Science & Philosophy **ISSN**: 2282-7757
Vol. 6(2), 2018, pp. 75-116 **eISSN**: 2282-7765

Ordered numerical systems in Hilbert's *Grundlagen der Geometrie* Sistemi numerici ordinati nei *Grundlagen der Geometrie* di Hilbert

Andrea Battocchio [*]

Received: 08-07-2018. Accepted: 28-11-2018. Published: 31-12-2018

doi:10.23756/sp.v6i2.419

©Andrea Battocchio

Abstract

Recently, several studies have shown how the distance between *Grundlagen* and Hilbert's early publications is not as deep as previously thought, but there is a significant consequentiality with the theory of numerical fields. In reiterating this vision, we intend to show how the results obtained by Hilbert, in particular on the theorems of Pappus and Desargues, are the consequence of a broader research on the possibility of introducing numbers within the geometry to coordinate the plan or the space.
In the development of research, the Hurwitz's discovery of the only four normed division algebras and the ideas on the finiteness of the instruments to be used in geometry, acquired at the beginning of his career, played a decisive role, in particular the waiver of the concept of continuity and the limitation to ordered and countable numerical systems. In the *Grundlagen* conclusions, Hilbert emphasizes the importance of demonstrating the impossibility of assumptions, including the impossibility of determining, by means of only geometric relations of incidence, any ordered numerical systems that have

[*]Liceo "Primo Levi", San Donato Milanese, Italy. andrea.battocchio@levi.gov.it

the same properties of quaternions and octonions with respect to the operations of arithmetic.
Keywords:Hilbert, Hurwitz, Geometric foundation of numbers, Ordered numerical system

Sunto

Recentemente diversi studi hanno mostrato come la distanza tra i *Grundlagen* e le precedenti pubblicazioni di Hilbert non sia tanto abissale come ritenuto in passato, ma vi sia una significativa consequenzialità con la teoria dei campi numerici. Nel ribadire questa visione, si intende mostrare come i risultati ottenuti da Hilbert, in particolare sui teoremi di Pappo e di Desargues, siano conseguenza di una ricerca più ampia sulla possibilità di introdurre all'interno della geometria dei sistemi numerici atti a coordinatizzare il piano o lo spazio.
Nello sviluppo della ricerca hanno avuto un ruolo determinante la scoperta di Hurwitz delle uniche quattro algebre di divisione normate e le idee maturate, già agli inizi della sua carriera, sulla finitezza degli strumenti da utilizzare in geometria, in particolare la rinuncia al concetto di continuità e la limitazione a sistemi numerici ordinati e numerabili. Nelle conclusioni dei *Grundlagen*, Hilbert rimarca l'importanza di dimostrare l'impossibilità delle assunzioni, tra cui l'impossibilità di determinare, attraverso solo relazioni geometriche di incidenza, dei sistemi numerici ordinati che abbiano le stesse proprietà dei quaternioni e degli ottonioni rispetto alle operazioni dell'aritmetica.
Paole Chiave:Hilbert, Hurwitz, Fondazione geometrica dei numeri, Sistemi numerici ordinati

1 Introduzione

La pubblicazione dei manoscritti di Hilbert sulle sue lezioni di geometria, tenute tra il 1891 e il 1902 [31], ha aperto nuovi e fecondi studi sull'origine dei *Grundlagen der Geometrie*; testo ritenuto da Weyl [92] molto distante dal precedente lavoro di Hilbert sulla teoria dei campi numerici, il celebre *Zahlbericht* [43], e accolto con stupore per gli argomenti trattati dagli stessi studenti di Gottinga, secondo quanto raccontano i biografi Blumenthal e Reid.[1]

[1][9, p. 402] e [69, p. 57]. Nonostante i manoscritti e le note per le lezioni mostrino l'interesse di Hilbert per la geometria almeno dal 1891, lo stupore degli studenti di Gottinga è verosimile, perché il primo corso di geometria da lui tenuto a Gottinga risale all'anno accademico 1898/99, i precedenti erano tutti stati svolti a Könisberg oppure erano rivolti a insegnanti di scuole superiori [31, pp. 609–12].

Dai manoscritti emerge come la consequenzialità con la teoria dei campi numerici e con gli studi di geometria proiettiva, già avviati negli anni di Könisberg dal 1886 al 1895, sia ben evidente, così come i contributi e le influenze ricevute dagli amici Minkowski[2] e Hurwitz.
Giovannini [28] e Anatriello [2] hanno recentemente avanzato l'ipotesi che lo scopo ultimo dell'opera di Hilbert non sia l'assiomatizzazione della geometria euclidea fine a sé stessa, ma quello di capovolgere, attraverso l'assiomatizzazione, l'idea di una geometria dipendente dall'aritmetica, posizione implicita fra i sostenitori della geometria analitica. Hilbert conosceva bene gli indiscutibili risultati del metodo analitico delle coordinate, ma per preservare l'indipendenza e il ruolo dell'intuizione, caratteristici della geometria sintetica,[3] si pone l'obiettivo di far emergere i numeri all'interno della geometria stessa. Attraverso un'aritmetica dei segmenti, basata sui due teoremi fondamentali di Pappo-Pascal e Desargues, individua dei sistemi di coordinate i cui insiemi numerici hanno proprietà diverse in funzione della geometria scelta.
I possibili sistemi numerici atti a coordinare il piano e lo spazio proiettivo sono le algebre di divisione normate, che Hurwitz nel 1898 aveva dimostrato essere solo quattro: i numeri reali $\mathbb{R}$, i complessi $\mathbb{C}$, i quaternioni $\mathbb{H}$ e gli ottonioni $\mathbb{O}$.
Nel seguito si presenteranno i primi importanti lavori algebrici che Hilbert condusse in parallelo ai corsi di geometria tenuti a Königsberg; si riproporrà la dimostrazione del teorema di Hurwitz, seguendo la memoria originale del 1898; si espliciteranno infine i passaggi dei *Grundlagen* che contengono i risultati della ricerca iniziata anni prima sull'introduzione dei numeri in geometria.

2 I primi lavori algebrici di Hilbert

Il primo ambito di ricerca di Hilbert fu la teoria degli invarianti. Nella sua tesi di dottorato [36] si occupò di invarianti algebrici e successivamente di invarianti delle proiezioni geometriche, in stretto contatto epistolare con Felix Klein (1849-1925) [52].
I due matematici si conobbero per la prima volta nel 1885, quando Hilbert frequentò alcune lezioni di Klein a Lipsia, su consiglio del suo professore di matematica a Königsberg Adolf Hurwitz (1859-1919). Hurwtiz a sua volta era stato studente di Klein e sotto la sua guida aveva conseguito il dottorato con una tesi sulle funzioni modulari ellittiche.
Le potenzialità del giovane Hilbert furono immediatamente colte da Klein, che lo spronò a confrontarsi di persona con le più eminenti menti matematiche del

[2]Per l'influenza di Minkowski sui lavori di Hilbert si veda [78].

[3]Sul ruolo dell'intuizione in geometria secondo Hilbert, anche in rapporto all'*Anschauung* kantiana citata nell'epigrafe dei *Grundlagen*, si veda [72], [16] e l'introduzione a [51].

tempo: Hermite, Poincaré, Schwarz, Fuchs, Helmholtz, Kronecker, Weierstrass e Gordan [69, pp. 22–31]. Hilbert li incontrò tutti, ma due di essi soprattutto influenzarono le sue idee e la sua iniziale carriera: Leopold Kronecker (1823-1891) e Paul Gordan (1837-1912).
A testimonianza di quanto Hilbert rimase impressionato dal pensiero di Kronecker, Reid racconta che durante una delle due conversazioni, avvenute nel 1886 e nel 1888, Hilbert riempì quattro pagine del suo quaderno di appunti, quando a tutti gli altri matematici visitati ne aveva dedicata al massimo una.
Ciò che lo colpì maggiormente, fu da lui esternato oltre 40 anni dopo, nel 1931:

> «Più o meno nello stesso periodo [Hilbert si stava riferendo all'anno 1888] e quindi più di una generazione dopo, Kronecker esprimeva brillantemente una concezione che illustrava con numerosi esempi; questa concezione oggi coincide essenzialmente con il nostro modo finitista di pensare»[4]

Per Kronecker la matematica aveva il suo fondamento nell'esperienza. La matematica è una scienza naturale i cui oggetti esistono in relazione alla nostra esperienza del contare. Gli unici numeri che ci sono dati sono gli interi positivi e tutti gli altri oggetti matematici devono essere costruiti da questi [10].
I numeri irrazionali quindi non esistono,[5] perché non possono essere costruiti mediante una quantità finita di operazioni, ma soltanto attraverso infiniti passaggi, come ad esempio le frazioni continue.
L'inesistenza dei numeri irrazionali lo porta anche a rifiutare la continuità dei reali, perno attorno a cui ruotano i fondamenti dell'analisi messi a punto in quello stesso periodo da Weiestrass, suo collega all'università di Berlino.
Dalle idee di Kronecker si è sviluppata una particolare concezione costruttivista della matematica, detta finitista, che ammette l'esistenza degli oggetti matematici soltanto se possono essere costruititi attraverso un numero finito di operazioni; è questa concezione che Hilbert richiama all'inizio degli anni trenta e che reputa sostanzialmente coincidente con il suo modo di pensare.
L'influenza di Kronecker nei confronti di Hilbert passò anche attraverso un suo allievo che ebbe un ruolo indiscutibile nello sviluppo dei *Grundlagen*: Moritz Pasch (1843-1930) [27]. Le *Lezioni di geometria nuova* di Pasch [66] sono incontestabilmente il primo testo che supera gli *Elementi* di Euclide nell'impostazione di un rigoroso sistema assiomatico. Pasch si preoccupò di non tralasciare nessuna ovvia relazione, presentando un sistema di assiomi propriamente completo. Diverse sono le relazioni, fino ad allora considerate ovvie, che assiomatizza per primo: la

[4] [58, p. 267], parentesi quadre nel testo originale.

[5] Edwards riporta che Kronecker, discutendo con Lindemann mentre stava cercando di dimostrare la trascendenza di π, gli avesse obiettato "A cosa servono le tue belle ricerche su π? Perché ti affanni a studiare questi problemi quando i numeri irrazionali non esistono nemmeno?" [21, p. 203].

relazione di congruenza, con la prima esplicitazione dell'assioma di Archimede per segmenti, [66, p. 102], le relazioni d'ordine, in particolare il concetto di "essere tra" (*zwischen*) [66, pp. 5–7] e l'assioma equivalente al teorema di separazione del piano, conosciuto in seguito come assioma di Pasch.[6]
Oltre al rigore del metodo, che gli valse l'epiteto di «padre del rigore in geometria» da parte di Freudenthal [26], Pasch condivideva con Kronecker la netta opposizione all'idea di *contiuum*, derivante da una concezione estremamente empirica della geometria. Nelle *Lezioni* richiama gli studi sul continuo compiuti una decina di anni prima da Cantor e Dedekind, sostenendo che «nell'osservazione empirica non si può mai far riferimento ad un numero infinito di cose» ed inoltre «un segmento non può contenere un numero infinito di punti a meno di estendere la definizione data di punto allontanandola dal suo significato intuitivo».[7]
Questa visione è presente anche nei *Grundlagen* e uno degli scopi principali dell'opera di Hilbert è proprio mostrare come la geometria euclidea e proiettiva sia costruibile anche senza il concetto di continuità.
L'altro decisivo confronto, che preparò Hilbert ad una fulminea carriera, avvenne, sempre nel 1888, con il "re degli invarianti" Paul Gordan ([92] e [74]).
In quel periodo il principale problema irrisolto della teoria degli invarianti era la generalizzazione ad un numero arbitrario di variabili del teorema di finitezza delle basi degli invarianti di una forma algebrica, dimostrato da Gordan venti anni prima nel caso di due variabili.
L'invariante I_{F_n} di una forma algebrica binaria di grado n del tipo

$$F_n(x, y) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} y + a_{n-2} x^{n-2} y^2 + ... + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n$$

è una quantità che dipende dai soli coefficienti $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ e dai coefficienti della trasformazione lineare delle variabili:

$$x = \alpha x' + \beta y' \qquad y = \gamma x' + \delta y'$$

in modo che l'invariante $I_{F'_n}$ della forma

$$\begin{aligned} F'_n(x', y') = a_n(x')^n + a_{n-1}(x')^{n-1}(y') + a_{n-2}(x')^{n-2}(y')^2 + ... \\ ... + a_1(x')(y')^{n-1} + a_0(y')^n \end{aligned}$$

sia dato da

$$I_{F'_n} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^m I_{F_n}$$

[6] [66, p. 25] e [47, p. 6], nel seguito l'assioma II_5.
[7] [66, pp. 125–7], si vedano anche [85, pp. 216–8] e [15, p. 90].

dove m è un opportuno numero intero.[8]
Secondo il teorema di finitezza, dimostrato da Gordan nel 1868, tutti gli invarianti di una data forma algebrica binaria di qualsiasi grado sono ricavabili da un numero finito di invarianti della stessa forma attraverso opportune relazioni; in altre parole per ogni forma algebrica binaria di qualsiasi grado n, esiste una base finita di invarianti da cui si possono ricavare tutti gli altri invarianti di quella forma.[9]
Il passo successivo consisteva nel generalizzare l'esistenza di una base finita al caso di forme algebriche di più variabili.
Hilbert, nel 1890, due anni dopo il suo incontro con Gordan, dimostrò l'estensione del teorema di finitezza nel caso più generale di n variabili senza però fornire un metodo costruttivo e basandosi su una *reductio ad absurdum* [37]. Nonostante il parere negativo di Gordan, incaricato come *referee* dell'articolo, la dimostrazione fu pubblicata sui *Mathematische Annalen* grazie all'intervento di Klein.[10]
Nel settembre del 1892 Hilbert completò il lavoro pubblicando un'ultima memoria sull'argomento, correggendo gli errori e indicando anche un metodo costruttivo. La memoria si concludeva con una perentoria chiosa che preludeva un netto cambio dell'ambito di ricerca a cui si sarebbe dedicato negli anni successivi: «con questo credo di aver completato gli obiettivi della teoria degli invarianti delle for-

[8]Ad esempio, per la forma binaria quadratica $F_2(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, un invariante I_{F_2} è il discriminante $\Delta_{F_2} = b^2 - 4ac$; eseguendo, infatti, la sostituzione di variabili $x = \alpha x' + \beta y'$ e $y = \gamma x' + \delta y'$, il discriminante della forma quadratica $F_2'(x', y') = a(x')^2 + b(x')(y') + c(y')^2$ è $\Delta_{F_2'} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \Delta_{F_2}$ e pertanto $I_{F_2'} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 I_{F_2}$.

[9]Fino al 1868 erano note le basi degli invarianti delle forme binarie fino al quarto grado. Gli invarianti della forma binaria quadratica (si veda la nota 8) sono $I_{F_2} = \Delta_{F_2}$ e tutte le sue potenze $(I_{F_2})^k$, con $k \in \mathbb{N}$, quindi I_{F_2} costituisce una base. Similmente gli invarianti della forma binaria cubica $F_3(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$ sono $I_{F_3} = 4(a\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9})(\frac{b}{3}d - \frac{c^2}{9}) - (ad - \frac{bc}{9})^2$ e tutte le sue potenze $(I_{F_3})^k$. Gli invarianti della forma binaria di quarto grado $F_4(x, y) = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$ sono invece $I_{F_4} = \frac{ace}{6} + \frac{bcd}{48} - \frac{ad^2}{16} - \frac{eb^2}{16} - \frac{c^3}{216}$, $J_{F_4} = ae - \frac{bd}{4} - \frac{c^2}{12}$, tutte le rispettive potenze $(I_{F_4})^k$ e $(J_{F_4})^k$ ed anche alcune altre relazioni tra questi due invarianti come ad esempio $L_{F_4} = 4(J_{F_4})^3 - (I_{F_4})^2$ e $K_{F_4} = (J_{F_4})^3 - 27(I_{F_4})^2$; una base per gli invarianti della forma binaria di quarto grado è quindi $\{I_{F_4}, J_{F_4}\}$ [77]. Nel 1868 Gordan dimostrò che, anche per forme algebriche di grado superiore, tutti gli invarianti di una data forma possono essere ottenuti da una base finita di invarianti della stessa forma algebrica. Fornì anche un metodo di calcolo, sebbene molto laborioso, per determinare la base degli invarianti di una forma binaria di qualsiasi grado n e lo applicò a forme di quinto e sesto grado [29].

[10]In letteratura è spesso citata la reazione di Gordan alla dimostrazione di Hilbert: «das ist keine Mathematik, das ist Theologie!» («Questa non è matematica, è teologia!»), di solito con un'accezione negativa a sottolineare l'enorme distanza metodologica tra due generazioni di matematici (si veda ad esempio [92] e [55]). Un'attenta analisi della personalità di Gordan e delle fonti che riportano la celebre frase (la prima delle quali in ordine cronologico è successiva alla morte di Gordan [64], mostra come quell'interpretazione sia tutt'altro che scontata; anzi Gordan condivise fin da subito la dimostrazione di Hilbert ma diede un parere negativo alla pubblicazione sui *Mathematische Annalen* semplicemente perchè la prima versione del teorema non era completamente corretta [60].

me algebriche» [40]. La stessa frase è citata da Weyl, nel necrologio a Hilbert [92], per sostenere la netta suddivisione in periodi della sua attività: un primo periodo dal 1885 al 1893 sulla teoria degli invarianti, un secondo periodo dal 1893 al 1898 sulla teoria dei campi algebrici e un terzo periodo dal 1898 al 1902 sui fondamenti della geometria. Tale suddivisione è oggi difficilmente accettabile in maniera così netta, per la continuità delle ricerche geometriche ed algebriche dal 1893 al 1899, che qui si cercherà di approfondire.
Sempre nel 1892 Hurwitz aveva accettato un posto di *full professor* al Politecnico di Zurigo e Hilbert era stato scelto per sostituirlo a Königsberg. Hilbert e Hurwitz avevano solo tre anni di differenza e ben presto il rapporto docente-discente si era trasformato in uno stretto rapporto di amicizia che perdurò fino alla morte prematura di Hurwitz. I due usavano ritrovarsi tutti i pomeriggi per passeggiare e discutere su ogni branca della matematica. A queste passeggiate, quando si trovava a Königsberg per trascorrere le vacanze in famiglia, si univa anche l'altro amico fraterno, Herman Minkowski (1864-1909) [50].
La teoria dei numeri, in particolare i lavori di Kummer, Dedekind e Kronecker, erano fonte di interessanti confronti tra i tre amici e quando Hilbert decise di abbandonare le ricerche sulla teoria degli invarianti si dedicò proprio alla teoria dei campi di numeri algebrici [69, pp. 41–2].[11] A gennaio del 1893 mise a punto una nuova e più semplice dimostrazione della trascendenza dei numeri e e π [39] e a settembre una nuova dimostrazione sull'univocità della scomposizione dei numeri algebrici in ideali primi [42].[12]
Nell'autunno dello stesso anno, Hilbert e Minkowski ricevettero dalla Società Matematica Tedesca (*Deutsche Mathematiker-Vereinigung*) l'incarico di redigere un rapporto sullo stato dell'arte della teoria dei numeri (*Zahlbericht*). Minkowski avrebbe dovuto occuparsi della teoria elementare dei numeri, Hilbert di quella dei numeri algebrici. Dopo qualche tempo però, Minkowski rinunciò all'incarico per dedicarsi totalmente al suo libro *Geometrie der Zahlen* [61] e il rapporto fu completato da Hilbert nel 1897 [43]. Lo *Zahlbericht* superò di gran lunga le aspettative della Società Matematica Tedesca e per molti anni rimase la pietra miliare per lo studio della teoria dei campi algebrici [11].

[11] Le fonti principali sulla vita di Hilbert in questo periodo sono le lettere di Minkowski a Hilbert, purtroppo quelle scritte da Hilbert a Minkowski sono ancora irreperibili [1].

[12] La trascendenza di e fu dimostrata per la prima volta da Hermite [34] e quella di π da Lindemann [57], la teoria degli ideali primi fu invece formulata da Kummer a partire dal 1844 ed in seguito ripresa da Dedekind [11, p. 114].

3 Il teorema di Hurwitz

Nel 1894 Hurwitz fu raggiunto a Zurigo da Minkowski, mentre Hilbert nel 1895 si trasferì a Gottinga, dove insegnava da molto tempo anche Klein. Nonostante la lontananza, i tre amici rimasero in contatto grazie ad un'assidua corrispondenza privata ed inoltre usavano pubblicare i propri studi sul bollettino dell'Università di Gottinga (*Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*); Hilbert aveva così la possibilità di essere sempre aggiornato sui progressi dei due amici nei rispettivi campi di ricerca.
Dal 1894 al 1898, con nove articoli in cinque anni, Hurwitz fu uno degli autori più prolifici della sezione di matematica e fisica dei *Nachrichten*, dietro soltanto ai fisici di Gottinga Riecke e Voigt. Tra i suoi articoli, tutti sulla teoria dei numeri, due sono particolarmente significativi: il primo sui quaternioni e il secondo sulla composizione di somme di quadrati.
In [53] Hurwitz analizza il sistema dei quaternioni $\mathbb{H}$ come esempio di corpo non commutativo. Sviluppa su $\mathbb{H}$ un'aritmetica introducendo un metodo di fattorizzazione in quaternioni interi e utilizza le sue proprietà per dimostrare per via algebrica il teorema di Jacobi sulla molteplice rappresentabilità di un numero naturale intero come somma di quattro quadrati.[13]
La somma di quadrati è anche l'oggetto di [54], dove Hurwitz dimostra che l'identità

$$(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2) = z_1^2 + z_2^2 + ... + z_n^2 \tag{1}$$

con $z_1, z_2, ..., z_n$ bilineari[14] in $x_1, x_2, ..., x_n$ e $y_1, y_2, ..., y_n$, è verificata soltanto per $n =$ 1, 2, 4 e 8.[15]
Questo risultato è centrale nella storia dell'algebra, perché implica che le uniche algebre di divisione normate sul campo dei reali hanno dimensioni 1, 2, 4 oppure 8[16] e, a meno di isomorfismi, sono quattro: i numeri reali $\mathbb{R}$, i complessi $\mathbb{C}$, i quaternioni $\mathbb{H}$ e gli ottonioni $\mathbb{O}$.

[13] Un numero naturale n può essere rappresentato come somma di quattro quadrati in diversi modi; Jacobi scoprì, utilizzando strumenti di analisi complessa, che questi modi sono esattamente $24s$, nel caso di n pari, e $8s$, nel caso di n dispari, dove s è la somma di tutti i divisori dispari di n. Hurwitz grazie alla scomposizione in quaternioni primi riuscì a dimostrare il teorema per via algebrica [90, pp. 186–7].

[14] Una funzione $f(x_1, x_2, ...x_n, y_1, y_2, ..., y_n)$ è bilineare nelle variabili $x_1, x_2, ..., x_n$ e $y_1, y_2, ..., y_n$ se può essere scritta nella forma $f(x_1, x_2, ...x_n, y_1, y_2, ..., y_n) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + ... + a_{1n}x_1y_n + a_{2n}x_2y_n + ... + a_{nn}x_ny_n$ con $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, a_{21}, ..., a_{nn} \in \mathbb{R}$.

[15] Non limitandosi a funzioni bilineari, ma considerando più in generale delle funzioni razionali nelle $x_1, x_2, ..., x_n$ e $y_1, y_2, ..., y_n$, Pfister ha dimostrato che la (1) è verificata per ogni n multiplo di 2 [12].

[16] In generale ogni algebra di divisione, su qualsiasi campo, ha dimensioni 1, 2, 4 oppure 8 [6].

La dimostrazione originale di Hurwitz procede secondo il seguente schema, leggermente rivisto da Curtis [18, pp. 308-14]. [17]
Se $n = 1$, l'identità (1) diventa $x^2y^2 = z^2$ da cui $xy = z$.
Se $n > 1$, le $z_1, z_2, ..., z_n$, dato che sono bilineari in $x_1, x_2, ..., x_n$ e $y_1, y_2, ..., y_n$, si possono scrivere come

$$\begin{cases} z_1 = a_{111}x_1y_1 + a_{112}x_1y_2 + ... + a_{11n}x_1y_n + ... + a_{1n1}x_ny_1 + ... + a_{1nn}x_ny_n \\ z_2 = a_{211}x_1y_1 + a_{212}x_1y_2 + ... + a_{21n}x_1y_n + ... + a_{2n1}x_ny_1 + ... + a_{2nn}x_ny_n \\ \vdots \\ z_n = a_{n11}x_1y_1 + a_{n12}x_1y_2 + ... + a_{n1n}x_1y_n + ... + a_{nn1}x_ny_1 + ... + a_{nnn}x_ny_n \end{cases}$$

Raccogliendo a fattor comune le y_i e scrivendo in forma matriciale i coefficienti delle x_i:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \left[x_1 \begin{bmatrix} a_{111} & a_{112} & \dots & a_{11n} \\ a_{211} & a_{212} & \dots & a_{21n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n11} & a_{n12} & \dots & a_{n1n} \end{bmatrix} \right] + \left[x_2 \begin{bmatrix} a_{121} & a_{122} & \dots & a_{12n} \\ a_{221} & a_{222} & \dots & a_{22n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n21} & a_{n22} & \dots & a_{n2n} \end{bmatrix} \right] + \dots$$

$$\dots + \left[x_n \begin{bmatrix} a_{1n1} & a_{1n2} & \dots & a_{1nn} \\ a_{2n1} & a_{2n2} & \dots & a_{2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn1} & a_{nn2} & \dots & a_{nnn} \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Se si nominano le matrici

$$\begin{bmatrix} a_{111} & a_{112} & \dots & a_{11n} \\ a_{211} & a_{212} & \dots & a_{21n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n11} & a_{n12} & \dots & a_{n1n} \end{bmatrix} = \mathbf{A_1}; \quad \begin{bmatrix} a_{121} & a_{122} & \dots & a_{12n} \\ a_{221} & a_{222} & \dots & a_{22n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n11} & a_{n12} & \dots & a_{n1n} \end{bmatrix} = \mathbf{A_2}; \quad \dots;$$

$$\begin{bmatrix} a_{1n1} & a_{1n2} & \dots & a_{1nn} \\ a_{2n1} & a_{2n2} & \dots & a_{2nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn1} & a_{nn2} & \dots & a_{nnn} \end{bmatrix} = \mathbf{A_n}$$

[17] Numerose altre dimostrazioni sono state prodotte utilizzando concetti di algebra astratta, si vedano ad esempio [56], [6] e [14].

l'equazione precedente diventa

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = (x_1\mathbf{A_1} + x_2\mathbf{A_2} + ... + x_n\mathbf{A_n}) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

moltiplicando a sinistra per il trasposto dei rispettivi membri

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} =$$

$$\left[(x_1\mathbf{A_1} + x_2\mathbf{A_1} + ... + x_n\mathbf{A_n}) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right]^T \cdot \left[(x_1\mathbf{A_1} + x_2\mathbf{A_1} + ... + x_n\mathbf{A_n}) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right]$$

ed eseguendo i prodotti

$$z_1^2 + z_2^2 + ... + z_n^2 =$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} (x_1\mathbf{A_1}+x_2\mathbf{A_2}+...+x_n\mathbf{A_n})^T(x_1\mathbf{A_1}+x_2\mathbf{A_2}+...+x_n\mathbf{A_n}) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

l'equazione risultante mostra che, affinché sia valida l'identità (1), deve essere

$$(x_1\mathbf{A_1} + x_2\mathbf{A_2} + ... + x_n\mathbf{A_n})^T(x_1\mathbf{A_1} + x_2\mathbf{A_2} + ... + x_n\mathbf{A_n}) =$$
$$\begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2 \end{bmatrix}$$

applicando la trasposizione alle matrici della prima parentesi e indicando con **I** la matrice identità, la precedente diventa

$$(x_1\mathbf{A_1^T} + x_2\mathbf{A_2^T} + ... + x_n\mathbf{A_n^T})(x_1\mathbf{A_1} + x_2\mathbf{A_2} + ... + x_n\mathbf{A_n}) = (x_1 + x_2 + ... + x_n)\mathbf{I} \quad (2)$$

ed uguagliando i coefficienti di x_n e x_n^2 si osserva che $\mathbf{A_i^T} \cdot \mathbf{A_i} = \mathbf{I}$.
Introducendo le seguenti nuove matrici

$$\mathbf{B_1} = \mathbf{A_1} \cdot \mathbf{A_n^T}; \qquad \mathbf{B_2} = \mathbf{A_2} \cdot \mathbf{A_n^T}; \qquad \ldots; \qquad \mathbf{B_{n-1}} = \mathbf{A_{n-1}} \cdot \mathbf{A_n^T}$$

e moltiplicando a sinistra e a destra per $\mathbf{A_n}$ si ottiene

$$\mathbf{A_1} = \mathbf{B_1} \cdot \mathbf{A_n}; \qquad \mathbf{A_2} = \mathbf{B_2} \cdot \mathbf{B_n}; \qquad \ldots; \qquad \mathbf{A_{n-1}} = \mathbf{B_{n-1}} \cdot \mathbf{A_n}$$

e

$$\mathbf{A_1^T} = \mathbf{A_n^T} \cdot \mathbf{B_1^T}; \qquad \mathbf{A_2^T} = \mathbf{A_n^T} \cdot \mathbf{B_2^T}; \qquad \ldots; \qquad \mathbf{A_{n-1}^T} = \mathbf{A_n^T} \cdot \mathbf{B_{n-1}^T}$$

l'equazione (2) diventa allora

$$(x_1\mathbf{B_1^T} + x_2\mathbf{B_2^T} + ... + x_{n-1}\mathbf{B_{n-1}^T} + x_n)(x_1\mathbf{B_1} + x_2\mathbf{B_2} + ... + x_{n-1}\mathbf{B_{n-1}} + x_n) = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)\mathbf{I} \quad (3)$$

I valori di n che verificano l'identità (1) coincidono con i valori di n per cui è possibile determinare le matrici $n \times n$ dei coefficienti $\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2}, \ldots, \mathbf{B_{n-1}}$.
Confrontando i coefficienti nella (3), dopo la moltiplicazione del membro a sinistra, si ricava che

$$\mathbf{B_i^T B_i} = \mathbf{I}; \qquad \mathbf{B_i^T} + \mathbf{B_i} = 0; \qquad \mathbf{B_i^T B_j} + \mathbf{B_j^T} + \mathbf{B_i} = 0 \quad \text{per } i \neq j$$

o in maniera equivalente

$$\mathbf{B_i^T} = -\mathbf{B_i}; \qquad \mathbf{B_i}^2 = -\mathbf{I}; \qquad \mathbf{B_i B_j} = -\mathbf{B_i B_j} \quad \text{per } i \neq j \qquad (4)$$

Dalla prima delle (4) si evince che le matrici sono antisimmetriche e dalla seconda che il loro determinante non può essere nullo, quindi la loro dimensione deve essere pari.
Nel seguito si supporrà che n sia pari.
Considerando il prodotto di r matrici si ha, per la prima e la terza delle (4):

$$(\mathbf{B_{i_1} B_{i_2} ... B_{i_r}})^T = \mathbf{B_{i_r}^T ... B_{i_2}^T B_{i_1}^T} = (-1)^r \mathbf{B_{i_r} ... B_{i_2} B_{i_1}} = (-1)^{r+(r-1)+(r-2)+...+1} \mathbf{B_{i_r} ... B_{i_2} B_{i_1}} = (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}} \mathbf{B_{i_r} ... B_{i_2} B_{i_1}} \quad (5)$$

da cui $\mathbf{B_{i_1}B_{i_2}...B_{i_r}}$ è simmetrica se $r = 0, 3\,(\mathrm{mod}4)$ e antisimmetrica se $r = 1, 2\,(\mathrm{mod}4)$.
Ogni matrice $\mathbf{B_1}$ può essere scritta come combinazione lineare delle seguenti $2^n - 1$ matrici:

$$\mathbf{I}; \quad \mathbf{B_{i_1}}; \mathbf{B_{i_1}B_{i_2}}; \quad \mathbf{B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}}; \quad \ldots; \quad \mathbf{B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}...B_{i_{n-1}}} \tag{6}$$

dove l'indice della matrice che moltiplica a sinistra è minore di quelli che seguono:

$$i_1 < n, \quad i_1 < i_2 < n, \quad i_1 < i_2 < i_3 < n, \quad \ldots$$

Se le matrici (6) sono linearmente indipendenti allora, attribuendo a ciascuna di esse un coefficiente, la relazione

$$\begin{aligned} a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{B_1} + ... + a_{12}\mathbf{B_1B_2} + a_{13}\mathbf{B_1B_3} + ... \\ ... + a_{123}\mathbf{B_1B_2B_3} + ... + a_{12...n-1}\mathbf{B_1B_2...B_{n-1}} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

è verificata se e solo se i coefficienti sono tutti nulli:

$$a_0 = a_1 = a_{12} = a_{13} = ... = a_{123} = ... = a_{12...n-1} = 0$$

Separando il primo termine ed operando sui coefficienti, la relazione (7) può essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} \mathbf{I} = \sum c_{i_1}\mathbf{B_{i_1}} + \sum c_{i_1i_2}\mathbf{B_{i_1}B_{i_2}} + \sum c_{i_1i_2i_3}\mathbf{B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}} + \ldots \\ \cdots + c_{i_1i_2...i_{n-1}}\mathbf{B_{i_1}B_{i_2}\ldots B_{i_{n-1}}} \end{aligned} \tag{8}$$

La matrice identità $\mathbf{I}$ è simmetrica e può essere ottenuta soltanto da somme di matrici simmetriche, pertanto, per la (5), i coefficienti c_{i_1} e $c_{i_1i_2}$ devono essere nulli.
Moltiplicando ora a destra e a sinistra per una qualsiasi matrice $\mathbf{B_i}$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{B_i} = \sum c_{i_1i_2i_3}\mathbf{B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}B_i} + c_{i_1i_2i_3i_4}\mathbf{B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}B_{i_4}B_i} + \\ + c_{i_1i_2...i_{n-1}}\mathbf{B_{i_1}B_{i_2}\ldots B_{n-1}B_i} \end{aligned}$$

ma $\mathbf{B_i}$ è antisimmetrica, quindi se l'indice i non è compreso tra gli indici i_1, i_2, i_3 il prodotto $\mathbf{B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}B_i}$, per la (5), è una matrice simmetrica e, dato che l'indice i può essere scelto arbitrariamente, deve essere $c_{i_1i_2i_3} = 0$; viceversa se l'indice i è compreso tra gli indici i_1, i_2, i_3, i_4 allora il prodotto $\mathbf{B_{i_1}B_{i_2}B_{i_3}B_{i_4}B_i}$, per la seconda delle (4) e per la (5), è una matrice simmetrica e, dato che l'indice i può essere scelto arbitrariamente, deve essere $c_{i_1i_2i_3i_4} = 0$.
La relazione (8) si riduce allora a

$$\mathbf{B_i} = c_{i_1i_2...i_{n-1}}\mathbf{B_{i_1}B_{i_2}\ldots B_{n-1}B_i} \tag{9}$$

Se $n = 2 \pmod 4$ il prodotto $\mathbf{B_{i_1}B_{i_2}}\ldots\mathbf{B_{n-1}}$, sempre per la (5), è una matrice antisimmetrica quindi $c_{12\ldots n-1}$ e tutte le matrici (6) sono linearmente indipendenti. Se invece $n = 0 \pmod 4$, elevando al quadrato entrambi i membri della (9), si ha

$$c_{12\ldots n-1} = \pm 1$$

La non eliminazione di quest'ultimo coefficiente comporta che in questo caso le matrici (6) non sono tutte linearmente indipendenti.
Per cercare quante sono linearmente indipendenti, osserviamo che la (8) si riduce a

$$\mathbf{I} = \pm\mathbf{B_{i_1}B_{i_2}}\ldots\mathbf{B_{n-1}}$$

moltiplicando entrambi i membri per una qualsiasi delle (6) si ottiene che la metà di esse è rappresentabile in termini delle altre, quindi le matrici linearmente indipendenti nel caso $n = 0 \pmod 4$ sono $\frac{1}{2}\left(2^{n-1}\right)$, cioè 2^{n-2}.
Dato che le matrici $\mathbf{B_i}$ sono quadrate di dimensione n e che in uno spazio $n \times n$ più di n^2 equazioni non sono mai tutte linearmente indipendenti, allora deve valere la relazione $2^{n-2} \geq n^2$.
Ricordando inoltre che, a parte il caso $n = 1$, n deve essere pari, i possibili valori sono allora $n = 1, 2, 4, 6$ e 8.
Si consideri ora il caso $n = 6$.
Tutte le $2^{6-1} = 2^5 = 32$ matrici (6) sono linearmente indipendenti, ma di queste 16 sono antisimmetriche, sono infatti antisimmetriche le 5 $\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2}, \mathbf{B_3}, \mathbf{B_4}, \mathbf{B_5}$ le 10 $\mathbf{B_iB_j}$, con $i < j < n$, e la $\mathbf{B_1B_2B_3B_4B_5}$; in un qualsiasi insieme di matrici 6×6 antisimmetriche, però, soltanto 15 possono essere linearmente indipendenti, perché vi sono solo 15 elementi sopra (o sotto) la diagonale principale, il caso $n = 6$ è quindi da escludere.
La (1) è pertanto verificata solo per $n = 1, 2, 4$ e 8.

4 Sistemi numerici complessi

Il teorema di Hurwitz esprime il fatto che sul campo dei reali gli unici insiemi nei quali è possibile definire un'algebra di divisione normata sono isomorfi a $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^4$ o $\mathbb{R}^8$, che corrispondono ai sistemi numerici $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, e $\mathbb{O}$.
Un'algebra $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^n, +, \cdot\right)$ è un'algebra di divisione se per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, le due equazioni $a \cdot x = b$ e $y \cdot a = b$ hanno ognuna un'unica soluzione in $\mathcal{A}$.
Un'algebra $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^n, +, \cdot\right)$ è un'algebra normata se, definita una norma su $\mathbb{R}^n$, ad esempio quella euclidea $\|a(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2}$, per ogni $x, y \in \mathcal{A}$ vale

$$\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\| \tag{10}$$

Grazie alla condizione di bilinearità è facile dimostrare [56, p. 268] che la (1) è verificata se e solo se $\mathcal{A}\left(\mathbb{R}^n, +, \cdot\right)$ è un'algebra di divisione normata.[18]
Ovviamente Hilbert non utilizzava la nomenclatura e il simbolismo dell'algebra astratta moderna,[19] ma all'inizio del terzo capitolo dei *Grundlagen*, nel paragrafo §13 intitolato "Sistemi numerici complessi" (*Complexe Zahlensysteme*),[20] elenca le leggi che coincidono con la definizione operativa di algebra di divisione normata, chiamate anche leggi di composizione:

1. Il numero a e il numero b generano per "addizione" il numero c; in simboli:
$$a + b = c \qquad \text{e} \qquad c = a + b$$
2. Se a e b sono due numeri allora esistono sempre uno ed un solo numero x e uno ed un solo numero y, tali che
$$a + x = c \qquad \text{e} \qquad y + a = b$$
3. Esiste un numero definito, chiamato 0, tale che per ogni numero a si ha
$$a + 0 = a \qquad \text{e} \qquad 0 + a = a$$
4. Il numero a e il numero b generano per "moltiplicazione" il numero c; in simboli:
$$a \cdot b = c \qquad \text{e} \qquad c = a \cdot b$$
5. Se a e b sono due numeri dati, e a è diverso da 0, allora esistono sempre uno ed un solo numero x e uno ed un solo numero y, tali che
$$a \cdot x = b \qquad \text{e} \qquad y \cdot a = b$$
6. Esiste un numero definito, chiamato 1, tale che per ogni a si ha
$$a \cdot 1 = a \qquad \text{e} \qquad 1 \cdot a = a$$

e aggiunge poi le seguenti proprietà delle operazioni dell'aritmetica:

Se a, b, c sono numeri qualsiasi, allora valgono le seguenti operazioni:

7. $a + (b + c) = (a + b) + c$
8. $a + b = b + a$

[18] In [56] gli autori distinguono tra una nozione più generale di algebra normata, dove in luogo della (10) vale la relazione $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, e algebra di composizione, cioè un'algebra normata con l'unità moltiplicativa. Per semplicità di trattazione qui si è preferito seguire [18] e [6].

[19] Si veda in proposito [55] e l'introduzione a [44].

[20] Dalla seconda edizione dei *Grundlagen* [49] la grafia è stata modificata in *Komplexe Zahlensysteme*, coerentemente con la riforma ortografica tedesca del 1901 [5].

9. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
10. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
11. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
12. $a \cdot b = b \cdot a$

Le leggi di composizione (1-6) individuano un sistema numerico nel quale è possibile svolgere le quattro operazioni dell'aritmetica: addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. La 7 e la 8 rappresentano rispettivamente la proprietà associativa e commutativa dell'addizione, la 9 la proprietà associativa della moltiplicazione, la 10 e la 11 le proprietà distributive della moltiplicazione sull'addizione,[21] la 12 la proprietà commutativa della moltiplicazione.
Le leggi di composizione (1-6) sono soddisfatte non soltanto dai numeri reali $\mathbb{R}$, ma anche da altri sistemi numerici. Ad esempio dai numeri complessi $\mathbb{C}$, che costituiscono un campo, come i reali, poiché godono di tutte le proprietà 7-12; dai quaternioni $\mathbb{H}$, che formano un corpo non commutativo, poiché non godono della proprietà commutativa della moltiplicazione (12); dagli ottonioni $\mathbb{O}$ che formano una struttura algebrica alternativa, perché non godono né della proprietà 12 né della proprietà associativa della moltiplicazione (9), ma valgono le seguenti identità:

$$(a \cdot a) \cdot b = a \cdot (a \cdot b); \quad (a \cdot b) \cdot a = a \cdot (b \cdot a); \quad (b \cdot a) \cdot a = b \cdot (a \cdot a)$$

che definiscono le algebre alternative [6].
Sempre nel paragrafo §13, di seguito alle proprietà 7-12, Hilbert aggiunge le seguenti regole di ordinamento:

13. Se a, b sono due numeri distinti, allora uno ed uno solo di essi (ad esempio a) è sempre maggiore dell'altro. Quest'ultimo è chiamato numero minore; in simboli $a > b$ e $b < a$. $a > a$ non vale per nessun numero a.
14. Se $a > b$ e $b > c$, allora $a > c$
15. Se $a > b$, allora $a + c > b + c$
16. Se $a > b$ e $c > 0$, allora $a \cdot c > b \cdot c$

e le proprietà di continuità:[22]

[21] Le proprietà distributive sono due, a sinistra $a \cdot (a + b) = a \cdot b + a \cdot c$ e a destra $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, perché in generale, in un sistema non commutativo rispetto alla moltiplicazione, non sono entrambe valide.

[22] La proprietà 18 non è presente nella prima edizione, è stata aggiunta dalla seconda edizione.

17. (Proprietà archimedea). Se $a > 0$ e $b > 0$ sono due numeri qualsiasi, allora è sempre possibile aggiungere a a sé stesso un numero sufficiente di volte in modo che la somma risultante sia più grande di b; in simboli: $a + a + ... + a > b$.
18. (Proprietà di completezza). È impossibile aggiungere all'insieme dei numeri un altro insieme di oggetti, da interpretare come numeri, in modo che le proposizioni 1-17 siano ancora soddisfatte nel nuovo insieme derivante dall'aggiunta, conservando tutte le relazioni tra i numeri. In altre parole, i numeri formano un insieme di oggetti che non ammette estensioni conservando tutte le relazioni e i teoremi formulati.

Come è noto, soltanto i numeri reali $\mathbb{R}$ soddisfano tutte le leggi e le proprietà 1-18. Gli altri sistemi numerici soddisfano soltanto alcune di esse; ad esempio le proprietà di ordinamento (13-16) non valgono in $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$, così come la proprietà di completezza (18) non vale in $\mathbb{Q}$ e nelle sue estensioni finite o numerabili.
La genesi dei *Grundlagen* è stata ricostruita principalmente attraverso manoscritti precedenti al 1899 ([83] e [31]).[23] Il materiale più significativo a disposizione è composto dalle note preparatorie a tre corsi tenuti da Hilbert negli anni 1891, 1894[24] e 1898, il primo sulla geometria proiettiva [38] e gli altri due sulla geometria euclidea ([41] e [45]) e da una dispensa redatta da un dottorando, sotto la supervisione di Hilbert, sempre sulla geometria euclidea [46]. La prima edizione dei *Grundlagen* [47], detta *Festschrift*[25] per distinguerla dalle edizioni successive, è il risultato di un progressivo affinamento di quelle note preparatorie.
Il paragrafo §13 dei *Grundlagen*, citato in precedenza, ed in particolare il riferimento alle leggi di composizione, è stato aggiunto da Hilbert soltanto nella dispensa [46], la cui data di compilazione è compresa tra aprile 1898 e marzo 1899 [31, pp. 186–8].
Il 9 luglio 1898 Hurwitz consegnò alla redazione dei *Göttingen Nachricten* la memoria [54] con la dimostrazione conclusiva che le uniche algebre di divisione normate sul campo dei reali sono quattro, a meno di isomorfismi: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$.

5 L'introduzione dei numeri

Secondo Hallet e Majer [31, pp. 1–14] un motivo ricorrente in tutti i manoscritti di carattere geometrico di Hilbert, dal 1893 al 1899, è il tentativo di in-

[23] Manoscritti in senso lato, dato che alcuni dei testi presenti in [31] sono stati fisicamente scritti dalla moglie Kathe o da copisti professionisti, sotto dettatura o su indicazione di Hilbert.

[24] Il corso del 1894 era stato programmato per il semestre estivo del 1893 ma fu annullato e rinviato all'estate successiva a causa di un numero di iscritti troppo basso [31, p. 66]

[25] *Festschrift* in tedesco significa "pubblicazione celebrativa", la prima pubblicazione dei *Grundlagen* avvenne in occasione dell'inaugurazione del monumento eretto a Gottinga in memoria di Gauss e Weber nel 1899.

trodurre i numeri a partire dalla geometria stessa, senza calarli dall'esterno come avviene usualmente nella geometria analitica. Nella geometria analitica classica, infatti, l'attribuzione di coordinate numeriche ad ogni punto del piano, o dello spazio, avviene grazie all'inserzione di assi cartesiani su cui è stato fissato a priori un sistema numerico e quindi una metrica.
Negli appunti per il corso estivo di geometria euclidea del 1894, un paragrafo era intitolato "L'introduzione del numero" (*Die Einführung der Zahl*) e nel suo incipit Hilbert scriveva:

> In tutte le scienze esatte, non si ottengono risultati precisi fino a quando non si sono introdotti i numeri. È sempre di grande importanza epistemologica seguire come questo accade

L'esigenza di introdurre i numeri in geometria e soprattutto la scelta di introdurli dall'interno, era dettata dalla volontà di fornire alla geometria un fondamento scientifico, che producesse dei risultati esatti, pur rimanendo indipendente dall'aritmetica.
Il metodo utilizzato in [41] per associare ad un punto su una retta delle coordinate numeriche è molto simile a quello impiegato per la prima volta da von Staudt [88] basato sulla costruzione del quarto punto di una tetrade armonica (*Würfe*).[26]
Molto simili sono anche gli obiettivi di Hilbert e di von Staudt, per quest'ultimo infatti, prendendo in prestito le parole di Segre [75]:

> Da un lato occorreva introdurre maggior rigore nei fondamenti e nei metodi della geometria, dall'altro che la distinzione fra proprietà descrittive, o di posizione, e proprietà di grandezze, o metriche, delle figure, che già Poncelet aveva introdotta largamente, si poteva e si doveva rendere ancora più netta, dando alla geometria di posizione un'assoluta indipendenza da quella metrica, cioè dal concetto di misura.

Prima di Hilbert, von Staudt era già riuscito ad anteporre la geometria al concetto di metrica, ricavando la nozione di ascissa unicamente attraverso figure di incidenza. Le coordinate non erano più inserite dall'esterno, ma erano subordinate ad una costruzione geometrica proiettiva, ancora priva di metrica.
Mentre i suoi predecessori consideravano i punti di vista analitico e sintetico come due approcci alla geometria diversi e indipendenti, von Staudt attribuisce il primato alla geometria sintetica, che lui chiama di posizione (*Geometrie der Lage*), da cui fa dipendere sistematicamente e pedagogicamente la geometria analitica [63].
Nel 1898, Hilbert in [45, p. 222] ribadisce l'importanza dell'introduzione del numero:

[26]Per un approfondimento si veda [28] e il testo [17] ivi richiamato.

> In ogni scienza esatta, l'introduzione dei numeri è un obiettivo principale. È possibile misurare il progresso di una scienza naturale, o di una sua branca, dal grado in cui i numeri sono introdotti. Ma la scienza non deve soccombere allo sterile formalismo, ad un passo successivo dell'evoluzione dovrà tornare su sé stessa per esaminare le fondamenta su cui è arrivata all'introduzione del numero.

Il metodo utilizzato cambia, questa volta si basa sui teoremi di Pappo e di Desargues anziché sulle tetradi armoniche, ma l'obiettivo rimane lo stesso: individuare, solo attraverso relazioni di incidenza tra rette, una struttura numerica interna alla geometria, analoga a quella utilizzata per le coordinate cartesiane.
Hallet e Majer precisano che la struttura algebrica ricercata da Hilbert è equivalente a quella dei numeri reali [31, pp. 11–12 e p. 69] la stessa lettura è data anche da Stillwell in [82]: «Hilbert [...] evidentemente vuole mostrare che i numeri reali possono avere una fondazione geometrica», ma l'intenzione di Hilbert potrebbe essere stata più ampia.
Oltre a Hallett e Majer, la centralità del problema del numero nella stesura dei *Grundlagen* è stata condivisa, nell'ultimo ventennio, anche da altri studiosi.
Rowe riconosce Hilbert come il primo, in epoca moderna, ad aritmetizzare la geometria dall'interno «costruendo nuovi ponti tra le geometrie assiomatiche puramente sintetiche e le geometrie analitiche» [73]. Il suo studio si concentra soprattutto sul significato epistemologico del metodo assiomatico per risolvere una dicotomia aperta tra geometria sintetica e geometria analitica, che Hilbert aveva fatto propria nella relazione con i suoi maestri, in particolare Klein [72].
Giovannini ripercorre le tappe dell'introduzione delle coordinate attraverso relazioni geometriche senza ricorrere ad un'aritmetica a priori, mostrando l'intenzione di Hilbert di dare un fondamento autonomo ed autosufficiente alla geometria [28]. Anatriello analizza il parallelo tra gli ultimi scritti di Frege, pubblicati postumi [24], e i *Grundlagen*. Dopo aver abbandonato la via logicista alla fondazione dell'aritmetica, Frege, negli ultimi anni della sua vita, si convince che l'origine del numero risieda nella geometria euclidea [2]. Nel nuovo tentativo Frege punta direttamente all'introduzione dei numeri complessi per via geometrica, ma il suo lavoro rimane incompiuto. Il gruppo di ricerca di Anatriello, Tortoriello e Vincenzi, ha ripreso quell'idea e grazie all'aritmetica dei segmenti di Hilbert ha mostrato la natura geometrica dei numeri complessi e come introdurli nel piano euclideo [3].
Per validare l'effettiva indipendenza della geometria dall'aritmetica e per mostrare come la geometria sintetica possa autonomamente raggiungere gli stessi risultati della geometria analitica, non è sufficiente limitarsi ai numeri reali, è necessario far emergere in modo puramente geometrico anche tutti gli altri sistemi numerici con i requisiti minimi per coordinatizzare il piano e lo spazio. Questi requisiti

minimi consistono nella possibilità di definire una metrica e di eseguire le quattro operazioni dell'aritmetica,[27] in altre parole i sistemi numerici da ricercare coincidono con le algebre di divisione normate [56, p. 267].
A seguito della memoria di Hurwitz del 1898, che fissa le uniche quattro algebre di divisione normate sul campo dei reali, Hilbert modifica gli appunti delle lezioni dei corsi precedenti per considerare una gamma più ampia di sistemi numerici complessi (*Complexe Zahlensysteme*). È dunque plausibile che Hilbert, nello sviluppo delle sue ricerche, intendesse determinare le condizioni per far emergere dalla geometria, unicamente mediante relazioni di incidenza tra rette, non soltanto la struttura di campo dei reali $\mathbb{R}$ e dei complessi $\mathbb{C}$,[28] che rispetto alle operazioni dell'aritmetica sono equivalenti, ma anche le strutture meno ricche di proprietà come quelle dei quaternioni $\mathbb{H}$ e degli ottonioni $\mathbb{O}$.

6 Il contenuto dei *Grundlagen*

Il primo capitolo dei *Grundlagen* contiene gli assiomi e le conseguenti definizioni implicite degli oggetti del sistema geometrico: punti, rette e piani.
Gli assiomi sono divisi in cinque gruppi e sono stati modificati più volte nelle sette edizioni pubblicate durante la vita dell'autore. Nel seguito si riportano gli assiomi presenti nel *Festschrift*:

Gruppo I – Assiomi di collegamento (suddivisi in assiomi planari e spaziali)
Assiomi planari

I_1 *Due punti distinti A e B determinano una retta.*

I_2 *Ogni coppia di punti distinti di una retta determinano quella stessa retta.*

Assiomi spaziali

I_3 *Tre punti A, B, C non giacenti su una stessa retta determinano sempre un piano α.*

I_4 *Ogni terna di punti A, B, C di un piano che non giacciono su una stessa retta determinano quello stesso piano. Esiste al massimo un piano che contiene i punti A, B, C. Per ogni piano c'è sempre un punto in esso contenuto.*

I_5 *Se due punti A e B di una retta r giacciono in un piano, allora ogni punto di r giace nel piano α.*

[27] Segre aveva introdotto in precedenza [76] un sistema di coordinate basato sui numeri bicomplessi, che non ammettono sempre l'operazione di divisione, le geometrie corrispondenti hanno però delle singolarità incompatibili con la geometria euclidea [71].

[28] Von Staudt aveva già mostrato come coordinatizzare il piano e lo spazio proiettivi attraverso i numeri complessi [89].

I_6 *Se due piani hanno un punto A in comune allora hanno in comune almeno un altro punto B.*

I_7 *Su una retta ci sono almeno due punti, in un piano ci sono almeno tre punti che non giacciono sulla stessa retta e nello spazio ci sono almeno quattro punti che non giacciono nello stesso piano.*

Gruppo II – Assiomi di ordinamento

II_1 *Se A, B, C sono punti di una stessa retta e B giace tra A e C allora B giace anche tra C e A.*

II_2 *Se A e C sono due punti di una retta, allora c'è sempre almeno un punto B che giace tra A e C e almeno un punto D tale che C giace tra A e D.*

II_3 *Per ogni terna di punti di una retta, ne esiste al massimo uno che giace tra gli altri due.*

II_4 *Quattro punti qualsiasi di una retta A, B, C, D possono essere sempre disposti in modo tale che B giaccia tra A e C e anche tra A e D e inoltre che C giaccia tra A e D e anche tra B e D.*

II_5 *Siano A, B, C tre punti che non giacciono su una stessa retta e sia r una retta nel piano individuato dai punti A, B, C che non passa per nessuno dei punti A, B, C. Se la retta r passa per un punto del segmento AB, allora passa anche per un punto del segmento BC oppure per un punto del segmento AC.*

Gruppo III – Assioma delle parallele

III Assioma di Euclide. *In un piano α, per un punto A esterno ad una retta r, può essere tracciata una ed una sola retta che non interseca la retta r; questa retta è detta parallela a r per A.*

Gruppo IV – Assiomi di congruenza

IV_1 *Se A, B sono due punti di una retta r e A' è un punto della stessa retta o di un'altra retta r' allora è sempre possibile trovare un punto B' da una data parte di r' rispetto ad A' tale che il segmento AB sia congruente o uguale al segmento $A'B'$. In simboli: $AB \cong A'B'$.*

IV_2 *Se un segmento $A'B'$ e un segmento $A''B''$ sono congruenti allo stesso segmento AB, allora il segmento $A'B'$ è congruente a $A''B''$, o più brevemente, se due segmenti sono congruenti ad un terzo allora sono congruenti tra loro.*

IV_3 *Siano AB e BC due segmenti giacenti sulla retta r che, ad eccezione di B, non hanno punti in comune e siano $A'B'$ altri due segmenti su una retta r' che, ad eccezione di B', non hanno punti in comune, allora se $AB \cong A'B'$ e $BC \cong B'C'$ è anche $AC \cong A'C'$.*

IV_4 *Sia $\widehat{hk}$ un angolo nel piano α e r' una retta nel piano α' e si consideri una delle due regioni individuate dalla retta r' su α' . Sia h' una semiretta giacente su r' uscente dal punto O'. Allora esiste nel piano α' una e una sola semiretta k' tale che l'angolo $\widehat{hk}$ sia congruente, o uguale, all'angolo $\widehat{h'k'}$ e allo stesso tempo tutti i punti interni all'angolo $\widehat{h'k'}$ giacciano nella regione considerata individuata da r'. In simboli: $\widehat{hk} \cong \widehat{h'k'}$. Ogni angolo è congruente a se stesso, cioè è sempre vero che $\widehat{hk} \cong \widehat{hk}$.*

IV_5 *Se un angolo $\widehat{hk}$ è congruente a due angoli $\widehat{h'k'}$ e $\widehat{h''k''}$, allora l'angolo $\widehat{h'k'}$ è congruente a $\widehat{h''k''}$. In simboli se $\widehat{hk} \cong \widehat{h'k'}$ e $\widehat{hk} \cong \widehat{h''k''}$ allora $\widehat{h'k'} \cong \widehat{h''k''}$.*

IV_6 *Se per due triangoli ABC e $A'B'C'$ valgono le congruenze $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ e $\widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C'}$ allora vale sempre anche la congruenza $\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'}$ e $\widehat{ACB} \cong \widehat{A'C'B'}$.*

Gruppo V – Assiomi di continuità

V_1 Assioma di Archimede. *Sia A_1 un punto arbitrario su una retta tra due punti dati A e B; si costruiscano i punti $A_2, A_3, A_4, ...$, in modo che A_1 sia tra A e A_2, A_2 sia tra A_1 e A_3, A_3 sia tra A_2 e A_4 etc, siano inoltre congruenti tra loro i segmenti AA_1, A_1A_2 A_2A_3, A_3A_4, $\ldots$ allora nella serie di punti A_2, A_3, A_4, $\ldots$ c'è sempre un punto A_n tale che B giace tra A e A_n.*

V_2 Assioma di completezza. *Nel sistema di punti, rette e piani è impossibile aggiungere altri enti in maniera che un sistema così generato formi una nuova geometria in cui gli assiomi dei cinque gruppi I-V siano tutti verificati; in altri termini gli elementi di una geometria formano un sistema di enti che, se si conservano gli assiomi, non è suscettibile di alcuna estensione.*[29]

Il secondo capitolo è dedicato alla dimostrazione di coerenza degli assiomi e alla loro indipendenza.[30]

[29] L'assioma di completezza non era presente nel *Festschrift*, è stato aggiunto per la prima volta nella traduzione francese al testo pubblicata l'anno seguente [48].

[30] Hilbert prova l'indipendenza di ciascun gruppo di assiomi, non l'indipendenza di ogni singolo assioma. La prima formulazione completa di assiomi indipendenti per la geometria euclidea è dovuta a Veblen [86], si veda in proposito anche [87].

La dimostrazione di coerenza per gli assiomi dei gruppi I-IV[31] è rimandata alla coerenza dell'aritmetica mediante l'interpretazione degli assiomi in un modello numerabile, così costruito:

> Consideriamo il campo Ω di tutti i numeri algebrici che derivano dal numero 1 e dall'applicazione ad esso, per un numero finito di volte, delle quattro operazioni aritmetiche: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione e una quinta operazione ottenuta da $\sqrt{1+\omega^2}$, dove ω denota un numero ottenuto da una delle cinque operazioni suddette.

La coerenza degli assiomi dei gruppi I-V è invece dimostrata attraverso l'interpretazione su $\mathbb{R}$, nell'ordinaria geometria cartesiana.

Il terzo capitolo si apre con il già citato paragrafo §13, dove vengono elencate le leggi di composizione (1-6), le proprietà delle operazioni (7-12), le regole di ordinamento (13-16) e le proprietà di continuità (17-18). Al termine del paragrafo, Hilbert si pone l'obiettivo di «ricercare la dipendenza logica» tra queste proprietà e, coerentemente con lo sviluppo delle precedenti ricerche contenute negli appunti per le lezioni, segue la via geometrica.
Nei capitoli successivi introduce i numeri e le operazioni dell'aritmetica utilizzando due fondamentali teoremi della geometria proiettiva: il teorema di Pappo-Pascal ed il teorema di Desargues. Entrambi questi teoremi all'epoca avevano un alone di mistero, perché nonostante coinvolgessero solo elementi e concetti di geometria proiettiva: rette, punti e incidenza tra rette, non era nota una dimostrazione proiettiva nel piano, cioè una dimostrazione indipendente dalla nozione di congruenza e quindi da una definizione di metrica. Inoltre il teorema di Desargues, ancor più misteriosamente, aveva una dimostrazione proiettiva nello spazio. Secondo alcuni storici della matematica la più grande scoperta tecnica, e forse l'unica realmente nuova, contenuta nei *Grundlagen* è proprio la spiegazione di questo fatto ([70, p. 417], [59, pp. 372–3], [91] e [81, p. 432]).
Nel paragrafo §14 Hilbert dimostra il teorema di Pappo-Pascal assumendo validi gli assiomi planari ed i postulati di congruenza.
Nei *Grundlagen* il teorema di Pappo-Pascal riporta il solo nome di Pascal, perché nella sua versione affine più generale il teorema di Pappo è noto come teorema di Pascal (Figura 1):

Teorema di Pascal. *Dati 6 punti qualsiasi su una conica formanti un esagono, i lati opposti, o i prolungamenti di essi, si incontrano in 3 punti giacenti su una stessa retta oppure sono paralleli.*

---

[31] Con questa dicitura si intende tutti gli assiomi dei gruppi da I a IV.

Il teorema vale per qualsiasi permutazione dei vertici, in altre parole dati 6 punti qualsiasi $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ indipendentemente dall'ordine dei punti sulla conica, le rette P_1P_2 e P_4P_5, P_2P_3 e P_5P_6, P_3P_4 e P_1P_6 o si intersecano in punti che giacciono su una stessa retta oppure sono parallele.

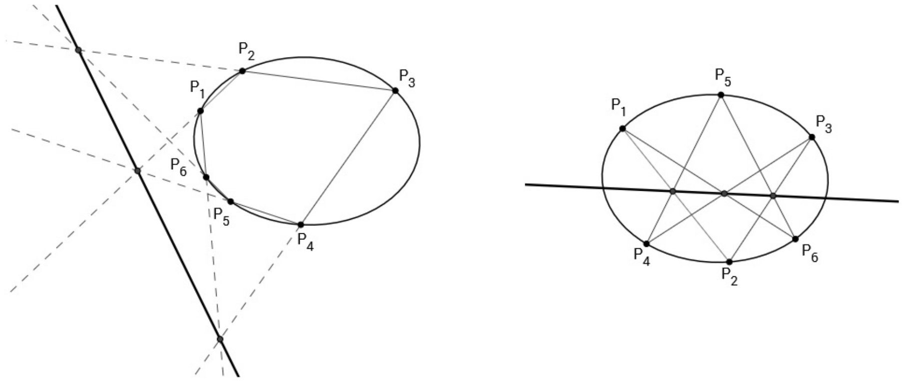


Figura 1: Teorema di Pascal

Il caso particolare del teorema di Pappo si ha quando la conica è degenere, formata dall'unione di due rette incidenti in un punto O, ed i punti giacciono alternativamente sulle due rette (Figura 2).

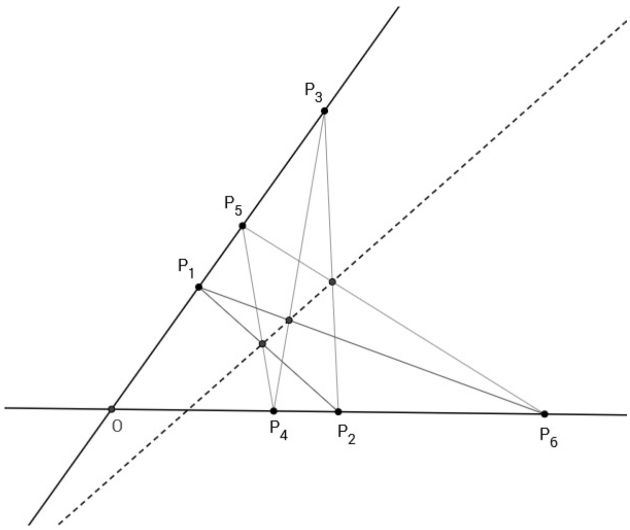


Figura 2: Teorema di Pappo

L'enunciato del teorema richiamato da Hilbert:

> Siano A, B, C e A', B', C' due insiemi di punti su due rette incidenti, diversi dal punto di intersezione delle rette. Se CB' è parallelo a BC' e CA' è parallelo a AC' allora anche BA' è parallelo a AB'.

è riconducibile al teorema di Pappo qualora si permutino i punti P_4 e P_6, si chiamino i punti P_4, P_2, P_6 e P_1, P_5, P_6 rispettivamente con A, B, C e A', B', C' e due coppie di rette siano parallele. Per il teorema, di conseguenza, anche le altre due rette saranno parallele (Figura 3).

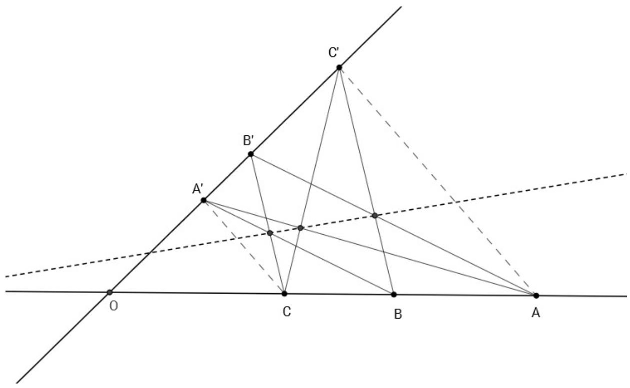


Figura 3: Teorema di Pappo-Pascal nella formulazione dei *Grundlagen*

Attraverso quest'ultima versione del teorema di Pappo-Pascal, Hilbert costruisce un'aritmetica dei segmenti (paragrafo §15) generando un sistema numerico che soddisfa le leggi di composizione (1-6), le proprietà delle operazioni (7-12) e le regole di ordinamento (13-16), ma non le proprietà di continuità (17-18).
Nel paragrafo §16, grazie a questo sistema di numeri, Hilbert, per la prima volta duemila anni dopo Euclide, affronta la teoria delle proporzioni in modo indipendente dall'assioma di Archimede, supposto tacitamente valido negli *Elementi* [33, p. 115]. Nel paragrafo successivo (§17) mostra, sempre in modo indipendente dall'assioma di Archimede, che «ogni retta può essere rappresentata per mezzo di un'equazione lineare nelle coordinate x e y e viceversa».
Il sistema di numeri determinato nel paragrafo §15 è identificato con l'insieme Ω, già utilizzato nel secondo capitolo per la dimostrazione di coerenza degli assiomi I-IV.
Ω ha le stesse proprietà di $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni dell'aritmetica, ovvero le 7-12. Anche $\mathbb{C}$ e Ω^2 godono delle proprietà 7-12, ma non rispettano le regole di ordinamento (13-16).
Come ha messo in evidenza Poincaré nella sua recensione ai *Grundlagen* [68], al contrario di$\mathbb{C}$, Ω^2 è ordinabile, cioè è possibile disporre i suoi elementi in un certo ordine, però questo ordine non è invariante rispetto alle trasformazioni geometriche.
Un metodo per introdurre con sole operazioni geometriche i numeri complessi $\mathbb{C}$, e di conseguenza anche Ω^2, all'interno della geometria degli assiomi I-IV, è pro-

posto in [3].[32]
L'interesse di Hilbert nei *Grundlagen*, tuttavia, non si concentra tanto su $\mathbb{C}$ o su Ω^2, perché entrambi si comportano allo stesso modo di $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni aritmetiche. Al fine di determinare un sistema di coordinate interno alla geometria, ordinato, numerabile e con le stesse proprietà di $\mathbb{R}$, è sufficiente Ω.

Tutto il quarto capitolo, comprendente i paragrafi dal §18 al §21, è dedicato alla teoria dell'equivalenza che Hilbert sviluppa sempre tenendo presente gli *Elementi* di Euclide.
Diversamente dalla teoria delle proporzioni, l'autore greco non ricorre, nemmeno implicitamente, all'assioma di Archimede, ma utilizza il principio «Il totale è maggiore della parte» [22, p. 783] per dimostrare il teorema «Se due triangoli equiampliabili hanno le stesse basi allora hanno anche le stesse altezze.»[33]
Il principio, che è elencato tra le nozioni comuni degli *Elementi* poste all'inizio del primo libro, dal punto di vista geometrico equivale ad un nuovo assioma. La trattazione di Hilbert, attraverso l'aritmetica dei segmenti basata sul teorema di Pappo-Pascal, rimuove il riferimento a quel principio, restando ovviamente indipendente dall'assioma di Archimede ([33, pp. 195–231] e [65, pp. 69–115]).

Nel quinto capitolo Hilbert dimostra il teorema di Desargues nel piano ed il suo inverso:

> Se due trangoli si trovano in un piano ed i loro lati sono a due a due paralleli, allora le rette congiungenti i vertici corrispondenti si intersecano in uno stesso punto oppure sono parallele. Viceversa, se due triangoli giacciono in un piano e le rette congiungenti a due a due i vertici dell'uno e dell'altro triangolo si intersecano in un punto, oppure sono parallele, ed inoltre, se due coppie di lati corrispondenti sono paralleli, allora anche i terzi lati dei due triangoli sono tra essi paralleli

Anche questo enunciato è un caso particolare di un più generale teorema (Figura 4):

Teorema di Desargues. *Dati due triangoli ABC e $A'B'C'$, se le rette congiungenti i vertici corrispondenti concorrono in un punto O, o sono parallele, allora le rette dei lati corrispondenti si incontrano in tre punti giacenti sulla stessa retta, oppure sono parallele, e viceversa.*

---

[32] La costruzione contenuta in [3] prevede l'intersezione tra rette e circonferenze, operazione sempre possibile in Ω^2, come mostrato da Hilbert stesso nel paragrafo §36.

[33] Proposizione 39 del libro I [22, p. 833].

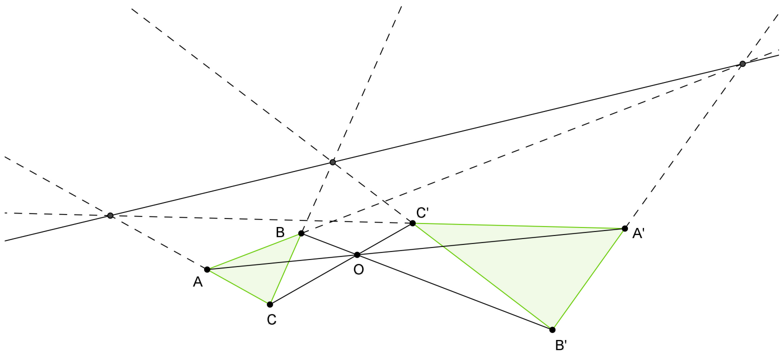


Figura 4: Teorema di Desargues

Nel testo di Hilbert la dimostrazione per mezzo degli assiomi spaziali è data per nota. In effetti il suo enunciato nello spazio è una conseguenza diretta della costruzione proiettiva, rispetto ad un punto O, di due triangoli su due piani paralleli (Figura 5).

Anche nel caso più generale il teorema nello spazio ha una configurazione evidente, perché equivale a proiettare, rispetto a un punto O, un triangolo su un piano ad esso non parallelo e nello spazio due piani non paralleli si intersecano lungo una retta (Figura 6).

Nei paragrafi §22 e §23, Hilbert dimostra il teorema di Desargues nel piano, assumendo gli assiomi planari e di congruenza, e l'impossibilità di una dimostrazione dello stesso teorema nel piano senza gli assiomi di congruenza.

Nel paragrafo §24, in modo speculare al paragrafo §15, introduce una nuova aritmetica dei segmenti basata sul teorema di Desargues, senza utilizzare gli assiomi di congruenza. L'assenza degli assiomi di congruenza è fondamentale per generalizzare il metodo di individuazione dei numeri in un contesto proiettivo.

Nel nuovo sistema numerico, oltre ad essere valide per costruzione le leggi di composizione (1-6), Hilbert verifica che valgono anche le proprietà associativa e commutativa dell'addizione (7-8) (paragrafo §25), le proprietà distributive della moltiplicazione sull'addizione (10-11) e la proprietà associativa per la moltiplicazione (9) (paragrafo §26). La proprietà commutativa della moltiplicazione (12), non è necessariamente valida, ma è comunque sempre possibile definire un sistema di coordinate e rappresentare in modo analitico i punti, le rette e i piani (paragrafo §27).

I quaternioni $\mathbb{H}$ e l'insieme Ω^4, costruito da Ω mantenendo le stesse regole di $\mathbb{H}$ per la somma e il prodotto, sono un esempio di sistema numerico che gode delle proprietà 7-11 e non della 12. $\mathbb{H}$, come $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, ha la potenza del continuo, cioè soddisfa anche le proprietà di continuità (17-18), ma sono entrambi insiemi non

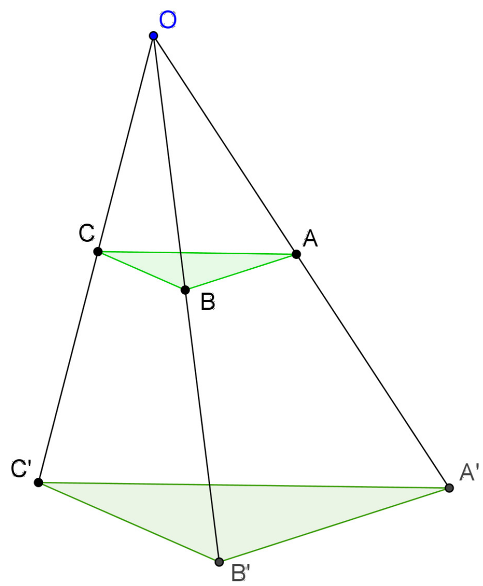


Figura 5: Teorema di Desargues nello spazio con piani paralleli

ordinati, cioè non soddisfano le 13-16. Come Ω^2, anche Ω^4 è invece ordinabile, tuttavia l'ordine non è invariante rispetto alle trasformazioni geometriche.

Nel paragrafo §15, Hilbert aveva determinato all'interno della geometria degli assiomi I-IV un sistema di coordinate su un insieme ordinato e numerabile che si comportava come $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ rispetto alle operazioni dell'aritmetica. La domanda successiva è: all'interno della stessa geometria è determinabile anche un insieme ordinato e numerabile che abbia le stesse proprietà di $\mathbb{H}$, ovvero le 7-11 e non la 12?

Nel rispondere a questa domanda Hilbert risolve i misteri del teorema di Desargues e di Pappo-Pascal.

Nella nuova aritmetica dei segmenti stabilisce innanzitutto una convenzione d'ordine affinché siano rispettate anche le regole d'ordinamento (13-16), l'insieme numerico corrispondente è detto desarguesiano (paragrafo §28).

Nel paragrafo §29 costruisce una geometria dello spazio su un insieme desarguesiano di numeri e dimostra che il teorema di Desargues vale in ogni geometria a dimensione maggiore di due concludendo che la sua «validità nel piano è condizione necessaria e sufficiente affinché quella geometria planare possa considerarsi come una parte della geometria spaziale» (paragrafo §30).

Il mistero del teorema di Desargues è dunque spiegato. Una sua dimostrazione nello spazio esiste sempre perché il teorema, per qualsiasi dimensione maggiore

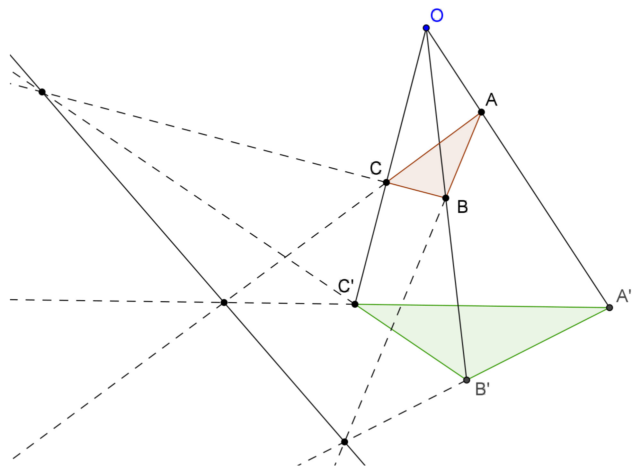


Figura 6: Teorema di Desargues nello spazio con piani non paralleli

di due, è sempre verificato. In due dimensioni, invece, una sua dimostrazione esiste nel piano euclideo, che contempla gli assiomi di congruenza,[34] ma in generale nel piano proiettivo non esiste, perché non tutti i piani proiettivi possono essere considerati come una sezione di uno spazio tridimensionale.[35]
Il mistero del teorema di Pappo-Pascal è invece spiegato nel paragrafo §31. Una sua dimostrazione senza l'ausilio degli assiomi di congruenza, sia nel piano sia nello spazio, esiste soltanto se il sistema numerico delle coordinate è archimedeo. In altre parole il teorema vale nel piano e nello spazio euclidei, dove vigono gli assiomi di congruenza, ma non vale in generale in tutti i piani e gli spazi proiettivi,[36] pertanto non può avere una dimostrazione proiettiva.
Questa constatazione è contenuta nel paragrafo §34 che identifica la validità del teorema di Pappo con la proprietà commutativa della moltiplicazione del sistema numerico delle coordinate: se il sistema di coordinate della geometria scelta è commutativo allora vale il teorema di Pappo e viceversa.
Hilbert mostra innanzitutto che in un'algebra di divisione la proprietà commutativa della moltiplicazione è una conseguenza logica delle proprietà 7-11, delle

[34]La dimostrazione nel piano con gli assiomi di congruenza è data nel paragrafo §22 dei *Grundlagen*.

[35]Un esempio di piano che non può essere considerato una sezione di uno spazio tridimensionale è il piano proiettivo coordinatizzato dal sistema numerico degli ottonioni, perché non esiste uno spazio tridimensionale, né di dimensione maggiore, che abbia come coordinate l'insieme $\mathbb{O}$. Il motivo della sua non esistenza è stato sempre spiegato da Hilbert e verrà citato più avanti: il sistema degli ottonioni non è associativo mentre le coordinate di una geometria spaziale devono sempre essere associative rispetto alla moltiplicazione.

[36]Ad esempio non vale nel piano e nello spazio proiettivi coordinati su $\mathbb{H}$, né nel piano coordinato su $\mathbb{O}$.

regole di ordinamento 13-16 e dell'assioma di Archimede 17 (paragrafo §32), ma se il sistema numerico non è archimedeo, allora la proprietà commutativa non è necessariamente valida (paragrafo §33).
Nel paragrafo §34 stabilisce infine che in una geometria desarguesiana ma non-pascaliana può essere determinato un sistema di coordinate non commutativo, ma questo sistema o non è ordinato, come i quaternioni, oppure non è archimedeo.
Quest'ultimo caso è analizzato in dettaglio da Hilbert nel paragrafo §33, dove costruisce un insieme ordinato, non-archimedeo e non-commutativo, raccogliendo il plauso di Poincaré [68]:

> Hamilton introdusse anni fa un sistema complesso di numeri in cui la moltiplicazione è non commutativa; questi erano i quaternioni [...]. Ma nel caso dei quaternioni, gli assiomi di ordine non sono validi, l'originalità della concezione del Professor Hilbert consiste nel fatto che [i suoi] numeri soddisfano gli assiomi di ordine senza soddisfare la proprietà commutativa.

Nonostante il commento positivo del collega francese, l'indagine condotta da Hilbert fornisce una risposta negativa alla domanda iniziale: non esiste nessun insieme ordinato archimedeo, né numerabile né con la potenza del continuo, con le stesse proprietà di $\mathbb{H}$ rispetto alle operazioni dell'aritmetica.
La stretta correlazione tra geometria desarguesiana e proprietà associativa dimostrata da Hilbert[37] implica che per individuare un sistema numerico non associativo, come ad esempio quello degli ottonioni $\mathbb{O}$, o di Ω^8 per rimanere nel campo dei numerabili, bisogna ricorrere ad una geometria non-desarguesiana, dove non valgono né il teorema di Desargues né il teorema di Pappo-Pascal.[38]
Un esempio di geometria non-desarguesiana è riportato nel paragrafo §23.[39]
Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy, si prenda l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 1$ e si scelga un punto F sull'asse x tale che, dati due punti qualsiasi dell'ellisse la circonferenza che passa per essi e per F interseca l'ellisse soltanto in quei due punti. Questa condizione si verifica se F si trova ad una distanza dal centro dell'ellisse maggiore di $\frac{\sqrt{7}}{2}$, pertanto sia $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.[40]
Nella nuova geometria i nuovi punti sono tutti i punti del piano xy. Le nuove rette

[37][8, pp. 192-3], per una dettagliata analisi meta-matematica della dimostrazione di Hilbert si veda [7].

[38]Il teorema di Desargues implica il teorema di Pappo-Pascal. Questa implicazione, quindi l'impossibilità di una geometria dove sia valido il teorema di Pappo-Pascal ma non il teorema di Desargues, non era nota ad Hilbert al momento della prima edizione dei *Grundlagen*. La dimostrazione è dovuta a Hessenberg [35] ed aggiunta nel paragrafo §35 nella settima edizione.

[39]Di seguito nel testo è riportato l'esempio originale di geometria non-desarguesiana contenuto nel *Festschrift*, sostituito da Hilbert nella settima edizione con un esempio più semplice ideato da Moulton [62].

[40]Un ellisse e una circonferenza hanno in generale quattro intersezioni reali. Sia $C(x_C, 0)$ l'intersezione di ascissa positiva tra circonferenza e asse x, se la circonferenza è tangente esternamente

sono tutte le rette esterne o tangenti all'ellisse, più tutte le rette che intersecano l'ellisse così costituite: sia r una retta che interseca l'ellisse nei punti P e Q, la nuova retta comprenderà tutti i punti appartenenti a r esterni all'ellisse e l'arco $\widehat{AB}$ della circonferenza passante per i punti P, Q e F (Figura 7).

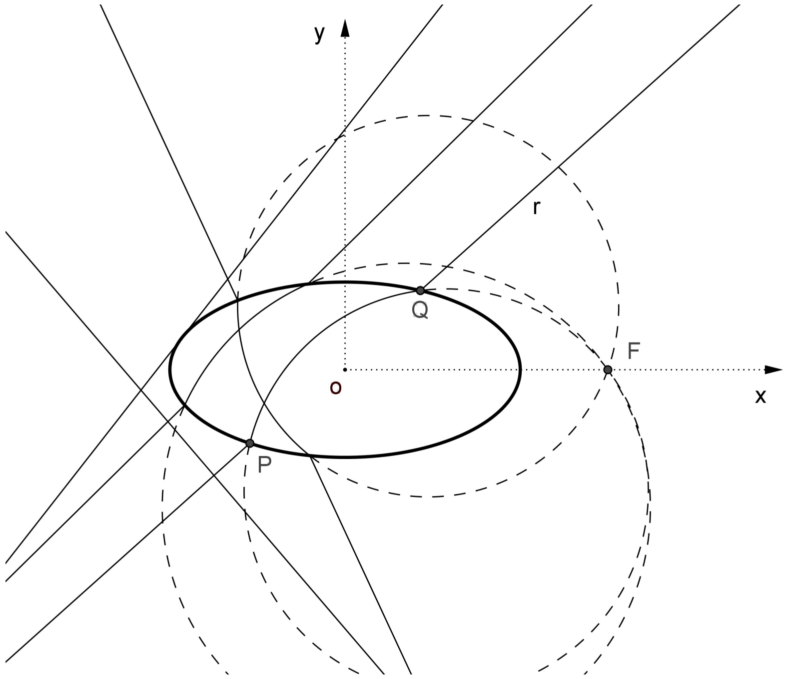
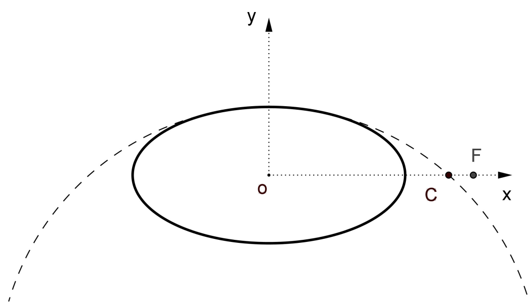


Figura 7: Esempio di geometria non-desarguesiana

È facile verificare che in tale geometria non vale il teorema di Desargues. In questa geometria non è però nemmeno possibile costruire una geometria dei segmenti

all'ellisse in modo che i quattro punti di contatto tra ellisse e circonferenza coincidano, C ha coordinate $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, 0\right)$. Se $x_F > \frac{\sqrt{7}}{2}$ tutte le circonferenze passanti per F intersecanti l'ellisse hanno due punti distinti in comune con esso.



coerente con le regole di calcolo 7-12 descritte in precedenza, perché oltre a non valere la 9 e la 12 non valgono nemmeno la 7 e la 8, rispettivamente la proprietà associativa e commutativa dell'addizione.
Grazie all'aritmetica dei segmenti si può dunque stabilire che in una geometria degli assiomi I-IV, cioè nell'ordinaria geometria euclidea dove valgono i teoremi di Pappo-Pascal e di Desargues, è possibile far emergere dall'interno un'estensione numerabile di $\mathbb{Q}$, chiamata da Hilbert Ω, con le stesse proprietà di $\mathbb{R}$ che può fungere da sistema di coordinate per il piano e lo spazio. In una geometria proiettiva senza assiomi di continuità, dove valga il teorema di Desargues ma non il teorema di Pappo-Pascal, non è possibile far emergere dall'interno un sistema ordinato, numerabile e archimedeo di coordinate, gli unici insiemi numerici introducibili dall'interno sono Ω^4, con le stesse proprietà di $\mathbb{H}$ eccetto la continuità, oppure insiemi ordinati non-archimedei. In una geometria proiettiva senza assiomi di continuità, dove non valgano né il teorema di Desargues né quello di Pappo-Pascal è invece possibile introdurre un sistema di coordinate con le stesse proprietà di $\mathbb{O}$ rispetto all'aritmetica.

7 Ordinamento e continuità

Prima della pubblicazione di [31], l'importanza epistemologica attribuita da Hilbert all'introduzione del numero in geometria è stata generalmente sottovalutata nelle recensioni e negli studi sui *Grundlagen* ([79], [32], [4], [30], [23], [13], [83] e [84]). Tra le poche eccezioni figurano la recensione alla prima edizione francese di Poincaré [68], la recensione all'ottava edizione tedesca di Freudenthal [25] e l'attenta analisi storica di Rowe [73].
Secondo Poincaré, per comprendere il tentativo di Hilbert di allargare lo sguardo a geometrie diverse da quelle di Euclide, di Lobačevskiĭ e di Bolyai-Riemann, occorre tenere presente l'evoluzione del pensiero matematico degli ultimi cento anni, in particolare la generalizzazione del concetto di numero, con l'introduzione dei numeri complessi e ipercomplessi.
Poincaré nota che Hilbert, pur muovendosi con maestria tra le differenti geometrie al variare degli assiomi considerati, non propone mai una geometria che non ammetta gli assiomi d'ordinamento, nonostante due esempi fossero già noti all'epoca. La prima è la geometria sferica di Riemann, che però non ammette nemmeno l'assioma euclideo delle parallele, la seconda è la geometria «che prende per elementi i punti e le rette immaginarie dello spazio ordinario» [68, p. 258]. Poincaré continua precisando:

> E' chiaro che i punti immaginari dello spazio non ci sono dati come disposti in un determinato ordine. Ma c'è di più: ci si può domandare se sia possibile ordinarli; questo sarebbe indubbiamente possibile, come Cantor ha

> mostrato (con la condizione, ben inteso, che non si possono disporre uno vicino all'altro punti che consideriamo infinitamente vicini, distruggendo di conseguenza la continuità dello spazio). Si potrebbe benissimo, dico, disporli in ordine, ma non potrebbe essere fatto in modo tale che questo ordine non sia alterato dalle varie operazioni geometriche (proiezioni, traslazioni, rotazioni, ecc).

In questo passaggio Poincaré sta commentando la scelta di Hilbert di non considerare geometrie prive di assiomi d'ordine, al fine di dimostrare l'indipendenza degli altri assiomi da quelli. Nella recensione si pone comunque il problema se sia costruibile un insieme numerabile e ordinabile che abbia le stesse proprietà di $\mathbb{C}$.[41]
L'assenza nei *Grundlagen* di riferimenti a geometrie su campi non ordinati è notata anche da Freudenthal e ritenuta un grave limite, che ha influito negativamente sullo sviluppo degli studi sulle geometrie dei quaternioni e degli ottonioni negli anni a seguire.
Secondo Freudenthal la vera novità apportata da Hilbert non è stata «concepire i punti di una retta come elementi di un corpo e definire l'addizione e la moltiplicazione tramite figure di incidenza», perché questa idea era già stata avanzata da von Staudt cinquant'anni prima [89] ma quella di considerare figure di incidenza tra sole rette anziché tra rette e coniche. La conclusione critica del matematico olandese è che Hilbert non ha proseguito le ricerche sui fondamenti in quella direzione perché

> gli assiomi d'ordine sbarravano la strada. Del resto Hilbert non si è mai effettivamente interessato a "nuove" geometrie. [...] Non vengono menzionate né le geometrie complesse né quella dei quaternioni.

Freudenthal molto probabilmente non era a conoscenza dei manoscritti delle lezioni dei corsi precedenti al 1899, mancanza che non gli permette una completa contestualizzazione del lavoro del tedesco. Ad esempio commenta con stupore la trattazione geometrica della teoria delle proporzioni nei *Grundlagen*, affermando che sia più vicina all'ideale degli antichi greci, anziché alla concezione dell'epoca: «oggi è l'Algebra il fondamento ultimo della Geometria».

[41] Poincaré pubblica due recensioni ai *Grundlagen*, la prima nel maggio del 1902 [67] e la seconda a settembre dello stesso anno [68]. Nella prima recensione si esprime in forma dubitativa sulla possibilità di trovare un insieme numerabile con le proprietà dei complessi "Forse si potrebbe disporli [in ordine]" (*On pourrait peut-être les ranger*) e non cita la dimostrazione di Cantor; nella seconda, evidentemente dopo una più approfondita riflessione, scrive: "Si potrebbe benissimo, dico, disporli [in ordine]" (*On pourrait bien, dis-je, les ranger*), rimandando verosimilmente al procedimento diagonale usato da Cantor per dimostrare l'ordinabilità e la numerabilità del prodotto cartesiano di due insiemi numerabili [59, 302–332].

L'intento di Hilbert, invero, era proprio smontare quest'ultimo assunto per dare una fondazione autonoma alla geometria. Hilbert vuole mostrare che i numeri e l'aritmetica sono già presenti all'interno delle relazioni geometriche più elementari, come l'incidenza tra rette, che a sua volta trova il proprio fondamento negli assiomi.
Freudenthal coglie invece perfettamente un altro obiettivo dei *Grundlagen*, che riassume in una frase lapidaria:

> I cosiddetti assiomi di continuità vengono introdotti da Hilbert per mostrare che in effetti di essi si può fare a meno.

Nel *Festschrift* l'idea di fondare una geometria indipendentemente dalla continuità è resa evidente fin dai primi capitoli. Nell'enunciazione degli assiomi è presente l'assioma di Archimede, ma non l'assioma di completezza (*Vollständigkeit*), che rappresenta il concetto intuitivo di continuità, nel secondo capitolo, per dimostrare la non-contradditorietà degli assiomi, fa ricorso ad un modello numerabile, l'insieme Ω, e nel paragrafo §13 manca all'appello la proprietà di completezza (18).
Nella prima edizione francese, in assoluto la seconda edizione dei *Grundlagen* dopo il *Festschrift*, Hilbert aggiunge in una nota l'assioma di completezza, ma si premura di specificare subito dopo che quell'assioma serve solo per

> stabilire una corrispondenza uno a uno tra i punti di una retta e il sistema dei numeri reali. Comunque nel corso della presente ricerca, da nessuna parte è stato fatto uso dell' "assioma di completezza".

La proprietà di completezza (18) è invece aggiunta soltanto a partire dalla seconda edizione tedesca.
Nei primi 34 paragrafi del *Festschrift*, i numeri reali in quanto tali sono citati nel secondo capitolo, dove servono a dimostrare la coerenza del sistema di assiomi I-V, e nel paragrafo 17 per mostrare come, attraverso l'assioma di completezza, sia possibile assegnare un valore numerico reale ad ogni punto di una retta. Negli altri passi del testo il riferimento ai numeri reali riguarda unicamente le proprietà e le regole di calcolo di $\mathbb{R}$.
Freudenthal conferma che l'insieme numerabile Ω è sufficiente per costruire tutta la geometria generata dagli assiomi dei gruppi I-IV. L'approccio di Hilbert è però opposto: definite per via assiomatica la geometria proiettiva e euclidea, quali sono i sistemi numerici intriseci, che è possibile far emergere dalle relazioni geometriche? È possibile far emergere dall'interno della geometria dei gruppi di assiomi I-IV, quindi esclusi gli assiomi di continuità, tutti i sistemi numerici atti a coordinare il piano e lo spazio?
La risposta di Hilbert era già stata chiaramente esplicitata da Poincaré nella sua recensione. Il matematico francese osservava, infatti, che all'interno della geometria

definita dagli assiomi I-IV, mantenendo fisse le leggi che permettono le operazioni aritmetiche (1-6) e le regole di ordinamento (13-16), si potevano trovare solo due tipologie di sistemi numerici: quelli che soddisfano tutte le proprietà delle operazioni (7-12) e quelli che soddisfano soltanto le 7-11, quindi senza la proprietà commutativa della moltiplicazione (12). Nella seconda tipologia però non vale l'assioma di Archimede.
Hilbert infatti dimostra che le proprietà 7-11 e le regole 13-16 insieme all'assioma di Archimede implicano la proprietà commutativa della moltiplicazione. Quindi non può esistere nessun insieme di numeri, né continuo né numerabile, che sia ordinato, archimedeo e non commutativo.

8 Conclusioni

I *Grundlagen* sono essenzialmente un lavoro di ricerca sulla geometria che vede nell'assiomatizzazione il metodo di indagine. I cardini della ricerca sono principalmente due: la rinuncia alla continuità, in particolare all'assioma di completezza e l'introduzione del numero all'interno della geometria. Se il primo obiettivo trova un terreno fecondo, il secondo incontra presto una battuta di arresto.
L'esigenza originaria di von Staudt di fondare una geometria indipendente dal concetto di metrica, che faccia emergere i numeri dai presupposti basilari di incidenza, si completa nei *Grundlagen* a seguito della fondamentale scoperta di Hurwitz sulle algebre di divisione normate. L'esigenza diventa far emergere tutti i sistemi numerici che formano un'algebra di divisione normata e che quindi rispettano le leggi di composizione (1-6) ma godono solo in parte delle proprietà delle operazioni dell'aritmetica (7-12), come i quaternioni e gli ottonioni.
Hilbert coniuga questa esigenza con l'obiettivo di descrivere la geometria euclidea e proiettiva con «strumenti limitati»[47, p. 89], cioè senza assiomi di continuità e quindi soltanto attraverso gli assiomi dei gruppi I-IV.
Il risultato atteso è l'individuazione, all'interno di questa geometria, di insiemi numerici, ordinati e numerabili, che abbiano le stesse proprietà rispetto all'aritmetica delle quattro algebre di composizione $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ e $\mathbb{O}$.
$\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, godono di tutte le proprietà 7-12, $\mathbb{H}$ non gode della proprietà commutativa (12) e $\mathbb{O}$ non gode né della proprietà commutativa (12) né di quella associativa (10).
L'esito è negativo perché Hilbert scopre che gli unici insiemi ordinati, numerabili e non-commutativi sono anche non-archimedei, non è possibile quindi all'interno di una geometria dei gruppi I-IV determinare tutti i numeri atti a rappresentare un sistema di coordinate per quella geometria in modo indipendente dall'assioma di Archimede.

Anche il risultato negativo è però apprezzato da Hilbert che conclude con queste parole i *Grundlagen*

> La presente trattazione rappresenta un'indagine critica dei principi della geometria. In questa indagine la regola basilare è stata la discussione di ogni questione emergente al fine di verificare allo stesso tempo se una risposta fosse possibile in un determinato modo e con strumenti limitati. [...] L'impossibilità di certe soluzioni e di certi problemi gioca un ruolo importante nella matematica moderna, ed il desiderio di rispondere a questioni di questo tipo è stato spesso motivo per la scoperta di nuovi e fecondi campi di ricerca.

I fecondi campi di ricerca aperti comprendono le geometrie non ordinate dei quaternioni e degli ottonioni, che Freudenthal imputava ad Hilbert di avere colpevolmente tralasciato. Nel corso della sua ricerca Hilbert porta a termine altre notevoli scoperte, come le condizioni di incidenza affinché una geometria sia coordinatizzabile da sistemi numerici diversi da $\mathbb{R}$ e l'inesistenza di uno spazio tridimensionale coordinatizzabile da $\mathbb{O}$.
Non meno importante la spiegazione del mistero dei teoremi di Desargues e Pappo, entrambi impossibili da dimostrare nella geometria proiettiva del piano, con la duplice particolarità del teorema di Desargues che invece è dimostrabile nella geometria proiettiva dello spazio.

Riferimenti bibliografici

[1] D. Albers e G.L. Alexanderson. *Mathematical People: Profiles and Interviews*. CRC Press, 2008.

[2] G. Anatriello. On a geometric foundation of mathematics (Su una fondazione geometrica della matematica). *Science & Philosophy*, 5(1):91–108, 2017.

[3] G. Anatriello, F. S. Tortoriello, e G. Vincenzi. On an assumption of geometric foundation of numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(3):395–407, 2016.

[4] Anon. The foundations of geometry by D. Hilbert. *The Mathematical Gazzette*, 2(83):268–269, 1903.

[5] Anon. *Regeln für die deutsche Rechtschreibung nebst Wörterverzeichnis. Neue Bearbeitung*. Weidmann Buchhandlung, Berlin, 1908.

[6] J. Baez. The octonions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 39(2):145–205, 2002.

[7] J. T. Baldwin. *Model Theory and the Philosophy of Mathematical Practice*. Cambridge University Press, 2018.

[8] L. M. Blumenthal. *A Modern View of Geometry*. Dover Publications, 2017.

[9] O. Blumenthal. Lebensgeschichte. In *D. Hilbert, Gesammelte Abhandlungen III, Springer Verlag, 1935*, pp. 388–429. Springer, 1935.

[10] J. Boniface. Leopold kronecker's conception of the foundations of mathematics. *Philosophia Scientiæ. Travaux d'histoire et de philosophie des sciences*, CS 5:143–156, 2005.

[11] U. Bottazzini. *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica*. UTET, 2005.

[12] K. Conrad. Pfister's Theorem on Sums of Squares Identity. 2009. Disponibile al sito www.math.uconn.edu/ kconrad/blurbs/linmultialg/pfister.pdf.

[13] A. Conte. Sui "Fondamenti della Geometria" di David Hilbert. *Notiziario dell'Unione Matematica Italiana*, supplemento al n. 7, 1979.

[14] J. H. Conway e D. A. Smith. *On Quaternions and Octonions*. CRC Press, 2003.

[15] L. Corry. David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1894-1905). *Archive for History of Exact Sciences*, 51(2):83–198, 1997.

[16] L. Corry. Axiomatics, empiricism, and anschauung in hilbert's conception of geometry: between arithmetic and general relativity. *The architecture of modern mathematics: Essays in history and philosophy*, pp. 133–156, 2006.

[17] H. S. M. Coxeter. *The Real Projective Plane*. Springer New York, 1993.

[18] M. L. Curtis e P. Place. *Abstract Linear Algebra*. Springer-Verlag, 1984.

[19] H. D. Ebbinghaus et al. *Numbers*. Springer New York, 1991.

[20] H. M. Edwards. Kronecker on the foundations of mathematics. In *From Dedekind to Gödel*. A cura di J. Hintikka, pp. 45–52. Springer, 1995.

[21] H. M. Edwards. *Essays in Constructive Mathematics*. Springer New York, 2005.

[22] Euclide. *Tutte le opere*. Bompiani, 2007.

[23] H. G. Forder. Grundlagen der Geometry by D. Hilbert (7th ed.). *The Mathematical Gazzette*, 15(213):397–400, 1931.

[24] G. Frege. *Scritti postumi*. Bibliopolis, 1986.

[25] H. Freudenthal. Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie, zugleich eine Besprechung der 8. aufl. von Hilberts "Grundlagen der Geometrie". *Nieuw Arch. Wisk.*, (4):105–142, 1957. Trad. it. disponibile al sito http://math.unipa.it/ brig/sds/MATERIALI/MATEMATICA/sitofondamenti/ Freudenthal nuovocarattereago2005.htm.

[26] H. Freudenthal. The main trends in the foundations of geometry in the 19th century. *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, 44:613–621, 1966.

[27] S. Gandon. Pasch entre Klein et Peano. *Dialogue*, 44(4):653–692, 2005.

[28] E. N. Giovannini. Bridging the gap between analytic and synthetic geometry: Hilbert's axiomatic approach. *Synthese*, 193(1):31–70, 2016.

[29] Paul Gordan. Beweis, dass jede covariante und invariante einer binären form eine ganze function mit numerischen coefficienten einer endlichen anzahl solcher formen ist. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 69:323–354, 1868.

[30] T. H. Gronwall. David Hilbert, Grundlagen der Geometrie (4th ed.). *Bulletin of the American Mathematical Society*, 20(6):325–325, 1914.

[31] M. Hallett e U. Majer. *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry 1891-1902*. Springer Berlin Heidelberg, 2004.

[32] G. B. Halsted. The Foundations of Geometry by D. Hilbert. *Science*, 16(399):307–308, 1902.

[33] R. Hartshorne. *Geometry: Euclid and Beyond*. Springer, 2000.

[34] Charles Hermite. Sur la fonction exponentielle. *Compte Rendus*, 77:18–24, 1873.

[35] Gerhard Hessenberg. Beweis des desarguesschen satzes aus dem pascalschen. *Mathematische Annalen*, 61(2):161–172, 1905.

[36] D. Hilbert. *Über die invarianten Eigenschaften spezieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunktionen.* Tesi di Dottorato di Ricerca, Universität Königsberg, 1885.

[37] D. Hilbert. Über die Theorie der algebraischen Formen. *Mathematische annalen*, 36(4):473–534, 1890.

[38] D. Hilbert. Projektive geometrie. Lectures notes for a course held during the year 1891. In *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry*. A cura di M. Hallet e U. Majer, pp. 21–55. 1891.

[39] D. Hilbert. Über die Transzendenz der Zahlen e und π. *Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, pp. 113–116, 1893.

[40] D. Hilbert. Über die vollen Invariantensysteme. *Mathematische Annalen*, 42(3):313–373, 1893.

[41] D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie. Lectures notes for a course held during the year 1894 In *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry*. A cura di M. Hallet e U. Majer, pp. 72–127. 1893.

[42] D. Hilbert. Über die Zerlegung der Ideale eines Zahlkörpers in Primideale. *Mathematische Annalen*, 44:1–8, 1894.

[43] D. Hilbert. *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*. Deutsche Mathematiker-Vereinigung, 1897.

[44] D. Hilbert. *The Theory of Algebraic Number Fields*. Springer Berlin Heidelberg, [1897]-1998.

[45] D. Hilbert. Grundlagen der Euklidischen Geometrie. Lectures notes for a course held during the year 1898. In *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry*. A cura di M. Hallet e U. Majer, pp. 221–286. 1898.

[46] D. Hilbert. Elemente der euklidischen geometrie. Lecture notes for a course held during the wintersemester 1898/99. In *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry*. A cura di M. Hallett e U. Majer. 1899.

[47] D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie: Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen. Herausgegeben von dem Fest-Comitee. I. Theil*. Teubner, 1899.

[48] D. Hilbert. *Les principes fondamentaux de la géométrie*. Gauthier-Villars Paris, 1900.

[49] D. Hilbert. *Grundlagen der Geometrie. Zweite Auflage.* Teubner, 1903.

[50] D. Hilbert. Adolf hurwitz. *Göttinger Nachrichten. Geschäftliche Mitteilungen*, pp. 75–83, 1920.

[51] D. Hilbert e S. Cohn-Vossen. *Geometria intuitiva*. P. Boringhieri, [1932]-1960.

[52] D. Hilbert e F. Klein. *Der Briefwechsel David Hilbert-Felix Klein: 1886-1918*. Vandenhoeck und Ruprecht, 1985.

[53] A. Hurwitz. Über die Zahlentheorie der Quaternionen. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 313–340, 1896.

[54] A. Hurwitz. Über die Komposition der Quadratischen Formen. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, pp. 309–316, 1898.

[55] I. Kleiner. From Numbers to Rings: The Early History of Ring Theory. *Elemente der Mathematik*, 53(1):18–35, 1998.

[56] M. Koecher e R. Remmert. Real division algebra. In *Numbers*. A cura di H. D. Ebbinghaus et al. Springer Verlag, 1991.

[57] F. Lindemann. Uber die Zahl π. *Mathematische Annalen*, 20:213–225, 1882.

[58] P. Mancosu. *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*. Oxford University Press, 1998.

[59] C. Mangione e S. Bozzi. *Storia della logica*. CUEM, 2004.

[60] C. McLarty. Hilbert on theology and its discontents. In *Circles Disturbed: the Interplay of Mathematics and Narrative*, pp. 105–129. Princeton University Press, 2012.

[61] H. Minkowski. *Geometrie der Zahlen*. Teubner, [1896]-1910.

[62] F. R. Moulton. A simple non-desarguesian plane geometry. *Transactions of the American Mathematical Society*, 3(2):192–195, 1902.

[63] P. Nabonnand. La théorie des Würfe de von Staudt. Une irruption de l'algèbre dans la géométrie pure. *Archive for History of Exact Sciences*, 62(3):201–242, 2008.

[64] M. Noether. Paul Gordan. *Mathematische Annalen*, 75(1):1–41, 1914.

[65] P. Odifreddi. *Divertimento geometrico: le origini geometriche della logica da Euclide a Hilbert*. Bollati Boringhieri, 2003.

[66] M. Pasch. *Vorlesungen Uber Neuere Geometrie*. Teubner, 1882.

[67] H. Poincaré. Les fondements de la géométrie. *Journal de savants*, pp. 252–271, maggio 1902.

[68] H. Poincaré. Les fondements de la géométrie. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, pp. 249–272, settembre 1902.

[69] C. Reid. *Hilbert*. Springer New York, 1996.

[70] B. Rosenfeld. *A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the Concept of a Geometric Space*. Springer New York, 1988.

[71] B. Rosenfeld e B. Wiebe. *Geometry of Lie Groups*. Springer US, 1997.

[72] D. E. Rowe. The philosophical views of Klein and Hilbert. In *The intersection of history and mathematics*. A cura di S. Chikara et al., pp. 187–202. Springer, 1994.

[73] D. E. Rowe. The calm before the storm: Hilbert's early views on foundations. In *Proof theory*. A cura di V. F. Hendricks, pp. 55–93. Springer, 2000.

[74] D. E. Rowe. Hilbert's early career: Encounters with allies and rivals. *The Mathematical Intelligencer*, 27(1):72–82, 2005.

[75] C. Segre. CGCV Staudt ed i suoi lavori In *von Staudt, Geometria di posizione*. A cura di M. Pieri. Bocca Editori, 1888.

[76] C. Segre. Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici. *Mathematische Annalen*, 40(3):413–467, 1892.

[77] F. Siacci. Degli invarianti e covarianti delle forme binarie ed in particolare di quelle di 3° e 4° grado. *Annali di matematica pura ed applicata*, tomo VII:73–140, 1865.

[78] I. Smadja. Local axioms in disguise: Hilbert on Minkowski diagrams. *Synthese*, 186(1):315–370, 2012.

[79] J. Sommer. Hilbert's foundations of geometry. *Bulletin of the AMS*, 6(7):287–299, 1900.

[80] J. Stillwell. *The Four Pillars of Geometry*. Springer New York, 2005.

[81] J. Stillwell. *Mathematics and Its History*. Springer New York, 2010.

[82] J. Stillwell. Ideal elements in Hilbert's Geometry. *Perspectives on Science*, 22(1):35–55, 2014.

[83] M. Toepell. On the origins of David Hilbert's "Grundlagen der Geometrie". *Archive for History of Exact Sciences*, 35(4):329–344, 1986.

[84] M. Toepell. The origins and the further development of Hilbert's "Grundlagen der Geometrie". *Le Matematiche*, 55(3):207–226, 2000.

[85] R. Torretti. *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*. Springer Netherlands, 1978.

[86] O. Veblen. A system of axioms for geometry. *Transactions of the AMS*, 5(3):343–384, 1904.

[87] G. Venturi. A note on the introduction of Hilbert's Grundlagen der Geometrie. *Manuscrito*, 40(2):5–17, 2017.

[88] G. von Staudt. *Geometrie der Lage*. Verlag, 1847.

[89] G. von Staudt. *Beitrag zur Geometrie der Lage*, volume I(1856), II(1857), III(1860). Verlag, 1856-1860.

[90] B. L. Waerden. *A history of algebra: from al-Khwārizmī to Emmy Noether*. Springer-Verlag, 1985.

[91] C. Weibel. Survey of non-desarguesian planes. *Notices of the AMS*, 54(10):1294–1303, 2007.

[92] H. Weyl. David Hilbert and his mathematical work. *Bullettin of the AMS*, 50(9):612–654, 1944.