

# Geometria e Relatività: Una riflessione fra Storia ed Epistemologia

Mario Innocenzo Mandrone

Università del Sannio di Benevento  
Dipartimento di Scienze e Tecnologie  
almavit@libero.it

## Sunto

Il presente lavoro analizza alcuni aspetti fondazionali della teoria della relatività da un punto di vista storico ed epistemologico. La Relatività Generale, infatti, stabilisce l'identificazione tra lo spazio-tempo che è una varietà metrica, quindi, "a priori", non dinamica, e la materia. Ciò distingue la Relatività Generale dalla meccanica newtoniana dove lo spazio e il tempo sono invece assoluti e, pertanto, separabili dal moto e dalla materia. Il calcolo intrinseco sulle varietà, così come tutti gli approcci di natura globale che sono indipendenti dalla scelta o dal cambiamento delle coordinate locali sono quindi adatti per la descrizione di questa teoria ed essi rappresentano l'eredità matematica più significativa della Teoria della Relatività stessa.

**Parole chiave:** Varietà n-dimensionali; Spazio curvo di Riemann; equazioni di campo;

## 1. Introduzione

Nel XX secolo, la ricerca per una comprensione più profonda delle leggi della natura si è concentrata sullo sviluppo di due importanti teorie: la relatività generale e la meccanica quantistica. La relatività generale è la teoria di Einstein secondo cui la gravità è connessa alla curvatura dello spazio-tempo: la struttura matematica sottostante è la geometria riemanniana. Prima di Einstein, la struttura dello spazio-tempo era rigida, fissa dall'inizio, uno schermo fisso su cui i fenomeni fisici si svolgevano. Secondo Einstein, la struttura dello spazio-tempo è, invece, dinamica ed evolve obbedendo alle equazioni della Relatività Generale. La teoria della Relatività Generale, cui A. Einstein pervenne nel 1916

dopo una lunga ricerca che occupò le sue riflessioni dal 1905 al 1915, rappresentò per la fisica moderna una profonda rivoluzione concettuale. In essa, il campo gravitazionale è identificato con una metrica di segnatura lorentziana in uno spazio tempo quadridimensionale e le equazioni dinamiche che ne reggono la struttura sono espresse in funzione del tensore di curvatura della metrica stessa. L'influenza della Relatività Generale sulla matematica del XX secolo è stata enorme. Il ruolo centrale della geometria riemanniana nella relatività generale ha ovviamente incoraggiato lo sviluppo di questa importante area della matematica e la sua applicazione ad altri campi della matematica. L'impressione è però che questi problemi siano studiati uno per uno, in maniera separata, senza capire qual è la connessione tra di loro. Per fare un'analogia, è come guardare una catena di montagne coperta dalle nuvole. Solo le cime più alte, quelle che emergono dalle nuvole, sono visibili. Il resto delle montagne e la connessione tra le cime visibili sono nascoste alla vista dell'osservatore. Nello stesso modo, in matematica noi scopriamo delle teorie isolate, ma non la teoria completa. Questa è la sfida per la matematica del XXI secolo: cercare di rigorizzare la teoria dei campi e svelarne i misteri.

## **2. La Nascita Della Fisica Moderna**

Le leggi di Newton sono leggi deterministiche, universali e necessarie rispetto alle quali le nozioni di spazio e tempo assumono un ruolo fondamentale ai fini della determinazione del moto, problema risolto dalla meccanica classica. A tal proposito, Newton suppose l'esistenza di uno spazio assoluto, vuoto, tridimensionale, invisibile, non modificabile dalle masse e fermo rispetto al loro moto. La rivoluzione relativistica, invece, fu il prodotto del sempre più evidente contrasto tra la descrizione del moto delle particelle elettricamente cariche nei campi di Maxwell e la descrizione del moto secondo le leggi della meccanica di Newton. Nel 1905, quando come fisico lavorava all'Ufficio brevetti di Berna, Einstein trovò la soluzione a tale problema. Dimostrò che si poteva salvare sia il principio della relatività del moto, sia il principio della costanza della velocità della luce a patto di rinunciare a ciò che si riteneva immutabile: lo spazio e il tempo assoluto. Einstein dimostrò che la meccanica classica si basava su due assunti errati: 1) che la misura del tempo fra gli eventi fosse indipendente dal moto dell'osservatore; 2) che la misura dello spazio fra due punti di un sistema di riferimento fosse indipendente dal moto dell'osservatore. Lasciando cadere questi due assunti, le contraddizioni fra il principio di relatività galileiana e il principio della costanza della velocità della luce scompaiono, perché non vale più il teorema d'addizione delle velocità. In tal modo Einstein estese la validità del principio di relatività della meccanica classica ai fenomeni elettromagnetici. Occorreva, però, rivedere profondamente le leggi della dinamica di Newton senza rinunciare al principio di causalità. Nel pensare lo spazio e il tempo come

relativi, Einstein mostrava di aver appreso la lezione del positivismo machiano. Ma la teoria della relatività speciale, col suo principio della costanza della velocità della luce, è incompatibile con la forza di gravità di Newton che agisce istantaneamente a distanze infinite. Einstein lavorò al problema per diversi anni e, finalmente, nel 1915 trovò la soluzione: la teoria della relatività generale, i cui principi venivano estesi ai moti accelerati, mentre in origine si riferivano ai soli moti uniformi (che rappresentano sempre delle idealizzazioni). Per Einstein la forza di gravità di Newton non esiste, le masse non si muovono perché attratte dalla forza di gravità ma si attraggono perché curvano lo spazio-tempo seguendo così il percorso più breve, la geodetica. La relatività ristretta metteva in discussione la natura intuitiva del concetto di tempo. Ora la stessa sorte toccava all'idea intuitiva dello spazio tridimensionale euclideo. Lo spazio di Newton veniva infatti sostituito con una nuova geometria dello spazio, un continuo spazio-temporale a quattro dimensioni, la cui geometria è non-euclidea. In tal modo, Einstein attribuiva un significato fisico alla geometria di Riemann, e poneva fine alle discussioni sui fondamenti della geometria euclidea e alle dispute epistemologiche tra la fine dell' Ottocento e l'inizio del Novecento.

### **3. L' approccio geometrico alla teoria della relatività ristretta**

*"In mathematics you don't understand things. You just get used to them"*  
Johan von Neumann. La Relatività si è sviluppata secondo due tappe successive che costituiscono, anche dal punto di vista epistemologico, due teorie vere e proprie: 1) la teoria della Relatività Ristretta; 2) la Teoria della Relatività Generale. La seconda, tuttavia, non può essere considerata come una semplice estensione della prima: la costruzione delle due teorie, infatti, fu guidata da due epistemologie molto diverse. Einstein ritiene insoddisfacente dal punto di vista epistemologico: a) il fatto che le sole leggi della Meccanica siano invarianti nel passaggio da un sistema inerziale ad un altro (questa considerazione condurrà alla Relatività Ristretta); b) il fatto che le leggi della Meccanica Newtoniana cambino formulazione nel passaggio da un sistema inerziale ad uno non inerziale (questa considerazione condurrà alla Relatività Generale). La teoria della relatività ristretta si fonda sul principio di relatività secondo il quale le leggi della fisica debbono essere invarianti in forma nel passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro e sull'invarianza della velocità della luce nel vuoto, cioè sulla sua indipendenza dalla velocità del sistema di riferimento. A partire da questi due principi è possibile ricavare tutti i risultati elementari della teoria: 1) L'invarianza dell'intervallo di tempo; 2) Le leggi di trasformazione di Lorentz (e quelle di Galileo come loro limite qualora la velocità della luce possa essere considerata infinita); Dal punto di vista della cinematica la demolizione

dei concetti newtoniani di spazio e tempo “assoluti” come “contenitori autonomi” rispetto ai corpi e ai campi che in essi si muovono, ha come conseguenza: a) la contrazione delle lunghezze; b) la dilatazione dei tempi c) la relatività della simultaneità di due eventi che avvengono in due punti diversi dello spazio (ovvero due eventi che accadono in due punti diversi dello spazio e risultano simultanei a un osservatore, non sono simultanei per un osservatore in moto traslatorio uniforme rispetto al primo). Di conseguenza anche le velocità, se prossime a quella della luce nel vuoto non si sommano e sottraggono nel modo galileiano-newtoniano, ma in modo tale che la velocità della luce nel vuoto non possa mai essere superata. (composizione relativa delle velocità). Dal punto di vista della dinamica le conseguenze sono ancora più sorprendenti con la comparsa della “*equivalenza massa-energia*” contenuta nella formula più famosa della Relatività:  $E=mc^2$ , secondo la quale “*la massa di una certa quantità di materia può essere, in opportune condizioni, trasformata in energia e viceversa*”. Quest’ultima, pari a  $mc^2$  (dove  $m$  è la massa della particella e  $c$  la velocità della luce nel vuoto), costituisce un elemento di assoluta novità rispetto alla fisica pre-relativistica secondo la quale, invece, una particella libera in quiete non possiede energia. Per il fatto di avere una massa inerziale, ogni particella possiede dunque un’energia (dette energia di massa o energia di riposo): questo significa che, in particolare, *nella fisica relativistica la legge di conservazione della massa non può essere valida*. In una collisione tra particelle elementari, per esempio, massa ed energia cinetica possono trasformarsi l’una nell’altra con il solo vincolo che la loro somma prima e dopo la collisione rimanga costante. Un’altra importante implicazione dell’applicazione dei principi della relatività alla dinamica riguarda l’esistenza di particelle di massa a riposo nulla: la relazione energia-impulso relativistica impone che, se la massa è nulla, il suo impulso è uguale al rapporto tra l’energia della particella e la velocità della luce:  $p = \frac{E}{c}$ . Difatti, posto  $m = 0$  nell’equazione

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1)$$

si ottiene

$$E^2 = p^2 c^2 \quad (2)$$

e quindi

$$E = pc \quad (3)$$

Mentre l’energia di una particella libera non relativistica espressa in funzione dell’impulso  $E = p^2/2m$  tende a infinito per particelle di massa nulla, questo non accade nel caso dell’equazione relativistica. Così, nella relatività, anche le particelle di massa nulla possiedono energia ed impulso. Inoltre le particelle di massa nulla debbono viaggiare alla velocità della luce qualunque sia il sistema di riferimento nel quale si misura la loro velocità. Infatti se  $m = 0$ , da :

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v} \quad (4)$$

$$E = pc \quad (5)$$

segue che

$$v = \frac{pc^2}{E} = \frac{pc^2}{pc} = c \quad (6)$$

E' questo il caso dei fotoni, le particelle associate al campo elettromagnetico. Infine, nello studio dell'elettrodinamica relativistica, la teoria del campo elettromagnetico di Maxwell può essere completamente riformulata utilizzando il linguaggio formale dell'analisi tensoriale, esattamente come per la dinamica relativistica. A differenza di quest'ultima, tuttavia, la teoria di Maxwell non richiede modifiche per soddisfare i principi della relatività. Difatti le equazioni di Maxwell, espresse con il linguaggio dell'analisi tensoriale, sono manifestamente covarianti (cioè invarianti in forma per trasformazioni di Lorentz). In altre parole, la formulazione originale di Maxwell dei campi elettromagnetici e delle loro interazioni con le particelle elettricamente cariche, è una teoria relativistica. La Teoria della Relatività subì essa stessa una sorta di riconcettualizzazione quando Herman Minkowski (1864-1909) ne diede una rappresentazione in uno spazio tempo a quattro dimensioni detto spazio di Minkowski, in cui il tempo rappresentava la quarta dimensione che veniva ad aggiungersi alle tre dimensioni dello spazio ordinario. Lo spazio-tempo di Minkowski è una varietà pseudo-riemanniana privo di curvatura, quindi è una varietà pseudo-euclidea, definito dalla metrica  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

$$\text{dove } [\eta_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Come si vede, il 4- intervallo è una quantità scalare ed è un invariante relativistico ovvero è invariante per trasformazioni di Lorentz. Quindi il valore calcolato per  $s^2$  di due eventi è lo stesso in ogni sistema di riferimento inerziale. Creando un calcolo tensoriale tetradimensionale, egli ottenne per lo spazio tetradimensionale ciò che il calcolo vettoriale ordinario aveva ottenuto per le tre dimensioni spaziali. Improvvisamente la Fisica si stava "trasformando" in geometria. Da quel momento il ruolo della matematica nella fisica, e in particolare della geometria prenderà in un certo senso il sopravvento. A tal fine è, però, necessario introdurre strumenti matematici che consentono di trattare lo "spazio-tempo" come un continuo quadridimensionale: si tratta del formalismo delle varietà riemanniane e pseudo-riemanniane. All'interno di questo formalismo trovano la loro naturale collocazione concetti assai importanti per la

teoria della relatività come quelli di metrica pseudo-riemanniana, metrica pseudo-euclidea, equazioni tensoriali, covarianza a vista delle equazioni relativistiche. Ma una ulteriore riflessione su queste tematiche esula dagli scopi del presente lavoro.

#### **4. La teoria della relatività generale. Approccio geometrico: “dallo spazio piatto di Minkowski allo spazio curvo di Riemann.”**

“I want to Know God’s thoughts. The rest are details” - A. Einstein

La Relatività generale riesce ad estendere le leggi relativistiche, inizialmente valide solo per i sistemi in moto rettilineo uniforme l’uno rispetto all’altro, anche ai sistemi non inerziali, qualunque sia il moto degli osservatori collegati al sistema. Essa nasce in una prospettiva epistemologica ben diversa da quella dell’operazionismo iniziale della Relatività Ristretta. La Teoria della Gravitazione di Newton, la Teoria dell’elettromagnetismo di Maxwell, la Relatività Ristretta erano più che soddisfacenti di fronte ai dati sperimentali. Ma la fisica teorica era “imperfetta” da un punto di vista “logico” ed “estetico”. Ed è proprio questa imperfezione logica ed estetica che determina la scelta di un criterio di “perfezione interna”. Einstein era, in altri termini, alla ricerca di una teoria che potesse soddisfare anche ad un criterio epistemologico interno: 1) di semplicità; 2) di eleganza; 3) di unificazione. Per realizzare questo progetto Einstein si ispirò alle “considerazioni di Mach” a proposito dell’inerzia in rapporto alla gravitazione. Partendo dalle idee di Mach, Einstein giunse alla formulazione del principio di equivalenza tra il campo gravitazionale e le “forze apparenti” che compaiono nei sistemi non inerziali, principio che possiamo così enunciare :

*"ogni sistema di riferimento inerziale, immerso in un campo gravitazionale uniforme, è del tutto equivalente a un sistema di riferimento uniformemente accelerato (rispetto al primo) nel quale non vi sia alcun campo gravitazionale".*

Nella teoria della relatività generale, elaborata in modo puramente deduttivo e solo nel seguito confermata sperimentalmente mediante osservazioni e misure astronomiche, l’equivalenza fra i due tipi di massa rappresentò la chiave per modificare le “sacre” leggi della gravitazione newtoniana. In una conferenza tenuta a Tokio nel 1922, Einstein raccontò che “*il pensiero più felice della sua vita*” lo ebbe un giorno di autunno del 1907. Occorreva, però, uno strumento matematico adatto per introdurre il “ principio di equivalenza” entro la rappresentazione spazio-temporale a 4 dimensioni in maniera tale da generalizzare lo spazio di Minkowski della Relatività Ristretta in una nuova struttura capace di includere anche la gravitazione. Questo passaggio condusse

all'introduzione di uno spazio-tempo curvo basato sulla geometria non euclidea di Riemann (1826-1866). Comparve, a questo punto, nella fisica la “*non linearità*” delle equazioni che si ritrova a causa della curvatura dello spazio-tempo, che ora non è più euclideo.

La Relatività Generale rappresenta la prima teoria di campo a fare uso sistematico di “equazioni non lineari” (equazioni di Einstein), quello stesso tipo di equazioni che, dopo alcuni decenni, si stanno dimostrando capaci di rivoluzionare l'intero statuto epistemologico delle scienze, con la comparsa del caos deterministico e della complessità. Con la Relatività Generale e con la Meccanica Quantistica il peso dell'apparato matematico nella fisica diventa sempre più rilevante. La matematica richiesta è meno intuitiva e tecnicamente più sofisticata. La fisica si allontana sempre più dall'esperienza diretta e dal senso comune. La gravità diventa una proprietà geometrica dello spazio-tempo. La presenza di un oggetto massivo modifica le proprietà geometriche dello spazio, nel senso che tende a incurvarlo. La teoria della relatività generale è, pertanto, essenzialmente una teoria geometrica della gravitazione, vale a dire che l'azione gravitazionale esercitata da un corpo non si esplica come una vera e propria forza, ma si esercita in termini di una modifica delle proprietà metriche della geometria dello spazio-tempo circostante. La geometria in questione deve essere, in generale, la geometria di uno spazio-tempo “*curvo*”. Possiamo, pertanto, sintetizzare il nucleo della relatività generale in due enunciati: a) la traiettoria di un corpo in un campo gravitazionale adotta la forma di una geodetica dello spazio tetradimensionale; b) la relazione tra la presenza della massa e la forma dello spazio tetradimensionale è data dall'equazione di campo di Einstein.

L'equazione di Einstein è costituita da invarianti e, pertanto, mantiene la propria forma per qualunque osservatore. Se la distanza e la curvatura non dipendono dal sistema di coordinate, neppure i fenomeni fisici possono dipendere dal punto di vista scelto dall'osservatore per descriverli. Si tratta della generalizzazione di uno dei due postulati della relatività speciale secondo il quale le leggi della fisica assumono la stessa forma in qualunque sistema di riferimento inerziale. Adesso possiamo andare oltre e affermare che “*le leggi della fisica assumono la stessa forma in qualunque sistema di riferimento che consideriamo muoversi di moto accelerato*” La relatività ristretta aveva stabilito l'uguaglianza di tutti i sistemi inerziali, lasciando fuori i sistemi accelerati, che presentano forze ben individuabili con un qualunque esperimento. Questo poneva i sistemi inerziali su una posizione *privilegiata*, diversa rispetto ai sistemi non inerziali. In più, la relatività ristretta aveva mostrato che lo spazio ed il tempo devono essere trattati insieme se si vogliono ottenere risultati coerenti; il tempo era diventato una coordinata come le altre 3 e ad impedire certi movimenti in questo spazio a 4 dimensioni c'è solo il principio di causalità. In regioni dello spazio-tempo a 4 dimensioni infinitamente piccole, per le quali è

possibile un'accelerazione del sistema di coordinate in maniera da non indurre alcun campo gravitazionale, resta valida la relatività ristretta. Vale, cioè, che:

$$ds^2 = - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2 + (dx_4)^2 \quad (9)$$

Il valore del  $ds$  non dipende dal sistema di coordinate (da dove colloco l'origine degli assi e dal suo orientamento).

## 5. Conclusioni: mutamenti nel quadro scientifico ed epistemologico

Oggi siamo ancora alla ricerca di una teoria unitaria, ma il quadro delle scienze sta cambiando profondamente. Da un lato si sta perseguendo la strada dell'unificazione aperta dalla Relatività e dalla Teoria Quantistica dei campi, oggi impegnata nell'impresa non facile di "quantizzare la gravitazione". dall'altro ci si è imbattuti nel problema della "non linearità", ormai inevitabile anche a causa della stessa Relatività Generale che l'ha introdotta per prima con la comparsa della "instabilità", del "caos deterministico" e della "complessità" e non sappiamo ancora quale sarà l'esito di tutto questo. La "Relatività" ha sollevato, sin dal suo apparire, una serie di problemi concettuali che non potevano non avere delle ripercussioni filosofiche riguardo a: 1) Spazio e Tempo. 2) Relatività e oggettività. 3) Materia e Energia 4) Causalità. 5) Fisica geometrica/dinamica ed altri.

Ci troviamo, ora, di fronte a due tendenze:

- la prima che conduce a *ridurre la fisica a geometria "di uno spazio tempo"* arricchito nel numero delle sue dimensioni, interpretate con vari significati fisici.

- la seconda che conduce a diversificare i ruoli dello spazio e del tempo in una prospettiva "dinamica" nella quale entrano in gioco: a) l'instabilità, la caoticità e comunque l'asimmetria (freccia) del tempo; b) l'irreversibilità termodinamica dei sistemi in non equilibrio, tipica della complessità e del mondo biologico. Quello che ancora si può forse aggiungere a conclusione di queste osservazioni è il fatto che la scienza oggi sta cercando di superare il classico metodo del riduzionismo, che appare ormai insufficiente a far progredire la conoscenza scientifica della natura. Per la fisica, in prima istanza almeno, ciò sembra significare la necessità di non limitarsi a teorie rette da "equazioni lineari" per le quali la somma di due soluzioni è ancora una soluzione e quindi il "tutto viene ottenuto come somma delle parti". E la relatività Generale è stata la prima teoria "a esigere che la legge invariante più semplice non sia lineare, né omogenea nelle variabili di campo e nelle loro derivate". Tuttavia essa è ancora, in qualche modo, una teoria locale nel senso che, facendo uso della geometria differenziale la struttura di spazio vettoriale



### *Geometria e Relatività: una riflessione fra Storia ed Epistemologia*

che utilizza è necessariamente locale, basata cioè sul fatto che nell'intorno di un punto ogni spazio viene approssimato da uno spazio lineare. Ma questo non è tanto un limite proprio della Relatività quanto una caratteristica di tutta la matematica che si basa sul calcolo differenziale e integrale che è per sua natura riduzionistico ????. Ma, per ora, non possediamo ancora una matematica diversa e non sappiamo ancora neppure se in futuro potremmo disporne. Senza dubbio, però, Einstein, alla luce delle nuove scoperte, distinguerebbe le sue vecchie ossessioni: tempo, spazio e gravità. Ma per procedere oltre il noto abbiamo bisogno di idee nuove... mai dimenticando che l'Universo ha essenzialmente una "Struttura Geometrica".



Figura 1 -William Blake "Dio crea il mondo con il suo compasso"

## Bibliografia

[1] R. Bernabei et al. (2003), Dark matter search. Riv. Nuovo Cim., 26N1:1–73. astro-ph/0307403.

[2] Ashetekar, A., (1998), «Geometric Issues in Quantum Gravity», in *The Geometric Universe. Science, Geometry, and the Work of Roger Penrose*, ed. by S.A. Hugget, P. Tod, L. J. Mason, Oxford, Oxford University Press, pp. 172-194.

[3] S. Hawking (2005), L'universo in un guscio di noce, Oscar Mondadori [4] M. Francaviglia - M.Palese, I fondamenti epistemologici della Relatività Generale e la sua “ eredità matematica”- Bollettino U.M.I Serie VIII, Vol.VIII-A. Agosto 2005, 289-312.

[5] A. D. Aczel (2004), L'equazione di Dio- Il Saggiatore/Net, Milano.

[6] A. Einstein (2014), Il significato della relatività- a cura di E. Vinassa de Regny- Edizione integrale- Newton e Compton editori.

[7] E. Bellone (1994), Storia della fisica moderna e contemporanea. UTET.

[8] S. Hawking (2004), La teoria del tutto, origine e destino dell'universo, BUR, Biblioteca Universale Rizzoli.

[9] M. Dapor (2011), Relatività e meccanica quantistica relativistica, a cura di Gianluca Introzzi- Carocci Editore.

[10] F. Casolaro, (2002), Dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo. Atti del Congresso Nazionale Mathesis, Bergamo 17-19 ottobre 2002, pag.185-198.