

The Napoleon's Theorem: Synthesis and Related Investigations

Giovanni Vincenzi
Univerisità di Salerno
vincenzi@unisa.it

Received on: 22-12-2016. **Accepted** on: 09-01-2017. **Published** on: 01-02-2017

doi: 10.23756/sp.v4i2.283



©Giovanni Vincenzi

Abstract

We recall a synthetic-geometric demonstration of Napoleon Theorem, which makes use of the Fermat point. Some insights on the topic related to convex Quadrilaterals will be made.

Keywords: Napoleon Theorem; convex quadrilaterals; iterated constructions.

Sunto

Si richiama una dimostrazione di tipo sintetico-geometrico del Teorema di Napoleone, che fa uso del Punto di Fermat, e si presentano alcuni approfondimenti sul tema relativi ai Quadrilateri Convessi.

Parole Chiave: Il Teorema di Napoleone; quadrilateri convessi, costruzioni iterate di poligoni.

1 Introduzione

Un famoso teorema di Geometria sintetica afferma che assegnato un qualunque triangolo ABC, i baricentri dei triangoli equilateri costruiti sui lati AB, BC, e

CA individuano i vertici di un triangolo equilatero. Questo risultato è noto come teorema di Napoleone (vedi Figura 1).

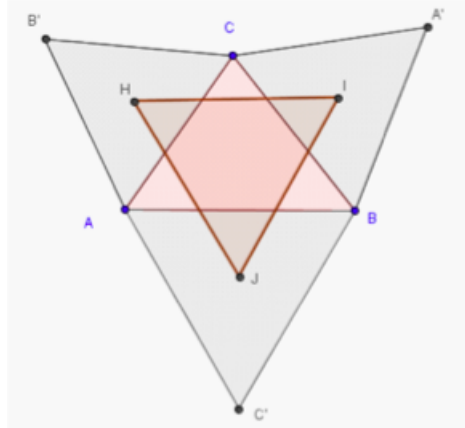


Figura 1: Configurazione del Teorema di Napoleone: Il triangolo HJI è equilatero

Lo scopo di questo articolo è quello di fornire una breve introduzione di questo teorema, ed alcuni approfondimenti relativi all'estensione del teorema al caso dei quadrilateri.

2 La configurazione di Fermat-Torricelli

In questa sezione richiameremo una nota dimostrazione del teorema di Napoleone dovuta a Torricelli, che evidenzia un forte legame tra il teorema di Napoleone e il Punto di Fermat (Figura 2).

Ricordiamo che assegnato un triangolo ABC, diremo *punto di Fermat* F , un punto la cui somma delle distanze dai vertici A, B, C è minima. Si prova come vedremo che tale punto esiste ed è unico.

Esso si può determinare costruendo un triangolo equilatero su ciascun lato del triangolo ABC, come nella Figura 1. Si dimostra che i segmenti AA' , BB' e CC' concorrono nel punto F, che risulterà univocamente determinato (Figura 3).

La più elementare dimostrazione del Teorema di Napoleone di tipo sintetico si basa su Figura 4.

Consideriamo un punto P all'interno del triangolo ABC e congiungiamolo con i vertici del triangolo. Ruotiamo il triangolo ACP intorno al vertice A di 60° in senso antiorario in modo da ottenere $AB'P$.

Congiungiamo B' con C in modo da ottenere il triangolo ACB'. Il triangolo ACB' è equilatero perchè isoscele sulla base $\overline{CB'}$ e l'angolo $\widehat{CAB'} = 60^\circ$.

The Napoleon's Theorem: Synthesis and Related Investigations



Il problema di Fermat
risale alla prima metà del
1600

Fu proposto da Fermat
stesso a Torricelli, il quale
lo risolse in molti modi
diversi.



Nella prima metà del 1800 il
matematico svizzero Jacob Steiner lo
ripropose fornendo anche una sua
generalizzazione.

Per questo prende anche il nome di
«*Problema di Steiner*»

Figura 2: Fermat, Torricelli e Steiner.

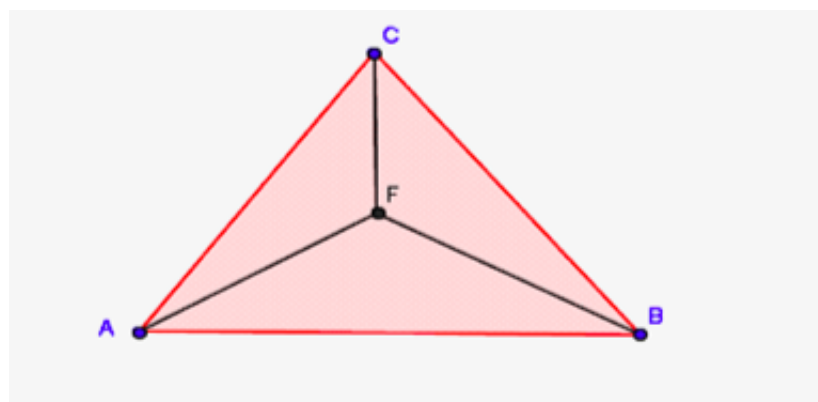


Figura 3: F punto di Fermat: la somma $AF+BF+CF$ è minima.

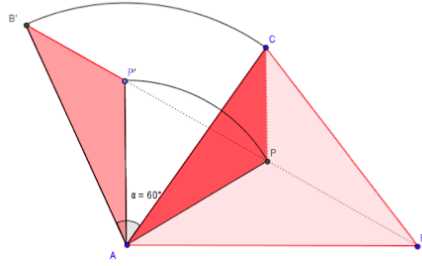


Figura 4: La configurazione di Torricelli

Il triangolo APP' è equilatero perchè isoscele sulla base $\overline{PP'}$ e l'angolo $\widehat{PAP'} = 60^\circ$. In particolare $|\overline{AP}| = |\overline{PP'}|$.

Cosideriamo la somma delle distanze di P dai vertici A, B, C . Avremo:

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| = |\overline{PP'}| + |\overline{BP}| + |\overline{B'P'}|$$

Questa somma è minima se e solo se B', P' e P sono allineati, ovvero se e solo se $P \in \overline{PP'}$.

Per il punto di Fermat valgono le seguenti proprietà (vedi Figura 5):

Proprietà 1. I segmenti $\overline{AA'}, \overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ sono uguali tra loro e tale valore è proprio uguale alla somma delle distanze del punto di Fermat dai vertici del triangolo

Proprietà 2. Gli angoli $\widehat{AFC} = \widehat{BFC} = \widehat{AFB} = 120^\circ$

Proprietà 3. Le tre circonferenze circoscritte ai triangoli equilateri costruiti sui lati del triangolo ABC , si incontrano nel punto di Fermat.

Dalle proprieà 2 e 3 segue subito (vedi figura 5) che *il triangolo di Napoleone HDG associato al triangolo ABC è equilatero.*

3 Una possibile estensione del teorema di Napoleone ai quadrilateri convessi

Ci sono in letteratura altri risultati che generalizzano il teorema di Napoleone, molti dei quali sono presentati direttamente su siti internet da vari appassionati al problema, vedi ad esempio [1–6] Evidentemente la generalizzazione più naturale del Teorema di Napoleone per i quadrilateri convessi è collegata alla soluzione del seguente problema (vedi Figura 6). Assegnato un quadrilatero Q di vertici A, B, C e D , come fatto il poligono Q' derivato di Q , i cui vertici sono i centri dei quadrati costruiti esternamente sui lati di Q ?

Osserviamo che sebbene A_1, B_1, C_1, D_1 non è un quadrato esso ha una forma più regolare rispetto a A, B, C, D .

The Napoleon's Theorem: Synthesis and Related Investigations

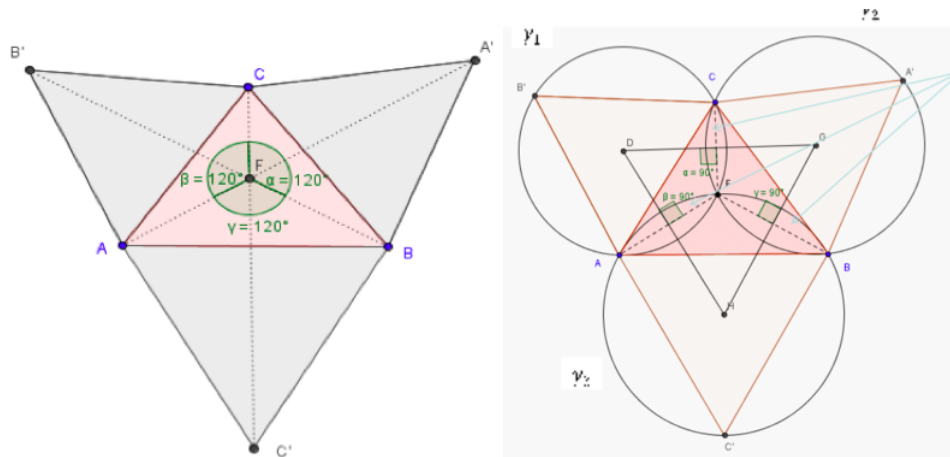


Figura 5: A sinistra le proprietà 1 e 2 del punto di Fermat.
A destra la proprietà 3: Si noti che il punto di Fermat è anche intersezione dei tre assi radicali .

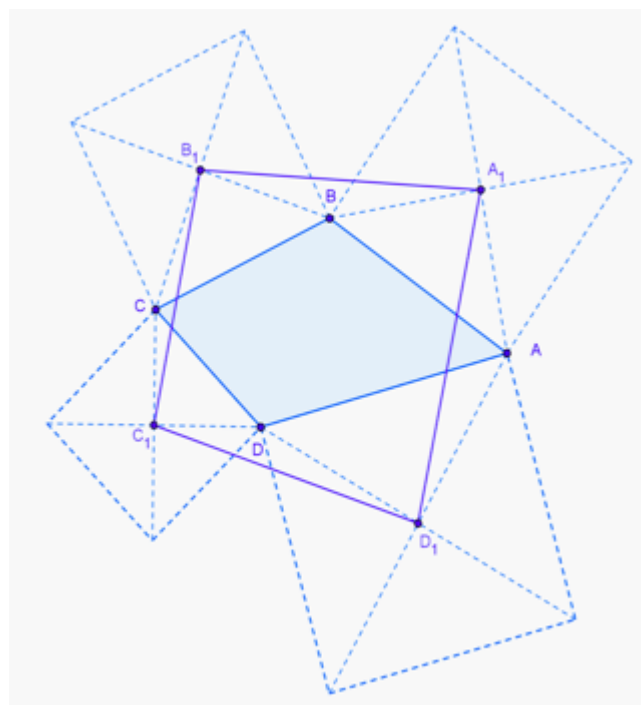


Figura 6: A_1, B_1, C_1, D_1 è il quadrilatero derivato di A, B, C, D

Osserviamo anche che se A, B, C, D non è convesso, allora due dei quadrati costruiti sui lati potrebbero coincidere. Questo non accade per i quadrilateri convessi, infatti si può verificare che se Q è un quadrilatero convesso, allora anche Q' lo è. Se non si assumono particolari ipotesi su Q , il quadrilatero Q' non è detto che sia un quadrato, quindi in generale non sussiste un teorema di Napoleone per i quadrilateri. D'altra parte se si considera un parallelogrammo $ABCD$ il suo quadrilatero derivato è un quadrato (vedi Figura 7),

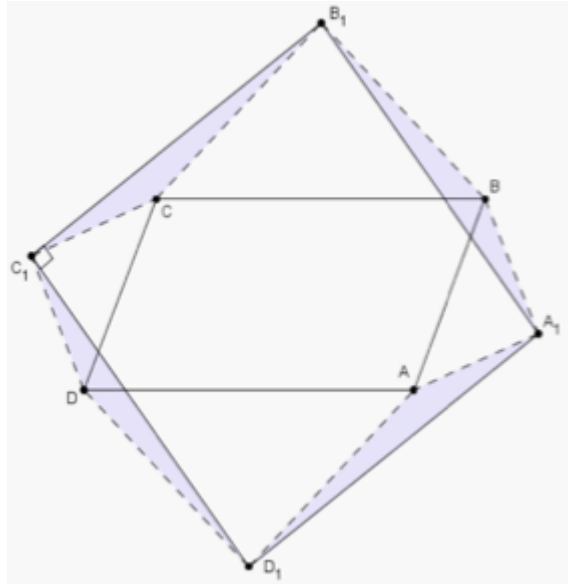


Figura 7: Se $Q = (A, B, C, D)$ è un parallelogrammo, i triangoli evidenziati sono congruenti, pertanto il derivato $Q' = (A_1, B_1, C_1, D_1)$ è un quadrato.

Sorge quindi la naturale questione:

1) Si possono caratterizzare i quadrilateri convessi che ammettono come quadrilatero derivato un quadrato?

Inoltre, assegnato un quadrilatero convesso Q , l'idea di iterare il processo, e di definire induttivamente l' n -esimo quadrilatero derivato Q^n di Q conduce ad una seconda questione:

2) La successione (Q^n) tende ad un quadrato? Ovvero: si può affermare che per interi molto grandi gli angoli e i lati del quadrilatero Q^n tendono ad essere congruenti?

Recentemente in [4] gli autori provano che le risposte ad entrambi i quesiti sono positive. In realtà si potrà constatare che la successione (Q^n) tende "rapidamente" ad un quadrato. Riportiamo di seguito gli enunciati dei Teoremi 1 e 2 di [4]

Teorema 3.1. *Sia Q un quadrilatero convesso. Sono equivalenti:*

- (i) Q è un parallelogrammo;
- (ii) Q^1 è un quadrato;
- (iii) Q^n è un quadrato per qualche intero positivo n .

Teorema 3.2. *Sia Q un quadrilatero convesso, e sia (Q^n) la successione dei quadrilateri derivati da Q , allora Q^n tende ad un quadrato (Figura 8).*

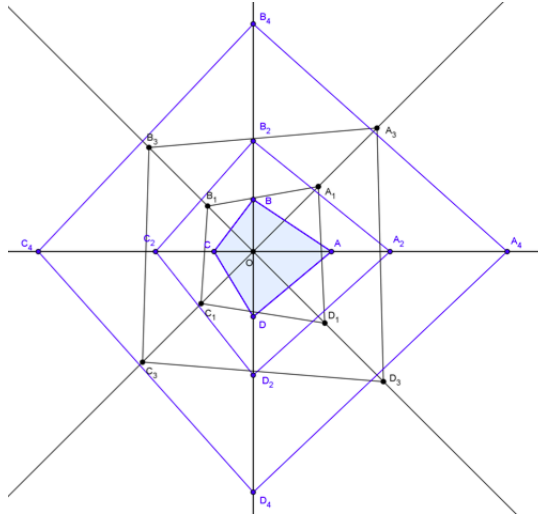


Figura 8: Costruzione dei primi quadrilateri relativi alla successione dei derivati (Q^n) .

Come ci si può aspettare se invece di un quadrilatero si considera inizialmente un poligono convesso P , come per i quadrilateri si osserva che il “derivato” di un poligono non è in generale regolare (Figura 9).

4 La z -derivazione di un poligono

Osserviamo che ogni punto del piano può essere identificato con un numero complesso (Figura 10). Questo punto di vista permette di fare ulteriori considerazioni. Sia P un poligono i cui vertici sono i numeri complessi $v_0, \dots, v_{n-1}$, e sia z un numero complesso. Si definisce n -agone z -derivato di P , e si denota con $P_z^{(1)}$, il poligono avente vertici

$$v_h^{(1)} = \frac{1}{2} [v_h(1+z) + v_{h+1}(1-z)] \quad \forall h \in \{0, \dots, n-1\}$$

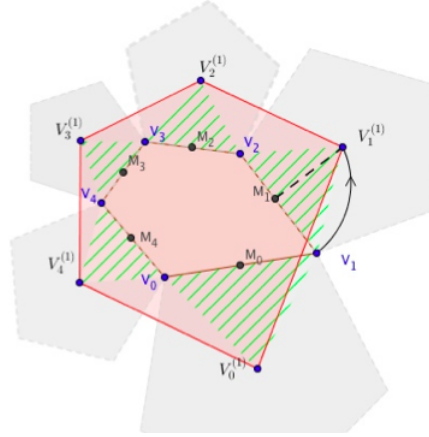


Figura 9: Configurazione di Barlotti-Gerber

dove $v_n := v_0$.

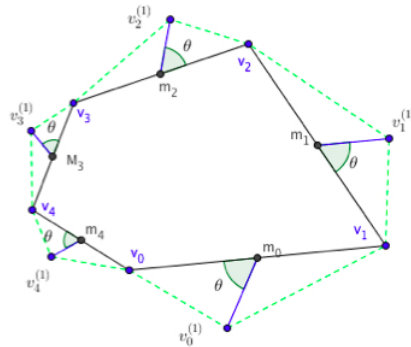


Figura 10: Il pentagono $P_z^{(1)} = (v_0^{(1)}, \dots, v_4^{(1)})$, z -derivato del pentagono $P = (v_0, \dots, v_4)$

Osserviamo che se denotiamo i vertici di un triangolo con i numeri complessi v_0, v_1 , e v_2 , si ha che i vertici dei triangoli di Napoleone possono essere espressi come segue:

$$v_h^{(1)} = \frac{1}{2} \left[v_h \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i \right) + v_{h+1} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i \right) \right] \quad \text{con } h = 0, 1, 2$$

Il triangolo di Napoleone è quindi un caso particolare della z -derivazione quando $z := i\sqrt{3}/3$. Questo permette di ottenere una dimostrazione algebrica quasi immediata del teorema di Napoleone (vedi [5, Theorem 3.1, Remark 3.1]).

The Napoleon's Theorem: Synthesis and Related Investigations

Chiaramente partendo da un poligono P questo processo si può iterare, pervenendo ad una successione iterata di poligoni $P_z^{(1)}, P_z^{(2)}, \dots, P_z^{(k)}$. È quindi è naturale chiedersi:

1) Se z è un numero complesso e T è un triangolo, che cosa succede alla successione $(T_z^{(k)})$?

2) Se z è un numero complesso e Q è un quadrilatero, che cosa succede alla successione $(Q_z^{(k)})$?

Per quanto riguarda questi quesiti, si può dire che in generale la tendenza è che le successioni di triangoli [risp quadrilateri] ottenute sono regolari (vedi Figure 11, 12). Sebbene precise eccezioni sono state rilevate come provano i Teoremi 4.1 e 4.2.

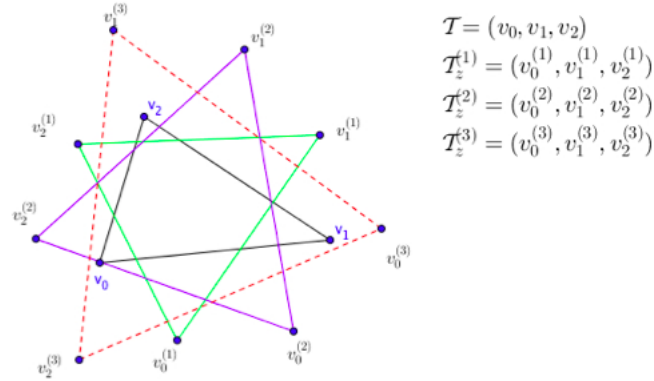


Figura 11: Descrizione della sequenza $(T_z^{(k)})$, con $z = 0.403 + i 0.728$. Si noti la rapidità con cui già al terzo derivato si approssima la forma di un triangolo equilatero

Teorema 4.1. ([5, Teorema 3.4]) Sia $\mathcal{T}$ un triangolo e $z = x + iy \in \mathbb{C}_0^+$. Allora la sequenza $\left(T_z^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ è regolare $\iff \mathcal{T}$ è equilatero oppure se z appartiene alla regione del piano definita da:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}y < 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (\text{Figura 13}).$$

Teorema 4.2. ([5, Teorema 4.1]) Sia $\mathcal{Q}$ un quadrilatero, e sia $z = x + iy \in \mathbb{C}_0^+$. La sequenza $\left(Q_z^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge ad un quadrato $\iff$ una delle seguenti condizioni è verificata (Figura 14):

1. $\mathcal{Q}$ è un quadrato;

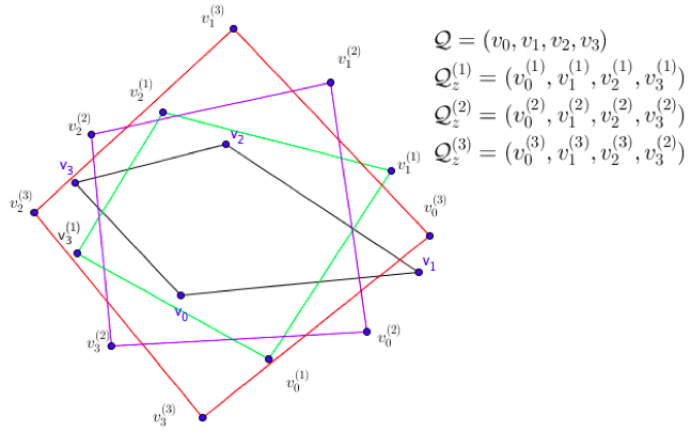


Figura 12: Descrizione della sequenza $(Q_z^{(k)})$, con $z = 0.318 + i 0.6$.

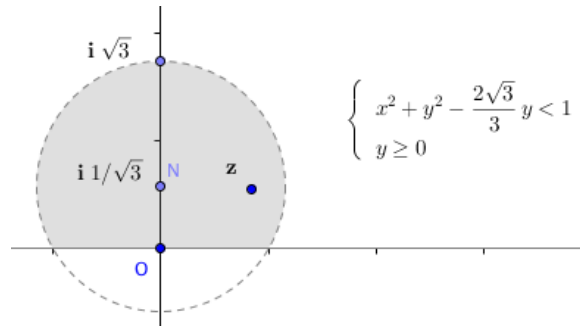


Figura 13: If z appartiene alla regione ombreggiata la sequenza $(\mathcal{T}_z^{(k)})_k$ è regolare. Il viceversa vale se $\mathcal{T}$ non è equilatero. Notiamo che $z = i/\sqrt{3}$ - che definisce la configurazione di Torricelli - appartiene alla regione indicata.

2. $\mathcal{Q}$ è un parallelogramma e z giace nella regione circolare definita dalle equazioni: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y < 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$;
3. $\|z\| < 1$ (ovvero z giace nel cerchio unitario).

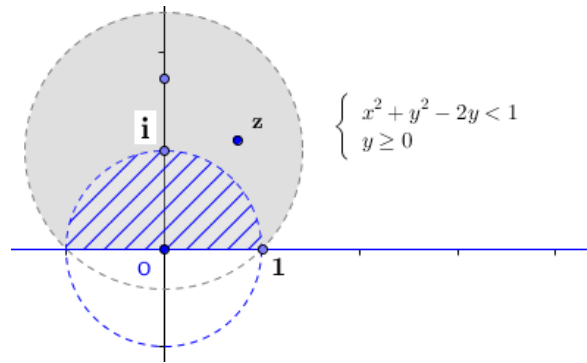


Figura 14: Se $\mathcal{Q}$ è un parallelogramma e z appartiene alla regione ombreggiata allora la sequenza $\left(Q_z^{(k)}\right)_k$ è regolare; l'ipotesi che $\mathcal{Q}$ è un parallelogramma si può eliminare se si considera z anche nel cerchio unitario (parte con le strisce).

Riferimenti bibliografici

- [1] T. Andreescu, V. Georgiev and O. Mushkarov, *Napoleon polygons*, Amer. Math. Monthly 121 (2015), 24-29.
- [2] A. Barlotti, *Intorno ad una generalizzazione di un noto teorema relativo al triangolo*, Bollettino Unione Matematica Italiana (3) 7 (1952), 182-185.
- [3] A. Barlotti, *Una proprietà degli n -agoni che si ottengono trasformando in una affinità un n - agono regolare*, Bollettino Unione Matematica Italiana (3) 10 (1955), 96-98.
- [4] S. Donisi, G. Vincenzi, G. Vitale, *Il Teorema di Napoleone per i Quadrilateri Convessi*, Archimede 3-2012 Pag. 139-144 ISSN: 0390-5543
- [5] S. Donisi, H. Martini, G. Vincenzi, G. Vitale, *Polygons derived from polygons via iterated constructions*. Electronic Journal Differential Geometry - Dynamical Systems, Vol. 18, 14 - 31 (2016).
- [6] <http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/ParoleMate/Feb07/Napoleone.html>
- [7] <http://www.robertobigoni.eu/Matematica/Napoleone/Napoleone.html>
- [8] <http://www.cut-the-knot.org/proofs/napoleon.shtml>