

## Le Scuole di Matematica per la Formazione Docenti<sup>1</sup>

Ferdinando Casolaro<sup>2</sup> - Raffaele Prosperi<sup>3</sup>

**Sunto.** Il presente lavoro, dedicato alla memoria di Giuseppina Varone, pone in risalto la funzione delle Scuole di Matematica per la formazione e l'aggiornamento dei docenti. In particolare, si evidenziano le risultanze emerse dalla Scuola estiva, organizzata dalla Mathesis a Terni dal 26 al 30 luglio 2011; in tale sede si è provveduto alla raccolta e all'editazione di documenti relativi alle attività precedentemente svolte dai vari gruppi di lavoro in relazione alle principali branche della matematica.

**Parole chiave:** Didattica, Matematica, Docenti.

**Abstract.** This work, dedicated to the memory of Josephine Varone, highlights the role of Mathematics Summer School for teachers training and updating. In particular, we highlight the findings emerged from the Summer School, organized by Mathesis in Terni from 26 to 30 July 2011; in that context we arranged for the collection and editing to be done of documents related to the activities previously carried out by the various working groups about the main branches of mathematics.

**Keywords:** Didactics, Mathematics, Teachers.

---

<sup>1</sup> Lavoro dedicato alla memoria di Giuseppina Varone (1964- 2010) - Ricercatrice presso l'Università di Chieti-Pescara.

<sup>2</sup> Dipartimento di Scienze Economiche Aziendali - Università degli Studi del Sannio fcasolar@unisannio.it .

<sup>3</sup> Dipartimento di Scienze Economiche Aziendali - Università degli Studi del Sannio prosperi@unisannio.it.

## 1. Introduzione

Nel XX secolo la visione del mondo è completamente mutata, a seguito dei risultati ottenuti dall'evoluzione della Fisica (Relatività, Meccanica Quantistica, convinzione dell'Architettura come Scienza) nonché delle esperienze di carattere politico-economico.

Nella Scuola, tra programmi e Indicazioni Nazionali, si è cercato di porre in risalto questi mutamenti, in particolare negli anni '80 e '90 con le varie sperimentazioni (indirizzo Brocca, PNI, ...) che, però, non sono stati mai presi in debita considerazione dai Docenti e dai Dirigenti Scolastici, perché l'unico fine dell'insegnamento è rappresentato dall'esame di Stato (versione di Latino o Greco nell'indirizzo classico, tema di Matematica nel liceo scientifico, problema specifico di indirizzo nei tecnici e nei professionali).

Con la riforma Gelmini sono stati addirittura cancellati questi tentativi e siamo ritornati, quasi, alla programmazione Gentile del 1923.

Si pone dunque, oggi più che in passato, il problema di un'analisi storica e di approfondimento dei temi classici e moderni delle discipline scientifiche - in particolare della Matematica e delle sue interrelazioni con la Fisica - per formare i docenti in modo adeguato alle esigenze del mondo reale. Per tale obiettivo riteniamo che le "*Scuole di Matematica*" svolgano una funzione molto forte.

Quali sono gli elementi essenziali di una Scuola?

- La possibilità di andare oltre le "*Indicazioni Ministeriali*" e le "*Linee Guida*" e cercare di porre le basi per una didattica più vicina alle esigenze del mondo reale.

- L'impegno per i giovani docenti a continuare a studiare nella Scuola, oltre le giornate di lavoro in presenza, per pubblicare le risultanze.

- La "*reale*" possibilità di confronto: dico "*reale*", perché c'è la convinzione che la Formazione si faccia attraverso conferenze di "*persone che contano*", indipendentemente dall'aver o non avere avuto rapporti con l'insegnamento secondario. La Scuola non ha bisogno di *scienziati o pseudo-tali*, ma di persone umili con la

passione di trasmettere *le conoscenze e le competenze acquisite* alle giovani generazioni.

Nell'ambito degli incontri della Scuola Estiva di Matematica, organizzata dalla Mathesis a Terni, è stato realizzato e pubblicato un volume che contiene le risultanze emerse dal confronto dei docenti partecipanti ai vari gruppi di lavoro.

Il volume, edito da "2C Contact", dal titolo "*Matematica per la Scuola Secondaria di 2° grado - Un contributo per il docente di Matematica*", contiene cinque capitoli dedicati, rispettivamente alle branche seguenti:

- Aritmetica e Algebra
- Geometria
- Analisi Matematica
- Probabilità e Statistica
- L'informatica nell'insegnamento della Matematica

Inoltre, tutti i gruppi hanno concordato una descrizione degli argomenti e un glossario-syllabus relativo alla Geometria.

Nei prossimi paragrafi porremo l'accento sull'evoluzione della Geometria e della Matematica dell'Incerto (Calcolo delle probabilità e Statistica), con un cenno alla funzione che ha assunto l'Informatica nell'insegnamento della Matematica e su quanto prodotto nei capitoli relativi all'Algebra ed all'Analisi.

## **2. L'ampliamento del modello euclideo alle altre geometrie**

Le conoscenze degli eventi scientifici (in particolare nella Matematica e nella Fisica) sviluppatasi negli ultimi 150 anni, già citati nel paragrafo precedente, possono avere, in ambito *didattico-formativo*, una funzione di valorizzazione e di recupero di quegli interessi culturali che spesso la scuola non riesce a trasmettere alle nuove generazioni. In tale arco temporale, infatti, si sono verificati

approfondimenti in alcune branche della Matematica, che sono risultati essenziali per l'evoluzione del mondo moderno.

Con riferimento alla Geometria, le questioni affrontate in questo periodo evidenziano gli elementi essenziali relativi agli ampliamenti del modello euclideo, come le geometrie sviluppatesi negli ultimi due secoli:

- la *geometria affine*, con un cenno agli spazi vettoriali ed alle operazioni tra vettori utilizzati in Fisica e nelle Scienze applicate;

- la *geometria proiettiva*, di cui si sottolinea l'evoluzione come sviluppo di quanto già prodotto in tempi precedenti sulla spinta delle esigenze degli artisti già dai tempi di Euclide con "*l'Ottica degli antichi*" e dall'evoluzione dell'arte nel Rinascimento con i vari Brunelleschi, Leon Battista Alberti, Piero della Francesca, Leonardo da Vinci, ecc.;

- le *geometrie non euclidee*, con cenni in particolare al modello di Riemann, utilizzato da Albert Einstein per lo sviluppo della *Teoria della Relatività*.

Queste tematiche sono state oggetto di approfondimento dei matematici anche nei decenni successivi; in particolare nel dopoguerra, perché ritenute essenziali all'ammodernamento della didattica, sono state portate avanti da Lucio Lombardo Radice, Lina Mancini Proia, Emma Castelnuovo e altri, fino a Giovanni Prodi, Francesco Speranza e Aldo Morelli.

Si pone dunque oggi un problema:

- *Quale Geometria si deve insegnare?*

- *Geometria e Cinematica devono ancora procedere una indipendentemente dall'altra o il concetto "spazio-tempo" ci impone di rivedere alcune questioni anche nell'insegnamento?*

Che la geometria euclidea sia il più forte strumento che ha il docente di matematica per migliorare le capacità logiche e lo sviluppo del linguaggio dei propri allievi è fuor di dubbio, ma è anche evidente che la velocizzazione degli eventi negli ultimi decenni e la capacità di osservare un universo più ampio debba far sentire il dovere di apportare qualche ritocco a questo percorso.

Il lavoro compiuto nella Scuola di Terni, che ci proponiamo di continuare con i prossimi appuntamenti, va inteso come un tentativo di dare una risposta a queste domande; per tale motivo abbiamo ritenuto opportuno anteporre ad ogni paragrafo del capitolo "Geometria" una breve sintesi storica dello sviluppo dall' VIII sec. a.C. (prime congetture di un universo curvo da parte dei Caldeo-Babilonesi) ad oggi.

### **3. Analisi Matematica**

Il gruppo di lavoro "*Analisi Matematica*"<sup>4</sup> si è posto come obiettivo la "*questione di come introdurre gli argomenti in una lezione di matematica*", tenendo conto delle differenze di esigenze e di ore disponibili nei vari corsi di studio.

Poiché uno dei motivi delle difficoltà che incontrano gli allievi nell'apprendimento della matematica è sicuramente l'approccio che utilizza il docente nella presentazione iniziale, il gruppo di lavoro ha trattato questioni elementari che si ritiene dovrebbero essere oggetto di riflessione da parte del docente, per valutare l'opportunità di presentare attraverso la rappresentazione grafica alcuni degli argomenti proposti come introduzione ai concetti di limite, derivata, integrale.

### **4. Probabilità e Statistica**

Il gruppo "*Probabilità e Statistica*"<sup>5</sup> ha affrontato le problematiche che può incontrare un Docente di Matematica nell'insegnamento di "*Dati e Previsioni*" in termini di scelta degli argomenti da proporre in classe, della loro ripartizione temporale, della metodologia, degli esempi, degli esercizi, dei problemi.

---

<sup>4</sup> Coordinato dalla prof.ssa Daniela Buono, docente del Liceo Scientifico "*Cartesio*" di Giugliano (NA).

<sup>5</sup> Coordinato dal Prof. Raffaele Prosperi, Università del Sannio - Benevento.

Sono state affrontate separatamente le parti riguardanti il primo biennio e il secondo biennio con il quinto anno.

Sono state analizzate con attenzione le Indicazioni Nazionali e le Linee Guida, al fine di individuare i punti cardine e proporre un possibile percorso didattico; ne è nata una discussione cui hanno contribuito costruttivamente tutti i presenti, per cui l'analisi, le relative conclusioni e le conseguenti proposte sono state condivise da ciascuno dei docenti che ha preso parte alla Scuola.

Una prima considerazione ha riguardato la scelta del tempo da dedicare agli argomenti di Probabilità e Statistica; in particolare si concorda che questi, per il primo biennio, si limitino alla sola Statistica Descrittiva, ritenendosi ovunque che la parte di Statistica Inferenziale possa essere affrontata solo a partire dal terzo anno, cioè dopo che un allievo sia venuto in possesso delle conoscenze e competenze di base necessarie. Indipendentemente dalla scelta di partire prima con la Probabilità o, come preferiscono molti, dalla Statistica Descrittiva, si è ritenuto che tali argomenti (come del resto tutti quelli di Matematica) debbano essere preceduti da concetti base di Logica Elementare e di Teoria ingenua degli Insiemi e che molti degli esercizi da proporre durante lo svolgimento di tali argomenti dovrebbero essere mirati a problemi sulla Probabilità, intendendosi che ne dovrebbero costituire la parte iniziale; basta pensare alla determinazione dell'Insieme Universo degli Eventi, ottenibile spesso come prodotto cartesiano di altri insiemi di eventi elementari. Una parte dei Docenti ha ritenuto importante anche far precedere il Calcolo delle Probabilità da cenni di Calcolo Combinatorio, ad esempio al fine di determinare il numero di casi favorevoli e il numero di quelli ugualmente possibili in situazioni di equiprobabilità ipotizzabile a priori.

L'analisi del gruppo ha mirato alla scelta di una sequenza di argomenti e delle rispettive motivazioni pratiche legate alla vita di tutti i giorni, introdotte per sollecitare la partecipazione attiva degli alunni e per semplificare la previsione dell'ordine di grandezza del risultato. Per tale motivo, si è ritenuto fondamentale non seguire uno sviluppo sequenziale, progressivo degli argomenti, bensì spingere gli allievi alla discussione della validità di alcuni risultati e all'eventuale

introduzione di ulteriori concetti che ne potenzino il significato: un caso emblematico può essere rappresentato dall'introduzione del concetto di *media* come sintesi di una serie di valori tra loro differenti o, ancor di più, del concetto di *deviazione standard* nei casi in cui *gruppi di valori aventi la stessa media aritmetica semplice non fossero ugualmente rappresentati da tale valore medio*.

Un altro punto condiviso dalla quasi totalità dei partecipanti al gruppo di lavoro è quello secondo cui *è più conveniente fornire una sola definizione di media, quella che la identifica con il valore comune che deve essere sostituito a tutte le occorrenze per ottenere lo stesso risultato*; a seconda della funzione che permette di calcolare il risultato richiesto, si ottengono tutti i tipi di media (aritmetica, geometrica, armonica, quadratica). In tal modo non si richiede all'alunno di applicare meccanicamente alcune formule, ma di essere in grado di individuare di volta in volta il tipo di problema da risolvere (anche problemi diversi con la stessa serie di dati) e di maneggiare correttamente l'algebra per giungere ad una formula risolutiva, che alla fine coincide con una delle varie definizioni di media.

Infine, sempre nell'ottica di sollecitare l'alunno a utilizzare consciamente tutti i metodi e gli strumenti di cui di volta in volta acquisisce conoscenza e competenza necessarie, si è ritenuto molto utile proporre inizialmente l'uso contemporaneo di più strumenti di rappresentazione dei dati e dei corrispondenti valori di sintesi, al fine di apprezzarne le peculiarità e saperli selezionare all'uopo.

## 5. L'informatica nell'insegnamento della Matematica

Il gruppo "*L'informatica nell'insegnamento della Matematica*"<sup>6</sup>, ha posto la questione sulle competenze di cui deve essere in possesso un docente di Matematica al fine di ottimizzare, nell'insegnamento-apprendimento, l'utilizzo di macchine di calcolo senza che venga sminuita la funzione educativa delle abilità matematiche di base. In tale ottica, dopo una sintesi storica di Tiziana Bindo<sup>7</sup>, relativa

---

<sup>6</sup> Coordinato dal Prof. Luca Paladino, docente dell' ITI "Talete" di Acerra (NA).

<sup>7</sup> Presidente della Sezione Mathesis di Grottaglie.

all'utilizzo degli strumenti informatici per l'insegnamento della matematica e due applicazioni alla didattica di Elisabetta Lorenzetti e Vincenza Fico, il gruppo ha prodotto una descrizione di Salvatore Sessa<sup>8</sup>, che sottolinea l'importanza che può avere il foglio elettronico (detto anche *spreadsheet*) nell'insegnamento della Matematica. La proposta è sviluppata in un CD allegato al volume in oggetto.

## 6. Aritmetica e Algebra

Il gruppo "*Aritmetica e Algebra*"<sup>9</sup> ha presentato un percorso, estratto dal lavoro "*Dal finito all'infinito numerabile*" [13], sulla funzione del significato di corrispondenza, per proporre un primo approccio ai grandi numeri ed al concetto di infinito. Tale lavoro è stato prodotto nell'ambito del protocollo di intesa MPI-Mathesis-2007, come proposta di percorso didattico per gli anni a cavallo tra la scuola primaria e la scuola secondaria di primo grado.

Inoltre, il gruppo ha prodotto:

1) una sintesi storica, sviluppata da Mario Mandrone<sup>10</sup>, dei momenti essenziali dell'evoluzione dell'aritmetica e dell'algebra: "*Dal pensiero aritmetico al pensiero algebrico*".

2) un'esperienza di lezione presentata da Luca Dattero come gioco, in una prima classe di istituto professionale, relativamente all'introduzione dei primi elementi di algebra moderna: "*Una lezione di Algebra introdotta come gioco*".

---

<sup>8</sup> Docente Ordinario di Informatica presso la Facoltà di Architettura dell'Università "Federico II" di Napoli.

<sup>9</sup> Coordinato dal Prof. Luca Dattero, docente del IPSSCT "Sassetti-Peruzzi" di Firenze.

<sup>10</sup> Presidente della Sezione Mathesis di Benevento.

## Bibliografia

- [1] Lipschutz S. (1975) *Calcolo delle Probabilità*, Collana Schaum teoria e problemi ETAS Libri, Milano.
- [2] Spiegel M. R. (1976) *Statistica*, Collana Schaum teoria ed applicazioni, ETAS Libri, Milano.
- [3] F. Casolaro (1990) *Il Programma di Erlangen e le trasformazioni geometriche*. Atti del corso Disegno e Matematica: "Proposte per una didattica finalizzata all'uso delle nuove tecnologie", a cura di C. Cundari: Sorrento, pp. 11-15 (dicembre 1990; Roma, 6-10 maggio, 8-12 dicembre 1991 – M.P.I. e Dipartimento di Rappresentazione e Rilievo della Facoltà di Ingegneria dell'Università «La Sapienza» di Roma); pagg. 85-118 e 220-245.
- [4] F. Casolaro (1995) *La Matematica nell'insegnamento della Fisica*, in «Atti del Convegno Nazionale Mathesis: Cento anni di matematica», Palombi Editori, Roma, pagg. 363-368.
- [5] F. Casolaro, L. Cirillo (1996) "Le trasformazioni omologiche". Atti del Congresso Nazionale Mathesis: "I fondamenti della matematica per la sua didattica e nei suoi legami con la scienza contemporanea", pagg. 309-318.
- [6] F. Casolaro (2002) *L'insegnamento dell'analisi matematica nella scuola secondaria superiore. Dispense del corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica 2001/2002*. - Università di Napoli "Federico II".
- [7] F. Casolaro (2003) *Le trasformazioni omologiche nella Storia, nell'Arte, nella Didattica*, speech al «Convegno internazionale Arte e Matematica», pagg.129-148.
- [8] F. Casolaro, R. Prospero (2004) *Aspetti qualitativi ed interdisciplinari delle funzioni elementari*, «Atti del Congresso nazionale Mathesis», pp. 296-302.
- [9] F. Casolaro, R. Pisano (2006) "Riflessioni sulla geometria nella Teoria della relatività", *Atti del XXVI Congresso Nazionale di "Storia della Fisica e dell'Astronomia"* (SISFA 15-17 giugno 2006), tenutosi il giorno 15/05/2006 presso la Facoltà di

Architettura “Valle Giulia” dell’Università di Roma “La Sapienza”. pag. 221-231.

- [10] F. Casolaro, A. Maturo (2006) “*Teaching the mathematics of the uncertainty for decision making*”, accettato per la pubblicazione agli Atti del Convegno internazionale “*Mathematics of uncertainty*” (ECIT 2006, European Conference on Intelligent Systems and Technologies) tenutosi presso l’Università di Iasi (21-23 settembre 2006).
- [11] F. Casolaro, L. Iorio (2007) “*Le applicazioni della matematica da Eulero ad oggi*”. Atti del Congresso nazionale “MATHESIS” 2007 “*Nel III centenario della nascita di Leonhard Euler (1707 – 2007)*” - Chieti, 1-2-3-4 Novembre 2007; pagg.117-127.
- [12] F. Casolaro, R. Prosperi (2008) “*L’evoluzione della matematica attraverso quattro congetture fondamentali sull’osservazione del mondo fisico*”. Atti del 1° Convegno “*Intersezioni AIF: Calitri, Latina, Minturno, Napoli1, Napoli2*”, tenutosi ad Aversa il 26/05/2008; pagg. 71-83.
- [13] I. Aschieri, F. Casolaro, L. Iorio (2011) “*Dal finito all’infinito numerabile*”. Pubblicato agli atti del Seminario MPI-Mathesis “*Matematica senza numeri*”, tenutosi a Parma nei giorni 28, 29, 30 aprile 2007 - Atti della Scuola Estiva di Terni 2011 - Editore 2C Contact, pagg. 13-20.
- [14] F. Casolaro (2008) “*L’evoluzione della Matematica attraverso quattro congetture fondamentali sull’osservazione del mondo fisico*”. Atti del 1° Convegno AIF: Calitri, Latina, Minturno, Napoli: “*Qual è il ruolo culturale ed interdisciplinare delle scienze fisiche e matematiche? Ipotesi e prospettive*” tenutosi presso l’Istituto “Niccolò Jommelli” di Aversa il 26 Maggio 2008, pagg. 71-83.
- [15] F. Casolaro, R. Pisano (2009) *Riflessioni sulla geometria nella Teoria della relatività*. Atti del XXVI Congresso Nazionale SISFA.
- [16] F. Casolaro, M. Coccozza, A. Pezone (2010) “*I contenuti della prova di Matematica agli esami di Stato*” - Periodico di Matematica n. 1, gen.-aprile 2010, pagg. 70-76.

- [17] F. Casolaro, L. Paladino (2010) "*Analisi sociale e rigore scientifico: Scelta di equilibrio per l'ottimizzazione dei risultati nell'insegnamento della Matematica*" - Atti del Convegno Nazionale "*Logica, linguaggio e didattica della matematica 2010*". Dipartimento di Matematica - Informatica, della Università Degli Studi di Salerno. 24-27 novembre 2010.
- [18] F. Casolaro, R. Pisano (2011) "*An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part One)*" - History Research - Vol. 1, Number 1, December 2011 - pag. 47-60.
- [19] F. Casolaro (a cura di) Atti della Scuola Estiva che si è tenuta a Terni nel periodo 26-30 luglio 2011. "*La Matematica per la Scuola Secondaria di secondo grado: un contributo per il docente di Matematica*" - Editore 2C Contact.
- [20] F. Casolaro et al (2011) "*L'introduzione agli argomenti di Analisi Matematica nell'insegnamento*" - Capitolo III del volume degli Atti della Scuola Estiva di Terni, 26-30 luglio 2011 "*La Matematica per la Scuola Secondaria di secondo grado: un contributo per il docente di Matematica*". Editore 2C Contact, pagg. 92-112.
- [21] F. Casolaro (2011) Glossario-Syllabus di Geometria. Appendice al volume degli Atti della Scuola Estiva di Terni, 26-30 luglio 2011 - "*La Matematica per la Scuola di 2° secondo grado: un contributo per il docente di Matematica*". Ed. 2CContact, pag. 167-194.
- [22] F. Casolaro, L. Paladino (2012) "*Evolution of the geometry through the Arts*" - 11<sup>th</sup> International Conference APLIMAT 2012 - in the Faculty of Mechanical Engineering - Slovak University of Tecnology in Bratislava, 7-9 febbraio 2012, pag. 481-490.
- [23] F. Casolaro, L. Paladino (2012) "*Didactics of Statistics in Sociology*" - First International Conference on *Recent Trends in Social Sciences: Qualitative Theories and Quantitative Models* (RTSS) - Iași (Romania), 23-25 September, 2012. In fase di stampa.

- [24] F. Casolaro, R. Prosperì (2001) *La Matematica nelle Scienze applicate: equazioni algebriche ed equazioni differenziali nei programmi degli istituti tecnici*, «Atti del Congresso nazionale Mathesis», pp. 173-186.
- [25] M. Kline (1999) *Storia del pensiero matematico*, Einaudi Editori, Torino, 2 Voll.
- [26] L. Paladino, R. Prosperì (2008) La logica nei problemi di incertezza assegnati agli esami di Stato-Indirizzo PNI, in *Atti Congresso nazionale "Mathesis" 2008 "La didattica della matematica da Peano a oggi"*.