Science&Philosophy Vol. 1, No 1, (2013) pp. 29 – 36
ISSN 2282-7765 [online] ISSN 2282-7757 [testo stampato]

Modellizzazione dei sistemi complessi: un'introduzione metodologica

Angela De Sanctis[1] Carlo Mari[2]

Sunto. Si propone un'introduzione storico-metodologica alla modellizzazione dei sistemi dinamici. Si introduce, dapprima, il paradigma deterministico nella descrizione dei fenomeni naturali, tipico della fisica classica e tradotto matematicamente attraverso l'uso delle equazioni differenziali. Con la scoperta del caos deterministico, si afferma l'idea della casualità del moto e della descrizione dei fenomeni mediante l'utilizzo di equazioni differenziali stocastiche. Una particolare attenzione è rivolta infine al caso di sistemi complessi.

Parole Chiave: Determinismo, Casualità, Caos, Sistemi complessi.

Abstract. We propose a methodological introduction in modeling dynamical systems for didactical aims. Firstly, we recall the deterministic paradigm in the description of natural phenomena, typical of classical physics and mathematically described by using differential equations. With the discovery of the deterministic chaos, the randomness of the motion is accepted and the description of phenomena is performed using stochastic differential equations. Finally, a special attention is devoted to the case of complex systems.

Keyword: Determinism, Randomness, Chaos, Complex systems.

[1] [2] Dipartimento di Economia Aziendale, Università "G. d'Annunzio" di Chieti-Pescara, International Center for Nonlinear Dynamics and Complex Systems.

1. Determinismo ed equazioni differenziali

Nei due secoli successivi alla pubblicazione dei “Principia” di Newton, la scienza classica ripose piena fiducia nella possibilità di prevedere esattamente il comportamento dei sistemi osservati, adottando quindi la concezione deterministica nella rappresentazione dei fenomeni. Dal punto di vista prettamente matematico, la modellizzazione avvenne attraverso l’introduzione delle equazioni differenziali e, per tutto il Settecento, le ricerche furono rivolte alla determinazione esplicita delle soluzioni. Il primo a sviluppare una teoria sistematica delle equazioni differenziali fu Cauchy, che dimostrò l’esistenza e l’unicità della soluzione $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)$ per i problemi detti di Cauchy, cioè ottenuti aggiungendo ad una equazione differenziale una condizione iniziale $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \tag{1}$$

Egli inoltre distinse il concetto di soluzione locale, chiamata ” in piccolo”, da quello di soluzione globale, detta” in grande”, per l’esistenza di quest’ultima intuendo problematiche di natura topologica. Cauchy segna l’inizio della moderna teoria delle equazioni differenziali, basata prevalentemente sullo studio qualitativo delle soluzioni, cioè sull’analisi delle proprietà e del comportamento di quest’ultime piuttosto che sulla ricerca delle stesse.

Nei primi anni del ‘900 Poincarè provò che, in molti casi, equazioni differenziali non lineari possono dar origine a soluzioni con andamenti complessi e molto diversi in corrispondenza a condizioni iniziali estremamente vicine. Esse sono quindi di fatto imprevedibili data l’impossibilità di stabilire, oltre un certo grado di precisione, le condizioni iniziali di un sistema reale.

Caos deterministico

Quello appena illustrato è in sintesi il contenuto del cosiddetto caos deterministico, del quale riportiamo di seguito l'esempio più famoso.

Nel 1963, il meteorologo Edward Lorenz, studiando fenomeni di convezione termica nell'atmosfera, utilizzò il seguente sistema di equazioni non lineari:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = r x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - b x_3 \end{cases} \tag{2}$$

Egli scoprì una dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, ottenendo quello che viene detto "effetto farfalla". Nella simulazione in Figura 1 possiamo vedere la proiezione del moto nel piano (x_1,x_3). Le due traiettorie rappresentate hanno condizioni iniziali (0,1,1) e (0,1,0.999). Anche se quest'ultime sono numericamente molto vicine, a seconda del punto di partenza si percorre una diversa "ala della farfalla":

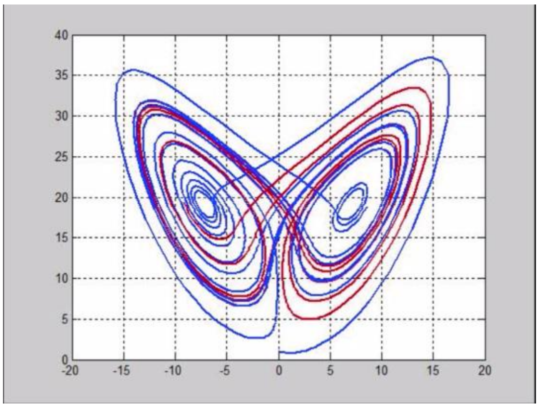

Figura 1

2. Casualità ed equazioni differenziali stocastiche

A dispetto di ogni ipotesi deterministica, alcuni moti appaiono del tutto imprevedibili. Il botanico inglese Robert Brown, già nel 1827, aveva scoperto che il polline sospeso in acqua mostra un moto casuale e continuo. Il moto delle particelle di polline è conseguenza degli urti con le molecole d'acqua: l'effetto globale è quello di un "random walk" (passeggiata aleatoria).

La passeggiata aleatoria unidimensionale si ottiene ipotizzando che la particella possa effettuare con la stessa probabilità uno spostamento di una unità verso destra o verso sinistra oppure avanti o indietro. Salti verticali unitari (Figura 2) sono esibiti da una particella nella seguente Figura 3.

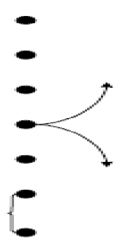

Figura 2

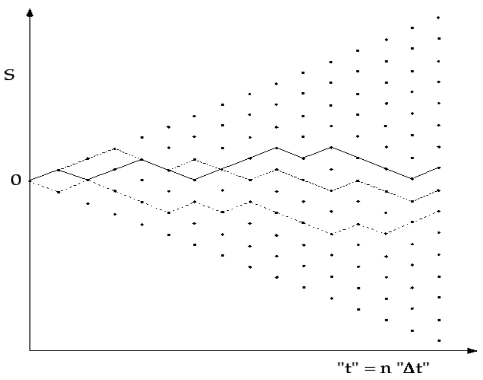

Figura 3

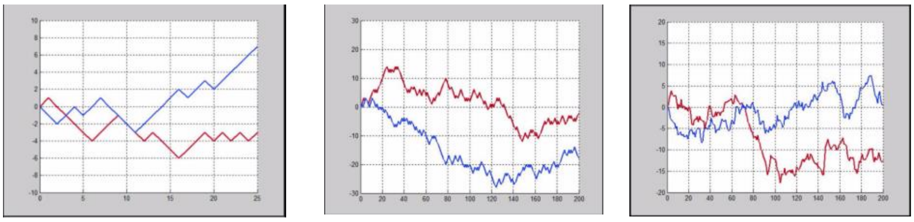

Figura 4

Il precedente, di cui possiamo vedere alcune simulazioni nella Figura 4, viene anche denominato moto browniano unidimensionale. Di esso è possibile considerare l’estensione al caso bidimensionale. Nelle figure seguenti sono messe a confronto traiettorie simulate (Figura 5) con traiettorie reali (Figura 6) di una particella che segue un moto browniano:

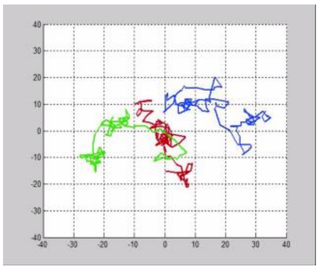

Figura 5

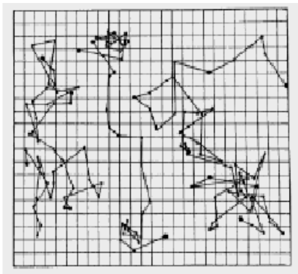

Figura 6

L’idea della casualità di alcuni moti non tardò ad affermarsi anche in altre discipline. In “Théorie de la Spéculation” (1900), Luis Bachelier ipotizzò che i prezzi dei titoli azionari seguano un moto browniano. All’osservazione statistica infatti i prezzi sembrano muoversi in modo imprevedibile come se fossero fissati dal “Demone del caso” (Figura 7).

Figura 7

La complessità dei fenomeni reali rende difficile individuare tutte le variabili e le relazioni causali fra gli eventi. Dal punto di vista della modellizzazione matematica, nel tentativo di descrivere quantitativamente gli effetti complessivi prodotti dall'evoluzione del sistema considerato, si pensò di aggiungere un elemento aleatorio all'equazione deterministica trainante il sistema nella sua evoluzione. Per esempio nella seguente equazione differenziale stocastica (3) un termine di disturbo σdz viene aggiunto una equazione differenziale lineare:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \tag{3}$$

Questo segna l'inizio di un uso estensivo delle cosiddette equazioni differenziali stocastiche nella descrizione di fenomeni che provengono dalla fisica, chimica, biologia fino alle scienze economiche e sociali. In esse l'elemento stocastico viene spesso assunto di tipo browniano.

Le equazioni differenziali stocastiche rappresentano il tentativo di coniugare il prevedile con l’imprevedibile, il determinismo con la casualità nella descrizione dei fenomeni.

Le equazioni differenziali stocastiche sono utilizzate con successo nella modellizzazione dell’evoluzione dei cosiddetti sistemi complessi. Questi ultimi possono provenire da vari ambiti disciplinari, ma presentano analogie profonde, in quanto sono costituiti da un numero elevato di elementi interagenti da cui emerge un unico comportamento collettivo non riconducibile a quello delle singole componenti. Spesso tale comportamento finale può essere interpretato come il risultato dell’autoorganizzazione del sistema, come, ad esempio, nel caso dell’espansione di un microorganismo.

Nella realtà i sistemi complessi differiscono ampiamente per caratteristiche e scala: dal rapido cambiamento delle forme in una reazione chimica alla formazione di galassie, dalla dinamica delle popolazioni alle fluttuazioni dei prezzi dei titoli azionari e dei tassi di interesse. Tutti esibiscono le stesse proprietà di nascita di strutture coerenti su molte scale, che non possono essere spiegate e ricondotte a quelle dei singoli elementi.

Anche conoscendo perfettamente il volo di un uccello o il nuotare di un pesce, non si riuscirebbe a spiegare e dedurre da questo le forme che una moltitudine di uccelli o pesci esibiscono quando essi avvertono un pericolo o percepiscono un vantaggio per il gruppo.

Bibliografia

[1] Bertuglia C.S. and Vaio F. (2005) *Nonlinearity, Chaos and Complexity: The Dynamics of Natural and Social Systems*, Oxford University Press

[2] Nicolis G. (1995) *Introduction to Nonlinear Science*, Cambridge university