Volume 6 Numero 2 2023

MONDO MATEMATICO E DINTORNI

Rivista per i Docenti del Primo Ciclo di Istruzione

Direttori Editoriali
Luciana Delli Rocili
Antonio Maturo
Renata Santarossa

APAV

Accademia
Piceno - Aprutina
dei Velati in Teramo
ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola

ISSN 2612 - 2596 [on line] ISSN 2612 - 1719 [testo stampato]

Volume 6 (2023) Numero 2

MONDO MATEMATICO E DINTORNI

Rivista per i Docenti del Primo Ciclo di Istruzione

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo

Editore: Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo (APAV)
Via del Concilio n.24, Pescara, Italy

Codice Fiscale: 92036140678 Partita IVA: 02184450688

Codice destinatario per fatturazione elettronica: M5 UXCRL

IBAN: IT 57 K 02008 15408 000104232062 BIC Swift LINCRITM1760
Banca UNICREDIT - Agenzia Pescara UMBERTO 00760

Periodicità: semestrale

Siti web: www.apav.it; www.eiris.it

Email: apavsegreteria@gmail.com, apavsegreteria@pec.it

ISSN: 2612 - 1719 (testo stampato)
ISSN: 2612 - 2596 (online)

Autorizzazione del Tribunale di Pescara del 9/4/20l9
N. 741/2019 V.G.
N. 03/2019 Reg. Stampa

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 6, No 2 (2023), 3-4

Prefazione

Come per il numero 1 (2023), anche il numero 2 (2023) della rivista “Mondo Matematico e Dintorni” riporta soprattutto una selezione dei lavori presentati nel 2022 e nel 2023 nei Convegni/Corsi di formazione dedicati all’insegnamento nel Primo Ciclo di Istruzione organizzati da Mathesis Abruzzo e dall’Apav (Accademia Piceno Aprutina dei Velati).

Il primo lavoro, presentato da Lorenzo Barone nel 2022 al 6° Convegno su “La Matematica nel Primo Ciclo: aspetti didattici, sociologici e interdisciplinari”, è una raccolta di importanti problemi di Calcolo delle Probabilità. Lorenzo Barone, professore di Analisi Matematica all’Università di Lecce, ora in pensione, è autore di vari lavori su riviste internazionali.

Il secondo lavoro, di Giorgio Pietrocola, presentato nel 2023 al 7° Convegno su “La Matematica nel Primo Ciclo: aspetti didattici, sociologici e interdisciplinari”, tratta della spirale logaritmica attraverso un percorso didattico che sottolinea importanti proprietà con l’aiuto di un esempio illustrato tratto dal mondo della fisica delle note musicali. Vengono affrontate varie questioni didattiche collegate all’argomento e vengono presentati alcuni programmi informatici per gli approfondimenti.

Il successivo lavoro, di Franca Rossetti, indaga sul problema della “fragilità educativa”, ossia del pericolo di precoce abbandono scolastico, già nella scuola del primo ciclo. L’approccio al fenomeno parte da un indicatore che l'Invalsi mette a disposizione delle scuole che partecipano alle rilevazioni nazionali tramite le prove standardizzate.

Il lavoro di Flora Donnarumma e Alessandra Ranieri, presentato nel 2023 al 7° Convegno su “La Matematica nel Primo Ciclo: aspetti didattici, sociologici e interdisciplinari”, descrive un progetto educativo verticale svolto presso la classe Seconda (Secondaria Primo Grado) dell'I. C. Soprani di Castelfidardo in Sperimentazione Nazionale. Il percorso è finalizzato all’apprendimento del Teorema di Pitagora. Gli studenti, organizzati in gruppi, esplorano attivamente i concetti matematici attraverso materiali Montessori, conferenze e dimostrazioni pratiche.

L’ultimo lavoro presenta alcune ricerche del compianto prof. Camillo Ciarlante, uno dei docenti di Matematica aderenti alla Mathesis che si sono maggiormente impegnati nella didattica della matematica e nella formazione degli insegnanti. Una sua passione era la messa a punto di modelli matematici per lo studio della biologia delle piante.

Camillo Ciarlante, come presidente della Mathesis di Isernia, nel periodo 1990-2000 è stato uno dei pilastri della Mathesis per il suo impegno a organizzare convegni nazionali e locali ad Isernia. In quei tempi, periodo d’oro per le mathesis abruzzesi, in cui sono stati presidenti Mathesis nell’ordine, Bruno Rizzi, Silvio Maracchia e Franco Eugeni, nascono, in Abruzzo, 8 sezioni Mathesis: Atri, Chieti, L'Aquila, Ortona, Pescara, Sulmona, Teramo, Vasto. Nello stesso periodo Camillo Ciarlante fonda la Mathesis di Isernia, che collabora intensamente con le mathesis abruzzesi. Oggi, nella stessa area, esiste solo Mathesis Abruzzo, che fa parte della Federazione Italiana Mathesis.

Camillo si dedicò a varie osservazioni e sperimentazioni per valutare la capacità delle piante a risolvere spontaneamente situazioni che, formalizzate dal punto di vista matematico, portano a modelli matematici molto complessi.
Ricordiamo che la rivista “Mondo Matematico e Dintorni” e i convegni più recenti fatti in Abruzzo sono il frutto della stretta collaborazione, dal 2012, fra l’Apav, Accademia Piceno Aprutina dei Velati in Teramo, le Mathesis abruzzesi e campane e, negli ultimi anni, anche con l’associazione “Matematica in Natura”.

Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo, Renata Santarossa

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 6 (2023), No 2, 5-20

Alcuni problemi di probabilità

Lorenzo Barone

Sunto: *Ci chiediamo se sia opportuno anticipare nozioni di probabilità nelle scuole medie, quando ed in che forma. Alcuni concetti possono già essere presentati nelle scuole medie inferiori ed altri, come quelli legati al gioco del lotto o alle analisi cliniche, in quelle superiori.*

Parole chiavi: eventi, probabilità. Formula di Bayes.

1. Premessa

È opportuno parlare di probabilità nelle scuole medie?

A mio parere può essere utile quando si introducono le frazioni e qualche nozione di teoria degli insiemi, facendo leva sulla predisposizione dei giovani per il gioco e gli indovinelli.

Così come si usano le divisioni di ipotetiche torte per fare apprezzare l'introduzione delle frazioni e delle operazioni su di esse, si può parlare di probabilità che esca un certo risultato, lanciando una moneta o un dado, e del loro calcolo.

Parlare di un esperimento **casuale** o **aleatorio**, significa parlare di un fenomeno il cui risultato non è prevedibile. Di solito, invece conosciamo l'insieme di tutti i possibili risultati dell'esperimento.

Nel classico esempio del lancio di un dado, sappiamo che i possibili risultati saranno i numeri dall'uno al sei, mentre nel caso del lancio di una moneta, saranno testa (T) o croce (C).

Passando ad un problema più intrigante, possiamo chiederci quante palline nere ci sono in un sacchetto, conoscendo che in tutto le palline contenute in esso sono 5 ed alcune di queste possono essere nere ed altre bianche.

Inizialmente non si sa nulla e non si sa neanche se ci sono palline nere. Ma se incominciamo ad estrarne una e vediamo che è bianca, possiamo modificare la nostra conoscenza iniziale?

Se poi i colori ipotizzati sono più di due ed il numero n delle palline è maggiore, possiamo chiederci: quante estrazioni dovremo fare per determinare la composizione del sacchetto? Ovviamente parliamo di estrazioni con rimbussolamento, altrimenti la soluzione è banale.

Altro problema: se conosciamo la composizione del sacchetto, possiamo prevedere l'esito di una estrazione?

2. Qualche definizione

In ciò che seguirà si introdurranno richiami più utili per i docenti e non necessariamente consigliati per i ragazzi. L'esperienza del docente è fondamentale per la scelta delle prove da proporre agli alunni.

Intanto l'insieme S di tutti i possibili **esiti** di un esperimento lo chiameremo **spazio campione o spazio degli esiti** ed ogni suo sottoinsieme E lo chiameremo **evento.**

Diremo che E si è **verificato,** se l'esito dell'esperimento appartiene ad E.

Diamo qualche semplice esempio.

Esempio 1. Si devono assumere due commessi. Si presentano tre donne D_1 D_2 D_3 e due uomini U_1 U_2. Quali sono i possibili esiti dell'assunzione?

Risposta:

S = {{D1, D2}, {D1, D3}, {D1, U1}, {D1, U2}, {D2, D3}, {D2, U1}, {D2, U2}, {D3, U1}, {D3, U2}, {U1, U2}}

In tutto 10 esiti. Scriveremo

|S| = 10 (cardinalità di S ovvero numero di elementi di S).

L'evento A = {sono assunte due donne}, si esplicita con

A = {{D1, D2}, {D1, D3}, {D2, D3}} e quindi |A| = 3.

Esempio 2. Si lancia un dado ed esce 2, allora l'evento E = {esce un numero pari} =

= {2, 4, 6} si è verificato.

Chiameremo **probabilità di E** un numero P(E) che esprima il grado di fiducia che E si verifichi. Daremo il valore 1 nel caso della certezza che E si verifichi ed il valore 0 nel caso della certezza che E non si verifichi. Quindi P(E) varierà fra 0 ed 1.

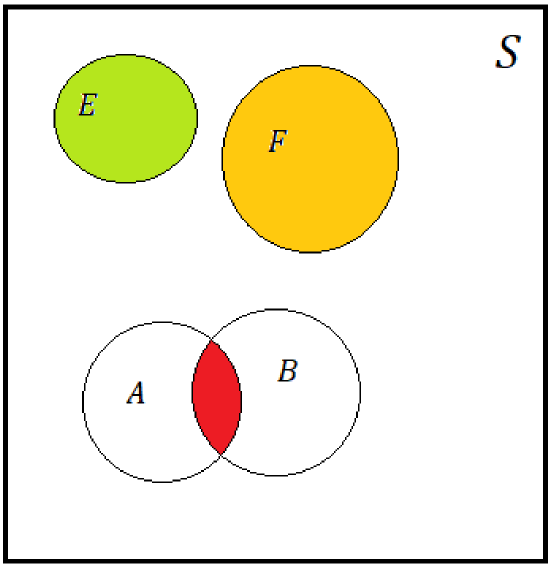
Ovviamente P(S) = 1 e P(φ) = 0. Per tale ragione S si chiama l'**evento certo**, mentre φ è detto l'**evento impossibile.** Non è escluso che possa essere P(E) = 1 pur essendo E strettamente contenuto in S, in tal caso si parla di **evento quasi certo.** Analogamente se P(E) = 0 pur essendo E diverso da φ, parleremo di **evento quasi impossibile.**

Se due eventi E ed F non possono verificarsi simultaneamente, vorrà dire che

$E \cap F = \emptyset$, e diremo che E ed F sono **incompatibili.** In tal caso ci aspettiamo che sia

P(EUF) = P(E) + P(F).

Come si vede l'uso delle notazioni insiemistiche e delle figure geometriche relative, aiuta moltissimo nell'esprimere i concetti e le regole della probabilità. Inoltre si può vedere la somiglianza con le regole della misura (come area e volume). In realtà la probabilità è una misura.



Si provano facilmente le seguenti proprietà (suggerite dalla figura):

1) Se E c F allora $P(E) \leq P(F)$
2) $P(E – F) = P(E) – P(E \cap F)$
3) $P(E \cup F) = P(E) + P(F – E) = P(E) + P(F) – P(E \cap F)$.

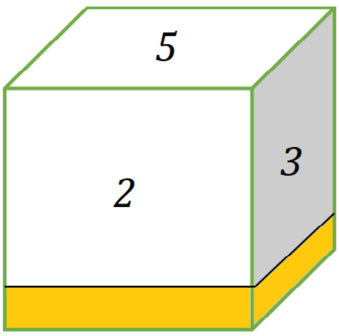
La prima definizione di probabilità è sicuramente quella **classica**, dovuta a Pierre Simon Laplace (1749- 1827). Tale definizione si applica al caso in cui S è finito e tutti gli esiti sono **equiprobabili**, cioè ogni esito s ha la stessa probabilità. Quindi essendo P(s) = c costante, segue che se S ha n elementi, necessariamente 1 = P(S) = n x c ed allora c = 1/n. Se denotiamo con |E| il numero di elementi di E si ha

(1) P(E) = |E| / n

Diremo che la probabilità di E è data dal numero di *casi favorevoli sul numero di casi possibili.*

Ma ribadiamo questo è vero solo nel caso in cui siamo sicuri che gli esiti sono tutti equiprobabili, cosa non banale.

Se per esempio un dado è truccato non è affatto vero che sia P (2) = 1/6. Nella figura accanto il dado è truccato perché appesantito sulla faccia in basso.



Ma come facciamo a sapere se il dado è truccato? Possiamo pensare di lanciarlo n volte e vedere quante volte è uscito 2. Se n (2) è il numero di tali volte, allora chiamiamo n(2) la **frequenza** di 2 e con $\frac{n(2)}{n}$ la **frequenza relativa** di 2. Questo secondo numero mi dà una informazione sulla probabilità di 2: se infatti

$\frac{n(2)}{n}$ è molto diverso da 1/6, è molto probabile che il dado sia truccato.

Questo è un divertente esercizio che può essere proposto in classe.

Emerge quindi una nuova definizione di probabilità: quella **frequentista.**

Chiamiamo probabilità di E

(2) P(E) = $lim_{n\to\infty} \frac{n(E)}{n}$ o in modo più intuitivo: $\frac{n(E)}{n} \to P(E) per n grande$

Purché le prove ripetute siano fatte tutte nelle stesse condizioni.

È evidente che questa definizione presenta dei problemi. Infatti non si possono certo fare infinite prove ed allora quante se ne devono fare per avere un risultato accettabile?

La (2) è nota come **legge empirica del caso** e nonostante le difficoltà a cui abbiamo accennato, ha il pregio di essere operativa.

Si noti come la definizione classica sia una definizione a **priori**, mentre quella frequentista risulti una definizione a **posteriori**, cioè dopo che si son fatte un gran numero di prove.

3. Probabilità condizionate e formule di Bayes

Nello studio della probabilità sono particolarmente utili i concetti del **calcolo combinatorio** ed i **diagrammi ad albero**.

Val la pena di ricordare che useremo le parentesi graffe quando ci riferiamo ad una **combinazione** (nella quale non conta l'ordine degli elementi), mentre useremo le parentesi tonde nelle **disposizioni** (dove tale ordine conta).

Facciamo qualche esempio.

Esempio 3

Se lanciamo due monete contemporaneamente, qual è la probabilità che escano due teste (T). I casi possibili sono

S = {(T, T); (T, C); (C, T); (C, C)} e quindi P ({T, T}) = 1/4, mentre P ({T, C}) = 2/4.

Esempio 4

a) Una coppia ha due figli; qual è la probabilità che siano tutti e due maschi?
b) Se si sa che il primo figlio è maschio, qual è la probabilità che lo sia anche il secondo?

I casi possibili, per la prima domanda, sono:

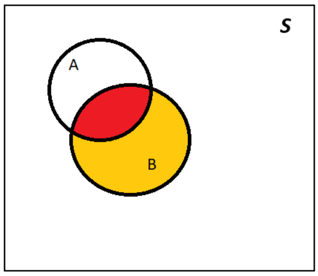
S = {(M, M); (M, F); (F, M); (F, F)} quindi la probabilità cercata è 1/4.

Nel secondo caso, l'insieme degli esiti diventa {(M, M); (M, F)} e quindi la probabilità è 1/2.

Questo esempio ci porta ad introdurre il concetto di **probabilità condizionata**. Questa probabilità si ha quando si sa che un certo evento B si è già verificato e la sua probabilità non è nulla.

Si definisce **probabilità di A condizionata dall'evento B**:

(3) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ purché sia $P(B) \neq 0$.



Osserviamo che P (. | B) è una probabilità su E e

(4) se $E \supset B$ allora $P(E|B) = 1$.

Dalla (3) segue che in generale

(5) $P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) = P(B|A) \times P(A)$

Se il fatto di sapere che si è verificato B, non cambia la probabilità di A, cioè

$P(A|B) = P(A)$, allora diremo che A e B sono **indipendenti** ed in tal caso

(6) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Osservazione

I due concetti di indipendenza e di incompatibilità sono diversi.

Intanto se A e B sono incompatibili allora $P(A \cap B) = 0$ ed in generale $P(A \cap B)$ è diverso da $P(A) \times P(B)$ a meno che non sia nulla una delle due.

Esempio 5

Lancio di due dadi equilibrati e di colore diverso. L'insieme degli esiti è

$S = \{(i, j); i, j = 1...6\}$ quindi $|S| = 36$.

Consideriamo gli eventi:

$E = \{i + j = 6; i, j = 1...,6\} = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$ quindi $|E|=5$

$F = \{i + j = 7; i, j = 1...,6\} = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ quindi $|F|=6$

$G = \{(4, i); i = 1...,6\}$ e quindi $|G|= 6$.

$P(E) = 5/36$ $P(F) = 6/36$ $P(G) = 6/36$ $P(E \cap G) = P(F \cap G) = 1/36$ $P(E \cap F) = 0$

Pertanto E ed F sono incompatibili, ma non sono indipendenti, infatti

$0 = P(E \cap F) \neq P(E) \times P(F) = (5/36) \times (6/36)$

E e G sono dipendenti in quanto P(E|G) = 1/6 ≠P(E)

F e G sono indipendenti, ma non sono incompatibili.

Esempio 6

Lanciamo un dado equilibrato e vogliamo conoscere P(E), dove E = {2, 4, 6}. Ovviamente P(E) = 3/6. Se ora sappiamo che il lancio ha dato come risultato L'evento

F = {numero < 4}, allora P(E|F) = $\frac{P(E\cap F)}{P(F)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3} \neq P(E)$.

Quindi la probabilità di E viene modificata dall'informazione F.

Vediamo ora la relazione fra P(A|B) e P(B|A).

1ª formula di Bayes

Siano P(A) e P(B) diverse da 0, allora

$$(7) P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Le probabilità P(A) e P(B) sono dette probabilità **a priori,** P(A|B) è detta probabilità **a posteriori,** mentre P(B|A) è detta **verosimiglianza.** Come si è già detto P (. |B) è una probabilità, mentre si può provare che non lo è P (B | .)

Molto spesso per calcolare P(A) si usa la seguente formula

(8) P(A) = P(A|E) P(E) + P(A|E*) P(E*)

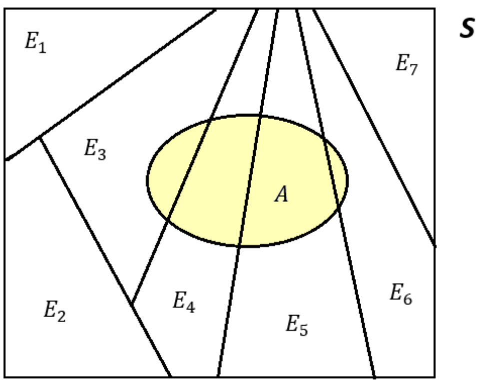
dove E* indica il complementare di E.

La (8) si giustifica per il semplice fatto che A = A∩S = A ∩ (E U E*) = (A∩E) U (A∩E*) e si usi l'additività di P e la (5).

La (7) e la (8) possono essere estese al caso in cui si ha una partizione $\{E_i ; i =1..n\}$ di S, formata da eventi di probabilità positiva, ed in tal caso si ha:

Teorema delle probabilità totali

(9) $P(A) = \sum_1^n P(A|E_i)P(E_i)$



2ª Formula di Bayes

$$(10) P(E_i|A) = \frac{P(A|E_i)P(E_i)}{\sum_1^n P(A|E_j)P(E_j)} \sim P(A|E_i)$$

dove il simbolo ~ indica la proporzionalità.

Diamo ora un esempio che illustri un utilizzo di questa formula.

Esempio 7

Supponiamo di sapere che un'urna contiene 5 palline che possono essere bianche o nere, ma non è noto quale sia il numero b delle palline bianche (e quindi il numero 5-b delle nere). Inizialmente possiamo ritenere che sia b = 0, 1, ..., 5 con equi probabilità di 1/6. Se ora effettuo una estrazione E e trovo una pallina N (nera), allora ho l'informazione ovvia, che non può essere b = 5, ma ho anche informazioni sugli altri possibili valori di b.

Infatti se consideriamo l'evento (ipotesi) E_j = {b = j} con j = 0, 1, .., 5 e l'evento

E = "estraggo una pallina nera", la verosimiglianza P (E| b=j) è la probabilità di estrarre una pallina nera, se nell'urna ci sono j palline bianche e quindi P (E| b=j) = (5-j) / 5. Quindi

j	0	1	2	3	4	5
P(E| b=j)	1	4/5	3/5	2/5	1/5	0

Per ottenere P (b=j| E), basterà tenere presente che P (b=j| E) è proporzionale a

P (E| b=j) e quindi P (b=j| E) = K x P (E| b=j) e poiché (vedi (4))

$$1 = P(S|\,E) = \sum_0^5 P(b = j|E) = K \times \sum_0^5 P(E|b = j) =$$

$$= K \times (1 + 4/5 + 3/5 + 2/5 + 1/5 + 0) = K \times 3$$

cioè K = 1/3 e poi

P (b=j| E) = (1/3) P (E| b=j)

Pertanto si ha:

i	0	1	2	3	4	5
P(b =i| E)	5/15	4/15	3/15	2/15	1/15	0

Quindi le probabilità a priori, tutte uguali ad 1/6, vengono modificate dall'esito dell'estrazione E.

A volte si fa confusione fra l'uso di P(A|B) e P(A∩B). Vediamo qualche esempio.

Esempio 8

Da una indagine campionaria effettuata in una classe su un certo argomento, si sono avuti i seguenti dati

	Favorevoli	Contrari	totale
Ragazzi	0,27	0,21	0,48
Ragazze	0,24	0,28	0,52
Totale	0,51	0.49	1.00

Ci chiediamo:

a) quale è la percentuale favorevole all'argomento trattato?
b) Se si considerano le sole ragazze, come cambia tale percentuale?

Denotiamo con F, U, D rispettivamente i favorevoli, i ragazzi e le ragazze.

La a) chiede P(F), mentre la b) chiede di determinare P(F|D) o P(F∩D)?

È importante capire il significato dei dati contenuti nella tabella.

0,27 è la percentuale degli intervistati che sono ragazzi e favorevoli, quindi

P(U∩F) = 0,27. Analogamente:

P(F∩D) = 0,24 P(U∩F*) = 0,21 P(D∩F*) = 0,28 P(F) = 0,51 P(F*) = 0,49

P(U) = 0,48 P(D) = 0,52

La b) chiede di determinare P(F|D) = $\frac{P(F \cap D)}{P(D)} = \frac{0,24}{0,52} \cong 0,46$.

Quindi è sbagliato dedurre dalla tabella che le ragazze favorevoli sono solo il 24%.

Tra l'altro gli errori che si fanno nel tentativo di risolvere problemi di probabilità, non escludono valenti conoscitori della matematica.

Esempio 9

Ho tre urne A, B e C. So che la composizione delle urne è la seguente:

A	B	C
NNNN R	NN RR	N RR

Dove N indica una pallina nera ed R indica una pallina rossa. Scelgo a caso un'urna ed estraggo una pallina. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

Ragionamento molto diffuso ma sbagliato: in tutto le palline sono 12, quelle nere sono 7, quindi la probabilità cercata è 7/12.

In realtà

P (N |A) = 4/5, P(N| B) = 2/4, P(N| C) = 1/3 ed applicando il teorema delle probabilità totali (cioè la (9)) si ha

$$P(N) = \frac{\frac{4}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{3} = \frac{49}{90} < \frac{7}{12}$$

Più semplicemente P(N) è la media delle tre probabilità condizionate.

4. Altre definizioni di probabilità

Un altro approccio al concetto di probabilità è quello **soggettivo**, introdotto da Bruno de Finetti (1906 – 1985). La sua definizione può essere la seguente:

P(E) è quanto un individuo è disposto a pagare, per ricevere 1 se E si verifica e 0 se E non si verifica.

In altre parole se sono disposto a pagare 30 E. per riceverne 100 se si verifica l'evento E, significa che io attribuisco all'evento E una probabilità del 30% = 0,30.

Questo concetto di probabilità si fonda sulle conoscenze che un individuo ritiene di avere su un determinato esperimento (competizione, fenomeno, ecc.) e per tale motivo si parla di probabilità soggettiva.

Esempio 10

Due squadre di calcio A e B giocano e devo scommettere sulla vittoria di A. Se non so nulla di calcio, darò probabilità 1/3, in quanto i casi che possono presentarsi sono

{vince A, vince B, A e B pareggiano}. Al contrario se sono un conoscitore del gioco del calcio, il mio parere sull'evento sarà influenzato dalla posizione di A nella classifica, dal fatto se A gioca in casa oppure no ed in breve, dalle mie conoscenze sull'argomento.

Una solida base matematica della probabilità è stata introdotta nel 1933 da Andrey Nikolaevic Kolmogorov con la **teoria assiomatica del calcolo delle probabilità.**

Nel caso in cui l'insieme degli esiti è finito, allora si considera come insieme degli eventi **E** l'insieme P (S) delle parti di S, se invece S è infinito, allora **E** di solito è una algebra o una σ-algebra di parti di S. In altre parole **E** verifica le seguenti condizioni:

1) S ϵ **E** ⊂ P (S)
2) $\forall E \epsilon$**E**: E*= S-E ϵ E
3) $E, F \epsilon$**E** implica E ∪ F ϵ **E**
4) Nel caso di σ-algebra la 3) si estende all'unione numerabile.

Si definisce **probabilità** (**assiomatica**) su **E** ogni funzione P di **E** su [0, 1], che verifica i seguenti assiomi:

5) P(S) = 1 e P(φ) = 0
6) Se E ed F sono eventi incompatibili, allora P(EUF) = P(E) + P(F) (*finita additività*)
7) Se **E** è una σ-algebra, allora deve valere la *numerabile additività.*

Seguono facilmente le proprietà già viste nel paragrafo 2.

Se S non è finito, si possono ancora dare esempi adatti a ragazzi delle scuole medie?

Proviamo a dare un esempio.

Esempio 11 Vogliamo determinare la temperatura T di un corpo, sapendo che questa può variare *in modo omogeneo* fra a e b. In tal caso S = [a, b]. Se vogliamo sapere qual è la probabilità che T vari fra c e d con a < c < d < b, è abbastanza naturale porre

P([c, d]) = $\frac{d-c}{b-a}$

È opportuno osservare che la probabilità di un singolo numero, compreso fra a e b è nulla e che è pure nulla una infinità numerabile di valori compresi in S. Evidentemente non è facile, né opportuno, parlare di tale "stranezza", mentre non dovrebbe essere difficile fare osservare che si è supposta una specie di equi probabilità. Infatti tutti i sotto intervalli di S, della stessa lunghezza, hanno la stessa probabilità.

Ovviamente questo discorso non è applicabile alla temperatura di un uomo, in quanto in generale è più probabile che tale temperatura si aggiri intorno ai 36 gradi, piuttosto che intorno ai 40.

Esempio 12. Lasciamo cadere in modo casuale una freccetta su un disco D e vogliamo sapere qual è la probabilità di colpire una data parte E del disco, nell'ipotesi che sicuramente cada sul disco. Anche qui è abbastanza naturale porre

P(E) = $\frac{areadiE}{areadiD}$

e vale la stessa osservazione sull'equiprobabilità: zone aventi la stessa area, hanno la stessa probabilità.

5. Gioco, scommesse e probabilità

Associando un numero x ad ogni esito e, definiamo una variabile aleatoria X di S in **R.** Limitiamoci al caso che X assuma un numero finito n di valori x_i e denotiamo con $X=x_i$ l'evento E tale che $X(E) = x_i$. Sia

$p_i = P(X = x_i)$.

Il numero

$$E(X) = \sum_1^n x_i p_i$$

Si chiama **media** o **valore atteso** o **speranza matematica** (della variabile X).

Un gioco si dice **equo** quando la vincita è proporzionale alla probabilità di vittoria. In altre parole se l'evento A sul quale scommetto, ha probabilità p e punto una posta Q, mi aspetto di vincere una somma

(1) $V = \frac{Q}{p}$

Se ciò accade, nessun giocatore è svantaggiato nel lungo periodo.

Vediamo cosa significa questo concetto dal punto di vista matematico.

Se trasformiamo la scommessa nella variabile aleatoria

$$X = \begin{cases} V - Q \text{ se si verifica } A \text{ con probabilità } p \\ -Q \text{ se } A \text{ non si verifica con probabilità } 1-p \end{cases}$$

E calcoliamo E(X), avremo

$$E(X) = (V - Q)\, p - Q\,(1-p).$$

Se il gioco è equo ci aspettiamo che sia E(X) = 0 e quindi

$$0 = V p - Q$$

E ritroviamo la (9).

Purtroppo nessun gioco pubblico è equo, il banco paga sempre una vincita inferiore all'attesa. A tal proposito si introduce un **indice di equità** $I_E = \frac{V}{Q/p}$ cioè il rapporto fra la vincita lorda effettiva e quella attesa. È inutile dire che di solito risulta $I_E < 1$.

Diamo un esempio.

Esempio 13 (gioco del lotto)

Nel gioco del lotto si estraggono 5 numeri da 1 a 90 in 11 città diverse, dette ruote. Se scommetto che sarà estratto un numero su una ruota (ambata), ho una probabilità di 5/90 = 1/18 e se il gioco fosse equo mi aspetterei di vincere 18 volte la posta. In realtà il banco paga solo 11 volte la posta e quindi I_E = 11/18 ≅ 0,6 (anzi paga un po' meno 0,59). Per calcolare la probabilità di fare un ambo {a, b}, basta calcolare il numero delle possibili combinazioni {a, b, *, *, *} dove le * assumono tutti i possibili valori da 1 a 90 meno a, b: quindi 88 possibili scelte. Tale numero è dato dal coefficiente binomiale ($\binom{88}{3}$.Ovviamente tale numero va diviso per tutti i casi possibili, cioè ($\binom{90}{5}$). Analogamente per il terno, per la quaterna e la cinquina.

In definitiva la probabilità di fare un ambo è P(ambo) =$\frac{\binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} \cong \frac{1}{400}$; P(terno) = $\frac{\binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} \cong \frac{1}{11748}$; P(quaterna) = $\frac{86}{\binom{90}{5}} = \frac{1}{511038}$; P(cinquina) ≅ $\frac{1}{44x10^6}$.

Il lotto paga rispettivamente 235, 4230, 112800, 5 640 000 volte la posta, e l'indice di equità va man mano diminuendo: 0,59; 0,36; 0,22; 0,13.

Al contrario nelle slot machines I_E varia fra 85% ed il 95% nelle case da gioco americane. Nonostante ciò, i guadagni possono aggirarsi sulle 200000 $ al giorno. Niente rispetto ai giochi on line, che possono dare un guadagno di 5 milioni di euro al giorno.

Questa definizione serve per dare un significato pratico al concetto di probabilità, ma occorre tener presente che il caso non ha *memoria*, quindi se un numero è notevolmente "*ritardatario*" nel gioco del lotto o alla roulette, non è affatto detto che abbia più probabilità di essere estratto, perché ogni estrazione è indipendente da quelle precedenti.

6. Problemi non banali

Il calcolo della probabilità di un evento, può presentare delle difficoltà notevoli, anche per "esperti" del settore.

Esempio 14

Scriviamo un numero di 9 cifre, usando una sola volta le cifre dall'1 al 9 (in modo casuale). Qual è la probabilità che tale numero sia divisibile per 11?

Intanto ricordiamo che un numero è divisibile per 11, se denotata con d la somma delle cifre di posto *dispari* e con p la somma delle cifre di posto *pari*, risulta |d – p| multiplo di 11. Ricordiamo inoltre che 1+ 2+ ..+ 9 = 45, quindi d + p = 45. Poiché le cifre di posto dispari sono 5 e quelle di posto pari sono 4, risulta

Max. d = 5+ 6+ 7+ 8+ 9 =35 e min. d = 1+ 2+ 3+ 4+ 5 = 15

Max. p = 6+ 7+ 8+ 9 = 30 e min. p = 1+ 2+ 3+ 4 = 10

Si prova che non possono verificarsi i casi |d- p| = 22 e |d- p| = 33, quindi il problema si riduce a

$\begin{cases} d - p = 11 \\ d + p = 45 \end{cases}$ se d > p $\begin{cases} p - d = 11 \\ p + d = 45 \end{cases}$ se d < p.

Nel primo caso la soluzione è d = 28 e p = 17,

nel secondo caso " " " p =28 e d = 17.

Chi conosce il "sudoku killer" dovrebbe sapere che da internet si può scaricare il file

Settimana sudoku.it/tabella somme/

I casi in cui si ha 28 con 5 numeri (da 1 a 9) sono 9

" " " " 28 con 4 numeri " sono 2

" " " " 17 con 5 numeri " sono 2

" " " " 17 con 4 numeri " sono 9

Per esempio 28 con 4 numeri: 4+ 7+ 8+ 9 e 5+ 6+ 8+ 9

17 con 5 numeri: 1+ 2+ 3+ 4+ 7 e 1+ 2+ 3+ 5+ 6

Quindi se d > p i casi favorevoli sono 9 x 5! x 4! mentre

Se d < p " " " 2 x 5! X 4!

Complessivamente i casi favorevoli sono (9+ 2) x 5! X4! = 11 x 5! X 4! E poiché i casi possibili sono 9! La probabilità cercata è

P = $\frac{11x5!x4!}{9!} = \frac{11}{126} \cong 0{,}087 \approx \frac{1}{10}$

Molto alta rispetto alle previsioni.

Osservazione

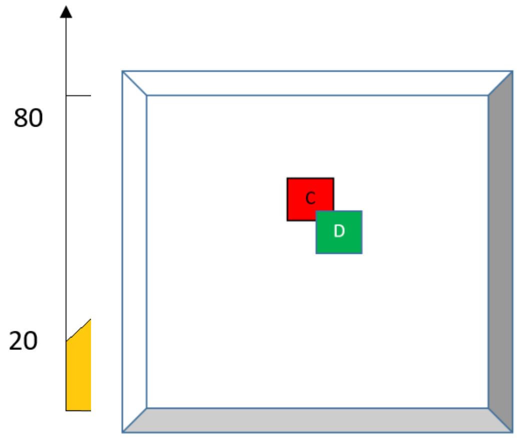
Per i criteri di divisibilità è consigliabile il concetto di *congruità modulo n,* relazione di equivalenza sull'insieme **Z** degli interi relativi.

Esempio 15

Due quadrati di 20 cm. di lato sono posizionati casualmente, all'interno di un quadrato di lato 1 m., con i lati ad esso paralleli.

Qual è la probabilità che i due quadrati più piccoli siano sovrapposti, anche parzialmente?

Denotiamo con C = (x_1, y_1) e D = (x_2, y_2) i centri dei quadrati più piccoli. La zona in cui C e D possono trovarsi è un quadrato distante 10 cm. Dai bordi del quadrato grande e quindi di lato 80 cm.



Consideriamo una coppia di assi cartesiani x_1 e x_2 ai quali riferiremo le ascisse dei centri C e D. Questi varieranno da 0 e 80. I due quadratini possono intersecarsi solo se $|x_1 - x_2| < 20$, cioè quando x_1 e x_2 si trovano nella striscia compresa fra i segmenti a e b.

L'area di tale zona è data da $80^2 - 2 \times 60^2/2 = 2800$. E la probabilità che x_1 e x_2 cadano in questa zona è 2800/6400 = 7/16

Lo stesso discorso vale per le ordinate y_1 e y_2. Quindi la probabilità cercata è $(7/16)^2$

Cioè circa il 19%.

Esempio 15 (Analisi cliniche)

Per diagnosticare una malattia spesso ci si affida ad analisi cliniche.

Denotiamo con T l'evento che il test sia positivo e con T* il risultato negativo, con M l'evento presenza della malattia e con M* l'evento contrario.

P(M|T) dà la probabilità che il paziente sia malato se il test risulta positivo.

Supponiamo che il 2% della popolazione a cui appartiene il paziente, sia affetto dalla malattia, allora P(M) = 0,02 e P(M*) = 0,98.

Supponiamo inoltre di sapere che la capacità del test di individuare la malattia sia del 95%. Allora P(T|M) = 0,95 e P(T*|M) = 0,05 (errore del test). Nel secondo caso, pur essendo il soggetto malato, il risultato del test è negativo: si parla di **falso negativo**.

Se il soggetto è sano il test (si spera) dovrebbe risultare negativo. In realtà questo non sempre succede e quindi mentre P(T*|M*) dà la probabilità che i test sia veritiero,

P (T |M*) dà la probabilità che il test risulti positivo pur essendo il soggetto sano. Nel secondo caso si parla di **falso positivo.** P(T*|M*) deve coincidere con la situazione reale della popolazione e quindi P(T*|M*) = 0,98 e P(T|M*) = 0,02.

Nel falso positivo si rischia di curare un soggetto sano, nel falso negativo viene considerato sano un soggetto malato.

La gravità di un errore rispetto all'altro dipende dalla terapia e quindi dalle sue implicazioni.

Stato reale\ esito del test	Test positivo	Test negativo
Sano	Falso positivo P = 0,02	Corretto P = 0,98
Malato	Corretto P = 0,95	Falso negativo P = 0,05

Nello specchietto precedente si vede che la probabilità di commettere un falso positivo (2%) è minore della probabilità di un falso negativo (5%). Di solito si tende a rendere più piccolo il falso positivo del falso negativo in quanto si considera il primo più pericoloso del secondo. Ma non è sempre vero, infatti nel caso del covid, commettere un falso negativo significa considerare sano un soggetto malato e quindi che può diffondere ulteriormente il contagio.

Calcoliamo ora P(M|T).

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|M°)P(M°)} = \frac{0{,}95x0.02}{0{,}95x0{,}02 + 0{,}02x0{,}98} \cong 0.49$$

Osserviamo quindi che 0,02 = P(M) << P(M|T) ≪ P(T|M) = 0,95.

Pertanto confondere P(M|T) con P(T|M) è un errore grossolano.

Conclusioni

Ogni innovazione presenta dei problemi, ma il mondo corre ed occorre adeguarsi. Ricordiamo che una volta alle elementari si iniziava con le aste e questo poteva durare un bel po', poi finalmente qualcuno ha proposto di affrontare direttamente la scrittura delle lettere e dei numeri.

"Non è la conoscenza, ma l'atto dell'apprendimento, ..., che ci garantisce il maggior godimento.

Carl Friedrich Gauss

Bibliografia

1) **Seymour Lipschutz :** *Calcolo delle Probabilità,* collana Schiuma . Etas Libri .

2) **Murray R. Spiegel ed altri:** *Probabilità e statistica.* MacGraw Hill. 2000

3) **Giovanni Prodi :***Metodi matematici e statistici.* MacGraw Hill.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 6 (2023), No 2, 21-32

Spirale proporzionale

Giorgio Pietrocola
www.pietrocola.eu
giorgio.pietrocola@gmail.com

Sunto

Attraverso un percorso didattico che sottolinea importanti proprietà atte a riconoscere facilmente la curva che le possiede, con l'aiuto di un esempio illustrato tratto dal mondo della fisica delle note musicali, viene presentata, la spirale logaritmica annunciata dal titolo, una curva naturale assai più conosciuta con il nome di spirale logaritmica. Con essa vengono presentati due diversi algoritmi per disegnarla sullo schermo in modo semplice e intuitivo con l'aiuto dell'automa tartaruga del linguaggio Logo.

Parole Chiave

Misconoscenze, spirale logaritmica, proporzionalità, geometria della tartaruga, Logo, algoritmi, frequenze note musicali.

1. Introduzione

Avendo riscontrato diffuse misconoscenze (Sbaragli 2012) sulla spirale logaritmica, non solo in rete, ma anche su qualche testo autorevole (Pietrocola 2022), si è cercato di vaccinare il lettore contro questi inganni mediante una presentazione didattica che porti a distinguere facilmente questa famosa spirale da altre più o meno simili. Per questo è stato messo in primo piano il concetto di invarianza del rapporto di crescita, un concetto idoneo anche a distinguere tra loro le spirali di questo tipo e a costruirle.
La crescita, intera e frazionata, per ogni avvolgimento della spirale, viene mostrata anche attraverso l'esempio di un grafico in coordinate polari rappresentante il variare della frequenza delle note musicali.

2. Spirale proporzionale

Benché il nome spirale logaritmica sia di gran lunga il più diffuso, questa meravigliosa spirale, modello per molte forme biologiche, a volte è chiamata con nomi che meglio la caratterizzano come spirale della crescita o spirale proporzionale. Una crescita proporzionale è una crescita che misurata a intervalli regolari genera una progressione geometrica, cioè una successione di numeri crescenti che mantiene costante il risultato della divisione tra termini successivi. Questo rapporto invariante è detto ragione della progressione o anche fattore di accrescimento. Ciò porta nei termini che via via si succedono un accumulo graduale di tali fattori che conviene esprimere sotto forma di potenza ($c, cr, crr, crrr, cr^4$, cr^5 ...). Per questo motivo una crescita proporzionale è detta anche crescita esponenziale. Si dimostra facilmente che una progressione geometrica ne genera un'altra con la stessa ragione se si prendono in considerazione le differenze, cioè gli incrementi, tra termini consecutivi. Quindi, se si considerano i punti di intersezione della spirale proporzionale con una semiretta iniziante dal suo centro, detto polo, le distanze dei punti così ottenuti, che via via si allontanano dal centro, cresce in progressione geometrica come le successive distanze tra i punti, pari a quella tra le spire cioè tra gli avvolgimenti della spirale. La comune ragione tra le due progressioni è il fattore di accrescimento che caratterizza univocamente la forma di questo tipo di spirale.

Tutto ciò si può esprimere con un'equazione esponenziale tipo $y = cr^x$ che in coordinate polari ha per grafico la spirale stessa.

Ma se ciò che meglio caratterizza questa curva è la crescita esponenziale perché è universalmente conosciuta come spirale logaritmica?

Non ho trovato e non ho una risposta convincente a questa domanda. Sono convinto che la risposta vada ricercata in particolari contingenze storiche e non in meriti oggettivi del termine affermatosi. Il logaritmo è l'operazione inversa dell'esponenziale. Una crescita logaritmica è dunque, al contrario, molto lenta. Per questo una crescita molto rapida viene spesso rallentata rappresentandola in scala logaritmica per poterla così visualizzare, sia pur deformata, in uno spazio ridotto.

Se si considerano i logaritmi dei vari termini in progressione geometrica si ottiene una nuova progressione che ha la differenza dei termini consecutivi costante, ossia una progressione aritmetica. In una spirale proporzionale la distanza tra le spire è in continuo aumento, più o meno rapido secondo i diversi fattori di accrescimento.

Deformando la spirale secondo una scala logaritmica, invece, le spire risultano equidistanziate proprio come le spire scolpite da Jhoann Jacob Keller (1665-1747) stimato scultore di Basilea che fu incaricato di esaudire il desiderio del matematico Jacob Bernoulli (1654-1705) di avere sulla sua tomba quella "spira mirabilis" che tanto aveva studiato e che lo aveva meravigliato per la caratteristica di risorgere immutata dopo vari mutamenti. (Odifreddi 2013)

Figura 1 Basilea Lapide di Jacob Bernoulli (fonte:wikimedia commons au-
Tore foto: Wladyslaw Sojka)

3. Due spirali

La spirale proporzionale e quella archimedea con le spire equidistanziate, rappresentate in coordinate polari, corrispondono la prima ad una funzione esponenziale ($\rho(\theta) = ae^{b\theta}$), la seconda ad un polinomio di primo grado ($\rho(\theta) = k + b\theta$). Considerando una qualsiasi successione di angoli in progressione aritmetica (0, α, 2α, 3α...) tramite le due funzioni si ottengono due diverse successioni riportate in tabella

θ	$ae^{b\theta}$	k
0	a	k
α	$ae^{b\alpha}$	$k + b\alpha$
2α	$ae^{2b\alpha}$	$k+2b\alpha$
3α	$ae^{3b\alpha}$	$k+3b\alpha$
…	…	…

Nel caso della spirale proporzionale si ha una progressione geometrica con comune quoziente (o ragione) $e^{b\alpha}$ Nel caso della spirale archimedea si ha invece una progressione aritmetica con comune differenza (o ragione) $b\alpha$.

4. Questioni didattiche

Credo che, sia a livello scolastico che divulgativo, un primo approccio alla conoscenza di questa spirale possa essere proposto con successo anche a chi non conosce ancora la funzione esponenziale e la sua inversa. Deve invece essere ben radicato il concetto di crescita proporzionale.

Le popolazioni delle varie specie, finché il loro ambiente non esaurisce le sue risorse, crescono in questo modo. Così, per un certo periodo, è per i singoli individui, noi compresi. Anche importanti entità inanimate come il capitale, quando gli interessi producono a loro volta interessi, crescono in modo proporzionale.

È questo un concetto pieno di agganci con la vita quotidiana di cui tutti, più o meno consapevolmente, abbiamo esperienza.

Nel mondo dei numeri questo tipo di crescita è descritta da progressioni geometriche come questa:

$$60, 120, 240, 480$$

che ha 2 per fattore di accrescimento. A differenza del nostro mondo fisico e biologico dove tutto, prima o poi, finisce, nel mondo dei numeri, dove il tempo non esiste e gli enti che lo popolano non sono sottoposti alle ingiurie del tempo, le sequenze limitate possono prolungarsi all'infinito in entrambi i versi. Per esempio la precedente progressione può diventare:

$$\dots 30, 60, 120, 240, 480, 960 \dots$$

Possiamo ottenere nuovi termini moltiplicando o dividendo, secondo il verso, il termine prossimo per la ragione della progressione geometrica che nel nostro esempio è 2.

5. Crescita adeguata

Per collegare la crescita proporzionale con la spirale logaritmica si può ricorrere a un'immagine mentale collegata a un oggetto comune della vita quotidiana come la lancetta di un orologio. La lancetta dei minuti, ogni secondo avanza di un sessantesimo di giro finché in un minuto fa un giro completo per poi proseguire allo stesso modo nei giri successivi. Risulta piuttosto evidente che la sua punta percorre una circonferenza avente per raggio la lunghezza della lancetta. Il moto a scatti approssima bene nel discreto quello che nel continuo è un moto circolare uniforme. Se ora immaginiamo una lancetta che mentre gira cresce in lunghezza proporzionalmente al trascorrere del tempo, cosa cambia?

È evidente che la curva disegnata dalla punta non si chiuderà più in un cerchio ma completerà, ogni giro, spire avvolgenti che si allontaneranno dal centro di rotazione e tra di loro sempre più, seguendo la crescita proporzionale della lancetta rotante. Questo rapporto costante, misurato dopo ogni giro, è ragione di una progressione geometrica ed è detto fattore di accrescimento della spirale. Esso differenzia in modo semplice e naturale le spirali di questo tipo. Se si indica con q il fattore di accrescimento $i = q - 1$ è il tasso di incremento per giro.

Nel mondo della geometria una spirale proporzionale, come anche la retta, è senza inizio e senza fine. Allontanandosi dal centro si hanno distanze tra spire sempre più grandi avvicinandosi invece le distanze si fanno sempre più piccole ma mai nulle in un avvolgimento senza fine intorno all'asintotico punto centrale detto polo.

6. Crescita inadeguata

La crescita proporzionale o esponenziale è una crescita molto rapida che troviamo spesso in natura. Tuttavia non tutte le crescite naturali molto rapide sono di questo tipo. Per esempio lo spazio percorso da un oggetto in caduta libera cresce velocemente al trascorrere del tempo ma non in modo proporzionale. Infatti notoriamente l'equazione che descrive un moto uniformemente accelerato non è una equazione esponenziale ma un polinomio di secondo grado.

Ciò falsifica una definizione cinematica, assai diffusa nel web: *"La spirale logaritmica è la traiettoria di un punto che si muove di moto uniformemente accelerato su una semiretta, la quale ruota uniformemente intorno alla sua origine*." (Pietrocola 2022)

7. Un grafico esplicativo

Un grafico che utilizza un tratto di spirale logaritmica caratterizzata da un fattore di accrescimento 2 pari ad un tasso di incremento del 100% aiuterà a comprendere meglio la natura di questa curva e darà anche suggerimenti per la sua costruzione.
Come si può vedere nel grafico mostrato in figura 2, dal centro della spirale partono dodici semirette che dividono l'angolo giro in altrettante parti uguali ripartendo il piano in 12 settori con angoli di 30 gradi.

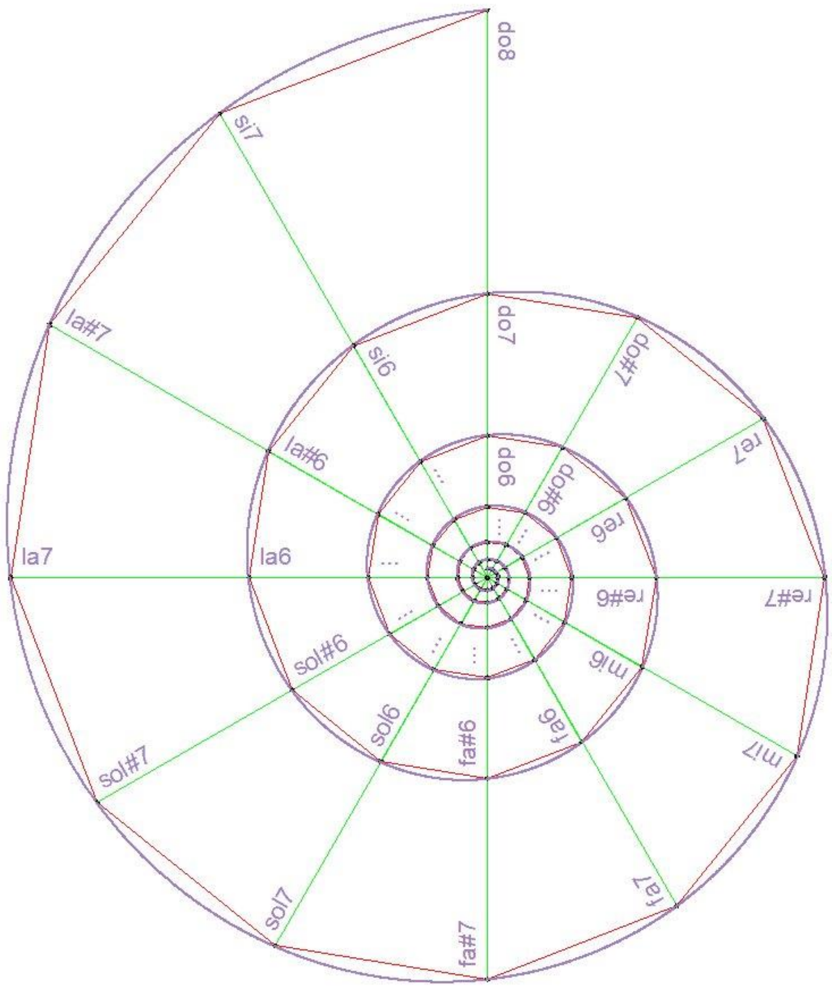


Figura 2 Temperamento equabile: grafico in coordinate polari della variazione della frequenza delle note, da 65 a 4186 Hz.

Ogni semiretta interseca più volte il tratto di spirale avvolgente rappresentata individuando punti corrispondenti a una stessa nota ma di altezza crescente.
Nel grafico la distanza relativa ad ogni punto intersecato dal centro della spirale rappresenta la frequenza.

Sia il punto iniziale più vicino al centro che quello finale più lontano, separati da 6 ottave, così come tutti i punti della loro semiretta, corrispondono al do.
Su una stessa semiretta si individua sempre la stessa nota ma dopo il primo punto, ogni volta il valore precedente raddoppia passando all'ottava superiore, secondo la terminologia adottata dai musicisti.
Anche la distanza tra una spira e l'altra raddoppia ogni giro.
Come la capacità ricettiva del nostro apparato uditivo che può percepire onde sonore solo all'interno di un certo intervallo di frequenze, anche il tratto di spirale logaritmica mostrata è limitato sia superiormente, per escludere valori della frequenza dell'onda troppo alti, che inferiormente, per escludere i troppo bassi.
Allontanandosi dal centro lungo il tratto di spirale rappresentata, i raggi, un semitono dopo l'altro, individuano note sempre più alte, aumentando di lunghezza in progressione geometrica.
In questo viaggio si passa così dai 65,40639133 Hz del do2 del raggio minore ai circa 4186 Hz del do8 del raggio maggiore passando per i 440 Hz del la4 conformemente alla convenzione internazionale per accordare strumenti musicali. In questo intervallo, raddoppiando ogni giro, in sei giri, la frequenza della nota, come la lunghezza del raggio che la rappresenta, aumenta esattamente di 64 volte (2^6).

8. Fattore di accrescimento frazionato

Se invece di considerare il fattore di accrescimento R dopo ogni giro, lo consideriamo dopo ogni ennesimo (1/n) di giro, come diventa?
Il nuovo fattore r dovrà essere moltiplicato per sé stesso n volte per avere R.
Dunque la risposta è nell'equazione $r^n = R$ cioè $r = R^{\frac{1}{n}}$ (radice ennesima di R)
Nel nostro esempio in cui R=2, n=12 si ha $r = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2} = 1{,}059463094$ ...
il che corrisponde i=0,059463094… indicante un tasso di crescita della frequenza dei semitoni di poco inferiore al 6%
Possiamo, come si fa di solito con le progressioni geometriche, indicare il generico termine della progressione con s_i essendo $s_i = cr^i$ e in particolare il primo termine che nel nostro grafico è $s_0 = cs^0 = c = 65.4$ ... $s_{72} = 4186$ (circa).
La nostra progressione di frequenze sarà quindi:

$$c, cr, cr^2, cr^3, \dots, cr^{11}, cr^{12}, cr^{13}, \dots, cr^{24}, \dots, cr^{36}, \dots, cr^{48}, \dots, cr^{60}, \dots, cr^{72}$$

raddoppiando ogni giro il raggio più lungo è $2^6 = 64$ volte il più corto. Essendo $r^{12} = 2$ si trova facilmente $cr^{12} = 2c,\ \ cr^{24} = 4,\ cr^{36} = 8c, \dots$
L'esponente di r, da 0 fino a 72 ci aiuta a ordinare e contare i semitoni e anche a classificarli. Infatti dividendo l'esponente corrispondente a una particolare nota della scala per 12, troviamo il quoziente intero che, sommato 2, ci indica l'ottava di appartenenza mentre il resto della divisione ci indica il nome della nota: Resto 0 do, resto 2 re, resto 4 mi, resto 5 fa, resto 7 sol, resto 9 la, resto 10 si.

La forma del grafico proposto non solo ricorda il guscio di una chiocciola ma, non a caso, si ritrova in una componente del nostro orecchio interno facente parte dell'organo dell'udito: la coclea.
Anche se il grafico è solo un tratto della spirale logaritmica, può essere prolungato con ulteriori raggi al ritmo della progressione sia verso l'infinitamente grande che verso l'infinitamente piccolo.
Analogamente la progressione geometrica considerata si potrà estendere all'infinito nei due versi opposti:

$$\dots cr^{-2}, cr^{-1}, c, \dots, cr^{72}, cr^{73}, cr^{74}, \dots$$

Unendo con un segmento, a due a due, i punti terminali di raggi consecutivi otteniamo una serie di triangoli simili e anche una poligonale (Pietrocola 2006), in rosso nel grafico, interpolante la spirale visibile in figura 2.
In virtù della similitudine dei triangoli, facilmente dimostrabile, anche i segmenti di questa poligonale, che approssima la spirale, formano una progressione geometrica con ragione $r = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2}$.
Come si dimostra facilmente, l'angolo di deviazione tra un segmento e il successivo coincide con l'angolo di suddivisione che nel nostro caso è 30 gradi.
Per una poligonale che approssimi meglio si deve dividere l'angolo giro in più parti uguali, ad esempio 24, 48, 96 ... ottenendo approssimazioni ogni volta migliori che hanno per limite la spirale logaritmica.
La costruzione di una successione di triangoli simili con riga e compasso non presenta difficoltà ma può rivelarsi una procedura troppo lunga.
Molto meglio servirsi di programmi informatici che hanno implementata la cosiddetta grafica della tartaruga.
Per esempio FMSLogo, distribuito gratuitamente in rete (Pietrocola 2023), con cui sono state realizzate alcune figure di questo articolo.

9. Due algoritmi per la tartaruga

Ecco, suggeriti dall'esempio musicale, due semplici algoritmi per costruire una spirale proporzionale. Per disegnare una spirale con fattore di accrescimento R, in entrambi, si utilizza un accrescimento frazionato con una progressione geometrica di ragione $r = R^f$ dove f è un'opportuna frazione dell'angolo giro. Proprio come per i punti significativi dell'esempio musicale illustrato in figura 2 ($f = \frac{1}{12}$ $R = 2$ $r = 2^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{2} = 1{,}059463094$ ...) in cui si vede che i punti della spirale corrispondenti alle note possono essere raggiunti sia dalla progressione geometrica dei raggi crescenti, in verde, sia dalla progressione geometrica dei segmenti della spezzata interpolante, in rosso. Si noti che le due progressioni geometriche, data la similitudine dei triangoli formati, hanno la stessa ragione.

I due algoritmi sono i seguenti:

- *Algoritmo della tartaruga centrale.*
  La tartaruga ferma sul polo centrale gira uniformemente su sé stessa di una piccola frazione dell'angolo giro e ogni volta traccia un punto alla distanza assegnata che varia in progressione geometrica. Per tracciare il punto la tartaruga, ogni volta avanza senza lasciare traccia e retrocede nello stesso modo dopo aver tracciato il punto mediante avanzamento e successiva retrocessione di un pixel e la temporanea attivazione della sua penna. In questo modo se gira di 1/10 di grado (pari a 1/3600 di angolo giro), i punti tracciati appariranno sullo schermo come una curva continua. Se si vuole una spirale proporzionale con fattore di accrescimento R la progressione geometrica delle successive distanze dovrà quindi avere un fattore di accrescimento $R^{1/3600}$
- *Algoritmo della tartaruga periferica.*
  La tartaruga avanza di tratti che aumentano in progressione geometrica e gira, ogni volta, di un angolo costante. Così facendo la tartaruga disegna una poligonale interpolante la spirale (Pietrocola 2006). Se si vuole una spirale con fattore di accrescimento R si sceglierà un piccolo tratto iniziale (esempio 0.01 pixel) e un angolo sufficientemente piccolo, esempio 1/10 di grado. La ragione della progressione dei tratti successivi percorsi dalla tartaruga sarà conseguentemente $R^{1/3600}$. La spezzata appare al nostro occhio con una curvatura continua per lo stesso effetto ottico che rende un poligono con molti lati indistinguibile da una circonferenza.

Semplici programmi in Logo che mettono in pratica questi due algoritmi sono mostrati nelle figure 3 e 4:

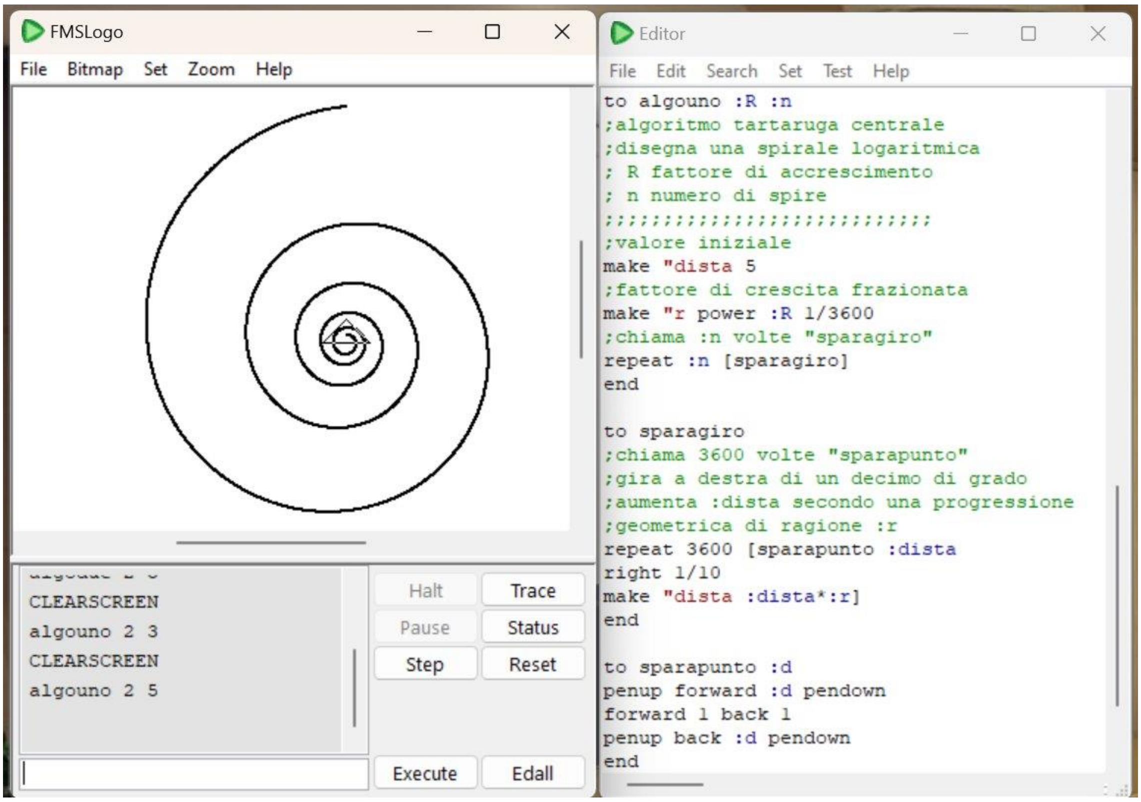


Figura 3 Nella finestra “Editor” sono le spiegazioni per i comandi definiti: “algouno”, “sparagiro” e “sparapunto”. Salvate queste procedure, integrate dai commenti opzionali in verde, è stato immesso "algouno 2 5" in basso a sinistra, nella finestra del “FMSWlogo”, per ottenere 5 avvolgimenti di spirale logaritmica con fattore di accrescimento 2 visibile nell’apposito spazio. Sotto questo spazio riservato alla grafica e sopra la linea di immissione dei comandi rimane memoria di quanto immesso. Per i significati dei comandi si può consultare il vocabolario animato del Tartapelago (Pietrocola 2005).

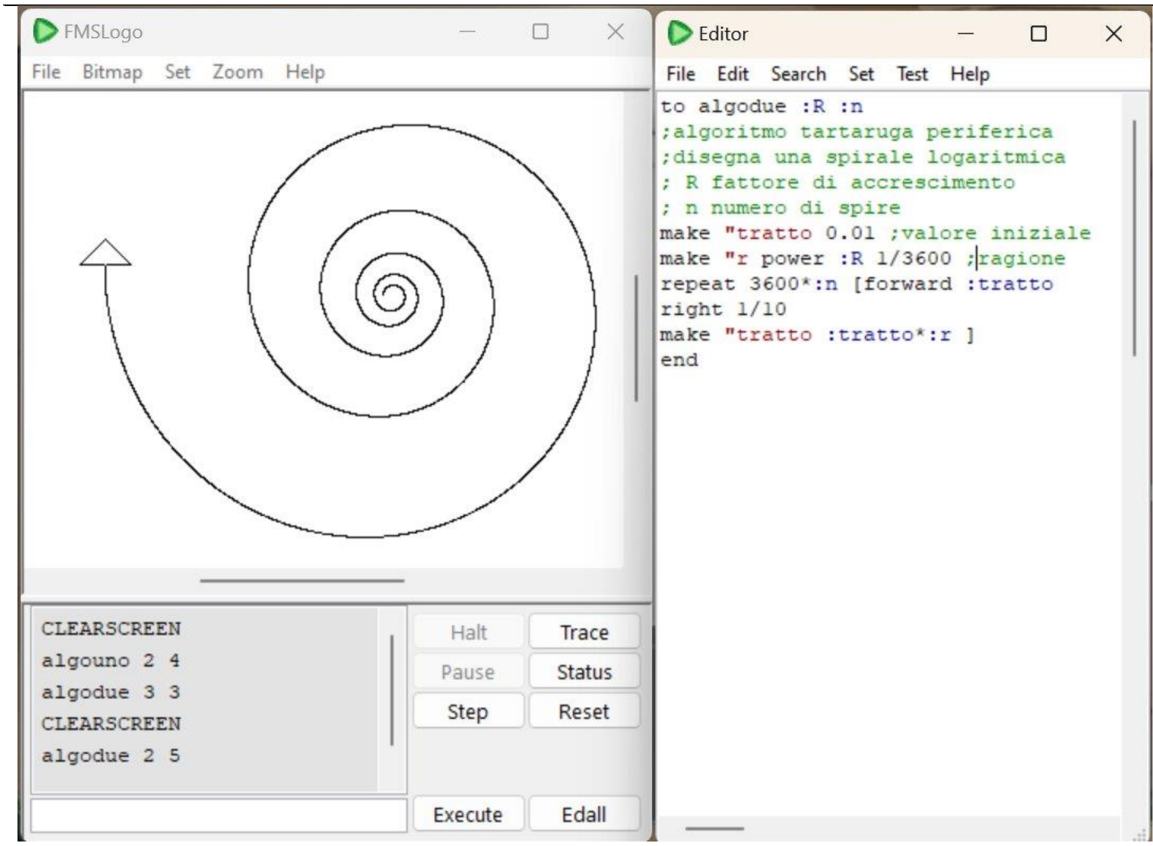


Figura 4 Nella finestra “Editor” si scrivono le spiegazioni dei comandi definiti dall’utente; è stato definito il comando: “algodue”. Salvata questa procedura è stato immesso "algodue 2 5" nella linea dei comandi, in basso a sinistra, per ottenere 5 avvolgimenti di spirale logaritmica con fattore di accrescimento 2.

10.Conclusione

In conclusione mostriamo che l’equazione emergente dall’esempio coincide con quella comunemente associata alla spirale logaritmica.
Basandosi sul grafico delle frequenze delle note viene naturale scrivere la funzione:

$$\rho(\theta) = c2^{\frac{1}{2\pi}\theta}$$

infatti, come si verifica facilmente nel grafico di figura 2, inizialmente si ha $\rho(0) = c$, dopo un giro, pari a 2π radianti, si ha $\rho(2\pi) = 2c$, dopo due giri $\rho(4\pi) = 4$ e così via in progressione geometrica finché, dopo sei avvolgimenti si ha $\rho(12\pi) = 64c$. Se però si confronta questa equazione esponenziale con quella canonica: $\rho(\theta) = ae^{b\theta}$, si potrebbero avere difficoltà nel riconoscerla.
Chi conosce però i logaritmi e le loro proprietà può comprendere facilmente che la nostra equazione può scriversi equivalentemente nella forma

$$\rho(\theta) = ce^{ln2^{\frac{\theta}{2\pi}}} = ce^{\frac{ln2}{2\pi}\theta} = ce^{b\theta}$$

e che quindi, dal confronto risultano $c = a$, $b = \frac{ln2}{2\pi}$

Tutto ciò si estende facilmente ad un fattore R di accrescimento qualsiasi.
Come si vede quindi il parametro c indica solo il punto dove si inizia a considerare la spirale ma non la sua forma. Questa è invece determinata unicamente dal fattore di accrescimento della spirale che determina, a sua volta, il parametro b.

.

Riferimenti bibliografici

Piergiorgio Odifreddi (2013) Abbasso Euclide, Mondadori, p.162

Silvia Sbaragli (2012) Il ruolo delle misconcezione nella didattica della matematica
https://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/sbaragli/2014/Sbaragli%20misconcezioni%20per%20libro%20Martha%20e%20Giorgio.pdf

Giorgio Pietrocola (2023) "Oltre le discipline STEAM", Corso di formazione APAV Chieti Scalo 1/4/2023
http://www.pietrocola.eu/MatNat/STEAM2023/pietrocola/pietrocola.htm

Giorgio Pietrocola (2005) Vocabolario animato del Tartapelago, Maecla, http://www.pietrocola.eu/maecla/tartapelago/vocanimato/index.htm

Giorgio Pietrocola (2006) Poligonali logaritmiche, Maecla
http://www.maecla.it/tartapelago/geotarta/poli/poligonali.htm

Giorgio Pietrocola (2022) Definizione di spirale logaritmica: confutazione di un meme di successo Matematicamente n.305
http://www.mathesis.verona.it/wp-content/uploads/2018/Numeri/Nume305.pdf

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 6 (2023), No 2, 33-42

La fragilità educativa quale emerge dai risultati delle prove Invalsi

Franca Rossetti

Sunto Da un po' di tempo a questa parte si parla molto di fragilità educativa con riferimento al pericolo di precoce abbandono scolastico, già nella scuola del primo ciclo. In questa sede si cercherà di approcciare al fenomeno partendo da un indicatore che l'Invalsi mette a disposizione delle scuole che partecipano alle rilevazioni nazionali tramite le prove standardizzate.
I dati utilizzati per esemplificare il procedimento sono reali e riferiti ad una scuola lombarda.

Parole chiave: Fragilità educativa, prove standardizzate, percentili in ambiente gaussiano

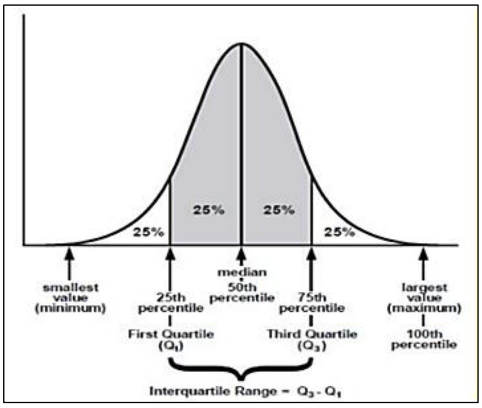
1. Introduzione

La parola "fragilità", come tutte le parole, possiede un enorme potere in quanto, una volta pronunciata, è in grado di veicolare significati, emozioni e relazioni, talvolta anche di elevata intensità. In questo contesto la analizzeremo focalizzando l'attenzione sul suo significato educativo, in particolare con riferimento al rischio di insuccesso formativo e di precoce abbandono scolastico; fenomeno che sembra connotarsi come un nuovo e ulteriore problema che affligge la nostra scuola. Dagli studi condotti da molti ricercatori, sembra trattarsi di una emergenza educativa di carattere non esclusivamente nazionale poiché la riduzione dell'early school leaving è uno degli obiettivi che l'intera Unione Europea si trova oggi ad affrontare, con l'invito alle singole scuole dei vari Paesi, ad elaborare progetti di ricerca in tal senso, per tentare di arginare il fenomeno che sembra essere tendenzialmente crescente.
Tra i vari indicatori in grado di enucleare il fenomeno, c'è la proposta dell'Invalsi, basata sui valori di alcuni parametri emergenti dai dati che tutte le scuole sono in grado ottenere, nel rispetto della privacy.
Dalla lettura dei dati che l'Invalsi ha restituito alle scuole che ne hanno fatto richiesta, emerge, infatti, un quadro preoccupante per i bassi livelli di competenza che i nostri alunni, dal Nord al Sud, sia a livello nazionale, che di macroarea o regionale, manifestano correlativamente ai punteggi riportati nelle prove standardizzate. L'Invalsi, nello specifico, ha restituito dati attinenti alle prove che si sono svolte nelle classi seconde primarie (grado 2), nelle classi quinte primarie (grado 5), nelle classi prime

secondaria di primo grado, nelle classi terze secondaria di primo grado ((grado 8), oltre ai dati riguardanti la scuola secondaria di secondo grado.
Le informazioni che si possono desumere da questi dati sono molteplici:
• percentuali da utilizzare per confronti costruttivi
• medie da considerare assieme alla variabilità per un significato autentico
• altri indicatori di livello superiore (correlazioni, relazioni significative…)
• grafici per meglio analizzare l'andamento del fenomeno

2. L'importanza dei dati

La novità che l'Invalsi mette a disposizione è costituita proprio dai dati sulla fragilità educativa, ossia riferiti a quel preoccupante fenomeno messo in evidenza dalla percentuale di studenti che in Italiano e in Matematica non raggiungono i livelli base di competenza previsti dai traguardi di riferimento. Per comprendere come i dati vadano interpretati, presupponendo normale, ovvero con andamento gaussiano, la distribuzione del fenomeno in questione (andamento dei punteggi standardizzati nelle prove di Italiano e Matematica) occorre spiegare come la fragilità sia legata al concetto di percentile. I percentili sono quantità statistiche, quantili, che si ottengono suddividendo la distribuzione dei dati, ordinati in modo non decrescente, in 100 parti uguali; così, il 25° percentile corrisponde anche al primo quartile che si ottiene con la divisione della distribuzione in quattro parti uguali, il 50° percentile corrisponde al secondo quartile, ossia alla mediana, il 75° percentile corrisponde al terzo quartile, come ben messo in evidenza nella figura sottostante.



Per la scuola primaria si considerano 6 livelli di competenza costruiti suddividendo i punteggi degli studenti dal più basso (1° percentile) al più alto (100° percentile):
Livello 1 - molto basso, fino al 5° percentile compreso
Livello 2 - in via di prima acquisizione, dal 5° al 25° percentile compreso
Livello 3 - base, dal 25° al 50° percentile compreso

Livello 4 - intermedio, dal 50° al 75° percentile compreso
Livello 5 - intermedio, dal 75° al 95° percentile compreso
Livello 6 - avanzato, dal 95° percentile.

Per la scuola secondaria di I grado (grado 8) si considerano, invece, i seguenti livelli:
Livello 0 - lo studente non ha risposto correttamente ad alcun quesito
Livello 1 - risultato molto debole, corrispondente ai traguardi di apprendimento in uscita dalla quinta primaria.
Livello 2 - risultato debole, non in linea con i traguardi di apprendimento posti al termine del primo ciclo di istruzione
Livello 3 - adeguato
Livello 4 - risultato buono
Livello 5 - risultato molto buono.

3. Il tasso di fragilità

Gli studenti che sono stati assegnati ai livelli 1 e 2 sia in Italiano, che in Matematica, sono considerati “fragili”, mentre quelli che sono assegnati al livello 3 sono ritenuti “a rischio di fragilità”
Senza soffermarmi sull’entità delle percentuali sottolineo che ai bassi livelli di competenza è associato un nuovo indicatore chiamato “tasso di fragilità” che l’ente di ricerca ha predisposto ai fini di mettere in condizione le scuole che ne fanno esplicita richiesta, ritenendolo opportuno, di intervenire con tempestività in un’ottica di miglioramento per arginare quell’ altro fenomeno, purtroppo in crescita, che da “disagio scolastico” rischia di trasformarsi in “disagio di scuola”. Un disagio, quindi, non più limitato ai soli esiti di apprendimento, ma addirittura fonte di un malessere generale che riguarderebbe, in misura più o meno importante, tutti gli attori del sistema scolastico (basti pensare alle recenti testimonianze di burnout che ci presentano docenti stressati e scoraggiati di fronte ai nuovi bisogni educativi di cui molti ragazzi, non solo della scuola primaria o secondaria di primo grado sono portatori). Il disagio scolastico, denunciato dai tassi di fragilità, si profila come un “nuovo” fenomeno che non origina solo dispersione esplicita, cioè l’abbandono scolastico, ma anche dispersione implicita, ossia la mancata corrispondenza tra il titolo di studio acquisito e le relative competenze; dispersione che, purtroppo, non siamo riusciti a contenere nonostante i buoni propositi(l’obiettivo previsto per il 2020, di non superare il tasso di dispersione del 10%, non è stato raggiunto…vedremo se riusciremo nel 2030 quando il tasso previsto è fissato pari al 9%).

4. Analisi del disagio scolastico

Psicologi e sociologi nell'intento di studiare il fenomeno, alla ricerca delle possibili cause, hanno identificato diverse variabili la cui interazione sarebbe responsabile di quei bassi punteggi, non in linea con le aspettative poste dai traguardi addirittura prescrittivi, che sono stati pensati per il raggiungimento e lo sviluppo delle competenze, nel corso delle varie tappe del percorso educativo e formativo dell'individuo, in quanto persona.
Tra queste variabili, oltre a problemi di tipo cognitivo e comportamentale, l'accento è stato posto sulle tendenze caratteriali, sulle difficoltà relazionali di contesto e, più recentemente, sul peso che situazioni economicamente, socialmente e culturalmente svantaggiate possono esercitare sui rendimenti attesi.
Quest'ultimo aspetto è stato fatto oggetto di particolare attenzione anche da parte dell'Invalsi che dal 2016, grazie ai dati emergenti dai questionari, è in grado di quantificare non solo il peso del background, ma anche quello dell'effetto scuola, chiamato anche "valore aggiunto" in quanto valore che quantifica il peso del punteggio conseguito nelle prove, al netto dei fattori esogeni.
Ma poiché una seria analisi qualitativa del fenomeno non può essere fatta senza una preventiva e corretta analisi quantitativa, è auspicabile per raggiungere lo scopo, da parte degli addetti ai lavori, la lettura statistica del file che l'Invalsi mette a disposizione delle scuole, dopo averlo naturalmente scaricato. Il fine ultimo è quello di sollecitare riflessioni su quanto emerge dai dati, in un'ottica di miglioramento dei risultati degli apprendimenti, miglioramento che non può esserci senza l'attenzione dovuta ai bisogni degli alunni più fragili e, in particolare, ai processi sottostanti l'apprendimento di questi.
Data la novità dell'argomento, relativamente a quanto suggerito, non c'è uno storico di riferimento, pertanto è lasciata agli addetti ai lavori la libertà di scegliere come muoversi tra gli innumerevoli dati messi a disposizione; di seguito una proposta di lavoro da inserirsi in un progetto mirato allo scopo.

5. Organizzazione del lavoro

Un buon metodo di lavoro è quello di organizzare il file excel, dopo averlo scaricato, secondo variabili di interesse, per esempio evidenziando con colori diversi i dati riferiti alle voci di "Nessuna fragilità, Fragilità, A rischio di fragilità, Dato mancante, Non disponibile". Ciò con riferimento alle varie classi o sezioni di interesse, come negli esempi che seguono che riportano la situazione di una scuola lombarda.

Confronto tra le classi												
	ITALIANO						**MATEMATICA**					
classi	NESSUNA FRAGILITA'	FRAGILITA'	A RISCHIO FRAGILITA'	DATO MAN-CANTE	NON DISPO-NIBILE	NON PRESENTE ALLA PROVA	NESSUNA FRAGILITA'	FRAGILITA'	A RISCHIO FRAGILITA'	DATO MAN-CANTE	NON DISPO-NIBILE	NON PRESENTE ALLA PROVA
1A	9	**8**	**8**	1	0	0	11	**7**	**8**	0	0	0
1B	12	**3**	**8**	3	0	0	12	**3**	**6**	3	0	0
1C	13	**8**	**4**	0	1	0	13	**8**	**4**	0	1	0
1D	11	**3**	**11**	0	0	1	11	**3**	**11**	0	0	1
2A	10	**1**	**5**	5	0	1	10	**1**	**5**	5	0	1
2B	12	**3**	**6**	1	1	1	12	**3**	**8**	1	1	1
2C	9	**8**	**4**	4	0	1	9	**3**	**4**	4	0	1
2D	12	**2**	**7**	3	0	0	12	**2**	**7**	3	0	0
3A	9	**4**	**9**	1	1	0	9	**4**	**9**	1	1	0
3B	9	**4**	**8**	1	2	0	9	**4**	**8**	1	2	0
3C	6	**3**	**7**	3	1	0	6	**8**	**7**	3	1	0
3D	7	**6**	**5**	2	1	0	7	**6**	**5**	2	1	0

Prospettoper sezioni												
	ITALIANO						MATEMATICA					
classi	**NESSUNA FRAGILITA'**	**FRAGILITA'**	**A RISCHIO FRAGILITA'**	**DATO MANCANTE**	**NON DISPONIBILE**	**NON PRESENTE ALLA PROVA**	**NESSUNA FRAGILITA'**	**FRAGILITA'**	**A RISCHIO FRAGILITA'**	**DATO MANCANTE**	**NON DISPONIBILE**	**NON PRESENTE ALLA PROVA**
1A	9	8	8	1	0	0	11	7	8	0	0	0
2A	10	1	5	5	0	1	10	1	5	5	0	1
3A	9	4	9	1	1	0	9	4	9	1	1	0
1B	12	3	8	3	0	0	12	3	6	3	0	0
2B	12	3	6	1	1	1	12	3	8	1	1	1
3B	9	4	8	1	2	0	9	4	8	1	2	0
1C	13	8	4	0	1	0	13	8	4	0	1	0
2C	9	8	4	4	0	1	9	3	4	4	0	1
3C	6	3	7	3	1	0	6	8	7	3	1	0
1D	11	3	11	0	0	1	11	3	11	0	0	1
2D	12	2	7	3	0	0	12	2	7	3	0	0
3D	7	6	5	2	1	0	7	6	5	2	1	0

Mettendo in evidenza per ogni riga e per ogni colonna i numeri più elevati, è possibile avere sott'occhio la situazione e confrontare i punteggi delle varie classi.

Ad esempio, nella classe IA sono almeno 15 gli alunni da tenere sotto controllo perché fragili, o a rischio di fragilità sia in italiano che in matematica, se poi si tiene conto che la classe si compone di 26 alunni, si deduce che più della metà ha bisogno di particolare attenzione.

La lettura può proseguire per riga o per colonna, oppure si possono analizzare i dati per classi parallele.

Sempre in base alla tabella precedente è possibile effettuare un confronto tra classi traendo semplici, ma importanti informazioni; ad esempio tra le prime, la 1C è quella

che presenta la situazione migliore sia in italiano che in matematica, mentre la 1D presenta 11 alunni a rischio di fragilità sia in italiano che in matematica.
Tra le seconde, la sezione C presenta 12 alunni fragili o a rischio di fragilità, contro i rispettivi 6 della sezione A che, tra l'altro, è composta da 22 alunni … .
Tra le terze possiamo constatare che in tutte le sezioni quasi la metà degli alunni è fragile o a rischio di fragilità; si può anche, per rendere più semplice la comprensione della situazione reale, redigere un prospetto riepilogativo come indicato nella tabella che segue.
In base a questa tabella è possibile un confronto tra classi, per esempio queste sono alcune informazioni: tra le prime, la 1C è quella che presenta la situazione migliore sia in italiano che in matematica, mentre la 1D presenta 11 alunni a rischio di fragilità sia in italiano che in matematica.
Tra le seconde, la sezione C presenta 12 alunni fragili o a rischio di fragilità, contro i rispettivi 6 della sezione A che, tra l'altro, è composta da 22 alunni … .
Tra le terze possiamo constatare che in tutte le sezioni quasi la metà degli alunni è fragile o a rischio di fragilità; si può anche, per rendere più semplice la comprensione della situazione reale, redigere un prospetto riepilogativo come indicato nella tabella .

classi	Nessuna Fragilità	Fragilità	A rischio di Fragilità	Dato mancante	Non disponibile
1A					
2A					
1B					
…					

È anche possibile scaricare e analizzare i microdati, cioè la situazione di ogni alunno, infatti per ogni studente l'Invalsi riporta tutte le informazioni inerenti le prove di Italiano, Matematica, Inglese, come ben messo in evidenza della tabella seguente:

cl.	GRADO RIF. DATI	ANNO RILEVAZIONE	LIVELLO ITALIA-NO	FRAGILITA' ITALIA-NO	LIVELLO MATEMATICA	FRAGILITA' MATEM	LIV INGLESE READING	FRAGILITA' INGLESE READING	LIV INGLESE LISTENING	FRAGILITA' INGLESE LISTENING	FRAGILITA' ITAL_MAT
1A	5	2022	Livello 6	Nessuna fragilità	Livello 5	Nessuna fragilità	Dato mancante	Dato mancante	Dato mancante	Dato mancante	No
1A	5	2022	Livello 6	Nessuna fragilità	Livello 5	Nessuna fragilità	Dato mancante	Dato mancante	Dato mancante	Dato mancante	No
1A	5	2022	Livello 2	Fragilità	Livello 3	A rischio di fragilità	Dato mancante	Dato mancante	Dato mancante	Dato mancante	No
1A	5	2022	Livello 3	A rischio di fragilità	Livello 4	Nessuna fragilità	Dato mancante	Dato mancante	Dato mancante	Dato mancante	No
1A	5	2022	Livello 5	Nessuna fragilità	Livello 5	Nessuna fragilità	Dato mancante	Dato mancante	Dato mancante	Dato mancante	No
1A	5	2022	Livello 2	Fragilità	Livello 3	A rischio di fragilità	Dato mancante	Dato mancante	Dato mancante	Dato mancante	No
1A	5	2022	Livello 1	Fragilità	Livello 2	Fragilità	Dato mancante	Dato mancante	Dato mancante	Dato mancante	Sì
1A	5	2022	Livello 5	Nessuna fragilità	Livello 5	Nessuna fragilità	Dato mancante	Dato mancante	Dato mancante	Dato mancante	No

Emerge subito chiaramente come, in base a questi dati, l'alunno posizionato nella settima riga, sia particolarmente svantaggiato risultando fragile sia in Italiano che in Matematica; critica è anche la posizione degli alunni che si trovano in posizione 3 e 6… Da notare, però e fortunatamente, anche la presenza, in italiano, di alunni con risultati di livello avanzato (liv. 6)

ITALIANO				MATEMATICA			
Livello 1	8	Fragilità	57	Livello 1	9	Fragilità	67
Livello 2	49			Livello 2	58		
Livello 3	88	A rischio di fragilità	88	Livello 3	71	A rischio di fragilità	71
Livello 4	72	Nessuna fragilità	128	Livello 4	60	Nessuna fragilità	112
Livello 5	43			Livello 5	43		
Livello 6	13			Livello 6	9		
Dato mancante	27	Dato mancante	27	Dato mancante	50	Dato mancante	50
non disponibile	7	non disponibile	7	non disponibile	7	non disponibile	7
Non presente alla Prova 5^ Primaria	9	Non presente alla Prova 5^ Primaria	9	Non presente alla Prova 5^Primaria	9	Non presente alla Prova 5^ Primaria	9

6. Ulteriori considerazioni di carattere statistico

Per un quadro complessivo si possono organizzare anche i punteggi grezzi in base ai vari livelli, confrontando le due materie chiave Italiano e Matematica, sempre utilizzando diversi colori. Si legge, per esempio, dai dati sopra riportati, che su 315 studenti, solo 128 non hanno problemi di fragilità in italiano e solamente 112 in matematica; numerosi sono i dati mancanti (per matematica 50) e da non sottovalutare è la presenza dell'annotazione «assente alla prova» o «dati non disponibili», anch'essi importanti indicatori con un peso nell'interpretazione statistica dei dati. Ancora più esplicite sono le informazioni espresse in percentuale da cui si evince che, nella realtà scolastica presa in esame, solo il 41% si salva in Italiano e solo il 36% in matematica (dati che dovrebbero indurre qualche riflessione …)

ITALIANO				MATEMATICA			
Livello 1	2,5%	Fragilità	18,1%	Livello 1	2,9%	Fragilità	21,3%
Livello 2	15,6%			Livello 2	18,4%		
Livello 3	27,9%	A rischio di fragilità	27,9%	Livello 3	22,5%	A rischio di fragilità	22,5%
Livello 4	22,9%	Nessuna fragilità	41%	Livello 4	19,0%	Nessuna fragilità	36%
Livello 5	13,7%			Livello 5	13,7%		
Livello 6	4,1%			Livello 6	2,9%		
Dato mancante	8,6%	Dato mancante	8,6%	Dato mancante	15,9%	Dato mancante	15,9%
non disponibile	2,2%	non disponibile	2,2%	non disponibile	2,2%	non disponibile	2,2%
Non presente alla Prova 5^Primaria	2,5%	Non presente alla Prova 5^Primaria	2,5%	Non presente alla Prova 5^Primaria	2,5%	Non presente alla Prova 5^Primaria	2,5%

L'analisi può essere completata con la lettura dei dati disaggregati relativi ai punteggi riportati nelle varie prove, esaminate rispetto alla loro struttura, per esempio rispetto ad ambiti e dimensioni per la matematica o alla specificità delle voci che concorrono al punteggio complessivo della prova di italiano. Infine, altri dati molto interessanti e da tenere presente perché costituiscono le "variabili al contorno" sono quelli relativi ai punteggi suddivisi per genere oppure quelli che distinguono tra alunni stranieri di prima e seconda generazione; in ogni caso la scelta dei dati su cui focalizzare l'attenzione è lasciata agli addetti ai lavori che, in tutta libertà e sempre in un'ottica di miglioramento, possono indagare e conoscere a fondo la propria realtà scolastica semplicemente con un clic, attingendo preziose informazioni dal sito ufficiale dell'Invalsi.

7. Conclusione- qualche spunto di riflessione

La fragilità di cui possono essere portatori i nostri alunni non è solo quella descritta dall'indicatore dell'Invalsi, potendosi declinare, purtroppo, in varie categorie educative:

- Fragilità psico-emotive: problemi di autoregolazione, scarsa consapevolezza di sé e fragilità emotiva
- Difficoltà di adattamento al ruolo: difficoltà di tenuta dei compiti correlata a bassi livelli di concentrazione e attenzione nonché a difficoltà organizzative e a incostanza nell'impegno e nella frequenza
- Fragilità comunicativo-relazionali e di inserimento nel gruppo classe

- Comportamenti di tipo resistente-passivo: atteggiamento apatico, indolente di fronte alle attività proposte
- Problemi di apprendimento: carenze nelle competenze di base, problematiche di tipo cognitivo e insuccesso scolastico
- Atteggiamento oppositivo- provocatorio con frequente infrazione delle norme.

Dal punto di vista pedagogico e psicologico risulta molto vantaggioso studiare i comportamenti manifesti dei ragazzi per analizzarne i bisogni emergenti; bisogni che spesso derivano da criticità a livello familiare, socio- culturali, problemi di salute, ma a volte anche da un errato orientamento scolastico. Di conseguenza, data la complessità del problema e per la stesura di un progetto mirato a largo respiro, atto a porre in essere interventi concreti, andrebbero coinvolti anche tutti quei servizi che operano, nel merito, sul territorio. Per intervenire sui comportamenti disfunzionali è indispensabile, infatti, fare riferimento al funzionamento globale del soggetto, funzionamento che deve essere letto da prospettive diverse, con particolare attenzione alla prevenzione nei confronti di numerose patologie psichiatriche e neurologiche che trovano la prima e immediata espressione nella mancanza di quel benessere psico-fisico che, invece, è richiesto ai nostri ragazzi per stare bene a scuola. Il passo successivo, dal punto di vista didattico, consiste nel partire dai loro punti di forza per proporre attività coinvolgenti senza dimenticare che gli alunni fragili avranno bisogno di numerose attenzioni pedagogiche, agite quotidianamente dai loro docenti. Nello specifico, fra le principali metodologie e tecniche didattiche è possibile annoverare, oltre a strumenti compensativi e a misure dispensative, strategie specifiche per la valutazione, l'affiancamento, la flessibilità dei tempi di apprendimento nonché la messa in opera di attività ludiche. Di recente nuove metodologie riconducibili alla didattica cooperativa, quali ad esempio la peer education, stanno dando buoni risultati; senza trascurare che, per una didattica veramente inclusiva, atta a favorire il successo formativo, occorre saper creare un clima di classe positivo, preferibilmente tramite un approccio laboratoriale, partendo dalla individuazione di tematiche motivanti e focalizzando l'attenzione su attività sia di recupero che di potenziamento.

Bibliografia

Girelli C. Bevilacqua A., 2018, *Leggere le fragilità educative a scuola per intervenire. Una ricerca per dar voce alle scuole Trentine*. RicercAzione Vol 10 n.2

Girelli C., Bevilacqua A. (2017), *Dar voce alla scuola trentina, impegnata a sostenere gli alunni che "da soli non ce la fanno": presentazione di una ricerca esplorativa*, RicercAzione, 9, 1, 111-126.

Lorandi, F., & Arici, M. (Eds.) (2018). *Ciascuno cresce solo se sognato. Le risposte di alcune scuole trentine alle situazioni di fragilità educativa*. Trento: IPRASE.

Perfetti S. 2023, *Educare alla fragilità. La dimensione emoptivanella scuola contemporanea.* "Annali online della Didattica e della Formazione Docente" Vol. 15, n. 26/2023, pp. 286-299

Chello F. D'Elia R., Manno D., Pascal Perillo P 2021, *Fragilità educative e comportamenti antisociali degli adolescenti: categorie concettuali e pratiche educative,*

Encyclopaideia – Journal of Phenomenology and Education. Vol.25 n.60 (2021)

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 6 (2023), No 2, 43-52

Educarsi a Pitagora: un'esperienza verticale

Flora Donnarumma, Alessandra Renieri
I.C. Paolo Soprani, Castelfidardo (AN)
flora.donnarumma@icsoprani.edu.it alessandra.renieri@icsoprani.edu.it

Sunto
L'articolo descrive un progetto educativo verticale svolto presso la classe Seconda (Secondaria Primo Grado) dell'I.C. Soprani di Castelfidardo in Sperimentazione Nazionale. Il percorso è finalizzato all'apprendimento del Teorema di Pitagora. Gli studenti, organizzati in gruppi, esplorano attivamente i concetti matematici relativi la Teorema attraverso materiali Montessori, conferenze e dimostrazioni pratiche. L'approccio promuove autonomia, curiosità e cooperazione, integrando competenze disciplinari e sociali.

Parole chiave: Montessori; materiale; percorso verticale; teorema di Pitagora; triangoli costruttori

1. Introduzione

In questo intervento si presenta l'esperienza di apprendimento verticale fra classi Montessori all'interno dello stesso Istituto Comprensivo P. Soprani di Castelfidardo (AN): dalla Casa dei Bambini alla Scuola Secondaria di primo grado a Sperimentazione Montessori (autorizzata dal DM n.237/20211).
Nel pensiero montessoriano il bambino/ragazzo sceglie in maniera attiva e consapevole di apprendere, in un ambiente scientificamente preparato, liberante e costruttivo – dove nulla è lasciato al caso. I docenti, rispettando gli stadi/periodi sensitivi, scelgono un'educazione "dalla periferia".
L'esperienza didattica descrive il percorso di ragionamento e raggiungimento della scoperta rigorosa dell'enunciato e della dimostrazione del Teorema di Pitagora. Durante la presentazione si manipolano i materiali che sono usati nelle classi: dai triangoli costruttori al materiale avanzato che materializza l'astrazione della dimostrazione del Teorema stesso.

2. L'Istituto "Soprani" di Castelfidardo: una realtà montessoriana in "verticale"

L'Istituto Soprani di Castelfidardo si distingue per offrire un percorso educativo Montessoriano completo che abbraccia tutte le fasi cruciali dello sviluppo dell'individuo, dalla prima infanzia fino all'adolescenza. Si segue la pedagogia

Montessoriana dalla Casa dei Bambini fino alla Scuola Secondaria di Primo Grado, promuovendo l'autonomia, la curiosità e il rispetto reciproco. In questo contesto, gli studenti non solo acquisiscono conoscenze disciplinari/didattiche, ma anche competenze sociali e emotive vitali per il loro successo futuro. L'impegno è quello di coltivare un ambiente che ispiri la crescita personale e il raggiungimento del pieno potenziale di ogni individuo.

3. **La Sperimentazione Nazionale a Castelfidardo**

La Scuola Secondaria di Primo Grado dell'Istituto Soprani di Castelfidardo si distingue per l'innovativo approccio Montessoriano che caratterizza il suo percorso educativo. Fin dal 2010, il Piano Triennale dell'Offerta Formativa (PTOF) ha previsto un corso ispirato ai principi di Maria Montessori. Con il Decreto Ministeriale n. 237/2021, l'Istituto è stato selezionato come una delle 25 scuole in Italia per partecipare alla sperimentazione ministeriale di un corso Montessoriano.

Nell'anno scolastico 2022/23, sono state istituite due classi a Sperimentazione Montessori (I e II), oltre alla classe III a ispirazione Montessori, coinvolgendo complessivamente 75 alunni. Nell’'anno scolastico 2023/24, il numero di studenti coinvolti è aumentato a circa 90, grazie alla formazione di due classi Prime.

Nella Scuola Secondaria di Primo Grado “M. Montessori” dell’I.C. Soprani, l'approccio educativo si basa sulla visione della classe come una "piccola società", in cui il setting fisico ed educativo è intrinsecamente cooperativo. Oltre alla scoperta di nuove conoscenze in modalità attiva e laboratoriale, l'istituto promuove un ambiente inclusivo e collaborativo, dove ogni studente si sente parte attiva della comunità di apprendimento e si senta coinvolto nel suo percorso di crescita.

Una delle iniziative più significative è l'istituzione degli *sportelli didattici*, pensati sia per affrontare le eventuali difficoltà dei ragazzi (sia di metodo di studio che disciplinari). Gli studenti accedono su base volontaria, dichiarando l'argomento su cui desiderano ricevere supporto. Qui, il docente lavora individualmente con l'alunno, garantendo un'attenzione personalizzata e mirata. Questo approccio favorisce non solo il recupero delle lacune, ma anche lo sviluppo di competenze di auto-apprendimento e di auto-consapevolezza.

La seconda innovativa iniziativa sono gli *atelier*, delle attività extra-ordinarie proposte alle classi con l'obiettivo di coinvolgere reciprocamente studenti e insegnanti. Gli atelier, che si svolgono a classi aperte, sono concepiti come esperienze pratiche, che stimolano la creatività, l'interazione sociale e l'apprendimento attraverso l'azione.

Anche attraverso queste pratiche innovative, l'I.C. Soprani si impegna a fornire un'educazione che vada oltre la mera trasmissione di nozioni, promuovendo lo sviluppo integrale degli studenti e preparandoli ad affrontare le sfide del mondo contemporaneo con competenza e creatività.

Il corpo docente dell'Istituto coinvolto nelle classi sperimentali si è impegnato attivamente: quasi la totalità dei docenti ha conseguito la formazione specifica Montessori per la Scuola Secondaria di Primo Grado. I docenti, in classe, hanno modificato anche il loro approccio didattico, cercando di favorire sempre un apprendimento più attivo e autonomo degli studenti. Il docente è una guida, che accompagna la classe nel processo di costruzione di un solido metodo di studio e nell'acquisizione di autonomia nell'apprendimento. Il docente condivide un *planning* delle attività mensili, così da rendere gli alunni consapevoli di ciò che li attende durante le lezioni e capaci di organizzare in autonomia i propri tempi di studio. Il docente offre agli studenti anche dei *piani di lavoro* che suddividono il sapere in sottosezioni chiare e definite, indicando agli studenti cosa devono conoscere e suggerendo esercizi obbligatori/volontari volti al consolidamento delle competenze acquisite. Inoltre, viene sempre offerta agli studenti la possibilità di partecipare ad attività facoltative e di ricerca, permettendo loro di esplorare argomenti di interesse personale in modo approfondito. Come una comunità di piccoli ricercatori, gli studenti collaborano nella costruzione di materiali di recupero e ripasso e organizzano conferenze su temi che ritengono stimolanti e rilevanti.

Questa nuova dinamica in aula trasforma gli studenti da meri destinatari dell'insegnamento a protagonisti attivi del proprio apprendimento, incoraggiandoli a sviluppare la curiosità, la creatività e la responsabilità verso il proprio percorso educativo.

4. Educarsi a Pitagora: il "nostro percorso"

L'esperienza didattica che si vuole presentare ha coinvolto in maniera particolare la classe 2B (a.s. 2022/23): tale classe composta da 26 studenti, di cui 21 ragazze e 5 ragazzi, di cui 20 provengono dalla Primaria Montessori. Quattro alunne hanno bisogni educativi speciali (BES). Nonostante le diversità, la classe si dimostra vivace, partecipativa e aperta alle novità. Generalmente la classe è organizzata (spazialmente) in 7 isole.

L'attività che è stata proposta proposta si basa sulla lettura di "Ragionamenti sui triangoli rettangoli" in "Psicogeometria" di Maria Montessori e si articola in 6 fasi. Dalla consegna del materiale alla scrittura delle dimostrazioni del Teorema, fino all'esplorazione di ulteriori concetti matematici oltre Pitagora, gli studenti sono coinvolti attivamente nel processo di apprendimento:

•Fase 1: consegna del materiale e della scheda di lavoro

•Fase 2: le "conferenze" sulle dimostrazioni del Teorema

•Fase 3: la scrittura delle dimostrazioni del Teorema

•Fase 4: "applicare" il Teorema

•Fase 5: ripasso e auto-verifica

•Fase 6: "c'è qualcosa oltre Pitagora?"

Questa metodologia rispecchia il principio montessoriano di suscitare interesse e attenzione negli studenti, incoraggiandoli a esplorare il sapere in modo autonomo e stimolante. In questo contesto, la classe diventa un ambiente dinamico in cui ogni individuo è incoraggiato a sviluppare le proprie potenzialità e a contribuire attivamente alla comunità di apprendimento.

Fase 1: All'inizio dell'attività, vengono mostrati alla classe i sette materiali disponibili, inclusi quattro schede con dimostrazioni grafiche (“*Leggenda di Pitagora e delle pastrelle*”, “*Pitagora, la dimostrazione più antica*”, “*Pitagora dimostrato da Bhaskara*”) e tre tavole di Pitagora Montessori. Senza fornire alcuna introduzione preliminare, viene chiesto a ciascuna delle sette isole di selezionare un materiale e di iniziare a comprenderlo utilizzando la scheda di lavoro specifica. Le isole scelgono autonomamente il luogo dove lavorare. Al termine della lezione, la classe viene riunita per condividere le scoperte fatte. Sei isole scoprono che l'area del quadrato con l'ipotenusa di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti. La settima isola, che lavora con la scheda "*Pitagora e le cordicelle*", scopre che un triangolo è rettangolo quando la somma dei quadrati dei due cateti è uguale al quadrato dell'ipotenusa.

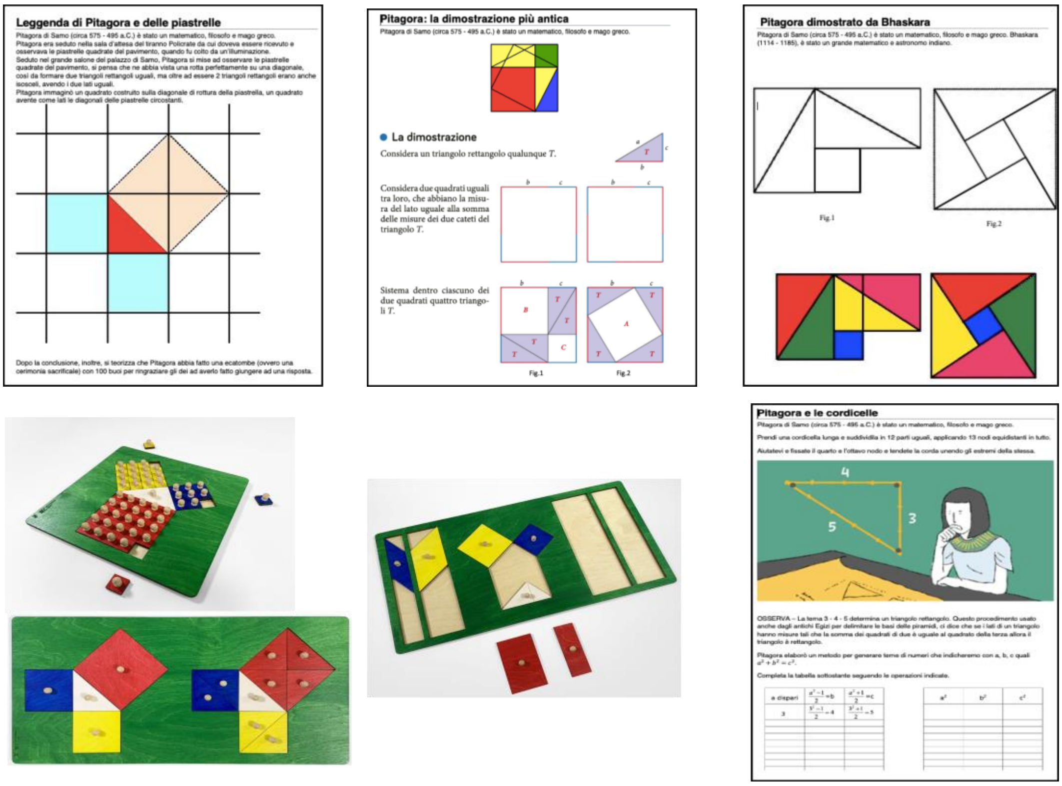


Fig.1 - Materiali presentati: quattro schede con dimostrazioni grafiche e tre tavole di Pitagora Montessori.

Fig.2 - Il lavoro di comprensione del materiale in isola

Fase 2: Nelle lezioni successive, ogni gruppo presenta la propria scoperta attraverso una conferenza. Gli studenti seguono attentamente, fanno domande e prendono appunti. Alla fine delle conferenze, viene chiesto a ciascun gruppo di creare un poster che illustri quanto appreso. Il gruppo "Il Pavimento di Pitagora" decide di ricostruire il Teorema sul pavimento della classe.

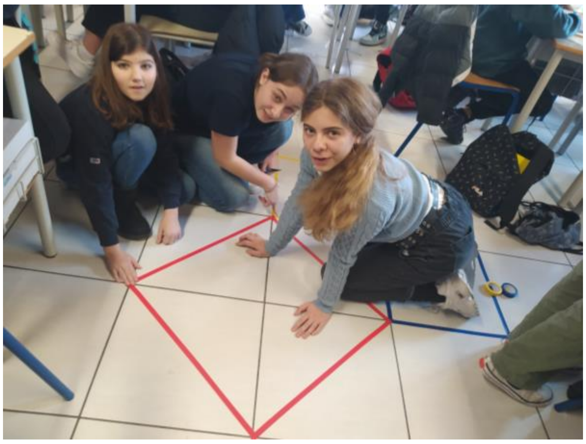


Fig.3 - Il "Pavimento di Pitagora"

Fase 3: Ogni alunno verbalizza le conferenze e riceve uno schema per scrivere una dimostrazione completa del Teorema. Si chiede alla classe di lavorare a coppie per scrivere almeno una dimostrazione, seguendo l'enunciato, le ipotesi, la figura di riferimento, la dimostrazione e la conclusione.

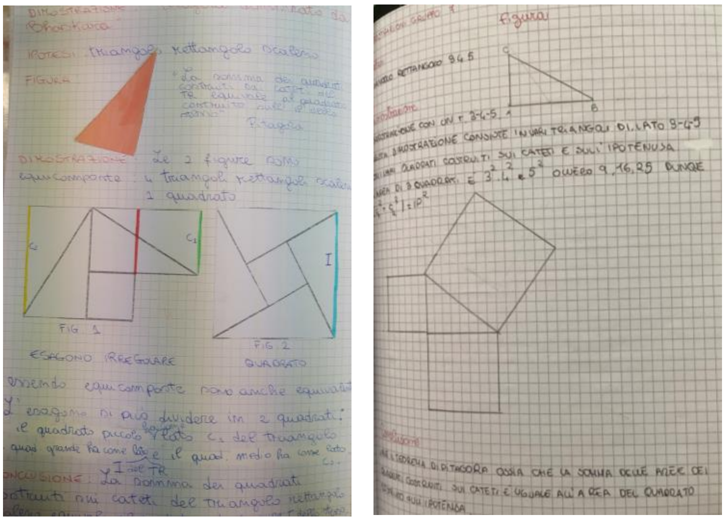


Fig.4 - Prove di “dimostrazione”

Fase 4: Gli studenti riflettono su come e quando applicare il Teorema di Pitagora. Dopo aver discusso, ogni isola studia l'applicazione del Teorema a una figura piana, inclusa l'identificazione di triangoli rettangoli all'interno di figure date e la scrittura delle formule del Teorema specifiche per ciascuna figura. Infine, gli studenti risolvono e spiegano problemi applicando il Teorema.

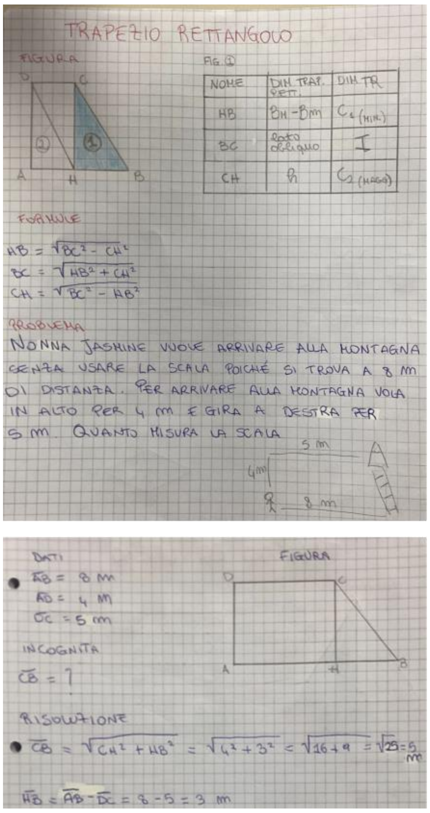


Fig.5 - Applicazioni del Teorema ai Trapezi rettangoli

Fase 5: Prima della verifica, ogni isola progetta e scrive un problema sul Teorema di Pitagora. Gli studenti stabiliscono gli obiettivi per la verifica e completano una prova che possa essere utili all valutazione sommativa del percorso.

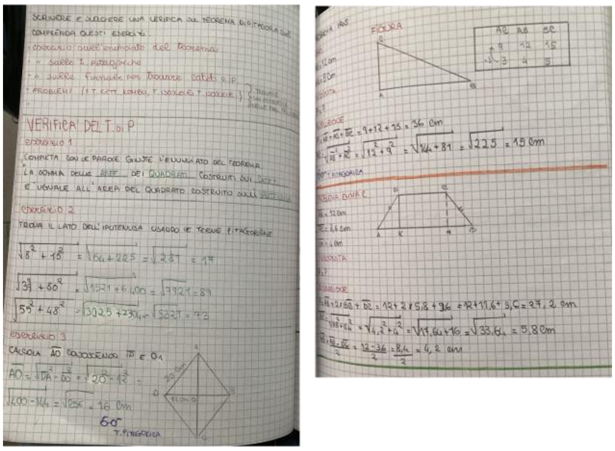


Fig.6 - Il testo della Verifica completata da un'isola

Fase 6: Si propone la visione di un video girato nella 2A (Primaria) dell'I.C. Soprani.
In tale video uno studente fa riflettere sulle congruenze che si rintracciano usando i triangoli costruttori. Infatti, grazie alle scatole dei triangoli costruttori, è possibile esplorare in modo sensoriale il valore frazionario e il teorema di Pitagora. Utilizzando la

scatola triangolare, la scatola esagonale piccola e quella grande, si può dimostrare il teorema in maniera tangibile.

Fig.7 - Le scatole dei Triangoli costruttori

Nel video, il piccolo studente dimostra, usando solo movimenti manuali, che "In un triangolo rettangolo, un triangolo equilatero avente per lato l'ipotenusa è equivalente alla somma dei due triangoli equilateri aventi per lato rispettivamente uno dei cateti"

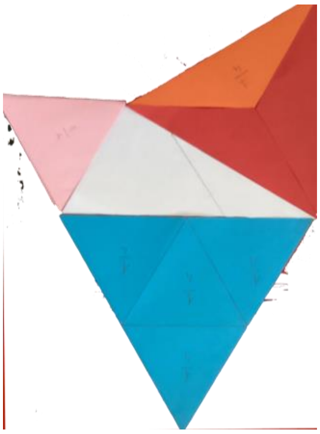


Fig.8 - "Re-interpretazione" dell'enunciato del video usando la tecnica origami.

Dal video, gli studente della classe Secondaria hanno iniziato a formulare ragionamenti che vanno oltre il risultato proposto da Pitagora, discutendo perfino l'applicazione del Teorema alle circonferenze.

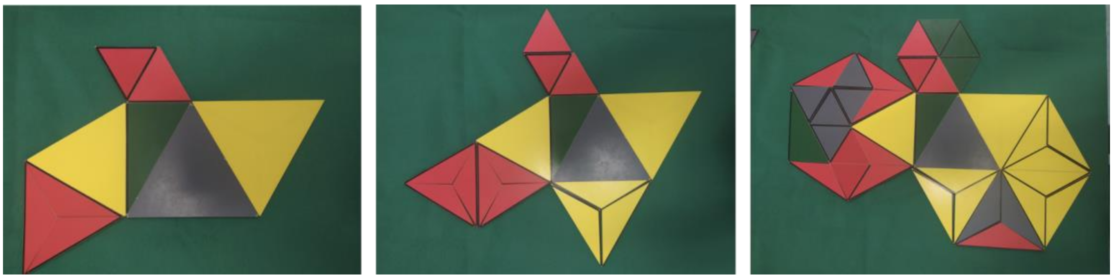


Fig.9 - "Oltre Pitagora": estensione del Teorema a rombi, trapezi, esagoni.

In tutte le fasi, l'attività si basa sull'interesse attivo degli studenti e sull'incoraggiamento della loro partecipazione attiva e critica al processo di apprendimento.

5. Conclusione

L'esperienza educativa descritta rappresenta un esempio concreto di come l'approccio Montessoriano possa essere implementato efficacemente per favorire l'apprendimento attivo e significativo degli studenti. Attraverso l'analisi dei vari aspetti legati all'ambiente preparato, ai ruoli e alle responsabilità degli studenti, alla libera scelta, all'apprendimento cooperativo, all'autovalutazione e alla valutazione/osservazione, emergono importanti riflessioni e spunti di miglioramento.

In primo luogo, l'attenzione dedicata all'ambiente preparato, con l'utilizzo del materiale Montessori seguendo precise fasi operative e organizzando in modo scientifico i luoghi di lavoro, ha favorito un apprendimento concreto e sensoriale, in linea con i principi montessoriani. Questo approccio ha permesso agli studenti di esplorare autonomamente i concetti matematici e di sviluppare una comprensione più profonda.

L'assegnazione di ruoli e responsabilità agli studenti ha contribuito a promuovere l'autonomia e l'impegno personale, rendendo ciascuno responsabile del proprio apprendimento. La presa di responsabilità autonoma da parte degli studenti, soprattutto durante la fase di correzione delle dimostrazioni, ha evidenziato il loro coinvolgimento attivo nel processo di apprendimento.

La libera scelta iniziale dei materiali ha consentito agli studenti di seguire i propri interessi e di essere coinvolti attivamente nel processo educativo, conferendo loro un ruolo di protagonismo nel proprio sviluppo. Questo modello educativo ha favorito un apprendimento più significativo e motivante.

L'apprendimento cooperativo, caratterizzato da momenti di comunicazione e apprendimento condiviso, ha favorito lo sviluppo delle competenze sociali e relazionali degli studenti, nonostante le difficoltà incontrate in alcuni casi. L'intervento dell'insegnante nel mediare situazioni di conflitto ha permesso di mantenere un clima collaborativo e inclusivo in classe.

L'autovalutazione e la valutazione/osservazione hanno fornito agli studenti l'opportunità di riflettere sul proprio apprendimento e di monitorare i propri progressi. Tuttavia,

emergono delle criticità legate alla valutazione osservativa e all'autovalutazione del lavoro di gruppo, che potrebbero essere affrontate con l'implementazione di strumenti più formali e equi.
Infine, l'esperienza di collaborazione con ex colleghi e amici dell'università ha arricchito il percorso formativo, fornendo nuovi spunti e suggerimenti per migliorare le pratiche didattiche. La proposta di una lettura critica della parte relativa alle terne Pitagoriche nel testo di Euclide rappresenta un interessante sviluppo futuro, che potrebbe arricchire ulteriormente l'esperienza di apprendimento degli studenti.
In definitiva, l'attività svolta evidenzia l'importanza di un approccio pedagogico centrato sugli studenti, che li vede coinvolti attivamente nel processo di apprendimento e li sostiene nel raggiungimento dei propri obiettivi formativi. Questo modello educativo, ispirato ai principi Montessoriani, si configura come un valido strumento per promuovere una formazione completa e significativa, in grado di preparare gli studenti ad affrontare sfide future con competenza e consapevolezza.

Bibliografia

Castelnuovo, Emma, (1963) Didattica della Matematica. Einaudi

Montessori, Maria, (1948). La scoperta del bambino. Garzanti

Montessori, Maria, (1971). Psicoaritmetica. Opera Nazionale Montessori

Montessori, Maria, (2011). Psicogeometria. Opera Nazionale Montessori

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 6 (2023), No 2, 53-62

Camillo Ciarlante e l’intelligenza delle piante

Antonio Maturo

Mathesis Abruzzo

Email: antomato75@gmail.com

Sunto In questo lavoro si vuole ricordare la figura del professor Camillo Ciarlante, uno dei docenti di Matematica maggiormente impegnati per la didattica della matematica e la formazione degli insegnanti. Una sua passione era la messa a punto di modelli matematici per lo studio della biologia delle piante. Camillo si dedicò a varie osservazioni e sperimentazioni per valutare la capacità delle piante a risolvere spontaneamente situazioni che, formalizzate dal punto di vista matematico, portano a modelli matematici molto complessi.
Nei primi due paragrafi si ricorda la figura di Camillo Ciarlante. I paragrafi successivi sono solo una traduzione del lavoro presentato da Camillo in un convegno organizzato da una prestigiosa università di Iasi (Romania).

Parole chiave Intelligenza delle piante, abilità del glicine, Mathesis

1. Introduzione

Camillo Ciarlante nasce a Isernia il 18 gennaio 1937. Ho avuto il piacere di frequentarlo dall’anno accademico 1967-1968, quando, a L’Aquila, entrambi frequentavamo il corso di laurea in Matematica. A causa di lutti famigliari Camillo doveva fare lo studente lavoratore per mantenersi agli studi. Nonostante ciò era sempre allegro e comunicava spirito positivo, sdrammatizzando, con qualche simpatica battuta di spirito, ogni situazione spiacevole. Tutte le sere facevamo una passeggiata per i portici di L’Aquila e parlavamo di matematica, didattica e ricerca, e su cosa ci proponevamo come futuri insegnanti. Era particolarmente interessato ai modelli con cui la matematica spiegava i fenomeni biologici. Infatti fece una tesi di laurea interdisciplinare su questo argomento.
Dopo la laurea, anche se abitavamo in città diverse, io a Pescara e lui a Isernia, ci vedevamo spesso e ci scambiavamo varie idee su come impostare l’insegnamento della matematica e come curare il rapporto con gli studenti.
Nel 1975 iniziai ad insegnare nel corso di laurea in Architettura a Pescara e da allora sono stato sempre orgoglioso del fatto che gli studenti che provenivano da Isernia e che avevano avuto Camillo come insegnante erano decisamente fra i più bravi.

Il maggiore interesse di Camillo era capire l'intelligenza delle piante, vedere come le piante riescono facilmente a risolvere situazioni, che, descritte dagli umani più dotti con sofisticati modelli matematici, apparivano veramente difficili da affrontare.
Camillo voleva andare avanti rispetto all'idea che la matematica ha avuto come primo obiettivo quello di descrivere la natura, lui pensava che le piante potessero a modo loro fare matematica, anticipando di molti anni l'idea del computer biologico.

2. Camillo Ciarlante, la Mathesis e i convegni

La passione per l'insegnamento portò Camillo ad essere una delle persone più impegnate della Mathesis, Società italiana di scienze matematiche e fisiche.
Nel periodo d'oro, in cui sono stati presidenti Mathesis nell'ordine, Bruno Rizzi, Silvio Maracchia e Franco Eugeni, nascono, nell'area "Abruzzo-Molise", 9 sezioni Mathesis: Atri, Chieti, L'Aquila, Ortona, Pescara, Sulmona, Teramo, Vasto, Isernia.
La Mathesis di Isernia, con presidente Camillo Ciarlante, fu una delle più attive. Grazie al lavoro svolto da Camillo, Isernia è stata la sede di due importanti convegni nazionali, oltre che di giornate di lavoro in collaborazione con noi di Pescara. Un ruolo importante nell'organizzazione di queste attività è stato svolto dalla moglie Angela, con cui Camillo condivideva tutti i suoi pensieri e desideri. Camillo era di poche parole e Angela curava efficacemente tutti i dettagli per la realizzazione pratica delle idee di Camillo. Una coppia perfetta, con sentimenti iniziati fra i banchi del liceo quando erano compagni di scuola.
Camillo partecipò con grande entusiasmo a tutti i convegni e attività Mathesis fino al 1997, quando, mentre partecipava al convegno di Caserta, subì il furto della sua adorata macchina. Da allora partecipò in maniera più limitata e selettiva alle attività della Mathesis e pochi anni dopo, andando in pensione, cessarono le attività della Mathesis di Isernia.
Ma Camillo continuò la sua attività di ricerca scientifica e didattica, si iscrisse alla Mathesis di Pescara e svolse delle attività con l'Università di Chieti-Pescara, insegnando la Geometria Euclidea in un corso della Facoltà di Scienze della Formazione.
Portò i risultati della sua ricerca in convegni nazionali e anche in un convegno internazionale organizzato a Iasi, in Romania, nel 2005, dal titolo "Mathematics applied in Biology & Biophysics".
Fece parte anche dell'Apav (Accademia Piceno Aprutina dei Velati), nel periodo in cui Giuseppe Manuppella fu presidente dell'Apav.
Camillo si spegne il 5 luglio 2022, qualche mese dopo aver festeggiato i 50 anni di matrimonio. Solo due mesi prima ci sentivamo spesso per organizzarci su come continuare, dopo il periodo di fermo a causa del covid, la nostra collaborazione.

3. Le idee presentate da Camillo in Romania

Da questo punto in poi mi limito ad una traduzione in italiano del lavoro presentato da Camillo nel 2005 presso una prestigiosa università di Iasi (Romania). In corsivo le considerazioni di Camillo.

Spesso riflettiamo sul fatto che la Fisica, nel descrivere la Natura e le sue leggi con l'aiuto della Matematica, ha raggiunto un limite di conoscenza molto ampio e un'elevata precisione; ha creato discorsi comprensibili che armonizzano la realtà della Natura con lo sviluppo della Scienza.

Quanto detto induce a pensare modelli matematici applicabili alla Biologia per poter entrare, nei limiti del possibile, nei segreti della sua essenza e della sua evoluzione.

Crick F. H. C. cita: "In futuro si può sperare di poter ***spiegare*** *l'intera biologia in termini di scienze progressivamente più semplici…": si riferisce ad un approccio fisico-chimico e la matematica come il complemento più utile.*

Ricordiamo anche Granit Ragnor che cita: "Per la biologia la medicina può svolgere il ruolo che l'ingegneria svolge per la fisica; la chimica (anche la matematica) quello di fornire una pietra di paragone per le conclusioni tratte ".

I modelli matematici, sicuramente, sono adatti a gestire l'evoluzione e, attraverso opportuni parametri, analizzare passo-passo le spiegazioni da dare all'analisi della sperimentazione.

Ricordando la frase "Esperienze sono gli errori della vita, chi più ha errato più è saggio", vediamo come il ***glicine (wisteria sinensis)*** *ha modo di vivere più esperienze, di spostarsi in tutte le direzioni ed adattarsi alle diverse situazioni che trova; deve, quindi, valutare ed usare l'ambiente in cui vive con maggior adattamento rispetto alle altre piante.*

Figura 1 Il glicine che sale

Le piante, per un complesso di attività chimiche che avvengono al loro interno, si sviluppano e crescono accumulando cellule con un ritmo in continuo aumento.
Un modello matematico per la crescita potrebbe essere il seguente: il tasso di crescita lo indichiamo con k, il peso con W e l'incremento di peso nel tempo dt con dW.
L'equazione della crescita sarà: dW/dt = kW.
Risolvendo e ponendo come costante W_0, il peso al tempo t = 0, si avrà: $W = W_0 e^{kt}$. Se sostituiamo W e W_0 con N (numero di cellule al tempo t) ed N_0 (numero di cellule al tempo t=0) possiamo scrivere, come modello matematico, il seguente:

$N = N_0 e^{kt}$ da cui $k = (\log N - \log N_0)/t$, con k e t inversamente proporzionali.

In presenza di un sostegno ***tondo*** *il glicine si avvolge presentando un accentuato tropismo generalmente destrorso, mentre, in prossimità di un sostegno* ***piatto*** *sembra quasi rifiutarlo.*

Figura 2 Il glicine si avvolge

Sembra che segua, nel suo comportamento, la legge di Talbot o legge di sommazione. Sul tondo il glicine si avvolge con un movimento elicoidale generando una buona elica cilindrica, adattando il passo alla lunghezza del sostegno (che sicuramente riconosce).

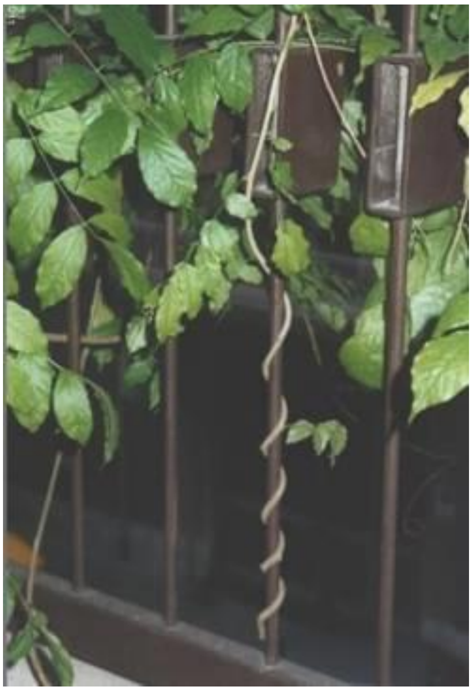


Figura 3 Passo lungo

Figura 4 Passo corto

Probabilmente rifiuta i sostegni piatti sia perché incontra difficoltà ad eseguire l'elica, sia perché il ramo si incide profondamente con la conseguenza che la pianta è costretta, per poter sopravvivere, a generare un rigonfiamento con dispendio di energia.

Figura 5 Il glicine su un sostegno piatto

Se, durante il periodo di tropismo, il tasso di crescita è costante per un periodo di tempo relativamente lungo, la pianta si avvolge con quattro spire e con passo costante e solo successivamente si allontana dal sostegno; quindi, è possibile pensare che il numero di cellule prodotte in tempi uguali sarà costante ed il valore potrebbe essere ottenuto dal valore di k calcolato con l'equazione precedentemente scritta.
Uno studio sul tropismo del glicine è stato fatto da Carlo Darwin il quale lo controllava colorando con gocce di vernice rossa il germoglio, seguendo lo sviluppo per un tempo abbastanza lungo e poi togliendo, di colpo, il sostegno; "…il germoglio balza in avanti e per qualche tempo conserva la sua forma a spirale, poi si drizza e comincia di nuovo la ricerca…". L'apice descrive una strettissima ellisse.
Dutrochet afferma "… le ellissi sono generalmente molto strette, ma talvolta si avvicinano al cerchio…". Lo scopo vero di questo movimento è, come ha mostrato Mohl, di favorire il germoglio a trovare un sostegno. Personalmente ho notato che il germoglio si spinge inizialmente verso l'alto poi, per gravità scende e, trovato un sostegno, si avvolge con un tropismo, generalmente destrorso, secondo una buona elica cilindrica e con passo adeguato alla lunghezza del sostegno, che generalmente abbandona dopo quattro tropismi. Analizziamo un possibile schema matematico in un sistema cartesiano tridimensionale.
Sia s l'ascissa curvilinea della curva C, consideriamo l'equazione

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = [\varphi^2(\lambda) + \psi^2(\lambda) + k^2]\, d\lambda^2,$$

essendo $\varphi(\lambda)$ e $\psi(\lambda)$ uguali al seno e al coseno dell'angolo formato dalla tangente alla curva con l'asse OY. Avremo:

$ds = (1 + k^2)^{1/2}\, d\lambda$ *da cui* $s = (1 + k^2)^{1/2}\, \lambda;$

detto β l'angolo formato dalla tangente a C e l'asse OZ si avrà:

$$\beta = k/((1 + k^2)^{1/2}$$

Possiamo, quindi, concludere che le tangenti all'elica formano un angolo costante con una certa retta fissa e, dal disegno fatto sulle foto, sembra che ciò sia verificato.

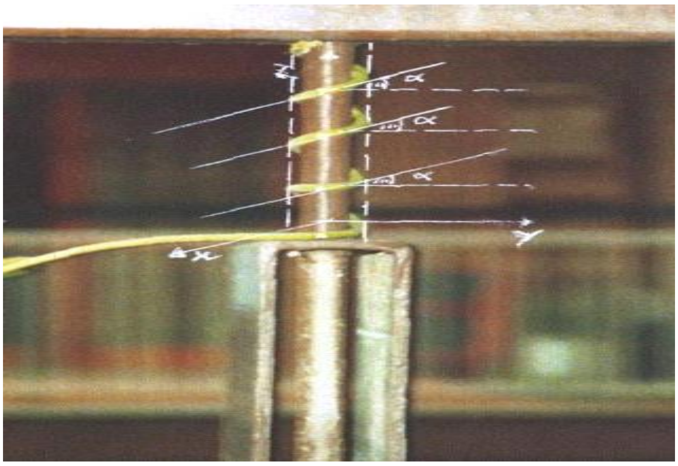


Figura 6 L'angolo è costante parte 1

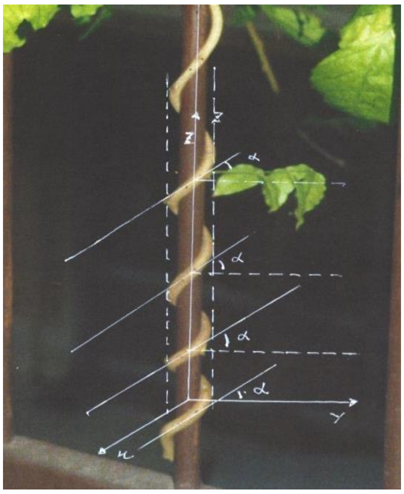


Figura 7 L'angolo è costante parte 2

Tornando ad una crescita non costante per unità di tempo e implicando l'auxina come l'ormone preposto alla proliferazione cellulare, ragioniamo nel modo seguente: siano n_1 ed n_2 i valori della concentrazione di auxina nei due emisferi di una cellula e poniamo $n_1/n_2 = e^{-\alpha x}$. Sarà: $n_2/n_1 = e^{\alpha x}$ sommando $n_1/n_2 + n_2/n_1 = e^{-\alpha x} + e^{\alpha x}$

Chiamando n la concentrazione media si otterrà che $(n_1 + n_2)^2 = 4n^2$, dividendo per $n_1 n_2$ e completando i calcoli si avrà che: $n^2/(n_1\ n_2) = (\cosh(\alpha x)+1)/2$.

Possiamo, quindi, concludere che il rapporto tra il quadrato della concentrazione media ed il prodotto delle concentrazioni nei due emisferi è funzione del coseno iperbolico di (αx).

Poiché $y = \cosh x$ è l'equazione della catenaria è opportuno chiedersi se il glicine riconosca il bivincolo; le foto proposte dimostrano questa possibilità.

Figure 8-9 La catenaria del glicine

Un'altra caratteristica importante è la seguente: gli stoloni (dal latino stolonem - germoglio) seccano se non trovano un sostegno su cui aggrapparsi, mentre quelli che riescono a capire di non aver trovato un sostegno ***sicuro*** *rientrano in poco tempo verso la pianta madre attorcigliandosi su se stessi; in questo modo evitano di essere abbandonati e quindi non seccano. (Il tutto è, probabilmente, dovuto al fatto che, per sopravvivere, non bisogna sprecare energie).*

Figure 10-11 Il glicine torna indietro

Un altro comportamento legato alla sopravvivenza, è dato dal fatto che i semi che cadono sul terreno lungo il territorio dove si estendono le radici non germogliano, forse perché le radici immettono nel terreno una qualche sostanza inibente. La prova da me fatta è questa: ho preso un baccello e metà dei semi, li ho interrati nella zona dove di norma cadono, l'altra metà l'ho interrata in un vaso che ho poi posto dove i semi generalmente cadono dal baccello. Sono germinati solo i semi posti nel vaso.

Alcuni mesi or sono il glicine è stato tagliato sui balconi, come si può vedere dalla foto seguente.

Figura 12 Il glicine tagliato

Sul ceppo rimasto sono nati dei germogli che precedentemente, quando il glicine si estendeva per oltre cinquanta metri, non erano mai nati (probabilmente perché inutili).

Figura 13 Il glicine fiorisce di nuovo

Esiste sicuramente un comportamento ***logico*** *della pianta che valuta ogni situazione e la gestisce nel modo più conveniente.*
Il prof. Serge Delrot dell’istituto universitario francese presso il laboratorio di fisiologia vegetale dell’Università di Poitiers studiando la “mimosa pudica“ afferma: “anche le piante hanno un’anima“. L’affermazione è, forse, un po’ grossa, ma sicuramente possiamo dire che le piante hanno una loro forma d’intelligenza, in quanto, senza avere dubbi, si evidenzia che il ***glicine*** *risponde in maniera* ***non contraddittoria*** *a stimoli tattili, ottici, gravitazionali, chimici etc….*

Concludo con le parole di L. D. Mariani: ***per fortuna le scoperte sulla sensibilità delle piante non provocano più dubbi sulla serietà dei ricercatori.***

Bibliografia

Amit D., Modeling Brain Function: The world of attractor neural network. Cambridge University Press ads, (1989)

Bayliss W. M., Principles of General Physiology. Green & C. (1927)

Ciarlante C., Doria S., Maturo A., *Interpretazione del tropismo del glicine attraverso un sistema dinamico caotico.* Convegno Nazionale Mathesis "Insegnamento matematico per problemi e per teorie", (1994)

Ciarlante C., Doria S., Maturo A., *Glicine: suo tropismo e sua intelligenza*. Atti del Convegno Nazionale "Protezione delle culture. osservazioni, previsioni, decisioni, a cura dell'ERASA Ente Regionale Abruzzese di Sviluppo Agricolo e dell'ENEA. Pescara, (1993), pp. 373-378

Ciarlante C., *Some hypotheses on the life-support system of the Wistaria Sinensis. Reflexions about a possible intelligence of wisteria*. Proceedings of the 4th annual symposium on Mathematics applied in Biology & Biophisics, University of agricultural sciences and veterinary medicine, Iasi, (2005), pp. 147-158

Darwin C., *I movimenti e le abitudini delle piante rampicanti* – U.T.E.Torino (1878).

Dutrochet E., *Des mouvements rèvolutifs spontanès*, Comptes Rendus, tom.XVII pag.989 (1843).

Doria S., Tirozzi B., *Highly Diluted Asymmetrical Neural Network*, in "Stochastic Process - Geomety and Phisics" World Scientific Publishing Company, Singapore, (1995), pp. 662-669

Rashevsky N., *Mathematical biophysics: physico- mathematica foundation of Biology. Dover N.Y. (1960)*

Volterra V., *Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie*. Editions Jacques Gabay (1931)

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 6, No 2 (2023)

INDICE

Istruzioni per gli autori

Chi desidera inviare un articolo per la Rivista Mondo Matematico e Dintorni deve seguire i seguenti criteri per il formato:

1. L'articolo deve essere in word, carattere Times New Roman, 12 p; il titolo dell'articolo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 18 p.
2. I margini sono di 3 cm sotto, sopra, a destra e a sinistra. L'interlinea è multipla 1,15 p.
3. L'articolo deve essere diviso in paragrafi numerati, di cui il primo è una introduzione e l'ultimo una conclusione. I paragrafi vanno separati da due interlinee. Il titolo di ogni paragrafo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 14 p.
4. Ogni articolo deve avere una lunghezza minima di 6 pagine e non deve superare, di regola, le 14 pagine.
5. Dopo l'ultimo paragrafo va inserita la bibliografia. Almeno 4 fra libri e articoli nel formato cognome, nome (anno), titolo dell'articolo, titolo del libro o rivista, editore, città.
6. La bibliografia non va numerata. I riferimenti bibliografici nel testo devono avere la forma (cognome dell'autore, anno).
7. Non mettere note bibliografiche a piè di pagina. Tutta la bibliografia va messa alla fine.
8. I disegni vanno fatti con programmi di elaborazione grafica (non in Word!) e salvati in jpg o in png.
9. L'articolo deve essere inviato in formato doc o docx ed in formato pdf per il controllo dell'impaginazione e deve avere un numero pari di pagine.

Tutti gli articoli ricevuti saranno esaminati da due revisori che invieranno il loro parere sulla pubblicazione ed eventuali proposte di correzioni ai direttori editoriali.
Gli articoli possono essere inviati ad uno dei seguenti indirizzi email:

antomato75@gmail.com

lucianadr@live.it

santarossa.renata@gmail.com

mandronemarioinnocenzo@gmail.com

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo

ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola
(Decreto del 24/07/2009 e Direttiva 170/2016)