lambda v_x^2}$$

Procedendo allo stesso modo, si ottiene per la componente y della velocità:

$$f(v_y^2) = A * e^{-\lambda v_y^2}$$

e, per la componente z della velocità:

$$f(v_z^2) = A * e^{-\lambda v_z^2}$$

D'altra parte, ricordando la condizione 3 posta dal modello, cioè che la distribuzione delle singole componenti v_x, v_y, v_z della velocità devono essere indipendenti fra loro, si ha:

$$f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \varphi(v_x^2) * \varphi(v_y^2) * \varphi(v_z^2)$$

Si ottiene, pertanto:

$$f(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \varphi(v_x^2) * \varphi(v_y^2) * \varphi(v_z^2) = (A * e^{-\lambda v_x^2})(A * e^{-\lambda v_y^2})(A * e^{-\lambda v_z^2})$$

Quindi:

$$f(v^2) = A^3 * e^{-\lambda v^2}$$

con λ costante positiva. In queste equazioni A è una costante arbitraria che si può determinare con una appropriata condizione di normalizzazione. Ponendo la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v^2) dv = \int_{-\infty}^{+\infty} A^3 * e^{-\lambda v^2} dv = 1$$

la funzione

$$f(v^2) = A^3 * e^{-\lambda v^2}$$

rappresenta manifestamente la densità di probabilità nello spazio delle velocità. Dalla condizione di normalizzazione si può ricavare il valore della costante A^3 che risulta essere: $A^3 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$ e il valore di λ dato da $\lambda = \frac{m}{2KT}$. In definitiva abbiamo per la distribuzione di Maxwell:

$$f(v^2)dv_x dv_y dv_z = \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{\frac{3}{2}} * e^{-\frac{mv^2}{2KT}} dv_x dv_y dv_z$$

Volendo la distribuzione dei moduli basterà integrare questa probabilità elementare nello spazio compreso fra le sfere di raggio v e $v + dv$ col risultato:

$$F(v)dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{\frac{3}{2}} * e^{-\frac{mv^2}{2KT}} v^2 dv$$

Questa relazione è detta “distribuzione delle velocità molecolari” o “distribuzione di Maxwell. Si tratta di una funzione del tipo:

$$F(v) = h v^2 * e^{-\frac{mv^2}{2KT}}$$

avendo posto:

$$h = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Il massimo di tale funzione si ottiene dallo studio della sua derivata prima. Si ottiene:

$$v_p = \sqrt{\frac{2KT}{m}}$$

Per il calcolo della velocità media ricordiamo che il valor medio di una grandezza x in un dato intervallo $[a, b]$ è dato da:

$$\bar{x} = \int_a^b x * P(x) dx$$

Per determinare la velocità media (lineare) è sufficiente, quindi, calcolare il seguente integrale:

$$\bar{v} = \int_0^{+\infty} v * F(v) dv = \int_0^{+\infty} v * 4\pi \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{\frac{3}{2}} * e^{-\frac{mv^2}{2KT}} v^2 dv = \sqrt{\frac{8KT}{\pi m}}$$

Infine, ricordando che l'energia cinetica media per singola molecola è data da

$$E_c = \frac{1}{2} m v_q^2 = \frac{3}{2} KT$$

si ottiene:

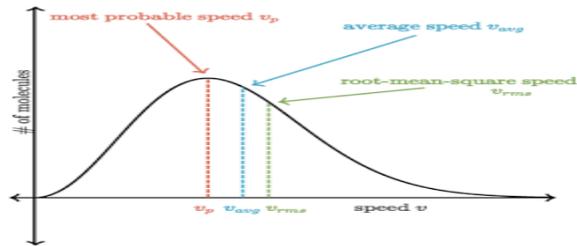
$$v_{qm}^2 = \frac{3KT}{m}$$

Pertanto la velocità quadratica media è data da: $v_{qm} = \sqrt{\frac{3KT}{m}}$

Dalla distribuzione maxwelliana delle velocità molecolari di un gas perfetto alla temperatura T , si ha:

$$v_p = \sqrt{\frac{2}{3}} * v_{qm} \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} * v_{qm}$$

Il grafico della funzione $F(v)$ è riportato in figura:



Nel grafico della distribuzione maxwelliana delle velocità di un gas perfetto sono riportati i valori della velocità più probabile v_p , della velocità media $\bar{v} = v_{avg}$ e della velocità quadratica media $v_{qm} = v_{rms}$. Tale curva di distribuzione non risulta simmetrica rispetto al suo massimo, la cui ascissa caratterizza la velocità più probabile v_p . L'andamento tipico della curva mostra come il numero di molecole, aventi velocità comprese tra v e $v + \Delta v$ e uguale all'area sotto il grafico limitata dalle ordinate passanti per v e $v + \Delta v$, cresce al crescere della velocità fino a un valore massimo per poi decrescere tendendo asintoticamente a zero. Notare che, nel grafico di figura 2, all'aumentare della temperatura ($T_2 > T_1$), mentre l'area compresa sotto la curva di distribuzione rimane costante perché il numero delle molecole è sempre lo stesso, il massimo della curva si sposta verso velocità più elevate. Cioè per $T_2 > T_1$ aumenta pure il valore della velocità più probabile e il massimo della distribuzione delle velocità molecolari si sposta verso destra.

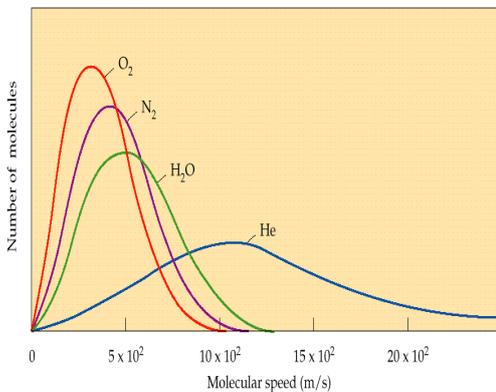


Figura 1

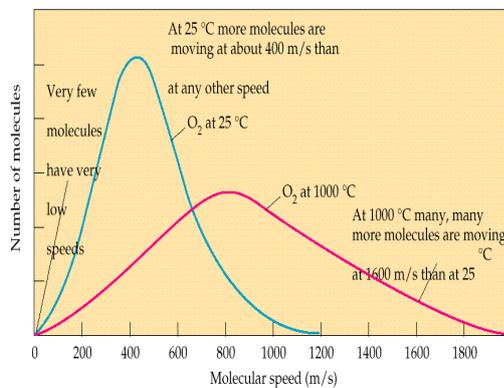


Figura 2

Come ogni distribuzione di probabilità la $F(v)dv$ deve essere normalizzata a uno, ovvero:

$$\int_0^{+\infty} F(v) dv = 1$$

Ricordiamo, infine, che la $F(v) dv$ fornisce la probabilità che una particella abbia modulo della velocità compreso tra v e $v + dv$. Allo stesso modo.

$$F(\vec{v}) d\vec{v} = F(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z$$

rappresenta la probabilità che una particella abbia la componente x della velocità compresa tra v_x e $v_x + dv_x$, la componente y compresa tra v_y e $v_y + dv_y$ e la componente z compresa tra v_z e $v_z + dv_z$. Se ora moltiplico la $F(v)$ per il numero totale di particelle N , ottengo una funzione dN_v tale che:

$$dN_v = N * F(v) dv$$

che rappresenta il numero probabile di particelle con modulo della velocità compreso tra v e $v + dv$. In modo esplicito:

$$dN_v = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{\frac{3}{2}} * v^2 e^{-\frac{mv^2}{2KT}} dv$$

Ovviamente dN_v non è normalizzata ad uno. vale, invece, la condizione:

$$\int_0^{+\infty} dN_v = \int_0^{+\infty} 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi KT}\right)^{\frac{3}{2}} * v^2 e^{-\frac{mv^2}{2KT}} dv = N$$

Da notare che, partendo dalla funzione di distribuzione delle velocità molecolari, si può ricavare, mediante sostituzione, la funzione di distribuzione dell'energia (funzione di Boltzmann). Per concludere vogliamo sottolineare come, per opera di Maxwell e Boltzmann, le leggi statistiche, legate al concetto di probabilità, fanno per la prima volta il loro ingresso nella fisica. L'introduzione di tali leggi nella fisica sollevò accese discussioni, fino a quando nel 1926 per opera di Stern, mediante la tecnica dei fasci atomici e molecolari iniettati in un recipiente a vuoto spinto, fu possibile verificare sperimentalmente con impressionante precisione la distribuzione maxwelliana delle velocità molecolari. In ogni controversia scientifica, l'ultima decisione spetta sempre e comunque alle verifiche sperimentali.

11. Conclusioni

La nozione di modello risale al VI secolo a. C. allorché Pitagora tentò di definire la struttura dell'Universo attraverso l'analisi di numeri che rappresentavano i corpi celesti: era un primitivo tentativo di costruire un modello matematico della realtà fisica. Nel Seicento, attraverso il pensiero di Galileo e Newton, sembrò che un insieme di leggi e teorie fisiche potessero spiegare la dinamica di tutti i corpi e quindi dell'Universo intero. Invece, lo studio della dinamica delle popolazioni biologiche tramite modelli matematici si potrebbe far risalire a Fibonacci, ma i primi veri tentativi di applicazione di metodi matematici a questioni di tipo biologico si sono avuti nel Seicento quando si cominciarono a compilare le tavole di mortalità e si tentarono alcune considerazioni di tipo statistico. L'applicazione della matematica a problemi di biologia si deve a Thomas Malthus (1766-1834) e al matematico-biologo olandese Pierre Francoise Verhust (1804-

1849 con l'introduzione di modelli di tipo deterministico. Ma, il grande sviluppo dei modelli matematici applicati alla scienza della vita è avvenuto nel secolo scorso, intorno al 1920, ad opera del grande matematico Vito Volterra (1860-1940) che pose le basi dell'ecologia teorica e di Alfred Lotka (1880-1949), supervisore di una compagnia di assicurazioni che coltivava numerosi interessi scientifici. A partire, quindi, dall'inizio del Novecento, la matematizzazione di alcuni fenomeni biologici, come la dinamica delle popolazioni e l'evoluzione delle malattie infettive, ha subito un notevole sviluppo tanto che, intorno agli anni '70, si è venuta a creare una nuova disciplina: la biomatematica, che studia le applicazioni dello strumento matematico a problemi biologici attraverso la costruzione, l'analisi e l'utilizzo di modelli matematici. La matematica ha quindi grandi ed interessanti potenzialità di applicazione, ma spesso il problema in esame può essere estremamente complesso ed è, quindi, necessario semplificarlo al fine di ottenere modelli rispetto ai quali sia possibile applicare con successo gli strumenti matematici. In questo processo di semplificazione è necessario individuare, fra gli aspetti del problema, quelli essenziali che caratterizzano il fenomeno, senza i quali il modello potrebbe risultare non aderente alla realtà. Da quanto detto si evince, pertanto, che un modello matematico è la rappresentazione formale di idee o conoscenze relative ad un fenomeno. Questa definizione contiene una descrizione completa delle caratteristiche che esso deve possedere e che possono essere sintetizzate in tre punti fondamentali, non separabili l'uno dall'altro: 1) Un modello matematico è la rappresentazione di un fenomeno; 2) Tale rappresentazione non è descrittiva, discorsiva o a parole, ma formale, espressa cioè in linguaggio matematico; 3) Non esiste una via diretta dalla realtà alla matematica. In altri termini il fenomeno specifico studiato non determina la sua rappresentazione matematica; ciò che invece si fa è di tradurre in formule, idee e conoscenze relative al fenomeno. Fare una classificazione esaustiva dei modelli matematici più spesso applicati è difficile e senz'altro va oltre gli scopi del presente lavoro. Pur tuttavia possiamo affermare che i modelli più utilizzati nelle applicazioni si possono dividere in due categorie: a) modelli deterministici; b) modelli non deterministici. Ovviamente non è una classificazione esaustiva ma copre buona parte del panorama esistente. Il motivo del grande successo del modello deterministico classico si basava sulla schematizzazione dei fenomeni e riusciva quindi ad esprimere un'equazione differenziale lineare che ammetteva soluzioni continue e perfettamente derivabili dalle precise e rigorose condizioni iniziali imposte come dato di conoscenza del fenomeno studiato. È da notare che l'avvento della fisica matematica iniziò proprio con lo studio delle equazioni differenziali lineari prese come modello matematico. Queste equazioni differenziali sono soggette a due vincoli assiomatici ben precisi: 1) le variabili in gioco sono considerate continue; 2) le equazioni differenziali del tipo considerato possono descrivere tutti i fenomeni deterministicamente. Ma non tutti i sistemi rientrano nel tipo "meccanico macroscopico" e quindi il determinismo meccanicista di Laplace deve essere sostituito con altri tipi di modelli matematici evolutivi cioè con equazioni differenziali di tipo non ordinario, quindi non lineari. Verso la fine dell'800 il programma meccanicista entrò in

una crisi che assunse connotati sempre più gravi e poi addirittura drammatici. Ci vollero circa 50 anni per giungere a nuove teorie, capaci di studiare più ampiamente il sistema come quelle dei sistemi dinamici non lineari e del caos deterministico. La modellizzazione matematica della realtà, quindi, è una vera e propria arte: richiede una notevole padronanza degli strumenti formali ma anche la capacità di cogliere l'essenziale, di evidenziare le caratteristiche dominanti del sistema sotto osservazione. Sul portale dell'Accademia di Platone era scritto: "Non entri chi non conosce la Geometria". A distanza di qualche migliaio di anni la matematica non è più percepita come una delle più alte forme del sapere, ma, erroneamente, come una tecnica per addetti ai lavori. In altre parole la dimensione culturale della disciplina è stata oscurata e, al suo posto, è stata proiettata l'immagine di una sequenza di calcoli difficili e poco attraenti. L'utilizzo dei modelli matematici, a mio avviso, restituisce alla disciplina la sua originale dimensione mostrando che essa è "un modo per guardare e comprendere il mondo" attraverso gli occhi del rigore e della coerenza con l'esplicitazione del suo metodo, del suo linguaggio e della natura dei suoi oggetti.

Bibliografia

- G.L. Atkins, *Models for Biological Systems*, London, 1974
- A. C. Capelo, *Modelli matematici in biologia*, Zanichelli, 2000
- V. Volterra, *Opere matematiche*, vol.5, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma
- E. Giusti, *Elementi di Analisi Matematica*, Bollati-Boringhieri, 2008
2. 2. D. Murray, *Mathematical Biology, I, An Introduction*, Springer, 2002.



Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo

ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola
(Decreto del 24/07/2009 e Direttiva 170/2016)