Science & Philosophy, 3(1)/2015, 37--60 ISSN online: 2282-7765
print: 2282-7757

Matematica e storia: storia ed epistemologia dell'analisi: dal metodo di esaustione all'integrale definito[1][2]

Mario I. Mandrone

Università del Sannio
Benevento
almavit@libero.it

Sunto

La creazione del calcolo (differenziale, nella terminologia leibniziana flessionale in quella di Newton) è l'evento che, nella seconda metà del seicento, ha segnato, in un certo senso, il passaggio dalla matematica classica a quella moderna. Obiettivo del presente lavoro è una analisi storica ed epistemologica della questione del rigore e della "metafisica" del calcolo infinitesimale che tenga conto dei metodi degli antichi (ad es. del metodo di esaustione di Archimede), nonché delle interpretazioni di Leibniz e Newton e dei loro successori. Il problema della ricerca di un fondamento sicuro su cui basare il calcolo infinitesimale, intravisto da D'Alembert nella teoria dei limiti e ripreso da Lagrange con la teoria delle serie infinite e quella delle funzioni derivate, trova in Cachy il pioniere di un nuovo modo di ricercare il rigore in analisi. L'impostazione di Cauchy sarà resa rigorosa da Weierstrass nella seconda metà dell'800 con la definizione di limite, col metodo dell'epsilon-delta, che a sua volta si basa su definizioni concernenti i numeri reali. In questo senso si parla di "aritmetizzazione" dell'analisi.

[1] "Come espressione della mente umana la matematica riflette la volontà attiva, la ragione contemplativa e il desiderio di perfezione estetica. I suoi elementi fondamentali sono la logica e l'intuizione, l'analisi e la costruzione, la generalità e l'individualità. Tradizioni diverse potranno mettere in evidenza aspetti diversi, ma è soltanto la reazione di queste forze antitetiche e la lotta per la loro sintesi che costituiscono la vita, l'utilità e il valore supremo della scienza matematica." da Richard Courant-Herbert Robbins, Che cos'è la matematica? Universale Bollati Boringhieri.

[2] " Siccome il ferro s'arrugginisce senza l'esercizio e l'acqua si putrefa o nel freddo s'addiaccia, così l'ingegno senza esercizio si guasta." dal Codice Atlantico di Leonardo da Vinci

Parole chiave: metodo di esaustione, metodo dei teoremi meccanici, calcolo sublime, fluenti e flussioni, teoria dell'integrazione, numeri iperreali, analisi non-standard.

1. Introduzione

L'analisi infinitesimale nacque verso la fine del XVII secolo per opera di Newton e Leibniz, anche se, in realtà, le sue origini sono molto più antiche. I ragionamenti di Zenone d'Elea, le dimostrazioni di Eudosso, i calcoli di Archimede e, più tardi, i lavori di Cavalieri, Galileo, Torricelli, Pascal e Fermat furono determinanti nel creare le condizioni perché finalmente si potesse costruire in modo organico questa nuova disciplina, che, inizialmente, prese il nome di "Calcolo sublime". Già nell' antichità si incontrano, difatti, metodi che si possono considerare di natura infinitesimale. Uno di questi è il metodo di esaustione, scoperto quasi certamente da Eudosso di Cnido e utilizzato per primo da Archimede per calcolare le aree di figure a contorno curvilineo. Eudosso era nativo di Cnido, ma pare avesse viaggiato molto durante la sua vita: in Egitto,nella Magna Grecia, in particolare a Taranto, dove ebbe contatti con Archita; ad Atene dove frequentò la scuola di Platone ed infine a Cizico, sulle coste dell' Asia Minore, dove fondò la sua scuola. L'idea fondamentale del metodo di esaustione risiede nella possibilità di avvicinarsi sempre di più al contorno di una linea curva con delle spezzate, i cui estremi giacciono sulla linea, con lati sempre più numerosi e corti. Anche se tale procedimento può sembrare approssimato, Eudosso riuscì a trasformarlo in un ragionamento logicamente rigoroso mediante la proposizione – nota come "assioma di continuità- che serve come base per il metodo di esaustione. Essa afferma: "date due grandezze aventi un certo rapporto (cioè nessuna delle quali sia zero), è possibile trovare un multiplo dell'una che superi l'altra grandezza." Partendo da questo assioma di Eudosso si può, con una "reductio ad absurdum". Dimostrare una nuova proposizione (proprietà di esaustione): "se da una qualsiasi grandezza si sottrae una parte non inferiore alla sua metà, e se dal resto si sottrae ancora non meno della sua metà, e se questo processo di sottrazione viene continuato, alla fine rimarrà una grandezza inferiore a qualsiasi grandezza dello stesso genere precedentemente assegnata." Negli Elementi di Euclide d'Alessandria ritroviamo le due proposizioni sopra riportate: la prima come definizione (definizione IV del V libro) e la seconda come teorema (proposizione I del X libro). Queste due proposizioni accettano evidentemente l'infinito potenziale.

2. Il metodo di esaustione

Essenzialmente il metodo di esaustione consiste in un'argomentazione logica che rappresenta la struttura della dimostrazione e in un nucleo centrale che consente all'argomentazione logica di procedere e concludere. Archimede attribuisce a Eudosso la dimostrazione, con questo metodo, del fatto che il volume del cono è uguale a un terzo del volume del cilindro avente stessa base e stessa altezza. Lo stesso Archimede di Siracusa verifica, utilizzando il metodo di esaustione, formule intuite facendo uso di metodi meccanici e considerazioni di tipo fisico. Figlio dell'astronomo Fidia che aveva calcolato il rapporto esistente tra le grandezze del Sole e della Luna, Archimede (287-212 a.C.) nacque a Siracusa e studiò ad Alessandria. Cultore di geometria e di meccanica, dedicò a studiosi alessandrini, ai quali era legato da profonda amicizia, gran parte delle sue opere, tra le quali ricordiamo:

- Sulle spirali – costituito da 28 proposizioni, molte delle quali riguardano aree associate con la spirale. Per dimostrare la verità di tali proposizioni l'autore usa il metodo di esaustione.
- Misura del cerchio- un libretto di poche pagine che contiene solo tre proposizioni. Nella prima dimostra che l'area del cerchio vale πr^2: "L'area del cerchio è uguale a quella di un triangolo rettangolo con un cateto uguale al raggio e l'altro uguale alla circonferenza." Area cerchio = A Area Triangolo = T A= T ove $T = {}^1\!/_2\, rC = {}^1\!/_2\, r * 2\pi r = \pi r^2$. Per arrivare a questo risultato Archimede usa il metodo di esaustione, calcolando il perimetro di poligoni regolari inscritti e circoscritti alla circonferenza fino a inscrivere e circoscrivere poligoni di 96 lati.
  - La quadratura della parabola- il più popolare tra i trattati che si occupano del metodo di esaustione. Archimede riesce a dimostrare rigorosamente che l'area di un segmento parabolico è uguale ai ${}^4\!/_3$ dell'area di un triangolo avente stessa base e stessa altezza del segmento parabolico.
  - Il Metodo- ritrovato solo nel 1906, contiene una quindicina di proposizioni inviate, sotto forma di lettera, al suo amico Eratostene. In esso Archimede fa espresso riferimento al modo di condurre l'analisi preliminare di un problema per poter arrivare a una trattazione rigorosa della sua risoluzione.
  - Sulla sfera e il cilindro.
  - L' arenario.

Quasi due millenni dopo Archimede, il metodo di esaustione viene sostituito dal "metodo degli indivisibili" per opera soprattutto di Keplero, Cavalieri, Torricelli: tale metodo è certamente più agile e veloce, ma molto meno rigoroso. La proposizione fondamentale del metodo degli indivisibili è il principio di Cavalieri, secondo il quale " se due solidi hanno la stessa altezza e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi ed equidistanti da esse stanno sempre in un fissato rapporto, allora anche i volumi di tali solidi stanno nello stesso rapporto”. Questo nuovo metodo non usa più, se non raramente, la dimostrazione per assurdo, ma si serve della più lineare dimostrazione diretta. Le applicazioni pratiche del metodo degli indivisibili superano le potenzialità certamente limitate del metodo di esaustione ma, non avendo ancora un adeguato impianto concettuale e formale, costituiscono solamente una teoria intuitiva e debole dal punto di vista del rigore matematico. Solo con la nascita dell’analisi matematica avviene la vera rivoluzione, grazie all’innovativa considerazione del concetto di differenziale.

3. Il metodo di esaustione –Intuizione e rigore in Archimede

E ‘ un metodo che affonda le sue radici nelle considerazioni di tipo infinitesimale dei filosofi del V secolo a.C. Anassagora e Democrito e nella critica di Zenone di successioni finite ed infinite. Non va dimenticato che la matematica greca rifiuta l’infinito attuale e accetta solo l’infinito potenziale. Nella risoluzione di problemi di misura si instaura una metodologia che prevede due fasi:

- La ricerca del risultato con le tecniche più disparate, anche quelle non molto affidabili né rigorose (fase euristica)
- La dimostrazione del risultato per via rigorosa (fase dimostrativa)

Il metodo di esaustione interviene proprio nella seconda fase. Si tratta infatti di un metodo dimostrativo rigoroso che si utilizza però, quando già si intravede o si conosce il risultato. Tale metodo venne proposto da Eudosso di Cnido (408-355 a. C.) del quale però non ci sono rimaste che testimonianze indirette. Esso si basa su una proposizione detta “Postulato di Eudosso” o anche “assioma di Eudosso-Archimede”, molto sfruttata da Archimede nelle sue opere: “ Date due grandezze A e B con A < B, esiste un numero intero n tale che nA > B cioè un multiplo di A è maggiore di B”. Oppure, espresso sotto altra forma:” Date due grandezze omogenee A e B, con A < B, esiste sempre un sottomultiplo di B minore di A, cioè esiste m tale che $\frac{1}{m}\, B < A$ ". Versione Euclidea: “Si dice che hanno fra loro rapporto le grandezze le quali possono, se moltiplicate separarsi reciprocamente”. Ad es., per dimostrare che due grandezze U e V sono uguali fra loro, si procede col metodo di esaustione ad una doppia riduzione all’assurdo.

4. Il segmento parabolico

Nel trattato la “Quadratura della parabola”, Archimede utilizza il metodo di esaustione per determinare l’area di un segmento parabolico; metodo basato sul “bilanciamento” di un dato insieme piano con un altro di area nota o facilmente calcolabile. In tal modo, infatti, egli trovò che l'area del segmento parabolico è uguale ai $^2/_3$ dell'area del rettangolo circoscritto a tale insieme (avente cioè un lato coincidente con la base del segmento parabolico ed il lato opposto tangente al segmento stesso) ovvero i $^4/_3$ del triangolo inscritto nel segmento parabolico (avente la base coincidente con quella del segmento parabolico ed il vertice opposto coincidente con il punto di tangenza della parabola alla base). Ma Archimede stesso considerò questo come un procedimento teso a verificare in maniera "meccanica" una sua intuizione che andava comunque successivamente dimostrata in maniera rigorosa. A tal fine applicò il cosiddetto "metodo di esaustione" ottenendo il valore dell'area cercata attraverso approssimazioni successive. Il metodo consisteva nel costruire una serie di figure inscritte nel segmento parabolico le cui aree determinavano una successione crescente. La proprietà fondamentale utilizzata per determinare le aree di queste figure è l'additività della misura. L'additività della misura suggerisce un procedimento generalizzabile per la determinazione di aree di figure a contorno curvilineo. Ripercorrendo il procedimento "geometrico" di Archimede, si può approssimare l'area del segmento parabolico S con le aree di plurirettangoli (cioè insiemi piani decomponibili in un numero finito di rettangoli) contenuti e contenenti S. Più è alto il numero dei rettangoli che compongono i plurirettangoli, più le aree di quelli contenuti in S si avvicinano alle aree di quelli contenenti S. Se le aree dei plurirettangoli contenuti sono sempre minori delle aree dei plurirettangoli contenenti, e se questi due insiemi numerici costituiscono due classi di insiemi contigue, allora il nostro insieme è misurabile. In tal caso l'area di S sarà il numero reale non negativo individuato dalle due classi. Esistono insiemi per i quali la classe delle aree dei plurirettangoli contenuti e quella delle aree dei plurirettangoli contenenti S non costituiscono una coppia di classi contigue; tali insiemi si dicono non misurabili e per essi non è definita alcuna area. Situazioni del genere, però, non possono presentarsi se ci si limita a considerare dei rettangoloidi relativi a funzioni continue in intervalli chiusi e limitati. Per calcolare l'area del poligono inscritto nel segmento parabolico, Archimede somma le aree dei triangoli inscritti; deve cioè calcolare la somma di una serie geometrica di ragione $^1/_4$ dove il primo termine è l'area del triangolo ABC. Archimede evita di calcolare la somma della serie, ma calcola la somma dei primi n termini ai quali aggiunge il resto $\frac{1}{3} * \frac{1}{4^{n-1}} A$ (Prop. 23) e ricorre all'identità:

$$A + \frac{1}{4} A + \frac{1}{4^2} A + \frac{1}{4^3} A + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \frac{1}{4^{n-1}} A + \frac{1}{3} \frac{1}{4^{n-1}} A = \frac{4}{3} \text{ A}$$

Se il numero dei lati del poligono inscritto, cioè il numero dei termini della serie, aumenta, il resto $\frac{1}{3} * \frac{1}{4^{n-1}} A$ diventerà piccolo a piacere e l'area cercata varrà $\frac{4}{3}$ A. Oggi,avendo una serie geometrica di ragione $1/4$, calcoleremmo il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(A+\frac{1}{4}A+\frac{1}{4^2}A+\frac{1}{4^3}A+\ \dots\dots+\frac{1}{4^{n-1}}A\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{\frac{3}{4}}*$$

$A=\frac{4}{3}*A$, che è, appunto, il risultato ottenuto da Archimede. Archimede,ovviamente, non esprime l'idea che il resto tenda a zero (non esegue passaggi al limite) e che la somma della serie sia uguale a $\frac{4}{3}$ A. Dimostra, invece, per assurdo, che l'area K del segmento parabolico non può essere né inferiore né superiore a $\frac{4}{3}A$.Vediamo, quindi, che nell'applicazione concreta del metodo, Archimede evita di utilizzare una nozione così oscura come quella di poligono con un numero infinito di lati che, al limite, coinciderebbe con il segmento parabolico. Il metodo di esaustione, con il suo doppio ragionamento per assurdo, evita ingegnosamente le considerazioni infinitesimali.

5. Il metodo dei teoremi meccanici

Nelle opere di Archimede le dimostrazioni sono rigorose, ma viene tenuto nascosto il procedimento per ottenere effettivamente il risultato. L'esposizione parte da principi semplici per giungere mano a mano a proposizioni più complesse. Nelle dimostrazioni finali e nella stessa struttura dell'opera "Sulla sfera e sul cilindro" si vede, però, che Archimede già conosceva il risultato, ottenuto per altra via. E ' questo un modo di procedere comune a molti matematici, non solo greci. Fino al 1906 non si conosceva il metodo euristico utilizzato da Archimede per ottenere i suoi risultati. Nel secolo XVII si parlava spesso di una "via segreta" di Archimede. Sia Torricelli che Wallis ed altri ancora erano infatti convinti che il matematico di Siracusa avesse volutamente occultato questa "via". E ' soltanto nel 1906 col ritrovamento da parte di Heiberg di una lettera di Archimede ad Eratostene che tale via si è palesata. Nel "Metodo sui teoremi meccanici" il termine "meccanico" è semplicemente derivato dal fatto che vengono utilizzati concetti di meccanica, quali la leva in equilibrio, la posizione del baricentro. Archimede sceglie opportunamente le figure note da confrontare con quelle "ignote", di cui deve cercare l'area. In che cosa consiste il metodo meccanico di Archimede ? Per determinare l'area di una superficie piana limitata da una curva chiusa, si cerca una seconda curva da confrontare con essa. La curva viene pensata contenuta entro due rette parallele r ed s e tangenti la curva, mentre la seconda figura deve essere tale che:

- Se ne conosca l'area;
- Si conosca la posizione del baricentro.

Si immagina di sezionare le due figure con una retta t parallela ad r ed s. Poiché t è una retta generica, si immaginano tutte le rette intersezione che, secondo una concezione ardita, costituiscono la figura la cui area è da determinarsi. Si ottiene che il rapporto tra le due aree (area da determinare/ area nota) è uguale al rapporto fra le lunghezze di due segmenti noti (principio della leva). Noto tale rapporto, è possibile calcolare, pertanto, l'area incognita.

Il mistero di Archimede. E' con Archimede che la scienza antica raggiunge le sue vette più alte. Il postulato di Archimede sta alla base dei moderni trattati di calcolo. Il matematico siracusano enuncia il suo postulato in termini geometrici: "Che inoltre per le linee disuguali e per i solidi disuguali, il maggiore superi il minore di una grandezza tale che addizionata a se stessa possa superare qualunque grandezza data, tra quelle che si possono paragonare tra loro"(Archimede, Opere, *Sulla sfera e il cilindro,* postulato V). Oggi esso viene assunto come un postulato del sistema dei numeri reali, dopo l'aritmetizzazione dell'Analisi nella seconda metà dell'Ottocento con Cantor, Dedekind e Weierstrass: "Se a e b sono due numeri reali positivi del sistema, e a < b, esiste sempre un numero reale n tale che sia n a > b." Nel Cinquecento e nel Seicento, con la scoperta e lo studio delle opere di Archimede, si diffonde intorno alla sua figura una certa aria di "mistero". Studiato da Galileo "con infinito stupore" (G. Galilei, *Opere,* Utet, Torino, 1964, Vol. II, p 613 e ammirazione, venerato da tutti gli scienziati di quel tempo per le sue ardite invenzioni e preso come modello di rigore, Archimede fa sorgere sulla sua opera la convinzione, che diventa anche leggenda, "che egli abbia di proposito ricoperto le tracce della sua investigazione, come se avesse sepolto per la posteriorità il segreto del suo metodo di ricerca" (così si esprimeva il matematico Wallis nella sua *Arithmetica infinitorum* del 1665). E' solo nel 1906, grazie al filologo danese J.L.Heiberg, editore delle opere di Euclide e Archimede, che si dirada l'aria di mistero. In un antico palinsesto ritrovato a Costantinopoli presso il monastero del Santo Sepolcro, viene alla luce una importante opera di Archimede, indirizzata ad Eratostene di Alessandria, in cui sono dimostrati alcuni teoremi meccanici, attraverso i quali Archimede svela come sia riuscito a calcolare l'area del segmento parabolico, il volume della sfera, l'area della sua superficie, i volumi del cono e del cilindro. Così Archimede scrive ad Eratostene: "Vedendoti poi diligente ed egregio maestro di filosofia, e tale da apprezzare anche nelle matematiche la teoria che (ti accada di considerare), decisi di scriverti e di esporti nello stesso libro le caratteristiche di un certo metodo, mediante il quale ti sarà data la possibilità di considerare questioni matematiche per mezzo della meccanica. E sono persuaso che questo (metodo) sia non meno utile anche per la dimostrazione degli stessi teoremi. E infatti alcune delle (proprietà) che a me dapprima si sono presentate per via meccanica, sono state (da me) più tardi dimostrate per via geometrica, poiché la ricerca (compiuta) per mezzo di questo metodo (del metodo meccanico) non è una (vera) dimostrazione: è poi più facile, avendo già ottenuto con questo (metodo) qualche conoscenza delle cose ricercate, compiere la dimostrazione, piuttosto che ricercare senza alcuna nozione preventiva. Perciò di quei teoremi dei quali Eudosso trovò per primo la dimostrazione intorno al cono e alla piramide, (cioè) che il cono è la terza parte del cilindro e la piramide è la terza parte del prisma, aventi la stessa base e altezza uguale, non piccola parte (del merito) va attribuito a Democrito, che per primo fece conoscere questa proprietà della figura suddetta, senza dimostrazione"(Archimede, *Opere,* Utet, 1974, p. 572). In sostanza Archimede afferma nella lettera ad Eratostene di avergli precedentemente inviato alcuni teoremi che aveva scoperto limitandosi, però, a fornirgli solo gli enunciati e invitandolo a trovare le dimostrazioni che non aveva ancora indicato...." Sono ora le dimostrazioni di questi teoremi che io ti invio redatti in questo libro. Ma prima, come ti avevo detto, dato che tu sei uno studioso e domini in maniera ragguardevole le questioni di filosofia e sai apprezzare nel suo giusto valore la ricerca matematica sui problemi nuovi che si presentano, ho giudicato opportuno di descrivere e di sviluppare in questo stesso libro le proprietà caratteristiche di un metodo che ti permetterà di affrontare certe questioni matematiche con l'aiuto della meccanica. Ma io sono persuaso che questo strumento può servire anche per la dimostrazione dei teoremi; certe proprietà in effetti, che mi erano apparse evidenti da un punto di vista meccanico, sono state poi dimostrate geometricamente, dato che, con questo metodo, non è possibile dare una dimostrazione rigorosa. E' più facile costruire una dimostrazione conoscendo preliminarmente le proprietà che si vuole dimostrare e che si sono conosciute con questo metodo piuttosto che cercare delle dimostrazioni senza nessun riferimento. Con questa testimonianza diretta di Archimede e dall'esame dei "teoremi meccanici" si dipana il mistero di Archimede, essendosi trovata la via segreta per la ricerca dei suoi notevoli risultati. I matematici di tutti i tempi sono sempre rimasti ammirati dal rigore delle dimostrazioni di Archimede, che riusciva ad utilizzare in modo mirabile il cosiddetto "metodo di esaustione"; metodo che, molto probabilmente, era stato introdotto da Eudosso di Cnido per evitare l'uso dei cosiddetti "indivisibili", i quali, ancora ai tempi di Archimede, erano giudicati inutilizzabili in Matematica a causa forse dei "paradossi di Zenone". Nulla sappiamo di Eudosso circa la sua concezione degli indivisibili; vero è che il metodo di esaustione evita il loro uso. Gli indivisibili però, espulsi, grazie ad Aristotele, dalla Fisica e dalla Geometria, hanno assunto nel tempo un considerevole valore euristico nella ricerca matematica e fisica, come si è potuto verificare nei secoli successivi. Archimede, quindi, non è solo un grande matematico o un grande fisico, ma è anche un grande filosofo che ha una concezione organica dell'universo e il metodo, che il matematico di Siracusa considera poco rigoroso, prefigura la teoria dell'integrazione definita e, in ultima analisi la teoria della misura. (Boscarino G.- MATEpristem-Unibocconi)

6. Luca Valerio, il novello Archimede

Nato a Napoli da padre ferrarese, fu allievo dell'editore veneto delle opere archimedee, Federico Commandini.. Insegna al Collegio Romano dei Gesuiti. Nel 1610 è membro dell' Accademia dei Lincei, ma ne viene espulso nel 1616 per aver criticato l'appoggio dato dall'Accademia alla teoria galileiana del moto terrestre. Le sue opere"De centro gravitatis solidorum libri tres (1604)" e "Quadratura parabolae per simplex falsum (1606) gli valgono, da parte di Galileo, l'appellativo di "novello Archimede". Luca Valerio "algebrizza" il metodo di esaustione, generalizzandolo. Difatti, alla doppia riduzione all'assurdo, egli sostituisce il teorema seguente al quale fa riferimento: TEOREMA: Sezionando, con piani paralleli alla base del cilindro, il cono e la scodella si ottengono sezioni corrispondenti con la stessa area (sezioni equivalenti), intendendo per scodella la parte del cilindro che resta quando si toglie la semisfera. Dalla validità di questo teorema Luca Valerio deduce che la scodella ed il cono hanno lo stesso volume e che quindi il volume della semisfera si può ottenere dalla differenza fra il volume del cilindro e quello del cono, cioè:

$$\pi r^2 * r - {}^1\!/_3\, \pi r^2 * r = \pi r^3 - {}^1\!/_3\, \pi r^3 = {}^2\!/_3\, \pi r^3$$

dove ${}^2\!/_3\, \pi r^3$ è il volume della semisfera. La dimostrazione di Luca Valerio è resa rigorosa con un ragionamento per esaustione. Dietro il procedimento però c'è un affermazione di carattere intuitivo e cioè che due solidi che risultano dalla somma di infinite aree equivalenti di spessore "infinitesimo"occupano lo stesso volume. A queste aree di spessore infinitesimo si darà poi il nome di indivisibili, Anche Galileo si occupa di questioni infinitesimali soprattutto nei suoi problemi cinematici, statici e dinamici. Infatti, nel corso della prima giornata dei "Discorsi", introduce anche gli indivisibili ma non mette a punto alcun metodo pratico per la loro manipolazione; la teoria è rimasta puramente speculativa sia in fisica che in geometria.

7. Bonaventura Cavalieri

Si conosce molto poco sui primi anni di vita di Cavalieri. Anche la data di nascita lascia adito a molti dubbi, benchè un suo allievo (Urbano D'Aviso o Daviso) dica: "Nacque il P. Bonaventura Cavalieri l'anno 1598 nella nobilissima città di Milano di honorati parenti". Il 20 settembre 1615, dopo due anni di noviziato, prende gli Ordini (e forse il nome di Bonaventura) di Gesuato di S. Gerolamo e viene inviato al monastero di S. Gerolamo a Pisa (verso la metà del 1616). Nel 1617 Cavalieri cerca di ottenere la cattedra di Bologna, molto ambita, ma non ci riesce (forse anche perché non ha l'appoggio di Galilei), cattedra che ottenne, invece, nel 1629. Muore nel 1647. Molti furono i matematici dell'epoca che osteggiarono il metodo degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri di cui ci parla nella sua opera maggiore. "Geometria Indivisibilibus continuorum nova quodam ratione", i cui primi sei libri furono composti già nel 1627, ma pubblicati solo nel 1635 perché negli anni 1632-35 ne scrisse altri due: il 7° e l' 8° che trattano le possibili obiezioni al suo metodo: obiezioni che già allora prevedeva. Fra coloro che osteggiarono il suo metodo ricordiamo fra gli altri i Padri Gesuiti Guldino (1577- 1643), Tacquet e Bettini. Per rispondere alle obiezioni mossegli, Cavalieri scriverà negli anni 1643-1647 le "Exercitationes Geometriae Sex". L'idea base della teoria degli indivisibili consiste nel paragonare due continui, paragonando i loro indivisibili. Quali sono questi indivisibili cavalieriani ? Sono tutte le linee in cui si può scomporre una figura piana; tutte le superfici, per un solido (diverso da Leibniz: rettangoli infinitesimi). Il principio di Cavalieri: "Figurae planae quaecumq; in eisdem parallelis constitutae in quibus, ductis quibuscumq; eisdem parallelibus aequidistantibus rectis lineis, conceptae cuiuscumq; rectae linaeportiones sint inter se, ut cuiuslibet alterius in eisdem figuris conceptae portiones (homologis tamen in eadem figura semper existentibus)eandem inter se proportionem habebunt, quam dictae portiones" (Geometria, libro II. Propositio II). Se due aree piane tagliate da un sistema di rette parallele, intercettano, sopra ognuna di queste, due corde uguali, le aree sono uguali; se le corde corrispondenti hanno un rapporto costante, lo stesso rapporto passa fra le aree. Il processo del pensiero di Cavalieri è un processo di tipo analitico e non sintetico. L'impiego degli indivisibili al posto degli infinitamente piccoli è destinato, dal punto di vista di Cavalieri, a liberarci dal passaggio al limite, con le sue difficoltà, o più esattamente, le sue impossibilità logiche. E' inoltre ben più economico del lungo giro delle dimostrazioni archimedee. Quasi due millenni dopo Archimede, il metodo di esaustione viene sostituito dal "metodo degli indivisibili" per opera soprattutto di Keplero, Cavalieri, Torricelli. Tale metodo è certamente più agile e veloce, ma molto meno rigoroso. Questo nuovo metodo non usa più, se non raramente, la dimostrazione per assurdo, ma si serve della più lineare dimostrazione diretta. La proposizione fondamentale del metodo degli indivisibili è il "principio di Cavalieri", secondo il quale se due solidi hanno la stessa altezza e se la sezioni tagliate da piani paralleli alle basi ed equidistanti da esse stanno in un fissato rapporto, allora anche i volumi di tali solidi stanno nello stesso rapporto. Questa proposizione che egli riesce ad estendere a delle potenze superiori a due, così facendo andando oltre l'ambito della geometria propriamente detta, ha anche validità generale che è, come detto da Zeuthen (1903), l'equivalente esatto della formula fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_0^a x^2dx = {}^1\!/_3\ a^3 \qquad \left(\int_0^a x^ndx = {}^1\!/_{n+1}\ a^{n+1}\right)$$

Si le calcul infinitésimal représente la maturité, alors les indivisibles sont les découvertes del' adolescence. (Barbin. 1987) (Se il calcolo infinitesimale rappresenta la maturità, allora gli indivisibili sono le scoperte dell'adolescenza). L'integrale definito, che noi oggi scriviamo: $\int_a^b f(x)dx$, venne indicato a lungo con un simbolo cavalieriano: $omn. L$. abbreviazione di "omnes lineae. Solo con Leibniz, nato a Leipzig (Lipsia) nel 1646, abbiamo la notazione moderna. Il grande filosofo e matematico tedesco la sostituisce in modo esplicito alla notazione di Cavalieri. Da notare che si può stabilire una corrispondenza tra le denominazioni cavalieriane e le notazioni integrali.

8. Alle origine del calcolo sublime: Newton e Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz

Figlio di un professore universitario, Leibniz nacque a Leipzig (Lipsia) nel 1646, meno di quattro anni dopo Newton. Iniziò a studiare latino a otto anni e a 12 era già in grado di comporre buoni versi in questa lingua. Poi passò al greco e alle lingue moderne. Stancatosi degli studi classici, si volse verso la logica. I suoi tentativi, a soli 15 anni, di riformare la logica classica svilupparono i primi germi di quella che sarà la sua opera più importante, la "Characteristica Universalis". (Mendelson, E., 1964) Si appassionò delle opere dei filosofi naturali del suo tempo, Keplero, Galileo,e Descartes. Nel 1666, nel saggio "De arte combinatoria" dichiarò di voler "creare un metodo generale nel quale tutte le verità della ragione fossero ridotte ad una specie di calcolo. Nello stesso tempo, questo sarebbe una specie di linguaggio o di scrittura universale, ma infinitamente diversa da tutto ciò che è stato proposto fino ad ora, poiché i simboli, come anche le parole, guiderebbero la ragione; e gli errori, salvo quelli di fatto, sarebbero puramente degli errori di calcolo." Era l'anticipazione della logica simbolica di Boole. A 26 anni, a Parigi, cominciò la sua vera educazione matematica sotto la guida di Christian Huygens, (1629-1695), noto soprattutto per la teoria ondulatoria delle luce, che lo introdusse allo studio delle opere di Cavalieri, Roberval, Pascal,Descartes, Gregory e Wallis. Nel 1673, presentò alcune sue scoperte alla Royal Society, scoperte che gli consentirono di essere eletto membro straniero della società. Spinto da Huygens, Leibniz consacrò alla matematica tutto il proprio tempo libero, riuscendo a trovare alcune formule elementari del calcolo differenziale e scoprendone il "teorema fondamentale". Troppo preso dalla politica per avere il tempo di scrivere lunghi trattati di matematica, Leibniz pubblicò il suo calcolo differenziale in una serie di brevi articoli apparsi a partire dal 1684 sugli "Acta Eruditorum", giornale scientifico fondato con il suo appoggio a Lipsia. Nel 1684 pubblicò la prima esposizione del suo calcolo differenziale dal titolo: "Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus" (Acta Eruditorum, Mens, Octobr. 1684, pp. 467-473 e tab. XII).""Un nuovo metodo per la determinazione dei massimi e dei minimi, nonché delle tangenti, che non è ostacolato né dalle quantità fratte, né dalle irrazionali, e un particolare sistema di calcolo per quelli (cioè per massimi, minimi, tangenti)". Nella "Nova Methodus", Leibniz non parla esplicitamente di funzioni ma solo di curve. Siamo, pertanto. ancora in ambito prettamente geometrico. Il termine "funzione" verrà da lui usato in una pubblicazione, per la prima volta, solo nel 1692. Esaminando gli scritti di calcolo infinitesimale di Leibniz e dei suoi allievi e continuatori ci si accorge che ciò che costituisce la forza del metodo leibniziano è la semplicità del suo algoritmo, la sua notazione elegante, il suo formalismo operativo che permette di effettuare quasi automaticamente i calcoli, mascherando la natura degli oggetti in gioco. Come Newton, Leibniz è tentato di non considerare gli elementi infinitesimali, bensì i loro rapporti. Il calcolo dei differenziali è dunque l'operazione fondamentale del calcolo Leibniziano. L'importanza del "nuovo metodo" viene ribadita da Leibniz nel passo che segue: "In tutti questi casi e in altri assai più complicati la facilità del nostro metodo è molto maggiore di quanto generalmente si creda e veramente straordinaria. E questi, invero, sono soltanto gli inizi di una certa Geometria, molto più sublime (di quella comune). che si estende ai problemi più difficili e più belli, anche della Matematica mista". Leibniz era consapevole, fin dall'inizio, del carattere rivoluzionario della sua scoperta.

Isaac Newton

Isaac Newton nacque il giorno di Natale del 1642 a Woolsthorp nella contea di Lincoln, in Inghilterra. Orfano di padre, la madre si risposò con il reverendo di una vicina parrocchia ed egli fu allevato dalla nonna. Frequentò prima la scuola del villaggio, poi il collegio di Grantham e, nel giugno 1661, entrò "alla pari" nel Trinity College di Cambridge dove segue le lezioni tenute da Barrow che lo invita a leggere i classici greci (Euclide ed Archimede). In questi anni studia anche, fra le altre, le opere di Viete e la "Géométrie" di Descartes nell'edizione latina curata da Van Schooten. L'opera dalla quale viene forse maggiormente influenzato è "l'Arithmetica infinitorum" di Wallis. Nel 1666 Londra e i dintorni sono colpiti dalla peste, per cui Newton lascia Cambridge e si ritira in campagna. Il biennio 1666-1667 è il più fecondo di risultati, sia per la fisica, che per la matematica. Risale infatti a quest'epoca l'intuizione della legge di gravitazione universale, la formula del binomio, l'elaborazione del metodo delle flussioni e la teoria sulla natura dei colori. Nel 1669 ottenne la cattedra di Matematica che prima aveva Barrow. I più importanti lavori matematici li fa prima della crisi depressiva del 1692, ma verranno pubblicati solo molto dopo, in occasione della disputa con Leibniz per la priorità della scoperta del calcolo infinitesimale. Muore nel 1727.

La sue opere principali sono:

- Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1687) – fondamento della Meccanica classica;

- Tractatus De Quadratura curvarum (appendice all'Optiks), 1704, ma scritta nel nel 1676;
- De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas, 1711, ma del 1669;
- Methodus fluxionum et serierum infinita rum, 1736, ma del 1671.

Tutte le sue opere, ad eccezione dei "Principia", rivelano un indirizzo di tipo empirista e pragmatico; la matematica ha un valore essenzialmente strumentale nei confronti della fisica.

9. Fluenti e flussioni

Newton fonda la sua analisi della cinematica sul concetto di flussione: sia x una grandezza matematica generata dal movimento di un altro ente. Newton chiama x fluente; la flussione è invece indicata con $\dot{x}$ ed è definita come la velocità di accrescimento di x. Nel "Tractatus de quadratura curvarum" (1704) scrive: "Considero in questo lavoro le grandezze matematiche come generate da un moto continuo. Le linee vengono descritte per moto continuo di punti, le superfici per moto di linee, chiamando flussioni queste velocità di accrescimento e fluenti le quantità generate" (Giusti, E., Politecn. Torino, Vol, 46,I- 1988). Per Newton la flussione è una velocità di accrescimento. Bisogna però tener presente che egli non la definisce come limite del rapporto incrementale: in tutte le sue opere non c'è, neanche a parole, il

$$\lim_{h\to 0}\frac{x\,(\,t+h\,)-x(t)}{h}\,.$$

Occorre dunque precisare tre punti:

1. Newton considera solo grandezze dipendenti dal tempo; un tempo che possiamo pensare convenzionale. Egli dice nel "Methodus fluxionum": …questa parola tempo si deve assumere non come se io avessi voluto considerare il tempo nel suo significato letterale, ma per indicare quelle quantità diverse dal tempo, mediante il cui aumento o flusso uniforme, si rappresenta o si misura il tempo."
   Per noi, ad esempio, $y = x^3$ è una relazione fra due variabili: x indipendente e y funzione di x. Per Newton, invece,x è una fluente, funzione del tempo e y è ancora una fluente, funzione del tempo. $\dot{x}$ è la flussione, la velocità di accrescimento, secondo le parole di Newton; anche se egli non definisce la velocità istantanea, tuttavia la concepisce come quantità fisica.
2. Newton non calcola mai delle flussioni, ma solo rapporti fra flussioni, come ad esempio ${}^{\dot{x}}/_{\dot{y}}$ ${}^{\dot{y}}/_{\dot{x}}$ Come Barrow parte da relazioni del tipo

   $F(x,y) = 0$ e con regole ben precise passa alla relazione fra flussioni $\dot{x}\ e\ \dot{y}$. Ad esempio, di fronte a $x^3 - xy^2 - a^3 = 0$ noi consideriamo x e y come funzioni del tempo e deriviamo rispetto al tempo: $3x^2\,\dot{x} - \dot{x}\,y^2 - 2xy\,\dot{y} = 0$, dove

$$\dot{x} = \lim_{h\to 0}\frac{x\,(\,t+h\,) - x(t)}{h} \quad e \quad \dot{y} = \lim_{h\to 0}\frac{y\,(\,t+h\,) - y(t)}{h}$$

Newton giunge alla stessa relazione fra $\dot{x}\ e\ \dot{y}$, ma queste non sono per lui, su un piano teorico, delle derivate come le intendiamo noi, anche se operativamente coincidono. In generale Newton calcola i rapporti $\dot{y}/\dot{x}$ ma talvolta pone $\dot{x} = 1$, per cui $\dot{y}/\dot{x} = \dot{y}$ ciò operativamente è vicino al nostro $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$.

3. Va rilevato, infine, che nei Principia, Newton non usa esplicitamente il calcolo ma "maschera" tutto sotto uno stile euclideo.

10. Sviluppi in serie

I risultati ottenuti da Newton sugli sviluppi in serie si trovano in manoscritti risalenti al 1665 ed anche in opere pubblicate, ad esempio nel "De Analysi" e si possono considerare come derivati da studi sulle opere di Wallis, in particolare sulla "Arithmetica infinitorum" (1656). Il più famoso di questi risultati è quello passato alla storia come "il binomio di Newton":

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,a^{n-k}\,b^k\,,\ n \in N \quad (1)$$

In realtà va detto che Newton trovò anche la formula:

$$(\,1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{r}{n}\,x^n \quad ,con\,r > 0, r < 0,\ \ r \in N, r \in Q, ma\,non\,r \in R \quad (2)$$

Se vogliamo chiamare la 2) serie di Newton, riconoscendogli il merito do aver esteso la 1) al caso 2), dobbiamo precisare che Newton:

- ha operato questa generalizzazione, ma non per $r \in R$,
- ha trovato questa estensione non con il calcolo di derivate, ma con svariati metodi (per esempio divisione, estrazione di radice, ecc…:
- non si poneva il problema della convergenza o meno della serie.

Le serie, per Newton, non potevano non convergere. Difatti afferma esplicitamente: "Se nella pratica un problema reale conduce ad una serie che non converge, ciò può dipendere soltanto dal fatto che il problema è stato mal impostato: si cerchi di rielaborarlo meglio, restando più aderenti alla realtà fisica e la serie trovata cesserà di essere divergente." Gli sviluppi in serie sono per Newton la chiave per affrontare e risolvere nella loro massima generalità i principali problemi del calcolo. Le vivaci controversie tra Newton e Leibniz sulla priorità della scoperta del calcolo infinitesimale favorirono la nascita di due scuole di pensiero: quella inglese e quella continentale. La scuola inglese tenta con tenacia di chiarire le nozioni che servono da base al metodo delle flussioni e di eliminarne le difficoltà filosofiche inconciliabili con l'intuizione geometrica alla quale gli analisti inglesi danno la preminenza. Gli interventi in questo senso sono talvolta molto duri e polemici, come, in particolare, quello di Berkeley che, nel 1734 (mentre è vescovo a Cleyne), pubblica un'opera nella quale tenta di dimostrare che il calcolo newtoniano conduce a verità solo grazie a una compensazione di errori: chi crede in tale calcolo è quindi un miscredente.

Componenti di spicco della scuola inglese furono:

- George Berkeley (1684-1753)
- Colin Mac Laurin (1698- 1746), allievo di Newton. Scrisse il trattato "Treatise of Fluxions" nel quale compare la formula dello sviluppo in serie di una funzione
- Brook Taylor (1685- 1731).

La scuola continentale, capeggiata dai Bernoulli e dai Bernoulliani, si caratterizza piuttosto per una tendenza a legare il calcolo differenziale all'idea di funzione che con Eulero (1707-1783) diventa un concetto fondamentale in matematica. La compattezza delle nozioni leibniziane, l'efficacia dei suoi algoritmi favoriscono, sotto l'impulso del punto di vista formalista di Eulero, uno sviluppo quasi automatico del calcolo differenziale anche se i matematici fanno talvolta ancora appello alla filosofia per giustificare la nozione di infinitesimo. Il calcolo infinitesimale si diffonde rapidamente grazie in parte alla vasta corrispondenza di Leibniz con i suoi contemporanei, in particolare i Bernoulli. La matematizzazione progressiva della fisica, l'uso del calcolo infinitesimale nell'analisi dei fenomeni naturali sono all'origine del fiorire di nuove branche della matematica:

- Lo studio di fenomeni meccanici e fisici si traducono in generale in equazioni differenziali la cui integrazione sarà l'oggetto di un nuovo ambito dell'analisi;
- La matematizzazione della meccanica, dell'idrodinamica e della teoria dell'elasticità è l'impulso principale allo sviluppo del calcolo delle variazioni,
- Lo studio delle curve e delle superfici necessita di tecniche differenziali che sono all'origine della geometria differenziale.

Tutte queste branche si dipartono da un tronco comune: il calcolo infinitesimale ed il suo sviluppo costituirà l'oggetto delle ricerche matematiche del XVIII secolo. Il calcolo si amplia tramite il ramificarsi delle sue applicazioni, ma la difficoltà di definirne le nozioni fondamentali rimane Quasi tutti i matematici di questo secolo provano a superare tali difficoltà. Ma i loro tentativi rimarranno vani. Agli inizi del XIX secolo, il desiderio di basare la matematica su fondamenti solidi diventa quasi generale e la necessità di mettere in chiaro i concetti basilari dell'analisi si fa pressante. I matematici si interrogano sulla natura delle funzioni in generale e delle funzioni continue in particolare. Il logico e matematico di Praga Bernard Bolzano (1781- 1848) ha per primo una concezione chiara delle nozioni di base del calcolo infinitesimale (continuità, legame tra continuità e derivabilità) ma i suoi lavori passano inosservati per mezzo secolo.

11. Due grandi analisti: J.L. Lagrange e A.L. Cauchy

J.L. Lagrange

Il principale artefice dell'introduzione del rigore nel calcolo infinitesimale fu il matematico francese Augustin Louis Cauchy (1789- 1857), nato a Parigi nel 1789, poco prima della presa della Bastiglia. Suo padre, giurista parlamentare, al momento della caduta della Bastiglia, dovette fuggire con tutta la sua famiglia e rifugiarsi ad Arcueil, suo paese di origine. Qui Cauchy incontrò Laplace, il quale si accorse della grande predisposizione del ragazzo per la matematica ma, vistolo così gracile, gli raccomandò di curarsi e di non affaticarsi troppo negli studi. La carriera di Cauchy fu rapidissima: passò al Politecnico, quindi alla scuola degli ingegneri civili ed ebbe un importante incarico a Cherbourg, dove Napoleone aveva ordinato la costruzione di impianti portuali e fortificazioni, al fine di una futura conquista dell'Inghilterra. Dopo la disfatta di Lipsia (1813) tale progetto venne meno e Cauchy tornò a Parigi, dove era diventato ormai famoso presso la comunità scientifica per una memoria sui determinanti. A Parigi, a soli 27 anni, venne scelto per un seggio all' Accademia delle Scienze e rimase in questa città, come direttore dell'Ecole Polytechnique, fino al 1830. Dopo la caduta di Carlo X, Cauchy, che aveva giurato fedeltà al re, decise di andare in esilio in Svizzera. Poco tempo dopo accettò la cattedra di fisica matematica a Torino, offertagli da Carlo Alberto, re di Sardegna. In seguito si trasferì a Praga, dove fu precettore del Duca di Borgogna, nipote di Carlo X. Tornato a Parigi nel 1838, dal 1848 ottenne nuovamente una cattedra alla Sorbona. Durante gli ultimi diciannove anni della sua vita compose più di 500 memorie concernenti tutti i rami della matematica, compresa la meccanica, la fisica e l'astronomia. Morì nel 1857. In tutta la sua vita Cauchy produsse un tal numero di opere e di memorie da risultare secondo soltanto a Eulero per la quantità della produzione scritta. Preferendo la matematica pura a quella applicata, curò in modo particolare l'eleganza della forma e il rigore dimostrativo. Era tra l'altro dotato di una grande capacità lavorativa e di una prodigiosa fecondità intellettuale.

La sue opere principali sono:

- Cours d'analyse (1821);
- Résumé des Lecon sur le calcul infinitésimal (1823);
- Lecons sur le calcul differentiel (1829);

In tutte le sue opere appare determinante il concetto di limite. La sua definizione, che riprende l'idea di D' Alembert, rompe definitivamente con la concezione geometrica che era ancora soggiacente e fa del limite un concetto aritmetico: "Lorsque les valeurs successivement attribuéea à une meme variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de maniére à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette derniére est applée la limite de toutes les autres". (Quando i valori successivamente attribuiti ad una stessa variabile si avvicinano indefinitamente ad un valore fisso, in modo che ne differiscano poco quanto si vuole, quest' ultimo è chiamato il limite di tutti gli altri). Alla luce dei concetti di limite, di variabilità e di funzione Cauchy chiarisce la nozione di infinitamente piccolo che non è altro che una successione convergente avente zero come limite. La derivata di una funzione continua $y = f(x)$ è definita anch'essa in termine di limiti" E' il limite, quando esiste,del rapporto delle differenze (rapporto incrementale della funzione) $\frac{f(x+i)-f(i)}{i}$ quando i si avvicina al limite zero". Sappiamo che una funzione derivabile in un punto è ivi continua, ma che l'inverso non è vero. Il legame fra continuità e derivabilità, però, non verrà mai esplicitato nei lavori di Cauchy. Il problema non sarà chiaramente formulato se non a partire dalla memoria di Dirichlet sullo sviluppo delle funzioni trigonometriche.Dopo aver definito la derivata, infine, Cauchy stabilisce il suo legame con i differenziali di Leibniz: se dx è una quantità finita qualunque, il differenziale dy di una funzione $y = f(x)$ sarà semplicemente $f'(x)\,dx$. Le quantità $dx\ e\ dy$ sono dunque definite mediante la sola proprietà di avere un rapporto uguale alla derivata prima $f'(x)$.

Ioseph-Louis Lagrange

Lagrange nacque a Torino nel 1736 da una ricca famiglia con antenati italiani e francesi. A 16 anni, nel 1754, scrisse la prima opera, l'unica in italiano: una lettera "matematica" sulla determinazione dei coefficienti per lo sviluppo del binomio di Newton per potenza qualsiasi. Nel 1755 ottenne un posto come professore di matematica presso la Regia Scuola di Artiglieria di Torino e, due anni dopo, con Angelo Saluzzo di Monesiglio, chimico, e Giovanni Francesco Cigna, medico, fondò la Reale Accademia della Scienze di Torino. A trent'anni una sua memoria sui massimi e i minimi gli fece ottenere la nomina a membro della Accademia delle Scienze di Berlino. Nel 1766 Lagrange fu chiamato da Federico II di Prussia – che era stato consigliato da D'Alembert- a sostituire Eulero alla direzione della classe di Scienze matematiche della Accademia di Berlino. Restò in questa città per vent'anni, durante i quali pubblicò 63 memorie sui soggetti più disparati e iniziò a lavorare a un trattato di meccanica, che però pubblicò dopo essersi trasferito a Parigi a seguito della morte di Federico II (1787), ove accettò la posizione di socio straniero presso l'Accademia della Scienze della capitale francese. Qui pubblicò la sua opera più famosa, "Méchanique analytique", uno splendido trattato nel quale espone metodi di indagine matematica su problemi di meccanica che non richiedono costruzioni, né ragionamenti geometrici, ma solo operazioni algebriche. Durante la Rivoluzione francese collaborò alla riorganizzazione dell' insegnamento scientifico nella università e presiedette la commissione per l'introduzione del sistema metrico decimale. Lagrange era sempre pronto a eseguire i compiti scientifici e tecnici che gli venivano richiesti: calcolò traiettorie di artiglieria, lavorò, assieme a Lavoisier, a un modello matematico dell'economia francese, indagò sulle tecniche molitorie da adottare per i vari cereali e, soprattutto, partecipò ai lavori di tutte le Commissioni metriche che si succedettero dal 1790 al 1799. Fu membro dell' Institut National (l'antica Accademia) del Bureau des Longitudes, insegnante presso l'Ecole Normale e presso l'Ecole Polytechnique. Napoleone lo nominò senatore, Grand' Ufficiale della Legione d'Onore, conte dell' Impero e Gran Croce della Riunione. Alla sua morte (1813) fu sepolto nel Panthéon di Parigi. Lagrange fu uno dei maggiori matematici del Settecento e partecipò attivamente al movimento culturale dell'Illuminismo attraverso i molti vincoli che lo legarono ai più avanzati ambienti scientifici. Lasciò una produzione di vasta mole: compì ricerche di notevole importanza sul calcolo delle variazioni, sulla teoria delle funzioni e sulla sistemazione matematica della meccanica.

12. Una prima teoria dell'integrazione

Newton e Leibniz avevano elaborato due concezioni differenti di integrale. Quella di Newton aveva soprattutto fatto uso dell'integrale indefinito e considera l'integrazione come operazione inversa della differenziazione. Questo punto di vista aveva prevalso nel corso di tutto il XVIII secolo. Leibniz aveva interpretato le aree e i volumi come somme di rettangoli e di cilindri, ciò che aveva portato ad utilizzare l'integrale definito. Cauchy, che darà per primo una precisa definizione di integrale (1823), aderirà a questa seconda interpretazione. Difatti sottolinea la necessità di dimostrare l'esistenza degli integrali "prima di far conoscere le loro diverse proprietà". Il suo punto di partenza è una funzione reale, continua in un intervallo $[x_{0,} x]$, che viene suddiviso in n sotto-intervalli. Cauchy forma, poi, la somma:

$$S = (x_1 - x_0)\, f(x_0) + (x_2 - x_1)\, f(x_1) + \cdots \dots \dots \dots \dots\ (x_n - x_{n-1})\, f(x_{n-1})$$

e dimostra che il limite di S, al tendere a zero della lunghezza del maggiore dei sotto-intervalli, esiste (la dimostrazione rigorosa esige la nozione di uniforme continuità, che Cauchy non possedeva).Utilizza la notazione $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$, "imaginée par M. Fourier" e definisce $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$,dove x appartiene all'intervallo $[x_0, x]$ e mostra che $F'(x) = f(x)$ per ogni x dell'intervallo $[x_0, x]$. Questa proposizione stabilisce il legame tra l'integrazione e la derivazione ed è dunque ancora in Cauchy che troviamo una prima dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo infinitesimale. Nel 1823, in una memoria sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti, Cauchy scriveva: "In questa memoria consideriamo ogni integrale definito come la somma dei valori indefinitamente piccoli delle espressioni differenziali poste sotto $\int$, che corrispondono ai diversi valori della variabile compresi tra i limiti in questione. Se adottiamo questa maniera di considerare gli integrali definiti proviamo facilmente che ogni siffatto integrale ha un unico valore finito ogni volta che, essendo i due limiti della variabile finiti, l'integranda si mantiene finita e continua tra questi limiti". In un poscritto a quella memoria, egli scriveva: "Noi siamo naturalmente portati dalla teoria delle quadrature a considerare ogni integrale definito, preso tra due limiti reali, come la somma dei valori infinitesimi della espressione differenziale sotto il segno $\int$ che corrispondono ai diversi valori reali della variabile che sono compresi tra i limiti in questione. Ora a me sembra che questo modo di considerare un integrale definito debba essere preferibilmente adottato …….perchè è ugualmente adatto, in ogni caso, anche a quelli in cui non possiamo generalmente passare dalla funzione sotto il segno $\int$ alla funzione primitiva….." Con Cauchy si ha il momento di svolta, dal considerare l'integrazione come operazione inversa della derivazione verso una moderna teoria della misura, dove l'oggetto primario di interesse è l'integrale. Rendendo rigorosa l'originaria concezione di Leibniz dell'integrale come somma di elementi infinitesimi, Cauchy si allontana in modo netto dalla pratica allora usuale di assumere in primo luogo l'esistenza dell'integrale indefinito e, da questo, far discendere l'integrale definito secondo la formula classica:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad dove\ F'(x) = f(x)$$

Egli dice "è sembrato necessario dimostrare generalmente l'esistenza degli integrali o funzioni primitive prima di far conoscere le loro diverse proprietà. A questo scopo si è reso indispensabile anzitutto stabilire la nozione di integrale preso entro limiti dati o integrale definito". Nella trattazione dell'integrazione Cahchy non si limita a considerare l'integrale come l'inverso della derivata, ma al contrario lo definisce in maniera indipendente, salvo poi confrontare tra loro le due operazioni. Con l'introduzione di questo nuovo punto di vista, il teorema fondamentale del calcolo integrale, che nella teoria di Leibniz e Newton serviva essenzialmente per la definizione di integrale, assume ora il ruolo di un vero teorema, in quanto asserisce che le due operazioni di integrazione e derivazione, definite indipendentemente, sono (a meno di costanti additive) l'una l'inversa dell'altra. Un serio inconveniente alla definizione di integrale di Cauchy è che esso vale solo per le funzioni continue, una limitazione particolarmente grave per la trattazione delle serie di Fourier. E' proprio questa la ragione che spinge Georg Friedrich Bernard Riemann (1826-1866) a definire l'integrale per arbitrarie funzioni limitate. Col tedesco Karl Weierstrass (1815-1897) la ricerca del rigore intrapresa da Cauchy si spinge ancora più lontano. Per chiarire i metodi dell'analisi, Weierstrass preconizza l'introduzione di un formalismo aritmetico, di cui, peraltro, mancano ancora i fondamenti logici. E' Weierstrass stesso che cerca la via per porre rimedio a tale carenza. La sua costruzione dei numeri reali che si situa intorno al 1863 non resta isolata. L'anno 1872 vede la pubblicazione dei risultati in questo campo di Georg Cantor (1845-1918), di Eduard Heine (1821- 1881) e di Richard Dedekind (1831- 1916). Fra i contributi di Weierstrass al programma di aritmetizzazione dell'analisi, oltre al linguaggio e al simbolismo non equivoci, si contano tra l'altro una definizione soddisfacente del concetto di numero reale e un perfezionamento della definizione del concetto di limite di una funzione ripresa da Heine, nei suoi Elemente del 1872, che risentono dell'influenza delle lezioni di Weierstrass. Arriva in tal modo alla definizione in termini di epsilon-delta della variazione infinitamente piccola della variabile e della funzione. Ne derivano immediatamente le definizioni moderne di limite e di continuità.

13. L'analisi non standard

La matematica del seicento venne caratterizzata fondamentalmente dalla ricerca della soluzione ad un celebre e antico problema: il cosiddetto *"problema delle tangenti"*. Esso consiste nella determinazione della retta tangente al grafico di una data funzione reale di variabile reale in ogni suo punto. A questo si aggiunse in modo naturale l'esigenza della risoluzione del problema inverso: data una relazione fra la tangente ed il punto risalire al grafico della funzione, per risolvere il quale si fece ricorso al metodo infinitesimale di Newton e Leibniz aspramente criticato nel 1734, dal vescovo George Berkeley il quale sosteneva, a ragione, la contraddittorietà della nozione di infinitesimo. Quando nel XIX secolo si presentò una forte esigenza di rigore matematico, il calcolo differenziale venne completamente riformulato da Karl Weierstrass, tra il 1870 ed il 1880, introducendo il concetto di limite, il quale permise di operare in termini dei soli numeri reali eliminando una volta per tutte l'uso degli infinitesimi. L'approccio di Weierstrass è quello "standard" ormai consolidato che viene insegnato oggi nei corsi di Analisi. Tuttavia, pur essendo un metodo rigoroso, ha il difetto di farci perdere l'intuizione iniziale che aveva dato il via alla nascita del calcolo infinitesimale e che comunque ci aveva condotto a delle conclusioni corrette. E se i risultati sono corretti, non potrà esserlo in qualche modo anche il procedimento? La risposta a questa domanda è si. Nel 1961 il matematico americano di origine tedesca Abraham Robinson trovò un modo per rendere rigoroso il calcolo differenziale usando gli infinitesimi. Questa sua scoperta si fonda in modo essenziale sulla logica matematica, anche se verso la fine degli anni sessanta il matematico americano H. Jerome Keisler è riuscito a riformulare tutta l'Analisi Matematica secondo il principio infinitesimale di Robinson, seguendo una via alternativa che non la utilizza. Robinson battezzò questo "nuovo" calcolo differenziale *Analisi Non-Standard*, in quanto esso si basa appunto su un modello non-standard dei numeri reali. Prendiamo come punto di partenza il sistema dei numeri reali R che chiameremo *universo standard* ed il calcolo differenziale di Weierstrass (o Analisi Standard). L'analisi non-standard si fonda sul sistema dei numeri iperreali I numeri iperreali, come aveva vagamente supposto Leibniz, godono delle stesse proprietà formali dei numeri reali. L'esistenza di "strani" numeri non contemplati dall'aritmetica usuale fu scoperta per la prima volta nel 1934 dal logico norvegese Thoralf A. Skolem che costruì un modello non-standard dei numeri naturali. Successivamente questa costruzione fu ampliata fino ad arrivare al campo dei numeri iperreali. Il termine "iperreale" è dovuto ad Edwin Hewitt in un articolo del 1948. La geniale intuizione di Robinson fu quella di utilizzare gli infinitesimi per riformulare l'Analisi Matematica. Ripercorriamo questa ricostruzione partendo dal Teorema di completezza di Godel: "*Un insieme di proposizioni è logicamente coerente (nessuna contraddizione può essere dedotta da esso) se e solo se esso ha un modello, cioè se e solo se esiste un universo in cui esse sono tutte vere.* Accanto al Teorema di completezza abbiamo l'importante corollario dovuto a Malcev Henkin: Teorema di compattezza: *Sia P un insieme di proposizioni di un linguaggio formale L. Supponiamo che nell'universo standard ogni sottoinsieme finito di P sia vero. Allora esiste un universo non-standard in cui tutte le proposizioni di P sono contemporaneamente vere.* Il teorema di compattezza è una diretta conseguenza del teorema di completezza. Grazie a questi due teoremi è possibile dimostrare l'esistenza degli infinitesimi. Eppure l'avvento dell'Analisi Non-Standard ha trovato sorprendentemente una reazione negativa da parte soprattutto degli analisti, fedeli al metodo tradizionale di Weierstrass. L'Analisi Non-Standard sta però prendendo piede in settori come la probabilità e la geometria differenziale, date le notevoli semplificazioni che porta. La ricerca in questa direzione va perciò oltre la semplice trattazione che abbiamo dato noi e che è a tutt'oggi ad un livello veramente avanzato. Lo stesso Robinson, insieme al suo allievo Allen Bernstein, ha risolto tramite l'Analisi Non-Standard un problema precedentemente insoluto sugli operatori lineari compatti. Concludiamo queste brevi note citando una frase di Abraham Robinson che è tratta dal suo libro *Non- Standard Analysis* e che solo l'umiltà di una mente geniale come la sua poteva dettare: *"Il fatto che questo libro contenga solo applicazioni alla Matematica Applicata classica è probabilmente una testimonianza delle limitazioni dell'autore e non del metodo."*

Conclusioni

L' analisi non standard, quindi, introdotta nei primi anni '60 da Abraham Robinson, rappresenta una rifondazione dell'analisi matematica che recupera in buona parte l'impostazione originale di Leibniz e il concetto di infinitesimo. Il calcolo infinitesimale creato da Leibniz nel XVII secolo si fondava in modo essenziale sul concetto di infinitesimo grazie al quale è possibile introdurre i concetti di derivata e di integrale e dedurre le regole di derivazione e di integrazione. Il concetto di infinitesimo nascondeva però una contraddizione logica che fu messa in luce da George Berkeley ed anche da Karl Marx nei suoi scritti matematici: gli infinitesimi sono a volte considerati diversi da zero, a volte uguali a zero.Per superare questo problema, nel XIX secolo Augustin Cauchy e Karl Weierstrass rifondarono il calcolo infinitesimale, abolendo gli infinitesimi e fondando il tutto invece sul concetto di limite: in questo modo le contraddizioni logiche insite nel concetto di infinitesimo furono superate, al prezzo di una notevole complicazione di definizioni e dimostrazioni. Aboliti gli infinitesimi, il calcolo infinitesimale si trasformava nella moderna analisi matematica. Nel XX secolo Abraham Robinson, un logico matematico tedesco emigrato negli USA, nel corso dei suoi studi di logica, scoprì che tutti gli insiemi numerici potevano essere estesi con numeri "non standard" che ne ereditavano le proprietà. Per l'insieme dei numeri reali questi altro non erano che gli infinitesimi di Leibniz, definiti questa volta in modo assolutamente rigoroso: diventava così possibile fondare nuovamente l'analisi sul concetto di infinitesimo, e Robinson lo fece nel suo libro *Non-standard Analysis* (1966). E "analisi non standard" è il nome dato a questa nuova formulazione dell'analisi. Definizioni e dimostrazioni ritrovano la semplicità e la linearità del calcolo di Leibniz. Nel 1973 Kurt Gödel, forse il più famoso matematico del XX secolo, disse: "Ci sono buoni motivi per credere che l'analisi non standard in una versione o in un'altra sarà l'analisi del futuro", previsione ancora lontana dall'essere realizzata. Dopo Robinson vi è stata una fioritura di studi e di tentativi di riformulare l'analisi sul concetto di infinitesimo, come nel caso della *Smooth Infinitesimal Analysis* (SIA). Siamo, però. convinti che ogni ricerca sugli assiomi fondamentali della Matematica, come pure delle diverse scienze sperimentali, umanistiche, filosofiche comporta, fra l'altro, il superamento di una visione troppo chiusa delle diverse specializzazioni ed un'idea più ampia del rigore matematico o scientifico. Il rigore matematico non è solo accuratezza nelle dimostrazioni ma anche impegno a esporre nel modo più chiaro e comprensibile i problemi che si vorrebbero risolvere, i teoremi che si vorrebbero dimostrare, le congetture che si vorrebbero verificare o confutare. Noi riteniamo che il rigore scientifico consista soprattutto nell'esporre chiaramente e liberamente le proprie certezze e i propri dubbi, i problemi che si ritiene di aver risolto e quelli che si vorrebbero risolvere o vedere risolti, evitando sempre quei discorsi confusi, oscuri, inutilmente complicati che finiscono con l'annoiare anche l'ascoltatore meglio disposto. Ogni discorso sul metodo scientifico, sul rigore scientifico e sul significato della Scienza ci riporta, in ultima analisi. alle più antiche intuizioni sui valori sapienziali dell'umiltà, della " convivialità" (che è condivisione del sapere, amicizia, ricerca di reciproca comprensione) e della fiducia nella Sapienza che viene incontro a coloro che la amano e la cercano.

Bibliografia

[1] Davis, M., Hersh, R., *L'Analisi Non-Standard*, *Le Scienze quaderni*, 60, 1991, pp. 52-59 (numero speciale a cura di C. Mangione).

[2] Hurd, A. E., Loeb, P. A., *An introduction to Nonstandard Real Analysis*, Academic Press, Orlando, 1985.

[3] Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, D. Van Nostrand Company, Princeton, NJ, 1964 (tr. it. di T. Pallucchini, *Introduzione alla logica matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1972).

[4] Robinson, A.- *Non-Standard Analysis*- North-Holland, Amsterdam, 1966.

[6] Boyer, C.B.- Storia della matematica, Mondadori, Milano, 1980

[7] Giusti, E., il calcolo infinitesimale tra Leibniz e Newton,
Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn., Torino, Vol, 46,I- 1988

[8] Cfr. G. Galilei, *Opere,* Utet, Torino, 1964, Vol. II, p. 613. [9] Archimede, *Opere*, Utet, 1974, p. 572. (9) Cfr. C.B. Boyer, *The Concepts of the Calculus,* N. York, 1939, p. 48.

[10] Lucio Lombardo Radice, La matematica da Pitagora a Newton, Editori Riuniti Univ, Press- Gennaio 2015

Sitografia

www.leonardo-ambrosiana.it
www. matematica.unibocconi.it