Science & Philosophy, 3(2)/2015, 3--10 ISSN online: 2282-7765
print: 2282-7757

Insiemi fuzzy: motivazioni e primi concetti

Aldo G. S. Ventre

Accademia Pontaniana
80100 Napoli, Italy
aldoventre@yahoo.it

Sunto

Movendo dall'indagine di Russell sui limiti dell'empirismo, sono riprese alcune considerazioni relative al concetto di vaghezza, allo scopo di porre in evidenza le motivazioni e lo sviluppo di un contesto fondazionale degli insiemi fuzzy. La descrizione dei fatti della realtà fisica effettuata in termini di insiemi fuzzy trae origine dall'obiettivo di "calcolare con le parole" in presenza della vaghezza presente nei fatti e nel linguaggio che li rappresenta.

Parole Chiave: vaghezza, insiemi fuzzy, misure di fuzziness.

1. *Introduzione. La vaghezza*

Nell'opera *Human Knowledge: its Scope and Limits* (Russell, 1948), Bertrand Russell si chiede: "Come è possibile che gli esseri umani, i cui contatti con il mondo sono brevi, personali e limitati, siano nondimeno capaci di conoscere tutto ciò che effettivamente conoscono?"

Russell cerca di determinare come sia possibile il conseguimento della conoscenza umana. In particolare egli cerca di scoprire i principi dell'inferenza non dimostrativa che giustificano l'inferenza scientifica, "in aggiunta all'induzione se non in luogo di essa" (Chomsky, 1971).

La domanda che Russell si pone contiene la constatazione che i fatti sono vaghi come è vago il linguaggio che li rappresenta. Una rappresentazione è *vaga* quando la relazione del sistema rappresentante verso il sistema rappresentato non è del tipo uno- a-uno, ma del tipo uno-a-molti. Per esempio, una fotografia che è così stropicciata che può ugualmente rappresentare Brown o Jones o Robinson è vaga. Proprio come in una fotografia stropicciata, il linguaggio è uno-a-molti perché una parola non ha un solo specifico limitato significato.

Questo significa che non c'è solo un unico oggetto a cui una parola dà significato, e non un unico possibile fatto che verificherà una proposizione. La conseguenza di questa vaghezza è devastante poiché mina alle fondamenta il *principio del terzo escluso*, che dipende da precisi simboli, come gli altri principi logici. L'ideale di precisione non è applicabile alla vita terrena, ma solo ad una *imagined celestial existence*.

Il fatto che il significato è una relazione uno-a-molti è la precisa affermazione del fatto che tutto il linguaggio è più o meno vago.

2. Precisione e significato

L'analisi della vaghezza in Russell è dettata dallo studio dei limiti dell'empirismo. L'indagine sulla vaghezza è in seguito ripresa da Zadeh (1965) con lo scopo di definire un contesto logico e operativo che pone le basi per calcolare con le parole, *computing with words*.

Riprendiamo gli aspetti della vaghezza in questo contesto, nella trattazione di Bellman e Giertz (1973), che indagano ancora nel contesto dell'empirismo:

"Un'esatta descrizione di ogni reale fisica situazione è virtualmente impossibile. Questo è un fatto che dobbiamo accettare e al quale adeguarci. Si ha, come risultato, che uno dei più importanti problemi nella descrizione (essenziale alla comunicazione, alla presa di decisione, e in senso più ampio, a ogni attività umana) consiste nel ridurre la necessaria imprecisione a un livello di relativa irrilevanza. Dobbiamo bilanciare i bisogni di esattezza e semplicità e ridurre la complessità senza eccedere nella semplificazione allo scopo di conseguire un giusto livello di dettaglio ad ogni passo del problema che abbiamo di fronte."

L'uomo ha sviluppato, sotto la guida dell'esperienza, una capacità intuitiva di affrontare molte situazioni della realtà fisica, quali il riconoscimento e il ragionamento. L'uomo è in grado di identificare una voce senza usare una precisa lista di criteri di identificazione, determinare l'età approssimativa di una persona semplicemente osservandola. Egli ha sviluppato una naturale abilità a stabilire classi di oggetti che hanno proprietà simili, a trattare informazioni e dati affetti da incertezza dovuta all'ignoranza di alcuni fattori. Per illustrare la gestione dell'incertezza pensiamo all'uso quotidiano del linguaggio, dove le parole non hanno un esatto significato.

Nomi (albero), verbi (camminare), aggettivi (alto) e cosi via, si riferiscono a concetti dai confini imprecisi. Quando "albero" diventa "arbusto"? La frase "egli è un uomo alto", nell'ambito della teoria degli insiemi implica che esiste un ben definito insieme di uomini alti e un certo individuo è identificato come membro di quell'insieme. Ma è difficile assegnare una sensata definizione dell'insieme degli uomini alti. Il confine tra gli uomini alti e gli uomini non alti non è netto, è artificiale.

"Allo scopo di assottigliare questi confini noi dobbiamo sacrificare la semplicità e, così facendo ottenere un livello di esattezza inadatto alla parlata e alla scrittura normali, e infine raggiungere un punto in cui questa forma di comunicazione diventa impossibile. Ma la richiesta di precisione aumenta quando ci concentriamo su specifiche aree scientifiche e raggiunge il più alto livello quando veniamo ai fondamenti della matematica e alla logica astratta. Allora abbiamo raggiunto un punto in cui le discussioni nel senso usuale sono impossibili, dove la comunicazione è limitata a un'area molto ristretta, ma bisogna ammettere, è veramente esatta in quest'area."

3. Complessità e inesattezza

I concetti esatti sono la specie osservata nella matematica pura, mentre i concetti inesatti predominano nella vita di ogni giorno. Prendiamo in prestito da Goguen (1969) l'essenziale rivalutazione dell'inesattezza:

"l'inesattezza di una descrizione non è una mancanza; al contrario, è una benedizione poiché l'informazione sufficiente può essere convogliata con minore sforzo. La descrizione vaga è anche più facile da ricordare. Cioè, l'inesattezza lavora per una maggiore efficienza."

Con riferimento all'aumento della complessità dei sistemi Zadeh (1973, 1975) enuncia il *principio di incompatibilità*:

"al crescere della complessità di un sistema, la nostra capacità di fare precise e significative enunciazioni sul suo comportamento diminuisce fino al raggiungimento di una soglia oltre la quale precisione e significato diventano caratteristiche mutuamente escludentisi."

4. Insiemi e insiemi fuzzy

L'assunto fondamentale della teoria degli insiemi, il principio del terzo escluso, che afferma che ogni oggetto o appartiene o non appartiene a un dato insieme, che non esiste nulla "nel mezzo", esclude praticamente tutti gli insiemi di oggetti reali. Allo scopo di ottenere una più precisa descrizione degli insiemi che incontriamo nella vita di tutti i giorni, Zadeh (1965) estese il concetto di insieme a quello di *insieme fuzzy*. Questo fu realizzato, sostituendo la rigida relazione di appartenenza *aut-aut* dell'ordinaria teoria degli insiemi con una più flessibile, consentendo un *grado di appartenenza* ad ogni oggetto nella forma di un'indicazione numerica di quanto siamo disposti ad accettare (soggettivamente) quel particolare oggetto come membro.

(L'aggettivo anglosassone *fuzzy*, indica un oggetto peloso, dai contorni non ben definiti. In francese è usato il termine *ensemble flou*, in italiano fu proposta la denominazione *insieme nebuloso* o *sfocato*.)

Il concetto di insieme fuzzy è formalizzato come segue.

Sia X un insieme non vuoto. Un insieme fuzzy A sull'insieme X è definito come un insieme di coppie

$$A=\{[x, f_A(x)]\}$$

essendo x il generico elemento dell'insieme X, ed f_A una funzione reale, detta *funzione di appartenenza*, il cui insieme di definizione è X. Il valore $f_A(x)$ è detto *valore di appartenenza* o *grado di appartenenza* di x nell'insieme fuzzy A. Il valore $f_A(x)$ riflette la nostra (soggettiva) disponibilità ad accettare il particolare x come membro in A. Si assume che i valori della funzione di appartenenza f_A appartengano nell'intervallo chiuso I=[0,1].

Osserviamo che l'insieme fuzzy A sull'insieme X è caratterizzato dalla sua funzione di appartenenza f_A, che è quindi sufficiente a denotarlo. Si può parlare perciò semplicemente dell'insieme fuzzy f_A, o dell'insieme fuzzy f , se non diamo luogo ad equivoco, invece che di insieme fuzzy $A = \{[x, f_A(x)]\}$.

Se X è un insieme finito allora l'insieme fuzzy A viene detto insieme fuzzy *finito*. Mediante la disuguaglianza $f_A(y) > f_A(x)$ noi indichiamo una nostra maggiore disponibilità ad accettare y che accettare x come membro in A.

Concordiamo sul fatto che $f_A(x) =1$ significa la nostra completa accettazione di x come membro e che $f_A(x) = 0$ significa che noi rifiutiamo x del tutto.

Se l'insieme dei valori di f_A contiene soltanto i numeri 0 e 1, A diventa un insieme nell'ordinaria accezione; diremo allora che A è *un insieme ordinario*.

Sono definite le operazioni di intersezione $A\cap B$ e unione $A\cup B$ di due insiemi fuzzy $A=\{[x, f_A(x)]\}$ and $B =\{[x, f_B(x)]\}$, come segue:

$$A\cap B=\{x: \min[f_A(x), f_B(x)]\}$$

$$A\cup B=\{x: \max[f_A(x), f_A(x)]\}$$

5. Insiemi fuzzy e probabilità

Il concetto di insieme fuzzy è fondamentalmente di natura non statistica e la teoria della probabilità non è appropriata per trattare il tipo di incertezza che sorge dall'ambiguità. La *casualità* riguarda l'incertezza sull'occorrenza di un evento precisamente descritto. La *fuzziness* (potremmo dire "sfocatura") tratta il caso in cui l'oggetto stesso è intrinsecamente impreciso. Tuttavia si presentano casi in cui casualità e fuzziness sono compresenti.

Un popolare esempio di oggetto intrinsecamente impreciso è l'*elefante nel buio*. Un osservatore ignaro può descrivere l'oggetto come un pilastro se abbraccia una zampa, o un ventaglio se tocca l'orecchio (vedi *link*).

Si definisce *potenza* o *energia* di un insieme fuzzy finito la somma dei valori della funzione di appartenenza. Può aver senso definire la potenza come integrale se X è un intervallo.

6. Misure di fuzziness

De Luca e Termini (1972) suscitarono l'interessante questione di assegnare ad ogni insieme fuzzy f in X una misura della sua "fuzziness". Precisamente essi introdussero una funzione reale d definita nell'insieme F(X) degli insiemi fuzzy sull'insieme finito X, a cui diedero il nome di *misura di fuzziness* di f, o *fuzzy entropia* di f. Il valore numerico $d(f)$ si chiama *grado* di fuzziness di f. Il significato della fuzzy entropia è diverso da quello dell'entropia di una distribuzione di probabilità perché nessun concetto probabilistico è necessario alla sua definizione. Questa funzione dà una misura globale, una media, della *indefinitezza*, ossia una mancanza nella definizione. Consideriamo il significato di un insieme fuzzy f come descrizione di una situazione fisica espressa in linguaggio naturale. Se l'insieme dei valori di f contiene soltanto numeri molto prossimi a 0 e 1, allora f diventa "quasi" un insieme ordinario.

La vicinanza del valore $f(x)$ a 1, ad esempio $f(x)$=0,9, indica che x è un oggetto "quasi" precisamente descritto, ossia x è un elemento di un insieme "quasi" ordinario. Analogamente, se $f(x)$=0,1 x è un elemento "quasi" precisamente descritto da $f(x)$=0,1 come un elemento da rifiutare "quasi" del tutto. Così, sempre ad esempio, consideriamo l'insieme (ordinario) X formato da una popolazione di trentacinquenni maschi italiani; sia x uno di questi, del quale vogliamo dare una descrizione in base alla sua altezza. Supponiamo che x sia alto 2 metri; quale valore possiamo dare alla descrizione "x è alto"? "Quasi" certamente a questa descrizione possiamo dare valore, o grado di appartenenza, $f(x)$=0,9 che esprime la "quasi" certezza che "x è alto". Supponiamo ora che x

sia alto 1 metro; quale valore possiamo dare alla descrizione "*x* è alto"? "Quasi" certamente a questa descrizione possiamo dare valore, o grado di appartenenza, $f(x)$=0,1 che esprime la "quasi" certezza che non è vero che "*x* è alto". Quando siamo incerti? Quando *x* è alto 1,70 metri; in questo caso la descrizione "*x* è alto" assume un valore intermedio tra 0 e 1. La descrizione meno precisa, che trasmette la massima incertezza ha valore $f(x)= ½$.

L'energia e la fuzzy entropia, applicate a un insieme fuzzy, sono informazioni intrinseche medie e riguardano differenti e indipendenti proprietà di un insieme fuzzy, cioè di una descrizione. La radio, con le sue due manopole che regolano il volume e la sintonia, ci suggerisce un esempio intuitivo. Il volume opportunamente alto è una condizione necessaria per un buon ascolto, ma per la comprensione del messaggio è necessaria una buona sintonizzazione: il messaggio è un insieme fuzzy la cui energia è il volume e la cui fuzzy entropia misura la chiarezza del sonoro, più l'entropia è bassa, più il messaggio è chiaro.

Seguendo De Luca e Termini, introduciamo e discutiamo alcuni ragionevoli requisiti che una misura di fuzziness *d* deve soddisfare. Sia X un insieme finito e sia *f* un insieme fuzzy in X. Richiediamo, in primo luogo, che la quantità $d(f)$ dipenda solo dai valori assunti da *f* nell'intervallo [0,1]. Inoltre si richiede che siano soddisfatte le proprietà seguenti:

P1: $d(f)=0$ se e solo se *f* assume valori solo nell'insieme {0,1}, cioè $d(f)=0$ se e solo se *f* è un insieme ordinario (in un insieme ordinario la fuzziness è nulla: se A è un sottoinsieme ordinario di X, di ogni elemento *x* di A si può dire con certezza se *x* appartiene ad A o se *x* non appartiene ad A);

P2: la funzione *d* assume il suo valore massimo se e solo se *f* è la funzione costante che assume il valore ½ ;

P3: $d(f)\geq d(f^*)$, ogni qualvolta f^* è una *versione affinata* (*sharpened version*) di *f*, cioè un insieme fuzzy tale che $f^*(x)\geq f(x)$ se $f(x)\geq ½$ e $f^*(x)\leq f(x)$ se $f(x)\leq ½$;

P4: $d(f)= d(f^-)$, dove f^- è il complemento di *f*, cioè la funzione $f^-(x)=1-f(x)$;

P5: $d(f)$ è una valutazione non negativa sul reticolo degli insiemi fuzzy in X, cioè, per ogni $f(x)$ e $g(x)$ in F(X):

$$d(\min[f(x), g(x)]) + d(\max[f(x), g(x)]) = d(f) + d(g)$$

Un' espressione di $d(f)$ soddisfacente le proposizioni da P1 a P5 è data da:

$$d(f) = H(f) + H(f^-)$$

dove $H(f)$ ha la forma dell'entropia di *Shannon*, l'entropia di una distribuzione di probabilità finita:

$$H(f) = -k\, \Sigma_i f(x_i) \ln f(x_i)$$

con *k* costante positiva.

Una generalizzazione del concetto di fuzzy entropia è dovuta a (Knopfmacher, 1975), che stabilì il seguente.

Teorema. Sia (X, *S*, μ) uno spazio mensurale con *S* una σ-algebra and 0 < μ(X) < +∞. Denotiamo con *F*(X) l'insieme di tutti gli insiemi fuzzy in X che sono misurabili e sia Δ un'arbitraria funzione reale di $\alpha \in [0, 1]$, tale che $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$, $\Delta(\alpha) = \Delta(1-\alpha)$, e Δ è strettamente crescente per $\alpha \in [0, ½]$. Allora l'uguaglianza

$$d(f)= \frac{1}{m(\mathrm{X})} \int \mathrm{D}(\, f\,(\mathrm{x}))\mathrm{d}m(\mathrm{x})$$

definisce una funzione di $f \in F(X)$, che soddisfa le proprietà P3, P4, P5 e inoltre:

P1*: $d(f) = 0$ se e solo se *f* è un insieme ordinario quasi ovunque (q. o.)

P2*: $d(f)$ assume un unico valore massimo per insiemi fuzzy in X misurabili se e solo se *f* coincide q. o. con la funzione costante che assume il valore ½ ;

Bibliografia

R. Bellman and M. Giertz, *On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets*, Information Sciences 5 (1973) 149-156.

N. Chomsky, *Problems of knowledge and freedom. The Russell lectures*, The New Press, New York and London, 1971.

A. De Luca and S. Termini, *A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory*, Information and Control 20 (1972) 301-312.

J. A. Goguen, *The Logic of Inexact Concepts*, Synthese 19:3/4 (1969:apr.) 325-373.

B. Russell, *Human Knowledge: its Scope and Limits*, Simon & Schuster, New York, 1948.

J. Knopfmacher, *On measures of fuzziness*, J. Math. Anal. Appl. 49 (1975) 329-334.

L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Information and Control 8 (1965) 338-353.

L. A. Zadeh, *Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, SMC 3 (1973) 28-44.

L. A. Zadeh, *The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning*-I, Information Sciences 8 (1975) 199-249.

http://www.hermes-press.com/elephant_dark2.htm