

# **La Geometria oltre Euclide: L'evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola?**

Ferdinando Casolaro

University of Sannio, Benevento, Italy  
fcasolar@unisannio.it

## **Sunto**

Si propone l'organizzazione di un percorso di ampliamento del modello euclideo per l'insegnamento. Nelle ultime Indicazioni nazionali e Linee guida, relativamente alla geometria, si fa solo qualche confuso cenno allo studio di geometrie che sono alla base della Fisica moderna (geometrie sullo spazio curvo), dell'arte e dell'Architettura (proiettiva e descrittiva). Lo studio ed i risultati dei Nuclei di Ricerca Didattica istituiti nelle Università italiane negli ultimi sessanta anni portano invece a considerazioni diverse che nel presente lavoro analizzeremo.

**Parole Chiave:** Modifiche Riforma Gentile. N.R.D. nelle Università italiane. Geometrie non euclidee. Trasformazioni geometriche.

## **1. Introduzione**

Nell'ambito della discussione sul tema "La geometria: Euclide, oltre Euclide", tenutasi nell'incontro del 12 maggio 2013 a Castellammare di Stabia, si è percepita l'idea che il progetto da me presentato, di ampliamento del modello euclideo alle altre geometrie sviluppatesi negli ultimi due secoli, consista nell'aggiungere ulteriori elementi - in particolare di geometria proiettiva e di geometrie non euclidee - alle proposte delle indicazioni ministeriali e linee guida.

Non è così, perché il mio obiettivo è l'inserimento di percorsi organizzati all'interno dello sviluppo programmatico della geometria euclidea

(anche secondo le Indicazioni nazionali e le Linee guida), che resta sempre il più forte strumento a disposizione del docente per educare gli allievi al miglioramento delle capacità logiche e di linguaggio ma che, dopo 2300 anni dalla formulazione di Euclide, va sicuramente ampliato all'evoluzione ed ai risultati dei secoli successivi. Ovviamente si eviterà qualche dimostrazione di teoremi pesanti ed inutili, che spesso sono proprietà evidenti.

Relativamente alla geometria proiettiva, si propone un percorso sviluppato in collaborazione con Alessandra Rotunno [1] che l'aveva già sperimentato all'Istituto d'Arte "Boccioni" di Napoli. In seguito è stato oggetto di proposta nelle classi in cui i corsisti della SICSI (SSIS-Campania) hanno effettuato il Tirocinio, per cui è stato sperimentato su percorsi naturali con la partecipazione degli alunni.

Riguardo il modello geometrico per lo spazio curvo utilizzato da Einstein per la Teoria della Relatività, ho proposto un percorso, già presentato al Congresso Nazionale Mathesis 2002 [2], anche questo sperimentato per alcuni anni e da molti giovani docenti nell'ambito del tirocinio alle SSIS.

Il progetto, nella sua globalità, è inserito nel volume degli atti della Scuola Estiva di Terni 2011 [3]; alle pagine 9-11 c'è la descrizione degli argomenti che permettono di comprendere il lavoro di assemblaggio che hanno fatto i docenti partecipanti.

## **2. L'evoluzione dei programmi nelle Scuole secondarie di secondo grado dalla riforma Gentile al Progetto Brocca [4]**

Nel periodo 1923-1945 i programmi per le scuole secondarie di secondo grado erano rimasti fermi alla riforma Gentile. Nel 1945 una commissione nominata dai governi delle potenze vincitrici della seconda guerra mondiale formulò dei piani di studio destinati a sostituire quelli di epoca gentiliana.

Nel 1950 la comunità matematica italiana elabora nuovi piani di studio, tenendo anche conto delle esperienze maturate in altre nazioni, in particolare in Francia, Belgio ed Inghilterra [4].

Nel periodo 1950-1990 furono elaborate tre consecutive proposte di modifica della riforma Gentile.

1) 1961-1962: prima modifica alla riforma. Furono istituite delle "classi pilota", nelle quali si affrontano temi di "matematica moderna" e l'anno successivo (1963) fu nominata una commissione UMI-CIIM

*La Geometria oltre Euclide: L'evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola?*

(“commissione di Frascati” perché si riuniva a Frascati) che ebbe il compito di elaborare nuovi programmi di matematica per i licei.

I programmi di Frascati presentano un primo ampliamento nella trattazione della geometria, rispetto alla impostazione euclidea:

per il terzo anno si parla di piano vettoriale geometrico [2] e di gruppi delle congruenze e delle similitudini [5] del piano, per il quarto anno si passa allo spazio vettoriale geometrico e per il quinto anno si parla di spazio vettoriale astratto [2] [5].

2) 1985: seconda modifica alla riforma dei programmi di matematica: Piano Nazionale per l'Informatica (PNI), promosso nel 1985 dal ministro della PI, Franca Falcucci.

A tal fine fu costituito un comitato ristretto di cui faceva parte, per l'area matematica, Giovanni Prodi.

L'attuazione del piano ebbe inizio con la formazione iniziale di un gruppo di formatori, che a loro volta contribuivano alla formazione dei docenti in attività.

3) 1988: terza modifica alla riforma - Il ministro della P.I. Giovanni Galloni istituì una commissione col compito di procedere alla revisione dei programmi dei primi due anni dell'istruzione secondaria di secondo grado.

Successivamente la medesima commissione fu incaricata di estendere il lavoro anche ai programmi del triennio.

Coordinatore dei lavori fu nominato il sottosegretario alla P.I. Beniamino Brocca, da cui il nome “Commissione Brocca”.

Entrambi i programmi Brocca furono pubblicati dal M.P.I. e furono distribuiti ai docenti operanti nelle classi sperimentali, ma non furono mai resi disponibili al pubblico attraverso i normali canali commerciali.

I piani di studio Brocca, sempre in riferimento alla matematica, hanno recepito molte delle indicazioni dei programmi di Frascati e del PNI, in particolare ciò che riguarda la geometria, e più specificamente la geometria basata sulle trasformazioni geometriche (Giovanni Prodi).

A tal proposito, fu inserito nei piani di studio "Brocca" un progetto sulle interrelazioni tra l'insegnamento della Matematica e l'insegnamento del Disegno che teneva conto dell'utilizzo delle nuove tecnologie. Il progetto fu coordinato da Cesare Cundari<sup>1</sup> per il disegno e da Bruno Rizzi<sup>2</sup> per la Matematica [6].

Il progetto aveva come obiettivo:

---

<sup>1</sup> Ordinario di Disegno dell'Architettura alla facoltà di Architettura dell'Università "La Sapienza" di Roma.

<sup>2</sup> (1935-1995) Ordinario di Analisi Matematica alla facoltà di ingegneria della Terza Università di Roma.

- per il disegno, l'utilizzo delle tecniche informatiche (CAD, GET, CABRI,...) che sostituivano la rappresentazione con riga e compasso;

- per la matematica, l'esigenza di educare i docenti (successivamente gli studenti) alle conoscenze fondamentali della geometria su cui sono basate le nuove tecniche, cioè la geometria proiettiva che, negli ultimi decenni è stata di fatto (anche se non ufficialmente) esclusa dai programmi di insegnamento nelle Università.

Relativamente alla stesura del percorso di Matematica, è stato incaricato il sottoscritto, le cui risultanze sono in bibliografia [6] alle pagine 73-78; 85-118; 205-268.

### **3. Indicazioni emerse dai Nuclei di Ricerca Didattica. Gli orientamenti moderni**

Già nell'aprile 1979, il V Convegno Nazionale della Didattica della Matematica fu in parte dedicato all'insegnamento della geometria.

Allora emersero le tendenze e le scelte dei Nuclei di Ricerca Didattica che operano in varie Università.

Il prof. Alberto Conte nella sua relazione introduttiva notava già in quella occasione, con una certa amarezza, che la geometria nelle scuole medie (attuali Secondarie di primo e secondo grado) si insegna sempre di meno.

Purtroppo ciò è senz'altro vero specialmente al riferimento nei licei scientifici, dove in particolare, la geometria dello spazio è di fatto esclusa dai programmi: e va spiegato appunto con la complessità del problema che fa preferire argomenti più facili e più di moda.

Personalmente, ritengo che la difficoltà che gli studenti incontrano nell'affrontare la geometria dello spazio, sia dovuta alla mancanza delle conoscenze di tecnica del disegno: nei licei classici e negli istituti tecnici e professionali per il commercio non è stato mai previsto lo studio di questa disciplina.

Le nuove tendenze, che in quegli anni si sono affermate nella concezione dello sviluppo della Matematica, hanno interessato anche la geometria elementare.

Si è accentuato il bisogno di rigore logico e di chiarezza di impostazione e si è sviluppata la ricerca delle idee unificanti e delle strutture algebriche che sono alla base delle varie teorie.

*La Geometria oltre Euclide: L'evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola?*

L'obiettivo principale nello studio della geometria elementare è stato individuato nella scoperta della struttura di spazio vettoriale insita nel piano euclideo [1].

Anzi, è stato proposto in particolare dal matematico francese Jean Dieudonné (1916-1992), di insegnare la "geometria euclidea piana" partendo dall'assioma unico:

Il piano è uno spazio vettoriale di dimensione due, dotato di prodotto scalare commutativo [1][2].

Nel testo - adottato da molti docenti negli anni '70 e '80 - "Il metodo matematico" di Lina Mancini Proja - Lucio Lombardo Radice è esplicitamente detto: la geometria euclidea è fondata proprio su un'assiomatica a base metrica; però si rinuncia a dichiarare subito in modo esplicito il sistema di assiomi, rimandando alla fine del testo il discorso chiarificatore sul metodo assiomatico e sulle diverse geometrie. Si preferisce far leva sulle capacità intuitive degli allievi e si rilevano due caratteristiche comuni alle trattazioni moderne:

1) Lo studio e la utilizzazione delle Trasformazioni geometriche con la scoperta delle strutture algebriche ad esse collegate: gruppo e spazio vettoriale [1] [3] [5].

2) La considerazione e l'utilizzazione del riferimento cartesiano.

## **4. Proposte di matematici stranieri**

Nel paragrafo precedente abbiamo citato la proposta del francese Dieudonné di considerare il piano come uno spazio vettoriale di dimensione due. Questa convinzione era alla base dell'insegnamento della geometria in Francia e in Belgio, i cui maggiori esponenti erano rispettivamente Gustave Choquet (1915-2006) e Georges Papy (1920-2011).

La linea didattica del matematico francese Gustave Choquet ha avuto anche in Italia, negli ultimi decenni del secolo scorso, una buona considerazione per poi rientrare nel dimenticatoio.

Choquet proponeva di "Trattare prima la geometria affine basata sugli assiomi di appartenenza, di ordinamento, di parallelismo e di continuità, e in un secondo momento la geometria metrica, basata anche sugli assiomi di congruenza".

La separazione fra geometria affine e geometria metrica sembrava più favorevole per fare intendere il significato di metodo assiomatico ed anche più rispondente allo sviluppo delle capacità logiche ed intuitive dei ragazzi.

Essa però è stata introdotta in testi e programmi molto limitatamente e da pochi autori, specialmente in Italia.

Del resto già nel secolo precedente, dopo i tentativi del matematico italiano Giovanni Girolamo Saccheri ([1667](#) – [1733](#)), le discussioni sui limiti della geometria euclidea ed i principali risultati sulle geometrie non euclidee e sulla geometria proiettiva si sono avuti in Francia (Desargues, Monge, Poncelet), Germania (Gauss, Riemann, Klein), in Russia (Lobačevskij), Romania (Bolyai), ecc.

Per brevità e per i limiti di questo lavoro, cito solo, in ordine cronologico, alcune conclusioni di Gauss, Riemann, Klein che hanno trovato conferma nel secolo successivo.

Nel 1817 Gauss, che già dal 1813 stava lavorando per lo sviluppo di una geometria che non comprendesse il postulato delle parallele, in una lettera a Olbers afferma che "non è possibile dimostrare che la geometria euclidea sia necessaria per lo sviluppo dell'universo fisico; è quindi possibile costruire una altra geometria applicabile fisicamente" [2].

In riferimento alla geometria per lo spazio fisico, Riemann nel 1854 concluse la presentazione della sua tesi di dottorato affermando che:

Lo studio della geometria non si può astrarre dall'evoluzione fisica. In uno spazio in cui la curvatura cambia da un luogo all'altro per la presenza della materia, e da un istante all'altro per il moto della materia, le leggi della geometria euclidea non sono valide. Pertanto, per determinare la vera natura dello spazio fisico, si deve associare fra loro spazio e materia.

Dichiara in proposito:

"O la realtà soggiacente lo spazio forma una varietà discreta, oppure bisognerà cercare il fondamento delle sue relazioni metriche fuori di esso, nelle forze connettive che vi agiscono. Questo ci porta nel dominio di un'altra scienza, quella della fisica, in cui l'oggetto delle nostre ricerche non ci consente di entrare oggi" [2].

Relativamente alle proprietà proiettive, nel 1972 Felix Klein, con "Il programma di Erlangen", considerava le proprietà geometriche delle figure classiche rispetto a gruppi di trasformazioni [6].

Relativamente alle trasformazioni lineari, il gruppo di trasformazioni più ampio tra forme geometriche (rette, fasci di rette, piani, fasci di piani, spazi tridimensionali, ecc....) è il gruppo delle proiettività che, nel caso di trasformazioni piane (a cui noi ci riferiremo) prende il nome di "gruppo delle omografie" [3] [6].

L'idea di Klein consiste nell'applicazione della teoria dei gruppi (secondo la teoria algebrica di Galois e nella sistemazione data dopo da Jordan) alle teorie geometriche.

*La Geometria oltre Euclide: L'evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola?*

In tal modo, Klein presentava una teoria unificatrice che permetteva di classificare le varie geometrie che progredivano indipendentemente una dall'altra.

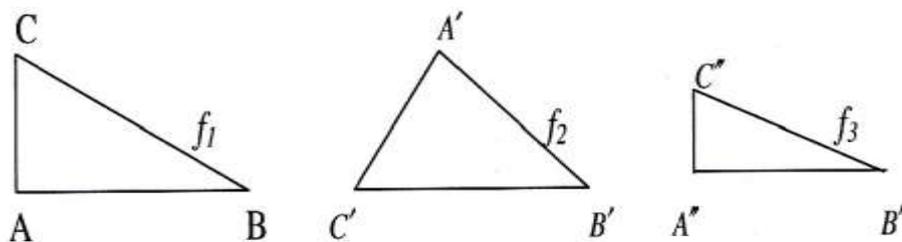
Klein osservò che nello spazio vi sono delle trasformazioni che non alterano le proprietà geometriche delle figure. L'insieme delle trasformazioni che lascia inalterate tali proprietà è detto "gruppo principale di trasformazioni", in quanto:

- componendo due (o più) trasformazioni, si ottiene sempre una trasformazione;
- esiste la trasformazione che trasforma la figura in se stessa (identità, che rappresenta l'elemento neutro rispetto alla composizione di trasformazioni);
- esiste la trasformazione inversa di una trasformazione data (esistenza del simmetrico rispetto alla composizione di trasformazioni);
- la composizione di trasformazioni è associativa.

Pertanto, l'insieme delle trasformazioni forma gruppo ("gruppo principale di trasformazioni") rispetto all'operazione di composizione (o prodotto) di trasformazioni.

Per proprietà geometriche, Klein intendeva quelle proprietà delle figure indipendenti:

- dalla posizione della figura nello spazio;
- dall'ordinamento delle sue parti;
- dalla sua grandezza assoluta.



In figura si può notare che la figura  $f_2$  si ottiene da  $f_1$  componendo due trasformazioni: una traslazione ed un ribaltamento; la figura  $f_3$  si ottiene da  $f_1$  con un'omotetia.

## 5. L'evoluzione nel terzo millennio

Il processo dell'evoluzione della Didattica della Matematica dal dopoguerra al 2001 (Ministero Gonella 1946 - inizio Ministero Moratti) è andato sempre nella direzione analizzata nei paragrafi precedenti con i principali matematici-pedagogisti (Lombardo Radice, Mancini Proia, Emma

Castelnuovo, de Finetti, Villani, Prodi, Speranza, Morelli, Rizzi, ecc....fino al Progetto Brocca) che, seppur con diverse argomentazioni, erano tutti convinti dell'esigenza di un modello di geometria più ampio rispetto a quello euclideo.

Negli ultimi 13 anni (in particolare con i ministri Moratti-Gelmini-Profumo) si è avuta un ritorno al modello gentiliano.

Premesso che una Comunità Scientifica che dopo 2300 anni non è in grado di modificare (o aggiungere) nulla al Modello euclideo rappresenta una Comunità scadente, voglio porre l'accento sui motivi per cui questo processo (che ritengo naturale) ha trovato ostacoli.

Cito due eventi:

1) all'inizio degli anni sessanta, il gruppo di Geometria in Italia stabilì che nelle Università si poteva fare a meno dell'insegnamento della Geometria Proiettiva. Allo stesso modo non si è mai posto il problema delle geometrie non euclidee.

#### PERCHE'?

Perché sul tema Proiettiva e Descrittiva era stato scritto quasi tutto; il tema Spazio curvo era considerato argomento di Fisica, per cui le pubblicazioni originali per portare avanti i propri allievi nei concorsi universitari dovevano orientarsi su temi ancora aperti, quali Topologia, Spazi grafici, Geometria combinatoria, Geometrie finite ed alcune questioni avanzate di Algebra astratta; questi argomenti sono sicuramente interessanti, con aspetti da trarre anche per la didattica di cui, nel seguito, nessuno si è posto il problema: abbiamo iniziato a porlo in questo incontro di Castellammare con Antonio Maturo e Franco Eugeni, oltre a scambi di carattere epistemologico che ho personalmente con il presidente dell'UMI, prof. Ciro Ciliberto.

Ovviamente, che il docente debba conoscere altri aspetti delle geometrie non significa riportare tutto in classe, ma avere una cultura generale per citare alcune questioni in opportuni momenti!

2) Il problema dei finanziamenti: lo studio delle NeuroScienze all'interno dei NRC (Nuclei di Ricerca Didattica), negli ultimi 15 anni, ha prevalso sull'insegnamento legato all'evoluzione del mondo geometrico e fisico. Cito una frase estratta da uno scambio di opinioni che ebbi alcuni anni fa con il Presidente di un Nucleo di Ricerca Didattica di cui facevo parte (non cito il nome per correttezza in quanto non è al corrente di questa mia missiva), da cui mi dimisi perché le questioni che si ponevano come oggetto di studio erano lontane dal mio modo di pensare (è un copia-incolla dal messaggio originale):

*La Geometria oltre Euclide: L'evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola?*

"Ma ormai, caro Ferdinando, le cose vanno così ovunque, e non credo che sia un male. Una volta i finanziamenti arrivavano a pioggia, e bastava raccogliersi intorno ad un gruppo anche se si condivideva poco: ora occorre un gruppo serrato che lavora insieme su obiettivi molto specifici e accreditati a livello internazionale, e se non si fa così, non c'è alcuna speranza di avere soldi".

Pertanto, l'unico avanzamento che è andato avanti negli ultimi decenni è legato all'Informatica, per cui pongo la seguente domanda: Se le aziende di computer non avessero avuto interesse a finanziare le proposte relative all'Informatica, questa sarebbe entrata nella Scuola in modo così forte?

Allora, il ripristino nelle Indicazioni Nazionali del modello gentiliano (anche se apparentemente si citano frasi del tipo "conoscenze storiche, geometrie non euclidee, teoria della relatività, probabilità e statistica...") e la convinzione che uscendo da esso si possano creare problemi agli studenti è dovuta alla nostra mancanza di conoscenza dell'evoluzione delle proposte didattiche degli ultimi 60 anni ed alla volontà accademica-istituzionale di non spostare l'asse culturale sulla reale visione dell'universo fisico-geometrico.

## **Bibliografia**

[1] F. Casolaro, A. Rotunno (2003): "La geometria nei licei ad indirizzo artistico: interrelazioni con le discipline di arte applicata" - Presentazione in power-point del lavoro di F. Casolaro: "Le trasformazioni omologiche nella storia nell'arte, nella didattica" agli atti del II Convegno Internazionale "Arte e Matematica" - Vasto, 10 -12 aprile 2003, pagg. 129-148.

[2] F. Casolaro (2002): "Un percorso di geometria per la Scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo". Atti del Congresso Nazionale Mathesis – Bergamo 2002 – pag. 185-198.

[3] F. Casolaro, R. Prospero (2011): Atti della Scuola Estiva che si è tenuta a Terni nel periodo 26-30 luglio 2011. "La Matematica per la Scuola Secondaria di secondo grado: un contributo per il docente di Matematica" - Editore 2C Contact.

[4] A. Morelli (1985): "Sull'insegnamento della geometria elementare. Orientamenti moderni" - Periodico di Matematiche n. 1-2 del 1985; pag. 142-152.

[5] F. Casolaro (1992): "Gruppo delle similitudini, gruppo delle isometrie": "Progetto del M.P.I. del Dip. di Prog. dell'Univ. "La Sapienza" di Roma; "Disegno e Matematica didattica per le nuove tecnologie" - 1990-1991. A cura di Cesare Cundari: pag. 220-239.

[6] C. Cundari (1992): "Matematica e Disegno. proposte per una didattica finalizzata all'uso delle nuove tecnologie" - Progetto del M.P.I. e del Dipartimento di Progettazione dell'Università "La Sapienza" di Roma. Atti dei lavori svolti nei periodi: 11-15 dicembre 1990; 06-10 maggio 1991; 08-12 dicembre 1991.