Volume 6 Numero 1 2023

MONDO MATEMATICO E DINTORNI

Rivista per i Docenti del Primo Ciclo di Istruzione

Direttori Editoriali
Luciana Delli Rocili
Antonio Maturo
Renata Santarossa

APAV

www.apav.it

ISSN 2612 - 2596 [on line] ISSN 2612 - 1719 [testo stampato]

Volume 6 (2023) Numero 1

MONDO MATEMATICO E DINTORNI

Rivista per i Docenti del Primo Ciclo di Istruzione

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo

Editore: Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo (APAV)
Via del Concilio n.24, Pescara, Italy

Codice Fiscale: 92036140678 Partita IVA: 02184450688

Codice destinatario per fatturazione elettronica: M5 UXCRL

IBAN: IT 57 K 02008 15408 000104232062 BIC Swift LINCRITM1760
Banca UNICREDIT - Agenzia Pescara UMBERTO 00760

Periodicità: semestrale

Siti web: www.apav.it; www.eiris.it

Email: apavsegreteria@gmail.com, apavsegreteria@pec.it

ISSN: 2612 - 1719 (testo stampato)
ISSN: 2612 - 2596 (online)

Autorizzazione del Tribunale di Pescara del 9/4/20l9
N. 741/2019 V.G.
N. 03/2019 Reg. Stampa

Prefazione

I numeri della rivista “Mondo Matematico e Dintorni” del 2023 riportano soprattutto una selezione dei lavori presentati nel 2022 e 2023 nei Convegni/Corsi di aggiornamento dedicati all’insegnamento nel Primo Ciclo di Istruzione. La rivista e i convegni sono il frutto della stretta collaborazione, dal 2012, fra l’Apav, Accademia Piceno Aprutina dei Velati in Teramo e le Mathesis abruzzesi e campane.
Ricordiamo che le prime notizie su un’Accademia dei Velati risalgono al lontano 1598 e che l’attuale Apav rinasce nel 1988 su iniziativa di un gruppo di professori universitari, con presidente Franco Eugeni e principale collaboratore il docente di Informatica Giuseppe Manuppella.
L’Accademia Piceno Aprutina dei Velati in Teramo è *Ente Accreditato dal MIUR* per la formazione del personale scolastico con Decreto del 24/07/2009.
Le Mathesis di Pescara e di Chieti nascono nel 1987 e si fondono per costituire la Mathesis Abruzzo nel 2019.
Già dal 1988 nasce una stretta collaborazione fra l’Apav e la Mathesis di Pescara, che lavorano insieme pubblicando riviste di livello universitario come Ratio Mathematica, Science&Philosophy, Hopue e varie altre pubblicazioni, oltre a organizzare convegni e corsi di aggiornamento.
Nel 2016 diventa presidente dell’Apav Giuseppe Manuppella che ha ottenuto la conferma dell’accreditamento, in base alla *Direttiva 170 del 2016*, per tutte le attività formative riservate al personale della Scuola. In tale veste, Giuseppe Manuppella ha diretto l’organizzazione di vari corsi di formazione per i docenti delle *scuole di ogni ordine e grado*, sia in presenza sia online.
A seguito della scomparsa del Prof. Giuseppe Manuppella, Presidente storico dell'APAV, e dopo un periodo di transizione caratterizzato dalle difficoltà legate alla pandemia, il figlio, Fabio Manuppella, ha assunto la carica di Presidente pro tempore nel 2021, al fine di completare il mandato in corso. Nel 2022, in seguito a regolari elezioni assembleari, la Prof.ssa Renata Santarossa è stata eletta Presidente dell'APAV, dando così inizio a un nuovo capitolo nella storia dell'associazione.
Nel 2018 Giuseppe Manuppella volle creare una rivista che, a differenza delle altre orientate al mondo universitario e alla ricerca internazionale, fosse orientata al mondo della Scuola del primo ciclo, rigorosamente in italiano, con argomenti e metodologie trattati in maniera lineare e immediatamente fruibili per la didattica. Così è nata la rivista “Mondo Matematico e Dintorni” nel 2018. La rivista è nata dopo varie riunioni congiunte dei direttivi di Apav e Mathesis di Pescara a cui parteciparono Giuseppe Manuppella, Paolo Rotondo, Antonio Maturo, Luciana Delli Rocili, Agostino Zappacosta e, telefonicamente, Renata Santarossa. Non è un caso che la prefazione del primo volume di Mondo Matematico e Dintorni è stata curata proprio dalla futura presidente dell’Apav, Renata Santarossa.
Iniziative di rilievo strettamente collegate alla rivista Mondo Matematico e Dintorni sono stati i Convegni/Corsi di aggiornamento su “La Matematica nel Primo Ciclo:

aspetti didattici sociologici e interdisciplinari". La serie di questi convegni inizia nel 2013 presso l'università di Chieti-Pescara con una cadenza annuale fino al 2017. Poi c'è una pausa dovuta all'organizzazione di tre Corsi Estivi, due a Pizzoferrato, nel 2017 e 2018 e poi a Pescasseroli nel 2019.

Dopo le travagliate disavventure dovute al Covid, alla scomparsa di Giuseppe Manuppella, alla crisi della Mathesis che ha portato alla creazione della Federazione Mathesis, al lavoro che è stato svolto per la riorganizzazione dell'Apav, finalmente, nel 2022, la nuova presidente dell'Apav, Renata Santarossa e il presidente di Mathesis Abruzzo, Antonio Maturo, decidono di riprendere, nel 2022, la serie dei Convegni/Corsi di aggiornamento sul Primo Ciclo. La realizzazione dell'idea è dovuta alla collaborazione di Diana Cipressi, fondatrice assieme ad Antonio Maturo di Mathesis Abruzzo, che, in accordo con la sua Dirigente Scolastica, mette a disposizione la sua scuola, ***Scuola Sec. 1° grado G. Mezzanotte, Piazza Carafa, Chieti,*** per il 6° Convegno sul primo Ciclo.

Nel 2023 la stessa scuola ci ospita per il 7° Convegno sul Primo Ciclo.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 6, No 1 (2023), 5-22

Matematica all'ora di lettere

Carlo Toffalori
già Professore Ordinario di Logica Matematica, Università di Camerino
Email carlo.toffalori@unicam.it

Sunto. L'articolo propone una rassegna di poesie, romanzi e racconti sull'aritmetica, che speriamo possano favorire l'incontro con la matematica nelle scuole del primo ciclo, in collegamento con l'insegnamento di italiano, e forse anche con quello di lingua inglese.

Parole chiave. Zero; successore; induzione; rappresentazione posizionale; operazioni.

1. Introduzione: l'aritmetica attraverso la letteratura

La letteratura per l'infanzia e per l'adolescenza richiede attenzioni particolari nell'uso del linguaggio, nella struttura delle frasi, nella scelta dei concetti da esporre, nella ricerca di uno stile vivace, semplice ma non insipido, adatto alla psicologia di piccole lettrici e piccoli lettori. Tanto vale soprattutto in età scolare, nell'istruzione sia primaria che secondaria di primo grado. Allo stesso modo l'incontro con la matematica nel primo ciclo di istruzione deve avvenire con opportune cautele: concetti e formule vanno proposti in modo da attrarre senza scoraggiare; il rigore deve conciliarsi con l'intuizione e la fantasia.

Tutte queste avvertenze si assommano quando letteratura e matematica per bambini e ragazzi si congiungono e la prima prende a trattare della seconda. Oggi come in passato, infatti, la didattica della matematica, soprattutto al primo ciclo, si affida volentieri a storie, racconti e poesie per raggiungere i suoi obiettivi. Per esempio, comunica idee e procedure tramite il cosiddetto *storytelling*, se non addirittura tramite semplici rime, e sollecita i ragazzi a esprimersi loro pure in queste forme.

Non è certo nostra intenzione soffermarci qui sullo *storytelling* didattico. Tanti colleghi ne discutono nelle sedi appropriate con competenza ben maggiore della nostra.

Ma vorremmo invece trattare quella che potremmo definire la "mateletteratura al primo ciclo", esaminare cioè i modi in cui la matematica elementare viene presentata in romanzi, racconti e poesie di autori famosi per l'infanzia (e non solo); suggerire così spunti da approfondire in classe, in collegamento con l'insegnamento dell'italiano e, nelle scuole secondarie di primo grado, con i docenti di lettere, perché la didattica della matematica risulti più viva e, soprattutto, si insinui nei ragazzi la coscienza dell'unità della cultura, al di là della sensazione di netta divisione tra discipline cui li inducono la pluralità dei professori e perfino la ripartizione degli orari delle lezioni.

C'è però una questione che è doveroso preporre, e cioè: fino a che punto non tanto l'invenzione, la creazione spontanea da parte di docenti e discenti di poesie, racconti e romanzi, quanto la loro *lettura* è ancora praticata, utile, formativa? Fino a che punto le ragazze e i ragazzi di oggi sono partecipi dei classici della letteratura, e se ne sentono avvinti, interessati o almeno bendisposti? Sembra infatti assodato che nel nostro mondo si prediligono ormai altri strumenti di comunicazione, perfino nella didattica.

D'altra parte, si può citare il caso abbastanza recente di un libro scritto da un autore serio e affermato, che si rivolge a lettori di ogni età, anche scolare, parla di matematica e riscuote un grande successo editoriale. Si tratta de *Il mago dei numeri* di Hans Magnus Enzensberger (1929-2022), pubblicato nel 1997 [En]. La storia, che crediamo ben nota, parla di un ragazzo allergico alla matematica, che è per lui un incubo incomprensibile e insopportabile, ma poi indotto a cambiar parere da un diavoletto misterioso, appunto il mago dei numeri, che gli appare di notte in sogno e lo introduce ai piaceri dell'aritmetica, del calcolo combinatorio e di altri argomenti sempre più complessi. Chissà che lo stesso diavoletto non sappia guadagnare la benevolenza perfino della collega (o il collega) di lettere oltre che, naturalmente, degli studenti? Se poi *Il mago dei numeri* sembra libro superato e troppo datato per costituire ancora un riferimento adeguato, si può facilmente rilevare che altri volumi lo hanno seguito in anni più vicini, analoghi per impostazione e talora per successo. Ricordiamo ad esempio i tanti bellissimi libri di Anna Cerasoli, modelli di freschezza e di immaginazione. Citiamo in particolare *I magnifici dieci*, *Io conto*, *La grande invenzione di Bubal* [Ce1, 2, 3]. Li scegliamo perché trattano l'ambito aritmetico di cui principalmente ci occuperemo. Nel primo dei tre, il diavolo di Enzensberger è sostituito dalla figura più rassicurante e familiare di un nonno, già professore di matematica, ai cui segreti è ben contento di introdurre un nipote.

La nota che segue non ha la minima pretesa di operare magie. Vuole più modestamente proporre un panorama di citazioni e riferimenti, come già descritti. E come già anticipato si concentra sull'aritmetica, perché, se si allargasse ad altre discipline matematiche, a cominciare dalla geometria, rischierebbe di diventare troppo lunga e pesante, e al tempo stesso troppo frettolosa. Del resto, numeri e operazioni costituiscono già un argomento di primissimo ordine e un buon terreno su cui sviluppare i nostri propositi. Li affrontiamo allora, parlando dei numeri naturali, a partire dall'enigmatico e utilissimo zero (§ 2), della loro fondamentale rappresentazione decimale (§ 3) e delle loro operazioni elementari di addizione, moltiplicazione, sottrazione e divisione (§ 4). Proseguiamo con qualche rapido accenno al ruolo benemerito che, perfino in aritmetica, viene svolto dagli errori, ma anche alla necessità di abituarsi ad evitarli (§§ 5 e 6). Dopo di che, ci accomiatiamo con alcune citazioni e considerazioni finali (§ 7).

Ci rendiamo conto che la fascia temporale di istruzione cui ci rivolgiamo, estendendosi sostanzialmente dai 6 ai 14 anni, è ampia, variegata e delicata. Però oscilliamo al suo interno con una certa disinvoltura (forse dovremmo dire temerarietà), proponendo citazioni talora più adatte alla scuola primaria, e talaltra più attinenti alla secondaria di primo grado. Speriamo di fornire comunque spunti utili e, seppur disparati, gradevoli da leggersi. Abbiamo preferito seguire stavolta il filo della fantasia, libera da troppe regole. Confidiamo però in un prossimo futuro di ritornare sull'argomento in termini più sistematici e propositivi.

Un'ultima avvertenza: nelle poesie richiamate qui sotto, per motivi di spazio separiamo i versi con una doppia sbarra // anziché andare a capo.

2. Numeri

Come annunciato, partiamo dai numeri così detti *naturali*, quelli con cui sin da piccoli impariamo a contare e calcolare. Le poesie che li riguardano vantano illustrissimi esempi già nei tempi passati, a cominciare dalle opere di Gianni Rodari (1920-1980) dedicate proprio ai ragazzi. L'autore non ha certo bisogno di presentazione: ha innovato largamente la letteratura di infanzia e adolescenza col suo originalissimo stile, e si è così meritato riconoscimenti di grande prestigio, tra cui un Premio Andersen 1970. Vediamo allora come i concetti fondamentali degli assiomi di Peano, cioè 0 e *successore* (la funzione che aggiunge 1), sono da lui descritti in due poesie.

Semmai, sarà opportuno ricordare che, nel modo elaborato nel 1889 da Giuseppe Peano (1858-1923), i numeri naturali sono caratterizzati nei termini, appunto, dell'elemento 0 e della funzione successore tramite i seguenti assiomi: la funzione successore è iniettiva, nessun numero ha successore 0 e, soprattutto, il *principio di induzione*, secondo cui un insieme di naturali che include 0 e si preserva per la funzione successore (nel senso che, se un numero gli appartiene, tanto fa anche il suo successore) coincide con la totalità di tutti i numeri naturali – come dire, in termini grossolani, che a partire da 0, e a forza di aggiungere 1, prima o poi si ottengono tutti i numeri naturali. Sul principio di induzione, sulla sua storia e sulle sue problematiche nella didattica, rimandiamo volentieri i lettori a [FTV].

Un'altra questione su cui è il caso di soffermarsi preliminarmente, in apparenza soltanto una pignoleria, riguarda il numero 0. È un dato di fatto che, nella formulazione originaria di Peano [Pe], i numeri naturali partono da 1 e non da 0, che invece è messo da parte. In effetti, una tale dimenticanza sembra alimentare il pregiudizio largamente diffuso, ma errato e grossolano, secondo cui 0 è insignificante, anzi non è neppure un numero, così che è lecito ignorarlo. In verità nell'approccio di Peano scegliere 1 invece che 0, o viceversa, come base di partenza dei numeri naturali è del tutto irrilevante, tant'è che oggi si preferisce muovere dal secondo.

Infatti, la storia stessa della matematica, ben prima di Peano, ci testimonia l'importanza di 0. Il quale, come numero, ci arriva nel Medio Evo, dagli arabi e prima ancora dagli indiani, grazie a Leonardo Fibonacci, e diviene rapidamente uno dei cardini della matematica, al pari di numeri famosi quali come 1, l'unità immaginaria i e i numeri irrazionali π ed e – basterà ricordare qui la famosa eguaglianza di Eulero $e^{i\pi} + 1 = 0$, che li coinvolge tutti. Una delle principali benemerenze di 0 riguarda la notazione posizionale con cui i numeri naturali sono oggi comunemente espressi, trasmessaci appunto dalle culture indiana e araba e da Fibonacci. Il ruolo di zero traspare allora chiaramente, perché i numeri 1, 10, 100, un milione, un miliardo di miliardi sono evidentemente diversi tra loro, ma la differenza consiste solo di una serie di 0, quelli che si aggiungono alla destra di 1 per rappresentarli.

La poesia di Rodari illustra questa proprietà usando i termini di una favola. Ha come titolo *Il trionfo dello zero*. Fa parte della raccolta *Filastrocche in cielo e terra* del 1960 [Ro1].

C'era una volta // un povero Zero // tondo come un O, // tanto buono ma però // contava proprio zero // e nessuno lo voleva in compagnia // per non buttarsi via. // Una volta per caso // trovò il numero Uno // di cattivo umore perché // non riusciva a contare // fino a tre. // Vedendolo così nero // il piccolo Zero // si fece coraggio, // sulla sua macchina // gli offerse un passaggio, // e schiacciò l'acceleratore, // fiero assai dell'onore // di avere a bordo // un simile personaggio. // D'un tratto chi si vede // fermo sul marciapiede? // Il signor Tre che si leva il cappello // e fa un inchino // fino al tombino… // e poi, per Giove // il Sette, l'Otto e il Nove // che fanno lo stesso. // Ma cosa era successo? // Che l'Uno e lo Zero // seduti vicini, // uno qua l'altro là // formavano un gran Dieci: // nientemeno, un'autorità! // Da quel giorno lo Zero // fu molto rispettato, // anzi da tutti i numeri // ricercato e corteggiato: // gli cedevano la destra // con zelo e premura, // (di tenerlo a sinistra // avevano paura), // lo invitavano a cena, // gli pagavano il cinemà, // per il piccolo Zero // fu la felicità.

Passiamo al successore. Gli assiomi di Peano a suo riguardo implicano facilmente che i numeri naturali sono infiniti. Ognuno di loro, infatti, ha un suo successore più "grande". La poesia di Rodari che ne tratta fu scritta nel 1962 e compare nella raccolta postuma *Il pianeta Accazeta* del 1989 [Ro4]. Titolo: *Più uno*.

C'era una volta un tale // che voleva trovare // il numero più grande del mondo.

Comincia a contare // e mai si stanca: // gli viene la barba grigia, // gli viene la barba bianca, // ma lui conta, conta sempre // milioni di milioni // di miliardi di miliardi // di strabilioni // di meraviglioni // di meravigliardi… // In punto di morte scrisse un numero // lungo dalla Terra a Nettuno. // Ma un bimbo gridò: "Più uno!".

E il grande calcolatore // ammise, un poco triste, // che il numero più grande // del mondo non esiste!

Nel caso dello zero, Rodari riprende in verità un'idea ricorrente in letteratura, presente in autori illustrissimi e lontani dalla matematica: che gli 0 con una cifra davanti accrescano il prestigio proprio e di chi li accompagna è sottolineato pure da Trilussa (Carlo Alberto Salustri, 1871-1950) nella celebre poesia *Nummeri* del 1944 – in verità destinata più ad adulti raziocinanti e smaliziati che a giovanissimi, perché contenente chiari riferimenti politici all'Italia di allora, e non solo all'Italia di allora. La poesia fa parte della raccolta *Acqua e vino*. La riportiamo qui, estraendola da [Tr], volume secondo, pagina 277.

- *Conterò poco, è vero: // - diceva l'Uno ar Zero - // ma tu che vali? Gnente: propio gnente. // Sia ne l'azzione come ner pensiero // rimani un coso vôto e inconcrudente. // Io, invece, si me metto a capofila // de cinque zeri tale e quale a te, // lo sai quanto divento? Centomila. // È questione de nummeri. A un dipresso // è quello che succede ar dittatore // che cresce de potenza e de valore // più so' li zeri che je vanno appresso.*

La progressiva coscienza del ruolo capitale di 0 nella rappresentazione decimale e la conseguente determinazione di accoglierlo a pieno titolo tra i numeri naturali, addirittura come loro fondamento, sono opportunamente sottolineate pure dal *Mago dei numeri*, che le tratta nel capitolo 2, *La seconda notte*. Di fronte allo scetticismo del ragazzo, secondo cui lo 0 è "niente e basta", il diavoletto ne ribadisce al contrario il valore. Anzitutto nella sottrazione, come risultato di 1 – 1. Poi appunto, e soprattutto, nella notazione decimale. Lo zero 0 è descritto come "l'ultima cifra che è venuta in mente all'uomo" ma, forse proprio per questo, anche la più raffinata. Il mago conclude con un'ulteriore osservazione, che riprende il discorso di Trilussa, ma lo esprime in modo abbastanza nebuloso: "zero ha questo di bello, che sai subito quanto vale un numero: più sta davanti, più vale, più sta in fondo, meno vale".

La storia della 0 è raccontata anche da Anna Cerasoli nelle prime pagine di [Ce1]. Il nonno professore osserva come i numeri servano in genere a indicare le quantità, e non l'assenza di quantità. Perché allora prevedere un simbolo per significare il vuoto e il nulla? Le ragioni addotte come risposta sono le stesse già ascoltate. Si dà in particolare a 0 il merito di averci liberato da abachi, pallottolieri e antiche pratiche di numerazione, consentendo la più snella notazione posizionale. Si spiega poi il suo stesso nome, derivante dall'arabo *sifr* e divenuto in italiano, per assonanza, *zefiro* o, in forma contratta, *zero*.

Allo stesso modo, il "più uno!", cioè la constatazione che ogni numero naturale ha sempre un suo successore, e perciò non esiste un massimo numero, compare in un famoso racconto di Cesare Zavattini, nel capitolo sedicesimo del libro intitolato *Parliamo tanto di me* [Za]. Vi si immagina un concorso di aritmetica, in cui vince chi, come il vecchio calcolatore di Rodari, riesce a pronunciare il numero più grande. A riferire i dettagli della competizione è un bambino, il cui padre è tra i concorrenti. Ecco un estratto della prestazione del genitore.

Mio padre […] cominciò: 'Un miliardo di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi...'.

La folla delirava: 'Evviva, evviva.' […]

Mio padre seguitava fieramente:

'...di miliardi di miliardi di miliardi di miliardi.' A poco a poco la sua voce si smorzò, l'ultimo fievole di miliardi gli uscì dalle labbra come un sospiro, indi si abbatté sfinito sulla sedia. Gli spettatori, in piedi, lo acclamarono freneticamente. Il principe Ottone gli si avvicinò, e stava per appuntargli la medaglia sul petto, quando Gianni Binacchi urlò:

'Più uno!'

La folla precipitatasi nell'emiciclo portò in trionfo Gianni Binacchi. Quando tornammo a casa, mia madre ci aspettava ansiosa sulla porta. Pioveva. Il babbo, appena sceso dalla diligenza, le si gettò tra le braccia singhiozzando: 'Se avessi detto più due avrei vinto io.'

A spiegare che non c'è un ultimo numero naturale provvede naturalmente anche il mago di Enzensberger, nel capitolo iniziale del libro, *La prima notte*. Per convincere il suo ascoltatore, il diavoletto si affida stavolta ai chewing gum e chiede al ragazzo quanti, a parer suo, ne sono stati masticati nella storia dell'umanità. "Saranno miliardi" è la risposta, cui il mago ribatte:

Allora immaginiamo di essere arrivati all'ultimissimo chewing gum. Poi cosa faccio? Dalla tasca ne prendo un altro, e già abbiamo il numero di tutti i chewing gum più uno: il numero successivo. Hai capito? Non devo mica contarli, i chewing gum. Ti sto solo dicendo come andare avanti. Non c'è bisogno di altro.

Appunto, vale tra i numeri naturali il principio di induzione, che forse si applica davvero perfino ai chewing gum, basta assumere che il mondo sia eterno, così come la voglia di produrli e masticarli.

L'argomento è considerato pure da Anna Cerasoli. Il protagonista di *Io conto* [Ce2] premette di saper già che i numeri naturali sono infiniti "perché puoi sempre aggiungere 1 e andare avanti senza fermarti mai". Sembra poi accennare al racconto di Zavattini quando aggiunge: "anche se tu ti sei sgolato a contare, può continuare un'altra persona e poi un'altra e un'altra ancora…".

Da 0, grazie al "più uno!" si ottengono gli altri numeri naturali nel loro ordine abituale, 1, 2, eccetera, come di seguito illustrato.

1 è il sole che splende di giorno. // 2 sono gli occhi che guardano intorno. // 3 sono i magi che vanno, che vanno. // 4 stagioni formano un anno. // In una mano ci son 5 dita. 6 son le zampe che ha una formica. // L'arcobaleno ha 7 colori; // ha 7 stelle l'Orsa Maggiore. // La settimana ha 7 giornate. // Con 8 zampe, se voi le contate, // si muove il ragno nella sua ragnatela. // 9 pianeti girano in cielo. // Due mani insieme fan 10 dita. // 11 e 11 fan la partita. // 12 mesi formano un anno; // conta e riconta fino a un altr'anno.

E con 12 la lista si chiude, perché tanti sono i mesi dell'anno, cui la filastrocca fa riferimento. Esistono però sue varianti che si arrestano prima di 12. A prescindere dalla soglia raggiunta, i versi appena proposti forniscono un ottimo esempio di quella didattica in poesia cui accennavamo all'inizio. In effetti li troviamo all'interno di un programma di laboratori didattici dedicati alla matematica del primo ciclo e curati da Silvia Sbaragli e dai suoi collaboratori [DSF]. Ci sono piaciuti per la loro spontaneità e la loro vivacità, e per questo siamo contenti di inserirli nella nostra rassegna.

3. La rappresentazione decimale

Sin dai tempi antichi, da quando i numeri furono "inventati", i sassolini aiutano a contarli. Gli abachi e i pallottolieri, cui abbiamo già accennato e che sono ancor oggi in uso, si basano sullo stesso elementare principio: ogni pallina corrisponde a un'unità. Del resto, perfino la parola *calcolo* deriva etimologicamente dal latino *calculus*, che significa appunto sassolino, pietruzza. Alternativamente i numeri si possono associare alle pecore di un gregge – magari come rimedio contro l'insonnia. Tutti questi approcci sono ricordati in forma semplice e divertente da [Ce3]. Ma alla pratica di impiegare i sassolini per contare si riferisce pure Giacomo Leopardi (1798-1837) quando, nello *Zibaldone* [Le], conferma lui pure i vantaggi di esprimere i numeri in base 10, o con analoghe procedure. Il passo relativo è del 28 novembre 1820.

Immaginatevi di contare trenta o quaranta pietre, senz'avere una denominazione da dare a ciascheduna, vale a dire, una, due, tre, fino all'ultima denominazione, cioè trenta o quaranta […]. Voi nel detto caso, non mi saprete dire, né concepirete in alcun modo […] la quantità delle dette pietre.

E ancora, a distanza di pochi mesi, in data 18 marzo 1821:

Che sarebbe l'aritmetica se ogni numero si dovesse significare con cifra diversa, e non colla diversa composizione di pochi elementi?

Ora, Leopardi non è certo autore adatto al primo ciclo di istruzione. E tuttavia cominciare a presentarlo ai ragazzi delle secondarie non è del tutto fuori luogo, tanto più che le considerazioni da lui esposte in questa occasione sono semplici, utili e accessibili. Si riferiscono al linguaggio più che alla matematica e sottolineano la semplicità e l'ingegnosità di suddividere i numeri naturali secondo unità, decine, centinaia e così via. In questo modo, pochi semplici principi permettono non solo di rappresentare, ma anche di nominare ogni numero. La babele che si produrrebbe se, al contrario, i numeri si battezzassero senza regola o con regole meno efficaci è ben descritta da un altro autore "serio", Jorge Luis Borges (1899-1986), in uno dei suoi racconti più suggestivi: *Funes o della memoria*, dalla raccolta *Finzioni* del 1944. Lo si trova in [Bo], primo volume, alle pagine 707-715. Il protagonista Funes è un giovane rimasto completamente paralizzato dopo un incidente. Persa ogni abilità motoria, può tuttavia esercitare ancora la mente e la memoria, che diviene affinatissima. Così Funes, ribellandosi all'idea di catalogare i numeri col rigido e onnicomprensivo sistema decimale, decide di assegnare a ognuno di loro, liberamente, un nome di fantasia.

Il primo stimolo, credo, gli venne dallo scontento che per il 33 in cifre arabe ci volessero due segni e due parole, in luogo d'una sola parola e un solo segno. Applicò subito questo stravagante principio agli altri numeri. In luogo di settemilatredici diceva (per esempio) «Máximo Perez»; in luogo di settemilaquattordici, «La Ferrovia». […] Cercai di spiegargli che questa rapsodia di voci sconnesse era precisamente il contrario di un sistema di numerazione. Gli feci osservare che dire 365 è dire tre centinaia, sei decine, cinque unità. […] Funes non mi sentì o non volle sentirmi.

Non certo l'intero racconto, ma questa sua breve citazione ci pare proponibile agli ultimi anni del primo ciclo, per destare ancor più il loro interesse su questo argomento.

4. Operazioni

Dopo i numeri arrivano le operazioni. Per trattarle, ci affidiamo a un altro autore celebre e "serio" ed a due suoi romanzi, comunemente ritenuti classici della letteratura per l'adolescenza: rispettivamente a Charles Dogdson, alias Lewis Carroll (1832-1898), e ad *Alice nel paese delle meraviglie* e *Attraverso lo specchio* (tra l'altro citati, almeno il primo, da [En]). Per entrambi facciamo riferimento all'edizione annotata da Martin Gardner (1914-2010), grandissimo divulgatore di matematica. Seguiamo la traduzione italiana di Masolino D'Amico in [Car], discostandocene talora minimamente per i motivi che spiegheremo. La giovane protagonista Alice si trova talora ad affrontare, durante le sue fantastiche avventure, pure i calcoli aritmetici. Come quando, nel capitolo nono del secondo dei due libri, è chiamata a sostenere l'esame per diventare regina. La commissione è composta da due Regine "vere", la Bianca e la Rossa. Ecco parte del relativo colloquio.

«Le sai fare le Addizioni?» chiese la Regina Bianca. «Quanto fa uno più uno più uno più uno più uno più uno più uno più uno più uno più uno?»

«Non so» disse Alice. «Ho perso il conto.»

«Le addizioni non le sa fare» l'interruppe la Regina Rossa. «Sai fare le Sottrazioni? Quanto fa otto meno nove?»

«Otto meno nove non lo posso fare» replicò pronta Alice. «Ma…»

«Non sa fare le Sottrazioni» disse la Regina Bianca. «Sai fare le Divisioni? Una pagnotta divisa con un coltello… che risultato dà?»

«Credo…» stava cominciando Alice, ma la Regina Rossa rispose per lei. «Pane e burro, naturalmente.»

Seguono altre sottrazioni surreali, su cui non ci soffermiamo.

Del resto, delle quattro operazioni dell'aritmetica Alice si era già occupata nel primo romanzo *Nel paese delle meraviglie*, ancora nel capitolo nono, dialogando con la Finta Tartaruga e col Grifone. Presentiamo qui il relativo estratto, con un paio di variazioni rispetto alla traduzione sopra menzionata. La prima riguarda le battute iniziali, dove, con uno dei suoi frequenti giochi di parole, Carroll sostituisce *leggere e scrivere*, *reading and writing* in inglese, con *reeling and writhing*, cioè, letteralmente, *annaspare e contorcersi*. Proviamo a riprodurre in italiano lo stesso effetto con i verbi *reggere* e *stridere*. Subito dopo, quando i nomi delle operazioni vengono volutamente deformati da Carroll, *multiplication* diventa *uglification*, cioè *abbruttimento*, e subito dopo al verbo *to uglify*, *abbruttire*, si contrappone *to beautify*, *abbellire*, cerchiamo di riprodurre un analogo gioco verbale in italiano, affidandoci alle parole *mortificazione* e *gratificazione* e intendendo la seconda come il contrario della prima.

«Cos'hai studiato?» domandò Alice.

«Reggere e stridere, naturalmente, per cominciare» rispose la Finta Tartaruga; «e poi le varie branche dell'Aritmetica: Ambizione, Contrazione, Mortificazione e Derisione.»

«Non ho mai sentito parlare della 'Mortificazione': che cos'è?» si azzardò a chiedere Alice.

Il Grifone alzò entrambe le zampe in un gesto di sorpresa: «Come, non hai mai sentito parlare di Mortificazione!» esclamò. «Cos'è la Gratificazione lo saprai, no?»

«Sì,» disse Alice in tono di dubbio. «vuole dire… fare… le cose… più graziose.»

«Beh, allora,» proseguì il Grifone «se non sai cos'è la Mortificazione, vuol dire che sei proprio un'ignorante!»

In realtà, che Alice palesi qualche disagio con la moltiplicazione, era apparso chiaro sin dall'inizio del romanzo. Nel secondo capitolo, la bambina, precipitata nel nuovo mondo, si accorge che le sue dimensioni si sono alterate e deformate, e ne resta disorientata. Cerca allora di recuperare equilibrio e senso delle proporzioni poggiandosi sui solidi fondamenti dell'aritmetica, ma senza successo.

[Alice] si mise a passare mentalmente in rassegna tutte le bambine della sua età che conosceva, per vedere se per caso si fosse mutata in una di loro.

«Di certo non sono Ada,» disse «lei è tutta boccoli, e io non ne ho affatto; e di certo non sono Mabel, perché io so un sacco di cose, e lei ne sa tanto poche! E poi, lei è lei e io sono io, e… povera me, che rompicapo! Controlliamo un po' se so ancora tutte le cose che sapevo. Vediamo: quattro per cinque fa dodici, e quattro per sei fa tredici, e quattro per sette… povera me! In questo modo a venti non ci arriverò mai! Va bene, la Tavola Pitagorica non fa testo; proviamo la geografia: Londra è la capitale di Parigi, Parigi è la capitale di Roma e Roma… no, è tutto sbagliato, ne sono sicura! Mi hanno scambiata con Mabel!»

I risultati delle moltiplicazioni di Alice evidentemente non tornano, ma la loro apparente stramberia nasconde con tutta probabilità una delle sottigliezze tipiche dello spirito dell'autore, e nella fattispecie sembra collegarsi alle relazioni di congruenza tra i numeri interi. Rivolgendoci a lettori matematici, ci permettiamo qualche maggiore particolare in proposito – forse non del tutto inaccessibile ai ragazzi della scuola media. Seguiamo in realtà il commento di Martin Gardner in [Car].

Dunque, si comincia con 4×5 che di per sé farebbe non 12 ma 20; quest'ultimo coincide però con 12 modulo 8, cioè differisce da 12 per un multiplo di 8, anzi proprio di 8, $4 \times 5 = 12 + 8$. Allo stesso modo 4×6 coincide con 13 modulo 11, anzi $4 \times 6 = 24 = 13 + 11$. Alice si ferma al caso successivo di 4×7, che viene lasciato in sospeso – ma non è troppo difficile verificare che il risultato eguaglia 14 modulo 14, poiché $4 \times 7 = 28 = 14 + 14$.

Ricapitolando: i prodotti 4×5, 4×6, 4×7 coincidono con i numeri consecutivi 12, 13, 14 a meno di una differenza che parte da 8 e aumenta ogni volta di 3, da 8 a 11 = 8 + 3 e 14 = 8 + 6.

In effetti, c'è un semplice procedimento che genera successivamente tutte queste uguaglianze a partire dalla prima: ogni volta $4 \times (n + 1)$ coincide ovviamente con la somma del precedente prodotto $4 \times n$ con 4, e questo 4 addizionale si può rappresentare come 1 + 3, dove il primo addendo 1 incrementa il risultato a meno di congruenze (da 12 a 13, 14 e oltre) mentre l'addendo 3 aumenta l'errore della differenza (da 8 a 11, 14 eccetera).

In questa maniera si può prevedere e, volendo, verificare che, sette passi dopo quello iniziale (cioè quello di 4×5 che è 12 modulo 8), il risultato di 4×12 è 19, a meno di un errore pari a $8 + 3 \times 7$; infatti $4 \times 12 = 48 = 19 + 29 = 19 + 8 + 3 \times 7$. Allo stesso modo, nel passo successivo, il valore 20 si ottiene come $4 \times 13 = 52 = 20 + 32 = 20 + 8 + 3 \times 8$.

Troppo difficile per i ragazzi? Chissà. In ogni caso, sorprende nel romanzo la conclusione scoraggiata di Alice, che può ben ritenersi una di loro: "In questo modo, a venti non ci arriverò mai!". A 20, infatti, sembra proprio che si arrivi. Tuttavia, conoscendo Carroll, è facile congetturare che pure la battuta della ragazzina nasconda qualche sottinteso. La questione è stata affrontata, con vari tentativi di spiegazione, di cui dà ancora resoconto Gardner. Probabilmente la più verosimile è proprio la sua, basata sull'accenno di Alice alle tabelline pitagoriche. Queste hanno tradizionalmente dimensioni al più uguali a 12, e dunque si fermano prima di quel 13 che è invece necessario per ottenere 20.

In conclusione, si deve forse concedere che i romanzi di Alice non sono molto adatti a bambini e neppure a ragazzi: troppi giochi verbali, troppi funambolismi logici e numerici. Ma pure Martin Gardner obietta (nella nota 17 a pagina 128 di [Car]) che i giovanissimi amano i giochi di parole, e diremmo anche doppi sensi e nonsenso.

Per le operazioni aritmetiche cerchiamo comunque un altro riferimento più semplice, e magari altrettanto divertente. A fornircelo è il romanzo *Un albero cresce a Brooklyn* di Betty Smith (pseudonimo di Elisabeth Wehner, 1895-1972). Il libro, parzialmente autobiografico, è del 1943. Raccontando la storia della protagonista, la giovane Francie, l'autrice descrive le difficoltà della vita degli immigrati nei suburbi della New York di quell'epoca. Nel capitolo XXII il libro presenta un esempio simpatico della pratica di *storytelling* di cui si diceva poco fa. A idearla è proprio Francie, che la applica all'addizione – ma ci sembra che l'idea funzioni altrettanto bene per ogni altra operazione e anzi per ogni numero.

Le piacevano i numeri e le somme. Inventò un gioco in cui ogni numero era un membro di una famiglia e la "risposta" creava un raggruppamento familiare con una storia. Zero era un neonato in braccio. Non dava problemi. Ogni volta che appariva, lo "portavi" in braccio e basta. Il numero 1 era una graziosa bambina che stava imparando a camminare, ed era facile da gestire; 2 era un bambino che sapeva camminare e parlare un po'. Entrava nella vita familiare (nelle somme, ecc.) senza dare grandi preoccupazioni. E 3 era un ragazzo più grande all'asilo, che doveva essere sorvegliato un po'. Poi c'era 4, una ragazzina dell'età di Francie. Era facile da "badare", quasi come 2. La madre era 5, gentile e premurosa. Nelle grandi somme arrivava e rendeva tutto facile come dovrebbe fare una mamma. Il padre, 6, era più duro degli altri ma molto giusto. Ma 7 era cattivo. Era un vecchio nonno scontroso, per niente responsabile delle sue sortite. Anche la nonna, 8, era brusca, ma più facile da *capire di 7. Il più difficile di tutti era 9. Rappresentava un ospite, e che fatica accordarlo con la vita familiare!*

Quando Francie calcolava una somma, inventava una storiella da abbinare al risultato. Se la risposta era 924, significava che il bambino e la bambina erano sorvegliati dall'ospite mentre il resto della famiglia usciva. Quando appariva un numero come 1024, significava che i bambini stavano giocando tutti insieme in giardino. Il numero 62 significava che papà stava portando a spasso il bambino piccolo; 50 significava che la mamma aveva portato il bebé nel passeggino per fargli prendere un po' d'aria e 78 significava che nonno e nonna erano seduti a casa accanto al fuoco in una sera d'inverno. Ogni singola combinazione di numeri era una nuova situazione per la famiglia e non c'erano mai due storie uguali.

[…] Quindi l'aritmetica era una cosa calda e umana per Francie e occupava molte ore solitarie del suo tempo.

Nella scuola della realtà, però, talora prevalgono, o per lo meno prevalevano, altri calcoli coi numeri, diversi dalle fantasie di Francie e ben più drammatici: quelli legati ai voti da 1 a 10, che ci sono ben rappresentati da un'altra filastrocca di Gianni Rodari, *Tragedia di un Dieci*, tratta stavolta dalla raccolta del 1980 *Filastrocche per tutto l'anno* [Ro3].

Fuggiva un giorno un Dieci // pieno di trepidazione, // inseguito da un nemico // mortale: la Sottrazione!

Il poverino è raggiunto, // crudelmente mutilato:// ben due unità ha perduto, // un Otto è diventato.

Dalla padella cascando // nella brace, ecco qua, // incappa nella Divisione // che lo taglia a metà.

Ora è un misero Quattro, // mal visto dagli scolari. // – Consolati, – gli dicono // – sei sempre un numero pari…

– C'è poco da consolarsi // la mia sorte è ben dura. // O incontro un'Addizione // o sarà… la bocciatura.

5. La pagella

I voti, 10 e 4 compresi, confluiscono poi, o confluivano, nella cosiddetta pagella. Per ricordarla ci affidiamo ancora a Gianni Nodari e alla sua poesia *Lamento decimale* [Ro3]. In verità i suoi versi appaiono stavolta un po' fuori tema, perché sconfinano al di fuori dei numeri naturali, tra i decimali; ma a noi interessano soprattutto per la strofa finale, che si applica altrettanto bene a ogni categoria di numeri, e a ogni materia scolastica oltre che alla matematica.

A destra della virgola, // cagion dei nostri mali, // noi siamo, ahi tristi, ahi misere, // le cifre decimali.

Numeri? Noi siam polvere! // Se in mille ci mettiamo // una sull'altra, è inutile, // l'unità non tocchiamo.

Della tribù aritmetica, // sì numerosa e varia, //siam certo i più poveri, // trattati come paria.

Centinaia, Decine // ci tengono a distanza: – Quelli? Rottami, briciole, // cocci, roba che avanza...

Se uno scolar pietoso // la virgola cancella // salva noi, però in cambio // si gioca la pagella.

Si sottolineano così, insieme alle difficoltà dei ragazzi di fronte alle complicazioni dei numeri con la virgola, pure gli incubi di voti e pagelle. Per fortuna i tempi sono mutati da quando questa poesia fu scritta: adesso le pagelle si chiamano schede di valutazione, e i freddi voti si vanno trasformando in giudizi. Inoltre, gli errori, sulle virgole decimali e altrove, sono ammessi e quasi benedetti, perché aiutano a capire. Come afferma lo stesso Rodari nella pagina introduttiva, *Tra noi padri*, del suo *Libro degli errori* del 1964 [Ro2], "sono necessari, utili come il pane e spesso anche belli: per esempio la torre di Pisa".

A proposito di operazioni: nello stesso libro Rodari inserisce una pagina fine e spiritosa sull'aritmetica dell'eco, la quale a chi le chiede *"Quanto fa due per due?"* risponde due, ed a chi *"tre per tre"* risponde tre, e in genere, di ogni moltiplicazione, l'ultima cifra dell'ultimo fattore.

6. Errori ed eresie

Proponiamo, sempre per gioco, un altro esempio di aritmetica eterodossa e balzana. All'eco di Rodari aggiungiamo le pietre dispettose descritte da Borges nel racconto *Le tigri azzurre* [Bo]. Si tratta nuovamente di lettura oggettivamente impegnativa e inadatta al primo ciclo, ma la storia che viene narrata può meravigliare i ragazzi e indurli a pensare. Lo spunto è lo stesso di Leopardi: sassolini che aiutano a contare. Ma certi dischetti, di cui il protagonista del racconto viene in possesso, sfidano ogni rigida legge aritmetica e mutano continuamente la loro cardinalità.

Li raccolsi in un unico mucchio e tentai di contarli uno per uno.

La semplice operazione risultò impossibile. Guardavo fisso uno qualunque di essi, lo prendevo tra il pollice e l'indice, e quando era solo, erano molti.

Così "[l]o stesso anelito all'ordine che in principio creò la matematica" è sovvertito da questa "quell'aberrazione della matematica che sono le insensate pietre che generano". Il protagonista ne resta scoraggiato.

Nelle loro imprevedibili variazioni volli trovare una legge. Consacrai i giorni e le notti a fissare una statistica dei cambiamenti. […]

Il massimo dei pezzi che ottenni fu 419; il minimo, tre. […] Naturalmente le quattro operazioni di sommare, sottrarre, moltiplicare o dividere erano impossibili. Le pietre si sottraevano all'aritmetica e al calcolo delle probabilità.

Incontriamo così non più la legge stravagante dell'aritmetica dell'eco, ma l'assenza di ogni legge, e quindi di ogni aritmetica.

Torniamo adesso sul tema dell'errore. Errare è umano e addirittura istruttivo; ma perseverare è diabolico. Esattezza e verità vanno sempre ricercate, per quanto è possibile. Italo Calvino ci mette in guarda dai danni degli errori nel racconto del 1958 *La notte dei numeri* – nella prima parte, *Gli idilli difficili*, di [Cal], alle pagine 207-216. La storia è più accessibile della precedente di Borges. Narra di un ragazzo che aiuta la mamma nelle pulizie serali degli uffici di una ditta contabile; spolvera i tavoli e svuota i cestini; ma si aggira anche, estasiatao, nel mondo meraviglioso delle macchine calcolatrici. La descrizione di questi ambienti è ricca di riferimenti geometrici. L'aritmetica compare quando il ragazzo incontra un vecchio ragioniere ancora al lavoro. Questi gli confessa:

- *[…] Io non finirò mai.*
- *Che cosa?*
- *Di far tornare i conti.*
- *Non tornano?*
- *Mai.*

A conferma del suo assunto, il vecchio riveli gli effetti deleteri di uno sbaglio compiuto nel 1884 da un collega:

un errore, un grossolano errore di quattrocentodieci lire in una somma –. Al fondo della pagina la cifra della somma è contornata da un fregaccio a matita rossa. – Nessuno se n'è mai accorto, io solo lo so, e sei la prima persona cui lo dico: tientelo per te e non lo dimenticare! […] In tanti anni, quell'errore di quattrocentodieci lire sai *quant'è diventato? Miliardi! Miliardi! Hanno un bel girare le macchine calcolatrici, i cervelli elettronici e tutto il resto! L'errore è al fondo, al fondo di tutti i loro numeri, e cresce, cresce, cresce! […] La ditta è diventata grande, grandissima, rappresentanze estere a non finire, e tutti macinano soltanto cifre sbagliate, non c'è nulla di vero in nessuno dei loro conti. […] Tutte sbagliate, tutto il mondo si porta dietro quest'errore […]*

L'insegnamento è evidente: oggi come allora, con o senza macchine calcolatrici, cerchiamo sempre di fare le cose per bene e di evitare ogni sbaglio.

7. Commiato

Insomma, l'aritmetica continua oggi a restare un po' ostica, ma non così ostica come ai tempi di Calvino, Borges e Rodari, e neppure come in quelli, ancora precedenti, della poesia che segue. L'autore è francese, Jules Supervielle (1884-1960). Il titolo è *Mathématiques*, che traduciamo *Matematiche*. La raccolta da cui la poesia proviene si chiama *Gravitations*, *Gravitazioni*, e risale esattamente a un secolo fa, al 1925. I versi descrivono gli smarrimenti che la matematica di allora suscitava tra i bambini di una classe. Chissà se e quanto restano attuali. Lasciamo volentieri ai lettori di valutarlo. I numeri compaiono nell'ultima strofa.

Quaranta bambini in una stanza, // una lavagna e il suo triangolo, // un grande cerchio esitante e sordo // il suo centro batte come un tamburo.

Lettere senza parole né patria // in dolorosa attesa.

Il duro parapetto di un trapezio, // una voce che si alza e si calma // e il problema furioso // si dimena e si morde la coda.

La mascella di un angolo si apre. // È una cagna? // È una lupa?

E tutti i numeri della terra, // tutti questi insetti che distruggono // e ricostruiscono il loro formicaio // sotto gli occhi sbarrati dei ragazzi.

In effetti i versi appena letti sono più adatti agli adulti che ai ragazzi, ai docenti che ai discenti. La rivolgiamo appunti agli insegnanti, per ispirare qualche loro riflessione sul senso della scuola e magari il ricordo di quando la frequentavamo non in cattedra, ma dietro a un banco. Altrettanto può dirsi della poesia che segue, una delle più belle e famose di Rafael Alberti (1902-1999), spagnolo, pittore oltre che scrittore. Ha titolo *L'angelo dei numeri* ed è del 1929. L'angelo di cui ci parla è non un custode e protettore benefico, ma una creatura tragica, spersa e disillusa. Simbolizza l'animo del poeta che, con questi sentimenti, ripercorre i ricordi dell'infanzia perduta, della scuola, dei simboli aritmetici su una lavagna.

Vergini con squadre // e compassi, che vegliano // le lavagne del cielo.

E l'angelo dei numeri // che pensoso volava // dall'1 al 2, dal 2 // al 3, dal 3 al 4.

Gessi gelati e cimose // striavano e cancellavano // la luce degli spazi.

Né sole, luna o stelle, // né il repentino verde // del fulmine e del lampo, // né vento. Solo nebbia.

Vergini senza squadre, // senza compassi. In pianto.

E su morte lavagne, // l'angelo dei numeri // esanime, ravvolto nel sudario, // sopra l'1 e il 2, // sul 3, sul 4...

Le poesie di Supervielle e Alberti sono troppo tristi per concludere? Preferiamo allora accomiatarci col sorriso, affidandoci a Toti Scialoja (1914-1998), romano, lui pure pittore e poeta. Il suo libro *Amato topino caro* del 1971 [Sc] raccoglie 53 componimenti sugli animali, adattissimi ai ragazzi, per di più corredati di disegni dello stesso autore. Uno è dedicato al gatto e, in qualche modo all'aritmetica:

Uno due tre quattro // passa un gatto quatto quatto. // Quattro tre due uno // era un gatto di nessuno.

E, proprio come il gatto di Scialoia, anche noi silenziosamente ci congediamo.

Bibliografia

[Al] Rafael Alberti, *Degli angeli*, Einaudi, 1966

[Bo] Jorge Luis Borges, *Tutte le opere*, Meridiani Mondadori, 1984-85. Contiene *Finzioni*, Volume I, pp. 617-769, e *Tigri azzurre*, Volume II, pp. 1132-1143

[Cal] Italo Calvino, *I racconti*, Oscar Mondadori, 2024

[Car] Lewis Carroll, *Alice nel paese delle meraviglie. Attraverso lo specchio e quello che Alice vi trovò*, edizione annotata a cura di Martin Gardner, BUR Rizzoli, 2023

[Ce1] Anna Cerasoli, *I magnifici dieci. L'avventura di un bambino nella matematica*, Sperling & Kupfer, 2001

[Ce2] Anna Cerasoli, *Io conto*, Feltrinelli, 2010

[Ce3] Anna Cerasoli, *La grande invenzione di Bubal*, Emme edizioni, 2012

[DSF] Silvia Demartini – Silvia Sbaragli – Simone Fornara, Filastrocche numeriche, *Scuola dell'infanzia* 37, Giunti, 2024 https://www.giuntiscuola.it/riviste/scuola-dellinfanzia/scuola-dellinfanzia-37-marzo-2024

[En] Hans Magnus Enzensberger, *Il mago dei numeri*, Einaudi, 2014

[FTV] Antonio Fontana – Carlo Toffalori – Antonio Veredice, L'induzione matematica tra storia e didattica, *Nuova Secondaria* 5 (2023), pp. 61-82

[Le] Giacomo Leopardi, *Zibaldone di pensieri*, Einaudi, 2000

[Pe] Giuseppe Peano, *Arithmetices Principia Novo Methodo Exposita*, Bocca, 1889

[Ro1] Gianni Rodari, *Filastrocche in cielo e in terra*, Einaudi, 2011

[Ro2] Gianni Rodari, *Il libro degli errori*, Einaudi, 2011

[Ro3] Gianni Rodari, *Filastrocche per tutto l'anno*, Einaudi 2010

[Ro4] Gianni Rodari, *Il pianeta Accazeta*, Giunti, 2003

[Sc] Toti Scialoja, *Amato topino caro*, Bompiani, 1971

[Sm] Betty Smith, *Un albero cresce a Brooklyn*, BEAT, 2020

[Su] Jules Supervielle, *Gravitations*, Gallimard-NRF, 1925

[Tr] Trilussa, *Poesie scelte*, Oscar Mondadori, 1975

[Za] Cesare Zavattini, *Parliamo tanto di me*, Bompiani, 2016

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 6, No 1 (2023), 23 - 32

Come un numismatico antico. Sistemi di misura differenti, laboratorio interdisciplinare

Laura Tomassi[1] **Daniela Tossini**[2]

[1]Università degli Studi di Roma "Tor Vergata",
Dipartimento di Matematica,
Via della Ricerca Scientifica, 1, 00133, Roma, Italy
laura.tomassi1@gmail.com

[2]Università degli Studi di Roma "Tor Vergata",
Dipartimento di Matematica,
Via della Ricerca Scientifica, 1, 00133, Roma, Italy,
daniela.tossini@gmail.com

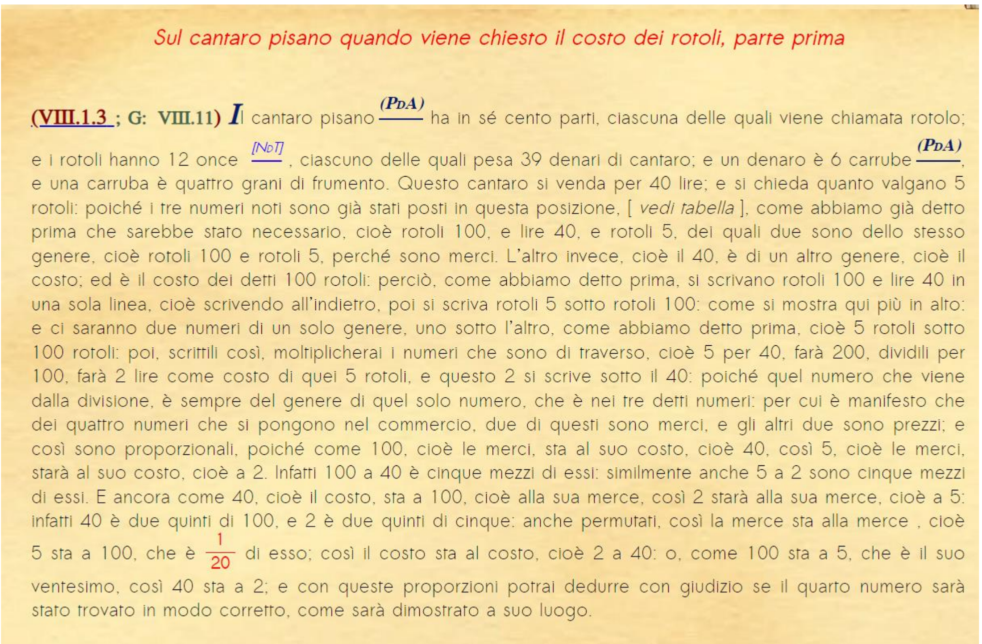
Sunto
Seguendo l'approccio della storia integrata nella didattica della matematica, abbiamo proposto a diverse classi IV della scuola primaria un lavoro interdisciplinare sulla tematica dei sistemi di unità di misura. In questo articolo riportiamo i risultati dell'attività laboratoriale, descrivendo il percorso svolto, i collegamenti storici e le riflessioni che tale lavoro ha portato con sé.
Abbiamo proposto agli alunni di riprodurre una moneta personalizzata, prendendo spunto da quelle in uso nel 1200 a Pisa, simulando tutti gli accorgimenti tecnologici e scientifici del tempo, ricavati dalla lettura del Liber Abbaci di Fibonacci.

Parole chiave: Didattica laboratoriale. Matematica. Storia nella didattica. Sistemi di unità di misura. Fonti storiche. Monete.

1. Introduzione

Seguendo la teoria dell'integrazione della storia nella didattica matematica (Barbin, 2022), "si riportano gli studenti all'origine delle cose" (Scoppola, 2022)**.**
Presentando agli studenti i sistemi di unità di misura non decimali presenti nel Medioevo, abbiamo sfruttato la tecnica del *dépaysement* (Barbin, 2020) per scardinare una serie di conoscenze, pregiudizi e misconoscenze quali quelli derivanti dall'esperienza di utilizzo quotidiano del sistema decimale, per presentare un argomento nella sua realtà storica (D'Amore, 2011; Hannula, 2018). Lo scopo è quello di trovare una strategia che permetta di rafforzare le conoscenze e le competenze legate al sistema di unità di misura conosciuto dagli studenti.
Il periodo prescelto è il Medioevo, perché in questo periodo furono introdotti gli stessi

strumenti matematici e scientifici che vengono proposti ai ragazzi delle ultime classi della scuola primaria. Si è partiti dalla lettura diretta di un passo tratto direttamente da una fonte storica del 1202, il *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano detto Fibonacci, (Catastini, 2023), tradotto dal latino (www.progettofibonacci.it). In particolare, ci si riferisce al Capitolo VIII dove vengono descritte le unità di misura commerciali del 1200 (Figure 1 e 2).


Sul cantaro pisano quando viene chiesto il costo dei rotoli, parte prima

(VIII.1.3 ; G: VIII.11) Il cantaro pisano (PdA) ha in sé cento parti, ciascuna delle quali viene chiamata rotolo; e i rotoli hanno 12 once [NdT], ciascuno delle quali pesa 39 denari di cantaro; e un denaro è 6 carrube (PdA), e una carruba è quattro grani di frumento. Questo cantaro si venda per 40 lire; e si chieda quanto valgano 5 rotoli: poiché i tre numeri noti sono già stati posti in questa posizione, [*vedi tabella*], come abbiamo già detto prima che sarebbe stato necessario, cioè rotoli 100, e lire 40, e rotoli 5, dei quali due sono dello stesso genere, cioè rotoli 100 e rotoli 5, perché sono merci. L'altro invece, cioè il 40, è di un altro genere, cioè il costo; ed è il costo dei detti 100 rotoli: perciò, come abbiamo detto prima, si scrivano rotoli 100 e lire 40 in una sola linea, cioè scrivendo all'indietro, poi si scriva rotoli 5 sotto rotoli 100: come si mostra qui più in alto: e ci saranno due numeri di un solo genere, uno sotto l'altro, come abbiamo detto prima, cioè 5 rotoli sotto 100 rotoli: poi, scrittili così, moltiplicherai i numeri che sono di traverso, cioè 5 per 40, farà 200, dividili per 100, farà 2 lire come costo di quei 5 rotoli, e questo 2 si scrive sotto il 40: poiché quel numero che viene dalla divisione, è sempre del genere di quel solo numero, che è nei tre detti numeri: per cui è manifesto che dei quattro numeri che si pongono nel commercio, due di questi sono merci, e gli altri due sono prezzi; e così sono proporzionali, poiché come 100, cioè le merci, sta al suo costo, cioè 40, così 5, cioè le merci, starà al suo costo, cioè a 2. Infatti 100 a 40 è cinque mezzi di essi: similmente anche 5 a 2 sono cinque mezzi di essi. E ancora come 40, cioè il costo, sta a 100, cioè alla sua merce, così 2 starà alla sua merce, cioè a 5: infatti 40 è due quinti di 100, e 2 è due quinti di cinque: anche permutati, così la merce sta alla merce , cioè 5 sta a 100, che è $\frac{1}{20}$ di esso; così il costo sta al costo, cioè 2 a 40: o, come 100 sta a 5, che è il suo ventesimo, così 40 sta a 2; e con queste proporzioni potrai dedurre con giudizio se il quarto numero sarà stato trovato in modo corretto, come sarà dimostrato a suo luogo.

Fig. 1 Descrizione unità di misura di peso del 1200, tratto da *Liber Abbaci* (*www.progettofibonacci.it*)

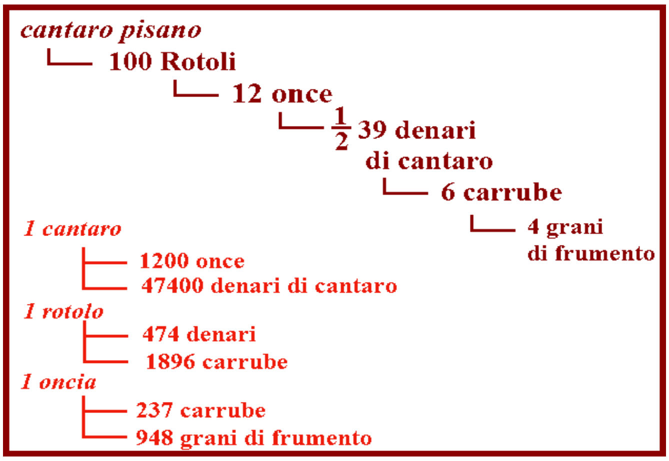


Fig. 2 Conversioni delle unità di misura, dal *Liber Abbaci* *www.progettofibonacci.it*).

2. Obiettivi didattici disciplinari

Nel progettare questo percorso didattico, abbiamo tenuto conto sia delle indicazioni nazionali per la scuola primaria che delle competenze europee.
Già nelle Indicazioni Nazionali si definisce l'ambiente di apprendimento, indicando che "Una buona scuola primaria e secondaria di primo grado si costituisce come un contesto idoneo a promuovere apprendimenti significativi e a garantire il successo formativo per tutti gli alunni."
I traguardi e obiettivi generali sono:
- Favorire l'esplorazione e la scoperta, al fine di promuovere il gusto per la ricerca di nuove conoscenze, incoraggiare l'apprendimento collaborativo.
- Realizzare attività didattiche in forma di laboratorio, per favorire l'operatività e allo stesso tempo il dialogo e la riflessione su quello che si fa.

Come già evidenziato nel 1971 da Maria Montessori (Montessori, 2013), che scriveva "Quando si affronta un argomento pratico, cioè un tema che ha attinenza alla realtà, occorre far convergere in esso diverse discipline.", l'argomento ha coinvolto numerose discipline, in particolare matematica, italiano e storia.
Più nello specifico, per quello che concerne la matematica:
- Passare da un'unità di misura a un'altra, limitatamente alle unità di uso più comune, anche nel contesto del sistema monetario.

Per quanto riguarda l'italiano:
– Interagire in modo collaborativo in una conversazione, in una discussione, in un dialogo su argomenti di esperienza diretta, formulando domande, dando risposte e fornendo spiegazioni ed esempi.
– Comprendere il tema e le informazioni essenziali di un'esposizione.
– Formulare domande precise e pertinenti di spiegazione e di approfondimento durante o dopo l'ascolto.
– Cogliere in una discussione le posizioni espresse dai compagni ed esprimere la propria opinione su un argomento in modo chiaro e pertinente.

Infine, la storia che si apre all'utilizzo di metodi, conoscenze, visioni, concettualizzazioni di altre discipline.
Gli intrecci disciplinari sono stati anche potenziati attraverso i temi proposti agli alunni, oltre che tramite l'uso delle fonti e la conoscenza del patrimonio culturale collegato con i temi affrontati.

3. Esperienza d'aula

L'esperienza didattica che presentiamo in questo lavoro si è svolta presso quattro classi di IV primaria di un Istituto Comprensivo di Roma. Gli alunni conoscono già il sistema delle unità di misura a base decimale. Attraverso l'utilizzo di una bilancia a due bracci abbiamo presentato agli alunni alcune problematiche della misura stessa. Uno dei punti focali è determinare se l'uso della storia, integrata nella didattica della matematica, possa indurre riflessioni sulle origini storiche dei sistemi di unità di misura. Un'ulteriore domanda è se, tornando a unità di misura antiche, si riesca a risolvere dei semplici problemi di proporzionalità in maniera intuitiva ed esperienziale. Un ultimo quesito è se l'idea di realizzare dei manufatti, ossia dei modelli di monete, possa coinvolgere gli studenti nella comprensione di problematiche legate al denaro e al suo valore.

Poiché queste classi non hanno ancora affrontato la storia Medioevale al momento del laboratorio, è stata fatta una breve introduzione storica per collocare sulla linea del tempo le attività, i nomi, gli avvenimenti. Il tutto viene realizzato "raccontando una storia", introducendo il personaggio di Leonardo Fibonacci, all'epoca soprannominato Bigollo, per il suo "divagare" con il pensiero, raccontando il suo soggiorno da giovinetto presso la città nordafricana di Bugia ed il suo ruolo nell'importare il sistema decimale posizionale, imparato dagli Arabi:

> *Quando mio padre fu nominato dalla patria pubblico scrivano nella dogana di Bugia per tutelare gli interessi dei mercanti pisani che vi affluivano, mi fece andare da lui, durante la mia fanciullezza, valutando l'utilità e il vantaggio futuro, e volle che mi fermassi lì per qualche tempo, per essere istruito nello studio dell'abbaco. Qui, introdotto nell'arte da uno straordinario insegnamento basato sulle nove figure degli Indiani mi piacque sopra ogni altra cosa, la conoscenza dell'arte e tanto compresi a suo riguardo che imparai con grande impegno e attraverso il contraddittorio delle dispute. qualunque cosa si studiasse di essa in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza con i loro diversi modi, luoghi di commercio in cui successivamente io mi recai spesso per affari. (www.progettofiboancci.it)*

La reazione degli studenti a questo "racconto" è stata di stupore "perché parlarne nell'ora di matematica?". La risposta a domande come questa ci ha permesso di spiegare agli alunni che gli strumenti matematici sono stati creati per rispondere a delle necessità della società in evoluzione.

Ci siamo poi concentrati sulle novità che il sistema decimale posizionale portava con sé al momento della sua introduzione.

La prima attività è stata evidenziare le differenze con i numeri romani, per sperimentare i limiti di questo sistema di numerazione, l'impossibilità di mettere i numeri in colonna, far capire l'utilità di introdurre un sistema posizionale, in particolare a base 10. Sono stati fatti fare ai ragazzi vari esempi, dettagliati in Figura 3.

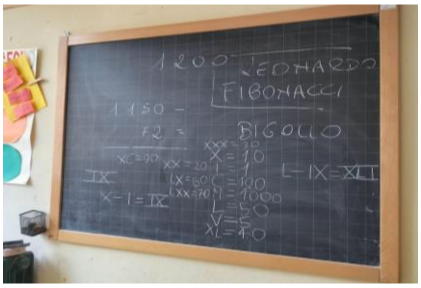


Fig. 3. Schema dei numeri a confronto: quello romano e quello arabo.

Questo argomento è servito a far capire come i commerci del Medioevo, con le somme di denaro e i carichi di merce che caratterizzavano il periodo della Rivoluzione Commerciale necessitavano di un sistema di numerazione rapido ed efficiente nei calcoli e di un sistema delle unità di misura che rappresentasse sia grandi quantità che quantità piccolissime, legate per esempio le une ai carichi di merce, l'altra ai metalli o alle gemme preziose.

Si è letto il passo riportato nella Figura 1 e si è ragionato su come le unità di misura di peso fossero legate strettamente alle merci sia nella descrizione, sia nell'etimologia. Per parlare delle misure fatte in campo commerciale si è utilizzato uno strumento che ha affascinato molto i ragazzi: la bilancia a due bracci, con unità di misura fatte di blocchetti di legno, Figura 4.

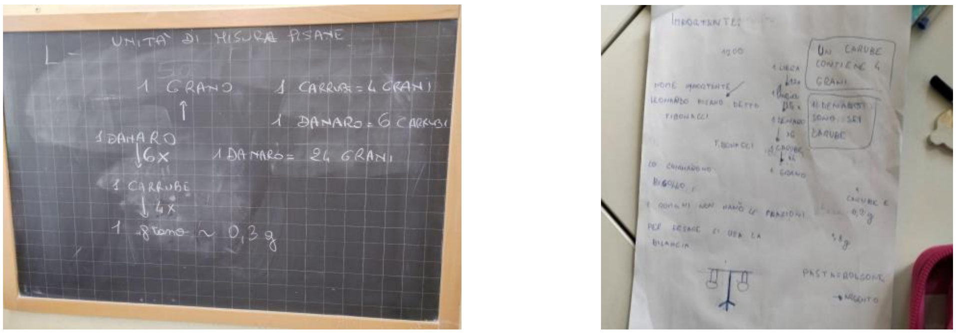


Fig. 4 a,b Appunti sulla lavagna e appunti sul quaderno di appunti dei giovani allievi.

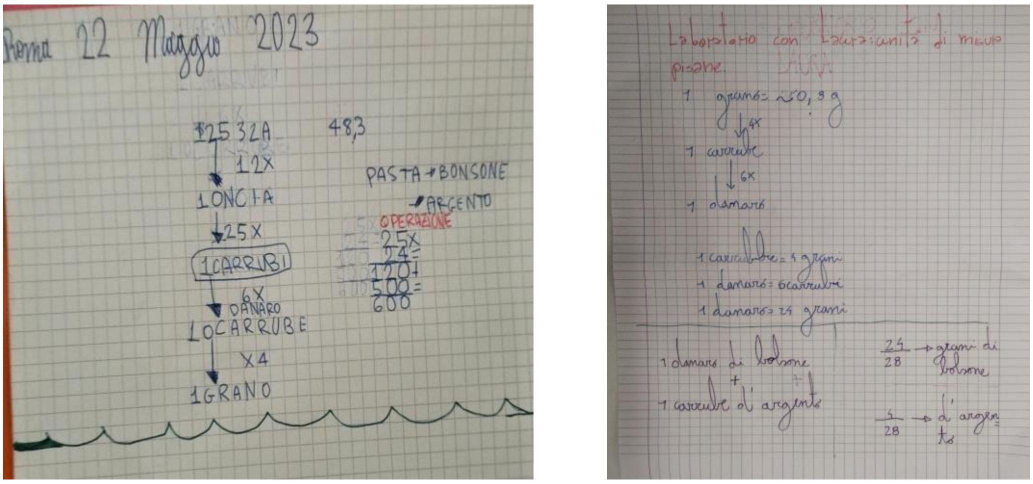


Fig. 5a,b Problemi di concentrazione di argento e lavoro di conversione tra unità di misura differenti.

Si è parlato poi della concentrazione di argento nel "bolsone", il metallo grezzo estratto dalle miniere ed utilizzato nel conio delle monete, Figura 5.
A questo punto, con le percentuali trovate, gli alunni hanno potuto riprodurre una moneta personalizzata, con la corretta percentuale in peso relativa al valore della moneta scelta come quelle in uso a Pisa nel 1200 (Baldassarri, 2010), seguendo tutti gli accorgimenti tecnologici e scientifici del tempo, ricavati dalla lettura del Liber Abbaci di Fibonacci (www.progettofibonacci.it). Sulla falsariga di quanto studiato per le monete, gli studenti hanno riprodotto una decorazione personalizzata, Figura 6, su supporti di alluminio che sono poi usati come stampo per la produzione della "moneta" (Barra, 1976; Capone, 2022).
Dopo che ogni alunno ha realizzato a sbalzo il suo stampo personalizzato, c'è stata la fase di reale realizzazione delle monete.

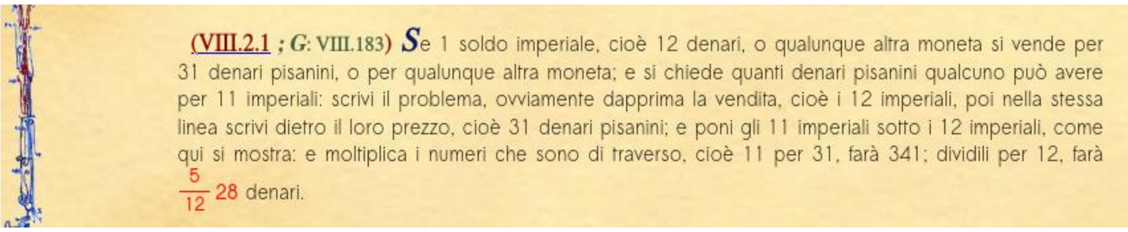
Fig.6a,b. Riproduzioni personalizzate su supporto di alluminio, come stampo per la moneta.

"Ma com'è fatta una moneta? com'è definito il suo valore?" Tali domande stimolo hanno permesso di introdurre il concetto del valore delle monete. Si è riflettuto sul fatto che nel passato il loro valore era legato alla quantità di argento presente, mentre oggi tale valore è nominale. Si è arrivati, quindi, a dover risolvere il problema di come determinare il titolo d'argento correttamente per realizzare la moneta.
E' stata quindi realizzata una attività con la bilancia a due bracci, rappresentando i pesi medievali con i mattoncini BAM: gli studenti hanno risolto semplici proporzioni, in maniera intuitiva (Tomassi, 2021; 2023) arrivando a realizzare le loro monete con un titolo "d'argento" definito. Nella creazione della moneta personalizzata è stata usata la plastilina per simulare il metallo grezzo e delle sfere argentate per rappresentare l'argento, Figura 7.

Fig. 7a,b,c Fasi della produzione della moneta

Il passo successivo è il calcolo del titolo d'argento da utilizzare per le diverse monete. Per effettuare questo calcolo ci siamo ancora una volta affidati alle tecniche del tempo, lavorando con sistemi matematici desunti dal lavoro di Fibonacci. Le grandezze su cui lavora Fibonacci sono di tipo diverso, ma molto frequenti sono i problemi in cui egli si occupa di prezzi della merce che variano in funzione delle unità di misura, problema molto importante per l'economia del tempo, quando vi erano molte unità di misura diverse in regioni anche contigue.

Altro tipo di problema affrontato è quello del cambio delle monete di diverso valore, per una ragione evidentemente analoga alla precedente; non ultimo quello relativo alla quantità di metallo prezioso presente nelle monete, una volta che se ne conosca la concentrazione. Ad esempio, riportato nella Figura 8, Fibonacci presenta un problema di conversione relativo al cambio tra soldi imperiali e denari pisanini tratto dal Liber Abaci.



(VIII.2.1 ; G: VIII.183) **S**e 1 soldo imperiale, cioè 12 denari, o qualunque altra moneta si vende per 31 denari pisanini, o per qualunque altra moneta; e si chiede quanti denari pisanini qualcuno può avere per 11 imperiali: scrivi il problema, ovviamente dapprima la vendita, cioè i 12 imperiali, poi nella stessa linea scrivi dietro il loro prezzo, cioè 31 denari pisanini; e poni gli 11 imperiali sotto i 12 imperiali, come qui si mostra: e moltiplica i numeri che sono di traverso, cioè 11 per 31, farà 341; dividili per 12, farà $\frac{5}{12}$ 28 denari.

Fig. 8 Liber Abaci - Cap. VIII.2.1.

Fibonacci descrive la regola del tre attraverso una sorta di algoritmo visivo, Figura 9, che, una volta compresa e verificata l'ipotesi di proporzionalità diretta, ossia di linearità, esistente tra le grandezze che compaiono in un problema, serve ad aiutare la memoria fissando i dati del problema e indicando la procedura per trovare la soluzione. Se P è una relazione di proporzionalità diretta tra una grandezza *a* e la grandezza corrispondente *P(a)*, come ad esempio il prezzo *P(a)* di una data merce *a*, allora

$$a/b = P(a)/P(b) \qquad a \times P(b) = b \times P(a)$$

e quest'ultima relazione, noti 3 dei 4 numeri proporzionali, permette di calcolare il quarto numero eseguendo l'operazione inversa della moltiplicazione. Scritti i dati in una tabella come nella figura, esposti in rosso i dati noti, l'algoritmo consiste nel moltiplicare i numeri sulla diagonale (B per C) e dividere per il numero restante A.

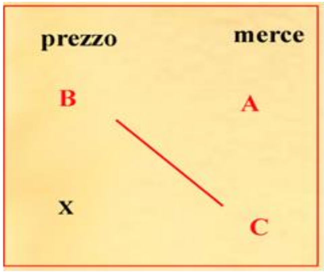


Fig. 9 Algoritmo visivo di Fibonacci per la soluzione di problemi di proporzionalità.

La regola del tre:
A = quantità di una merce
B = prezzo di A
C = una seconda quantità della stessa merce
A, B, C sono noti, X=BC/ A è il prezzo della quantità C

4. Potenziali sviluppi didattici

Questo percorso è stato proposto, sempre in classi terminali della Scuola Primaria, in cui sono state applicate le nozioni esposte applicando le nozioni apprese alla conversione delle monete attualmente in uso nei vari paesi del mondo. Si potrebbe pensare di evolvere tale percorso anche attraverso una rappresentazione animata degli esempi proposti, drammatizzando la situazione, così da rendere vivo il racconto di quanto appreso utilizzando competenze che i ragazzi solitamente reputano non utilizzabili nello stesso percorso di apprendimento.
Nell'ambito di un percorso di continuità, si è proposto un percorso partendo dalle stesse proposte d'aula a classi della Scuola Secondaria di I grado, integrandolo con ulteriori esempi. Si è affiancato questo metodo risolutivo alle proporzioni, cercando vantaggi nell'uso di un metodo rispetto all'altro nei vari casi di studio. Questo ha fornito agli studenti un processo risolutivo non unico a problemi che gli sono stati posti, ripercorrendo così il pensiero e le conquiste matematiche come una continua evoluzione verso metodi risolutivi differenti.
L'estensione alla Scuola Secondaria di II grado ha permesso una ulteriore riproposizione del percorso descritto, integrandolo non solo con esempi in cui siano presenti anche numeri non interi, ma introducendo anche un ulteriore elemento di interdisciplinarità, quella con la lingua latina, partendo dal testo originale, Figura 9. Estendendo l'interdisciplinarità, possiamo proporre esempi reali di conversione di monete, utilizzandone alcune attualmente in uso nei vari paesi del mondo, partendo da problemi simili a quelli già proposti ma declinati nelle varie lingue originali.

VIII.2.1

Pars secunda octaui capituli de cambiis monetarum.

Si soldus imperialium, scilicet denarii 12, aut cuiuslibet alie monete uendatur pro denariis 31 pisaninis, uel pro aliis quibuslibet; et queratur quot denarios pisaninos quis pro imperialibus 11 habuerit: describes questionem, uidelicet primo uenditionem, scilicet imperiales 12; deinde in eadem lineatione retro scribes pretium illorum, scilicet denarios 31 pisaninos; et imperiales 11 pones sub imperialibus 12, ut hic ostenditur: et multiplicabis | numeros qui sunt ex aduerso, scilicet 11 per 31, erunt 341; que diuide per 12, exibunt denarii $\frac{5}{12}$ 28.

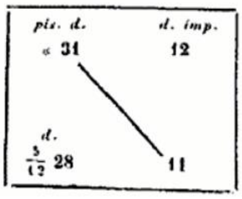


Fig. 10 Liber Abaci - Cap. VIII.2.1.

5. Conclusioni

L’approccio storico laboratoriale unito ad una metodologia didattica capace di porre l’alunno al centro del proprio apprendimento ha reso la presentazione degli argomenti trattati più agevole ed intuitiva. L’essere partiti da testi storici tradotti, ha creato spiazzato ma incuriosito i ragazzi ed ha fatto da motore per tutto il lavoro d’aula. L’aver introdotto compiti di realtà ha reso questi concetti più familiari, rispondendo alla sempre più diffusa domanda “Ma a che serve?” e “Che ci faccio?”.

Inoltre, l’aver creato delle monete, con le relative risoluzioni dei problemi a questo collegati, ha reso maneggiabili, osservabili, concreti questi concetti, facendo sì che potessero essere compresi anche da alunni nelle classi terminali della Scuola Primaria. L’introduzione di percorsi che conciliassero il costruire gli oggetti matematici e il rappresentarli con formalismi legati ai linguaggi matematici ha permesso di catturare l’attenzione e l’interesse di alunni che hanno interessi e percorsi di apprendimento anche molto differenti. La manualità ha permesso di dedicare il giusto tempo all’acquisizione di concetti nuovi, creando una sorta di continuo tra l'oggetto matematico e la sua rappresentazione mentale.

Bibliografia

Baldassarri, Monica. (2010), Zecca e monete del Comune di Pisa Dalle origini alla Seconda Repubblica, 1, XII secolo-1406 (vol.1), Felici editori, Pisa.

Barbin, Évelyne, Guillemette, David & Tzanakis, Costantinos (2020), History of mathematics and education, pp.333-342, Encyclopedia of mathematics education, Springer.

Barbin, Évelyne, (2022), On the Role and Scope of Historical Knowledge in Using the History of Mathematics in Education, Mathematics Education, 54 (7) p1597-1611.

Barra Mario, Castelnuovo Emma, (1976), Matematica nella realtà, Torino, Boringhieri

Capone, Roberto, (2022), Interdisciplinarity in Mathematics Education: From Semiotic to Educational Processes, EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 18 (2).

Catastini, Laura, Ghione, Franco, (2023). La matematica che trasformò il mondo: il Liber abbaci di Leonardo Pisano detto Fibonacci, Carocci editore frecce, Roma.

D'Amore, Bruno, Fandiño Pinilla, Marta Isabel (2011). Spunti di storia della matematica ad uso didattico nella scuola primaria, Pitagora, Bologna.

Hannula, Markku S., Pantziara, Marilena, Di Martino, Pietro, (2018), Affect and mathematical thinking. Developing Research in Mathematics Education: Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe, pp.128-141, Routledge, Lontoo.

Montessori Maria, (2013), Psicoaritmetica, p 383, Edizioni Opera Nazionale Montessori, Roma.

Scoppola, Benedetto, (2022), Più bravi di quel che pensiamo, GEDI, Milano.

Tomassi, Laura, (2021), Laboratori didattici tra storia e matematica ispirati al Liber Abaci Educational workshops between history and mathematics inspired by Liber Abaci, Periodico di Matematiche, 13, (XIV)CXXXI, pp. 5-23.

Tomassi, Laura, (2023). I precursori medioevali dei compiti di realtà: le trame narrative che nascondevano i rapporti "proibiti" in matematica. I problemi del Liber Abaci, Periodico di Matematica (IV) Vol. V (3) Supplemento-II sett. 2023, eISSN: 2612-6745, pp.169-195.

Sitografia

Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione. https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf

Leonardo Pisano Fibonacci (1202), *Riproduzione integrale dell'edizione del Liber Abaci del 1857* a cura di Baldassarre Boncompagni, www.progettofibonacci.it

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 6, No 1 (2023), 33 - 44

Demografia e territorio. Un caso di studio.

Assunta Lisa Carulli
Istituto Nazionale di Statistica – Sede dell'Abruzzo

Domenico Di Spalatro
Istituto Nazionale di Statistica – Sede dell'Abruzzo

Abstract
La demografia è la scienza che ha per oggetto tutto ciò che concerne la popolazione. Secondo una definizione demografica, una popolazione è un insieme di individui che condividono specifiche caratteristiche in un determinato momento o periodo temporale. La struttura della popolazione e la sua evoluzione nel tempo si possono misurare utilizzando opportuni indicatori demografici. Nel lavoro, dopo una breve introduzione, di natura tecnico-metodologica viene riportato un caso di studio concreto relativo al comune di Lanciano utile al docente anche per predisporre una unità didattica sull'argomento.

Key words: inverno demografico, movimento naturale, flusso migratorio

1. Introduzione
Oggi l'Italia sta attraversando una delle crisi demografiche più complesse della sua storia recente. Fino a poche generazioni fa, il numero medio di figli per donna si manteneva oltre la soglia di rimpiazzo generazionale e garantiva il giusto equilibrio tra generazioni.

A partire dagli anni Ottanta, il tasso di fecondità è progressivamente diminuito arrivando al di sotto del livello necessario per garantire il rinnovo generazionale. Il problema demografico dell'Italia non riguarda solamente la bassa natalità ma anche il difficile accesso al mercato del lavoro da parte delle giovani generazioni, il rischio di povertà e la scarsa possibilità di conciliare la vita lavorativa e quella familiare. Le conseguenze di questa crisi demografica non sono solo economiche, ma anche sociali. Un paese in cui la percentuale di anziani aumenta mentre la popolazione in età lavorativa si riduce, incide fortemente sulla capacità del paese stesso di produrre ricchezza e benessere. Inoltre, il sistema di welfare diventa sempre più insostenibile e questo si ripercuote negativamente su tutte le fasce della popolazione. Oggi si parla spesso di "Inverno demografico". Il termine è stato usato per la prima volta da Michel Schooyans, professore emerito presso l'Università Cattolica di Lovanio. Per l'Europa, politici di diverse tendenze hanno annunciato un "suicidio demografico". Michel

Rocard, Primo ministro francese, al termine della conferenza denominata "famiglia" del 20 gennaio 1989, ha dichiarato: «La maggior parte degli stati dell'Europa occidentale è predisposta a commettere suicidio, un suicidio demografico...». La BBC ha asserito che l'Europa sta vivendo un inverno demografico: il "livello di popolazione in diverse parti del mondo sviluppato è in declino, ma questo è particolarmente evidente nei paesi occidentali", soprattutto in Europa. Aumenta la durata della vita, ma diminuisce il tasso di natalità delle popolazioni occidentali. Molti paesi non possiedono un numero sufficiente di giovani per rinnovare le loro popolazioni e quindi fronteggiare il peso economico della popolazione invecchiata.

2. Gli indicatori demografici

La struttura della popolazione e la sua evoluzione nel tempo si possono misurare utilizzando opportuni indicatori demografici di seguito riportati. Un primo importante indicatore è il tasso di natalità. Esso indica il numero di bambini nati vivi in un anno ogni 1.000 abitanti e viene calcolato con riferimento alla popolazione media dell'anno determinata sommando la popolazione all'inizio del periodo con la popolazione alla fine del periodo e dividendo il risultato per due. Il tasso di mortalità indica invece il numero di persone morte in un anno ogni 1.000 abitanti. Anch'esso viene calcolato con riferimento alla popolazione media dell'anno come accade per l'indice di natalità. Mettendo a confronto i nati con i morti si ottengono il saldo naturale che indica la differenza tra il numero dei nati vivi e quello dei morti in una certa area e in un determinato periodo di tempo e la crescita naturale che misura la differenza tra il tasso di natalità e il tasso di mortalità riferiti sempre ad una determinata area e ad un certo lasso di tempo. La speranza di vita alla nascita indica invece il numero di anni che mediamente un individuo di un certo paese ha davanti a sé al momento della nascita a condizione che non si verifichino sensibili variazioni delle condizioni economiche e sociali del paese. Un indicatore importante per la conoscenza del futuro demografico di un territorio è la fecondità media che indica il numero di figli che, in media, hanno le donne in età fertile, cioè le donne di età compresa tra i 15 e i 50 anni. Un indice di fecondità media inferiore a 2,1 indica che non vi è ricambio generazionale e quindi la popolazione totale non cresce. Se ad esempio una donna ha 2 figli questi sostituiranno i genitori quando moriranno mantenendo la popolazione costante. Solo se l'indicatore è superiore c'è una crescita della popolazione. Per saldo migratorio si intende poi la differenza tra il numero degli stranieri che si sono stabiliti in un paese e il numero dei cittadini di quel paese che sono emigrati all'estero in un certo arco di tempo. Infine, il saldo della popolazione è dato dalla somma del saldo naturale e del saldo migratorio. Esso indica l'andamento demografico di una popolazione, cioè la sua crescita o la sua diminuzione complessiva in un determinato contesto spazio-temporale per effetto delle nascite, delle morti e dei flussi migratori.

3. Le fonti demografiche

Per lo studio dei fenomeni demografici si può fare riferimento a due fonti informative:

- *le rilevazioni di fonte anagrafica e stato civile*
- *le rilevazioni censuarie.*

Alcune informazioni disponibili annualmente a livello comunale permettono di costruire l'equazione demografica relativa ad uno specifico anno. In sintesi, la popolazione finale di un comune al tempo t (il tempo in genere è riferito all'anno) può scriversi come una equazione demografica nella forma

$$P_{iniziale} + \underbrace{N_{ati} - M_{orti}}_{\text{Saldo naturale}} + \underbrace{I_{scritti} - C_{ancellati}}_{\text{Saldo migratorio}} = P_{finale}$$

I censimenti generali della popolazione dal 1861 al 2011 hanno avuto cadenza decennale con alcune eccezioni:

- il censimento del 1936 si tenne dopo 5 anni per regio decreto n.1530/1930;
- il censimento del 1891 non fu effettuato per difficoltà finanziarie;
- il censimento del 1941 non fu effettuato per cause belliche.

Dal 2018 l'Istat ha attivato il censimento permanente della popolazione che a differenza del censimento tradizionale ha cadenza annuale e non più decennale e si basa sulla combinazione di rilevazioni campionarie e dati provenienti da fonte amministrativa trattati statisticamente. La rilevazione di individui e famiglie non è più puntuale ed esaustiva. Il confronto dei dati della popolazione residente dal 2018 con le serie storiche precedenti (2001-2011 e 2011-2017) è stato possibile solo con operazioni di ricostruzione intercensuaria della popolazione residente. Le principali variabili rilevate con il censimento della popolazione sono la popolazione residente, le famiglie, gli stranieri e le abitazioni.

4. Il caso di studio del comune di Lanciano

In questo paragrafo viene riportato un caso di studio del comune di Lanciano situato in Abruzzo. I dati del comune vengono confrontati con quelli della sua provincia di riferimento, ossia Chieti. La figura 1 illustra la popolazione residente a censimenti dal

1881 al 2011 del comune di Lanciano e della provincia di Chieti. La figura 2 estende il confronto dal 2011 al 2020.

Figura 1. Popolazione residente ai censimenti. Anni 1861-2011. Comune di Lanciano e provincia di Chieti

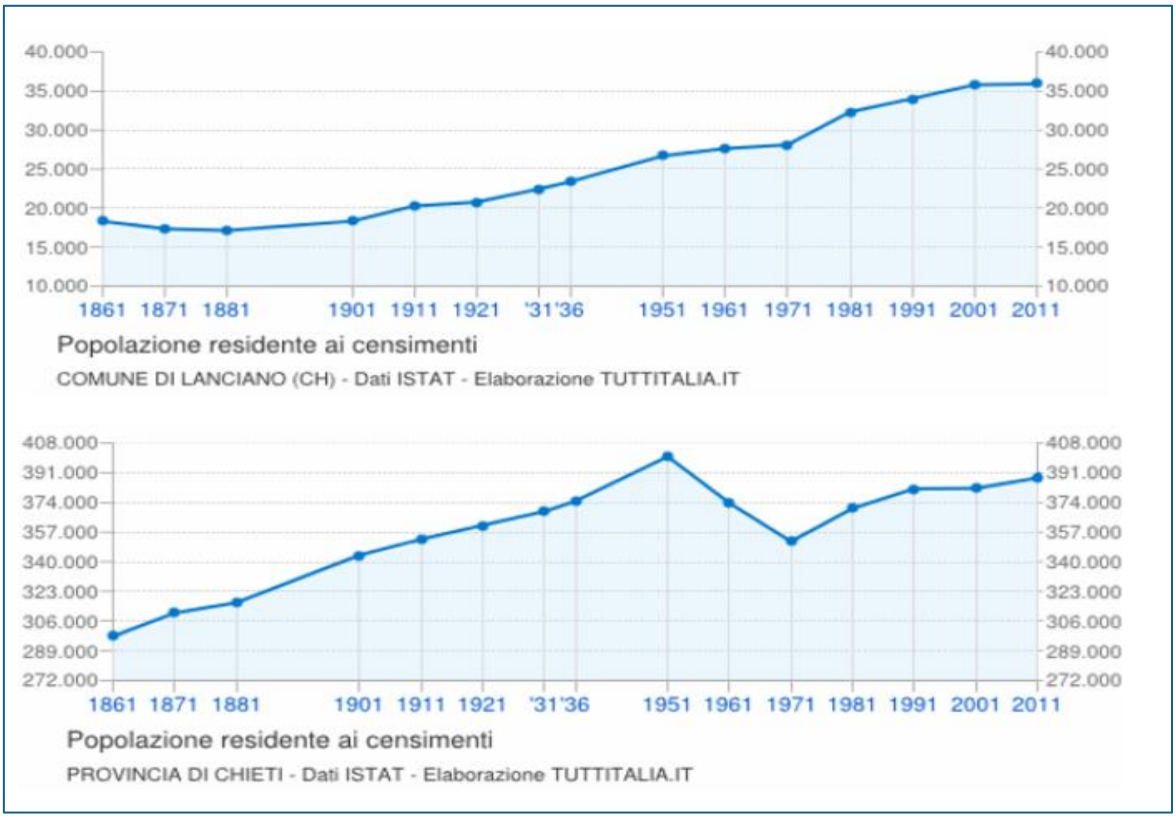
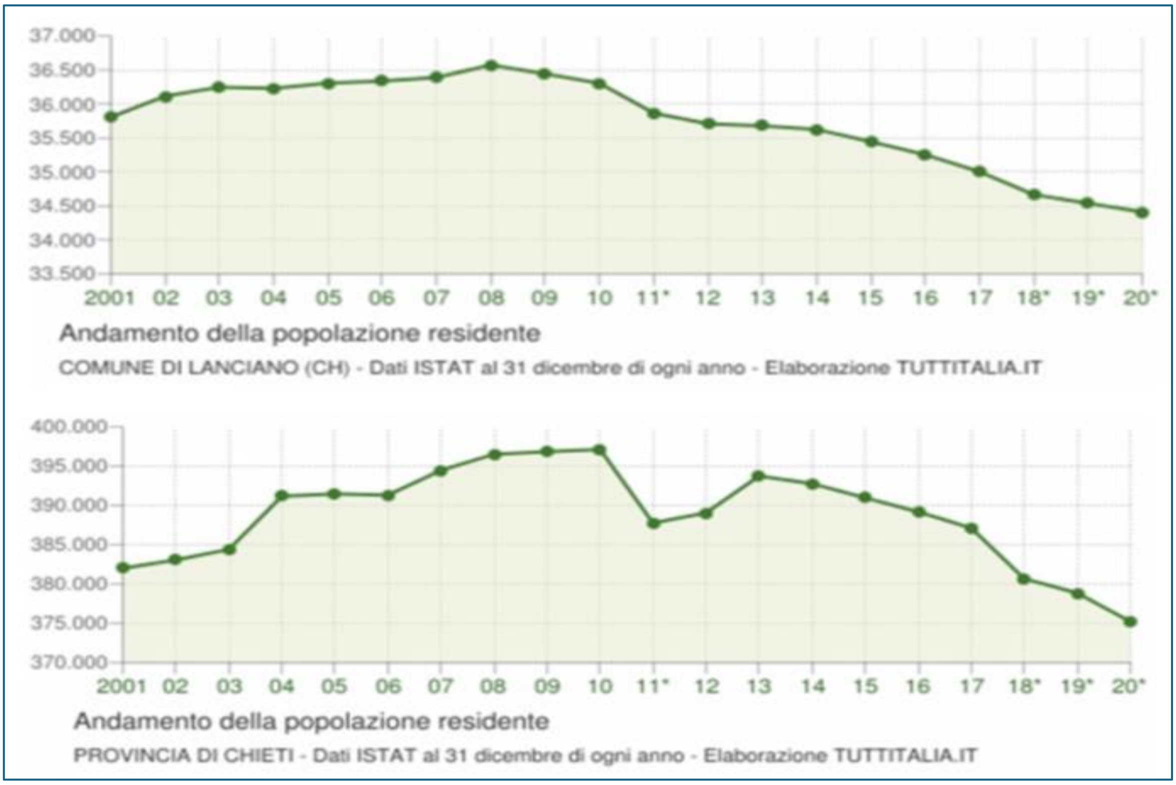


Figura 2. Popolazione residente ai censimenti. Anni 2001-2020. Comune di Lanciano e provincia di Chieti



La figura 3 mette a confronto le variazioni annuali della popolazione di Lanciano (espresse in percentuale) con le variazioni della popolazione della provincia di Chieti e della regione Abruzzo.

Figura 3. Variazione percentuale della popolazione.2002-2020. Comune di Lanciano e provincia di Chieti

Le figure 1, 2 e 3 forniscono dunque un quadro storico relativo all'andamento della popolazione che tiene conto anche di specifici riferimenti territoriali.

Per studiare meglio la popolazione di un territorio bisogna però analizzare anche le specifiche componenti che ne determinano l'evoluzione. Per fare questo si possono utilizzare opportuni indicatori già illustrati.

La figura 4 sintetizza il movimento naturale della popolazione illustrando l'andamento delle nascite e dei decessi nel comune di Lanciano a partire dal 2002 al 2020. Dal 2009 nel comune di Lanciano, i decessi hanno sempre superato le nascite generando quindi un saldo naturale negativo che è andato via via via crescendo soprattutto a causa della forte contrazione della natalità.

Figura 4. Movimento naturale della popolazione. Comune di Lanciano

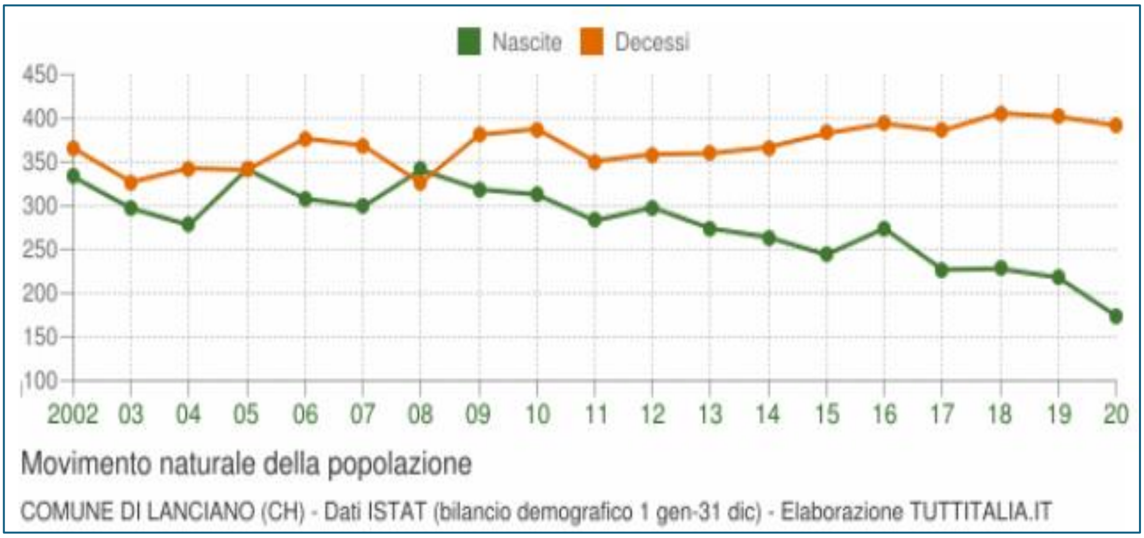
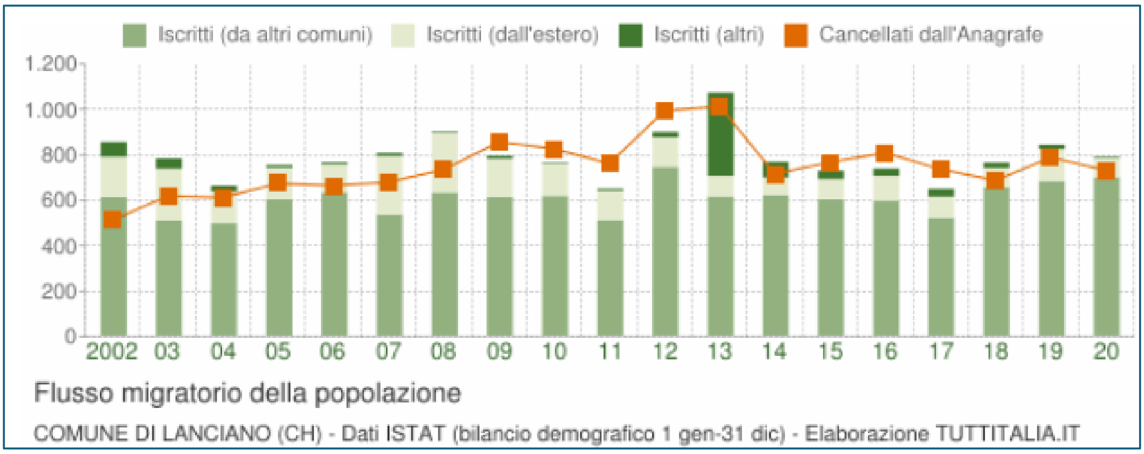


Figura 5. Flusso migratorio della popolazione. Comune di Lanciano



Il grafico della figura 5 mostra il numero dei trasferimenti di residenza da e verso il comune di Lanciano negli ultimi anni. I trasferimenti di residenza sono riportati come iscritti e cancellati dall'Anagrafe del comune. Fra gli iscritti sono evidenziati con colore diverso i trasferimenti di residenza da altri comuni, quelli dall'estero e quelli dovuti per altri motivi (ad esempio per rettifiche amministrative).

Ai fini dello studio della dinamica della popolazione il “combinato disposto” di due componenti come il movimento naturale e il flusso migratorio permette di ottenere un quadro esplicativo della dinamica demografica di un’area territoriale.

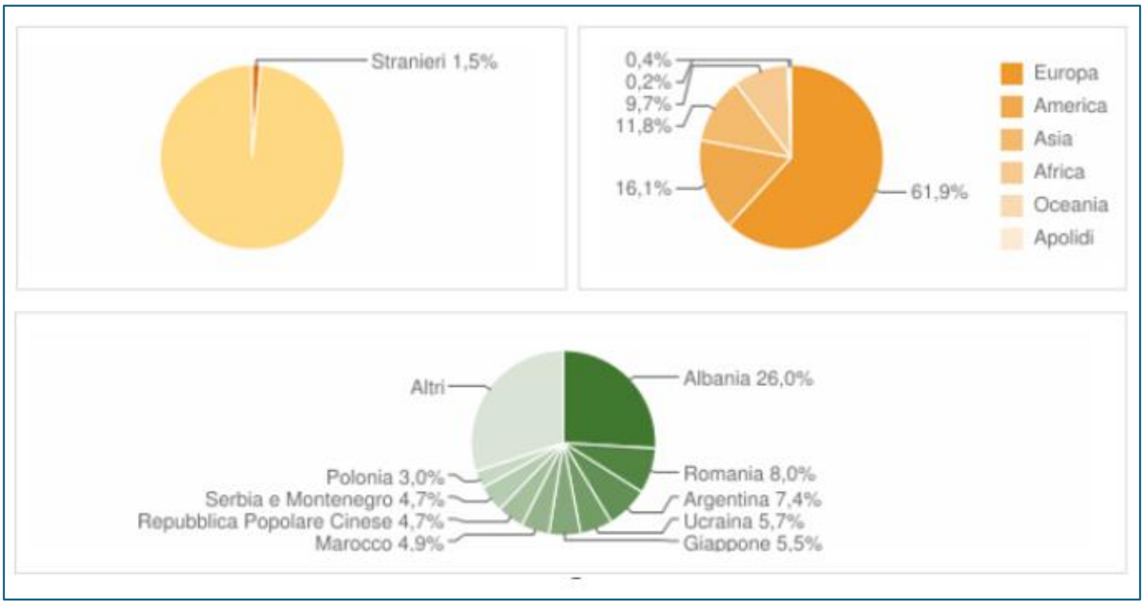
Un discorso a parte merita la questione degli stranieri.

Figura 6. Popolazione straniera residente. Anni 2003-2021. Comune di Lanciano

I dati della figura 6 illustrano l’andamento della popolazione con cittadinanza straniera. Sono considerati cittadini stranieri le persone di cittadinanza non italiana aventi dimora abituale in Italia.

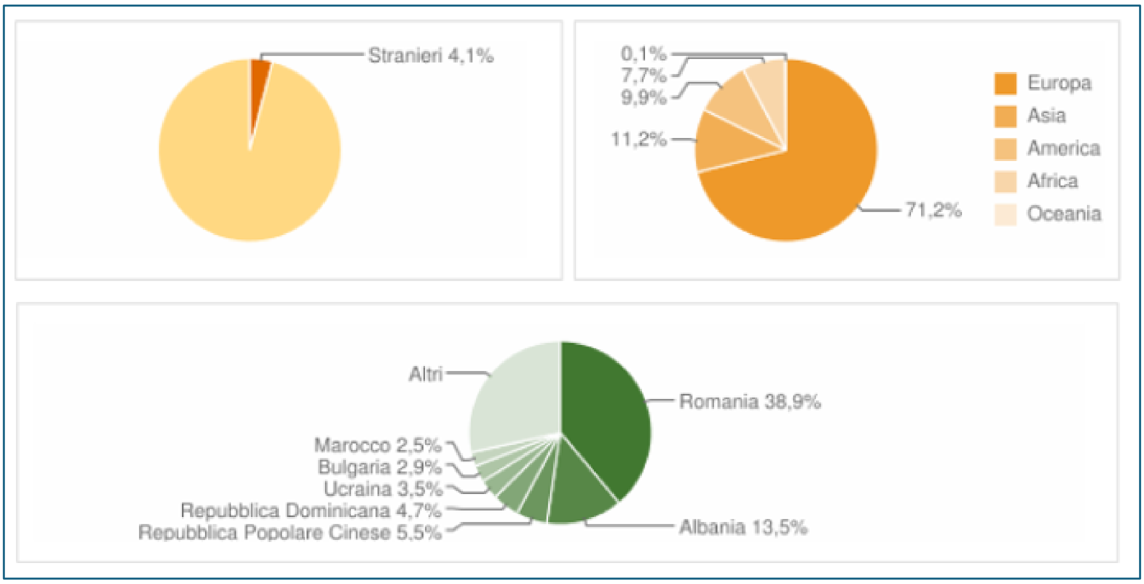
Le figure 7A e 7B mostrano come è cambiata l’ammontare della popolazione straniera dal 2004 al 2021 in termini percentuali rispetto alla popolazione residente totale anche con riferimento alle principali comunità straniere.

Figura 7A. Popolazione straniera residente al 1° gennaio 2004. Comune di Lanciano



Gli stranieri residenti a Lanciano al 1° gennaio 2004 sono 527 e rappresentano l’1,5% della popolazione residente. La comunità straniera più numerosa è quella dell’Albania con il 26,0% di tutti gli stranieri presenti sul territorio, seguita dalla Romania (8,0%) e dall'Argentina (7,4%).

Figura 7B. Popolazione straniera residente al 1° gennaio 2021. Comune di Lanciano



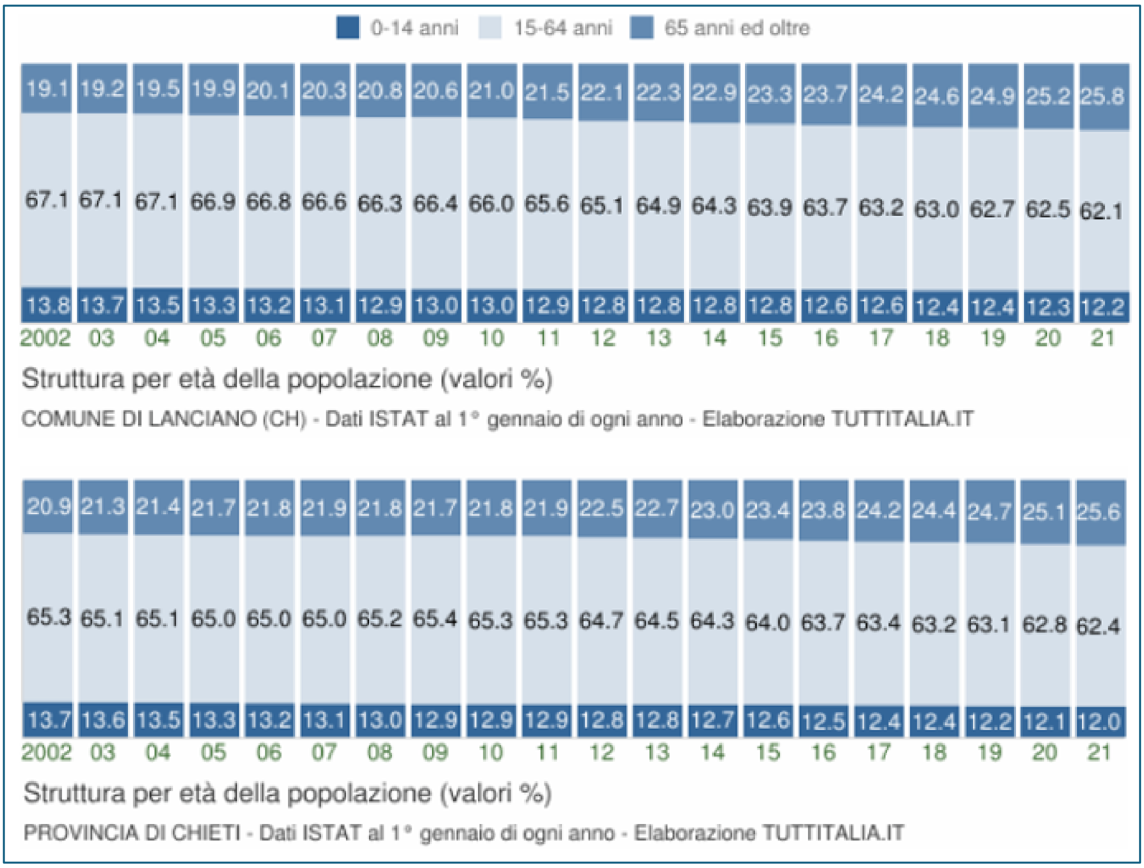
Gli stranieri residenti nel comune di Lanciano al 1° gennaio 2021 sono 1.395 e rappresentano il 4,1% della popolazione residente. Tale percentuale è più che raddoppiata rispetto al 2021. Nel 2021 la comunità straniera più numerosa è quella proveniente dalla Romania con il 38,9% di tutti gli stranieri presenti sul territorio, seguita dall'Albania che con il 13,5% perde il primato che deteneva nel 2004. Al terso posto si colloca la Repubblica popolare cinese (5,5%).

Un ultimo livello di analisi riguarda la struttura per età di una popolazione che si può suddividere in tre classi d'età: giovani 0-14 anni, adulti 15-64 anni e anziani 65 anni e oltre. La popolazione viene definita di tipo progressiva, stazionaria o regressiva a seconda che la popolazione giovane sia maggiore, equivalente o minore di quella anziana.

Lo studio di tali rapporti è importante per valutare alcuni impatti sul sistema sociale, ad esempio sul sistema lavorativo o su quello sanitario.

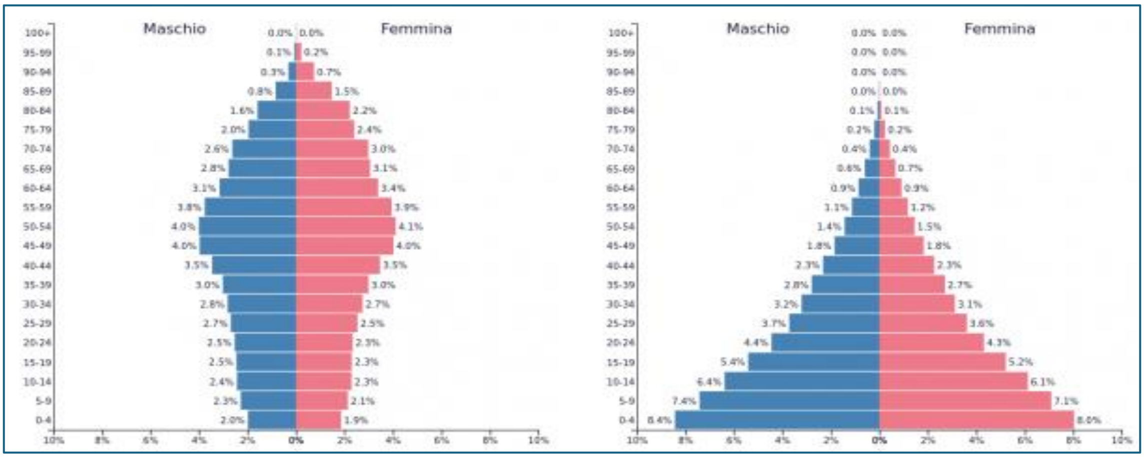
La figura 8 mostra chiaramente come nel comune di Lanciano e nella provincia di Chieti la percentuale di popolazione ultrasessantacinquenne tende ad aumentare in maniera costante a scapito delle altre due classi d'età in cui la popolazione diminuisce.

Figura 8. Struttura della popolazione dal 2002 al 2021. Comune di Lanciano e provincia di Chieti



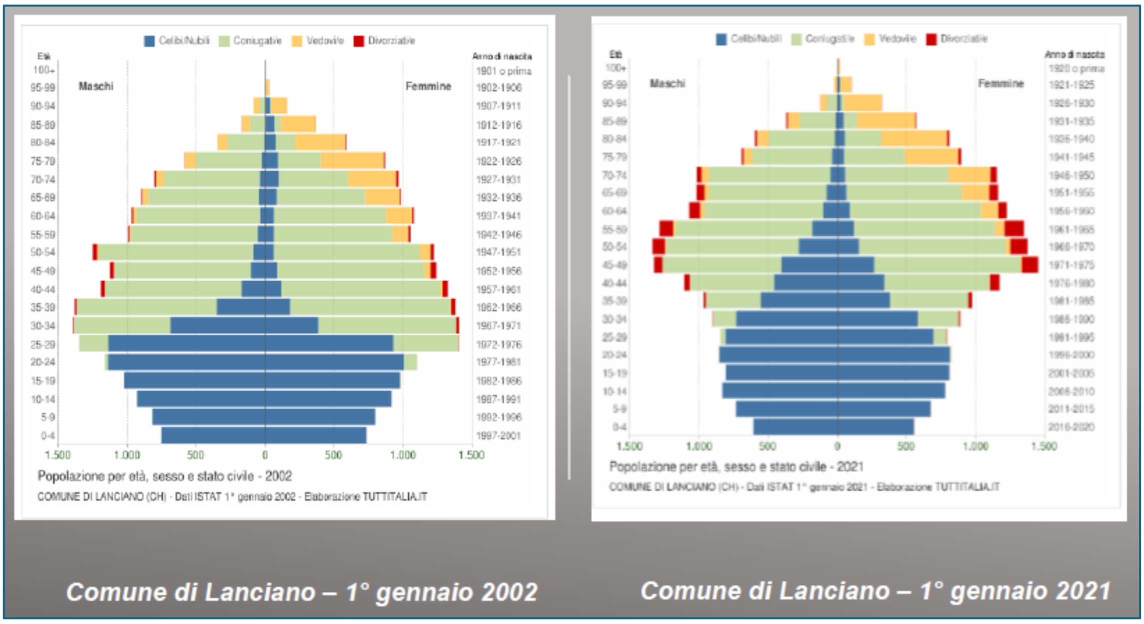
Uno strumento molto utile per affinare l'analisi della struttura per età della popolazione è la piramide dell'età. Le piramidi dell'età sono una fotografia istantanea della situazione demografica di una popolazione, utile per delineare scenari futuri. Una piramide dell'età si ottiene dividendo una popolazione in due gruppi in base al sesso e costruendo poi due istogrammi in cui le persone di ciascun gruppo sono ulteriormente divise per classe d'età. In basso si trovano le classi d'età più giovani, in alto quelle più anziane. Una piramide a base larga fotografa una popolazione con un'ampia componente in età fertile, e, quindi, destinata a crescere. Invece una piramide rigonfia al centro indica una popolazione con età media alta e poche persone in età fertile, quindi destinata a decrescere (Figura 9).

Figura 9. Le piramidi dell'età



La figura 10 mostra due piramidi dell'età che riproducono la distribuzione della popolazione residente a Lanciano per età, sesso e stato civile al 1°gennaio 2021 e al 1° gennaio 2002. La popolazione è riportata per classi quinquennali di età sull'asse Y, mentre sull'asse X sono riportati due grafici a barre a specchio con i maschi (a sinistra) e le femmine (a destra). I vari colori evidenziano la distribuzione della popolazione per stato civile: celibi e nubili, coniugati, vedovi e divorziati.
Gli individui in unione civile, non più uniti civilmente per scioglimento dell'unione e non più uniti civilmente per decesso del partner sono stati sommati rispettivamente agli stati civili "*coniugati\e*", "*divorziati\e*" e "*vedovi\e*"'.

Figura 10. Struttura della popolazione dal 2002 al 2021. Piramidi dell'età. Comune di Lanciano



La forma del grafico dipende dall'andamento demografico di una popolazione, con variazioni visibili in periodi di crescita demografica o di cali delle nascite per guerre o altri eventi. In Italia ha avuto forma simile ad una piramide fino agli anni '60, anni del boom demografico per poi cambiare in maniera netta. Se ad esempio si analizza la situazione relativa al comune di Lanciano osserviamo come già dal 2002 al 2021 il quadro è completamente cambiato con la base che si restringe. Questo indica una forte riduzione di popolazione di età più bassa, carburante fondamentale per uno sviluppo nel tempo della popolazione.

5. Conclusioni

In questo lavoro si illustra il ruolo delle principali variabili demografiche nello studio della popolazione anche attraverso un caso di studio che costituisce un approccio costruttivo in ambito didattico. Oggi le tematiche legate allo studio della popolazione coinvolgono in maniera decisa imprese e famiglie ed è importante che siano illustrate anche nei diversi contesti didattici visto che i giovani di oggi saranno i decisori di domani.

Oggi l'Italia sta vivendo un vero e proprio inverno demografico che sta mettendo a dura prova le sue strutture socio-economiche. Se l'incertezza economica è una causa evidente, altre motivazioni, legate a fattori culturali e alle sfide professionali, contribuiscono significativamente a questo fenomeno.

L'inverno demografico non si limita solo alla semplice incertezza economica, ma trova la sua radice anche in altre motivazioni più complesse. Nelle regioni del Sud Italia il costo della vita e la difficoltà di accesso al mercato del lavoro aumentano il rischio di rinunciare alla genitorialità. Nelle regioni del Nord le difficoltà nel conciliare lavoro e vita familiare risultano invece tra le cause principali per cui molti giovani rinviano la scelta di diventare genitori. Affrontare l'inverno demografico richiede un intervento deciso da parte delle politiche pubbliche, ma anche un impegno concreto da parte delle aziende. Un approccio congiunto permetterebbe di sostenere una crescita equilibrata prevenendo una crisi demografica nel lungo periodo. Le aziende devono impegnarsi a creare ambienti di lavoro più inclusivi per le famiglie ma le politiche pubbliche devono supportare le aziende che favoriscono la natalità e la genitorialità.

È quindi fondamentale che, sia a livello nazionale che regionale, si agisca con urgenza per sviluppare politiche efficaci al fine di evitare una crisi demografica senza precedenti.

Bibliografia

Gian Carlo Blangiardo (2006), Elementi di demografia. Il Mulino Bologna

Gustavo de Santis (2010), Demografia. Il Mulino Bologna

Fiorenzo Rossi (2013), Le fonti della demografia storica. CLEUP Padova.

Nora Federici (1984), Istituzioni di Demografia, Casa editrice Elia. Roma

Massimo Livi Bacci (1983), Introduzione alla demografia. Loescher Editore

Sitografia

https://www.treccani.it/enciclopedia/demografia_(Enciclopedia-della-Scienza-e-della-Tecnica)/

https://www.treccani.it/magazine/atlante/geopolitica/l-inverno-demografico-italiano-e-le-sue-conseguenze.html

https://www.istat.it/informazioni-sulla-rilevazione/rilevazioni-demografiche-e-sanitarie/

https://www.tuttitalia.it/

https://maddmaths.simai.eu/divulgazione/rubriche/la-lente-matematica/italia-istat-piramidi/

https://maddmaths.simai.eu/divulgazione/sviluppo-demografico-affidiamoci-alle-piramidi/

https://confprofessioni.eu/welfare/linverno-demografico/

https://www.istat.it/it/files/2023/04/indicatori-anno-2022.pdf

https://mondosanita.it/inverno-demografico-le-cause-sconosciute-e-le-sfide-per-il-futuro-dellitalia/

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 6, No 1 (2023), 45 - 56

HVP Problemi alla Primaria

Metodo in 7 passi per capire la traccia, senza lasciare nulla al caso e risolvere con estrema sicurezza, anche senza avere il famigerato "*intuito matematico*".

Alessandra De Falco
ISIS G. Fortunato - Napoli
8inmate@gmail.com mat.towards@gmail.com

Sunto

Il metodo HVP è un approccio strutturato in 7 passi ideato per aiutare gli alunni della scuola primaria a comprendere e risolvere i problemi matematici, superando le difficoltà legate all'intuito e ai tentativi. Si basa sulla lettura attiva della traccia, la ricerca dei verbi per individuare azioni utili e il loro ordine cronologico. L'obiettivo è sviluppare autonomia, fiducia e un "intuito" allenabile, rendendo il bambino parte attiva del processo. Il metodo evita errori comuni, come il semplice "leggi bene", proponendo invece un approccio guidato e metodico, dalla riformulazione della traccia all'applicazione pratica attraverso esempi concreti.

Parole chiave: Metodo; PNL; Comprensione della traccia; Ricerca dei verbi; Pensierini; Passo a gambero; Intuito matematico; Autonomia scolastica; Problem solving; Scuola primaria.

1. Introduzione

Se vuoi ripartire col piede giusto quest'anno con i problemi, un ottimo modo è ripensare alle difficoltà che già l'anno scorso hai dovuto affrontare. Ogni momento è quello giusto per mettere a posto le cose prima che la situazione si ripresenti di nuovo, con tutte le sue conseguenze. Una delle più grandi difficoltà degli alunni sono i problemi/esercizi: una difficoltà che si ingigantisce a mano a mano che le tracce si fanno sempre più complesse.

E il ruolo più importante in questa cosa ce l'hai proprio tu. Perché tocca a te adesso mettere le basi per farlo andare bene in matematica. Sia che si tratti di esercizi, dove si chiede di applicare la lezione studiata. Sia che si tratti di problemi, dove si chiede di ragionare e intuire la soluzione, oltre che verificarla!

Per uno studente, anche un esercizio è un problema se non lo capisce e non lo sa fare.

Quindi da qui in poi li chiameremo "*problemi*"!

Oggi vedrai come affrontare la più sentita difficoltà comune a tutti gli adulti quando cercano di aiutare i bambini con i…problemi! la lettura attenta della traccia e il problem solving: come si fa il *problema*!

"*Leggi bene*" o "*leggi attentamente*", lo dice chi è convinto che la lettura fatta in "*un certo modo*" aiuti a capire il problema e quindi, a risolverlo.

Ma, se pure ci si riesce, in questo modo non si ha nessuna certezza che si riuscirà anche nei prossimi problemi.

È riuscito nei problemi sul costo, non è detto che saprà fare quelli di geometria.

È riuscito nei problemi a una operazione, non sai se riuscirà anche in quelli con più operazioni o più richieste.

Così per tutto l'anno scolastico si corre dietro ai problemi, sperando che arrivi finalmente "*l'intuito*" a mettere fine alla questione.

Non ti resta che "*facilitargli*" la comprensione della traccia, dopo di che il problema gli sembrerà più fattibile. Come suggerito da Eco (1979), la lettura attiva e il coinvolgimento interpretativo sono fondamentali per costruire significati che permettano di andare oltre il semplice testo.

Se l'alunno non legge "*bene*" o "*attentamente*" la traccia, il *problema* resta un problema!

E allora qual è la cosa migliore da fare? semplicemente non devi più fare questa corsa continua dietro ai problemi. Devi invece prevenire la situazione e dare all'alunno un singolo metodo con cui impara:

1. ***"come"* leggere "*bene/attentamente*" la traccia**
   - **in modo attivo sin dal primo rigo del primo problema con l'addizione**
   - **senza rischiare il loop del "*non ho capito!" e del "non lo so fare!"***

con la "*ricerca dei verbi*".

così che potrai rendere i tuoi alunni *parte attiva* del processo di lettura e comprensione della traccia e impedire che dubitino delle loro capacità;

2. **"*come*" individuare con sicurezza le informazioni utili allo svolgimento, soprattutto quelle nascoste**
   - **senza confondersi con quelle legate al contesto**
   - **e stabilire subito la tipologia di problema proposto**

con la "*classificazione dei verbi*"

così che il bambino arrivi da solo a formulare dati e richieste e a individuare il tipo di operazione necessaria, mentre tu sfuggi definitivamente all'idea di doverlo facilitare;

3. **"*come*" risolvere un qualsiasi problema**
   - **ponendo solide basi allo sviluppo della mentalità del problem solving**
   - **adesso e per il futuro**

scomponendo la traccia in "*pensierini*" e usando la strategia del "*passo a gambero".*

così che il bambino è guidato dal principio alla fine, sviluppa autonomia e, cosa più importante di tutte, grazie a te forma o amplifica il suo "*intuito*".

2. Mi presento

Ti starai chiedendo chi sono e perché dovresti ascoltarmi, ma prima lascia che ti condivida perché mi rivolgo a te.
Credo fermamente che alla primaria sia come lavorare su un terreno vergine. Semini con cura, scegli il concime più adatto nella stagione migliore, senza sapere nulla di quello che succede lì sotto, dedichi tempo e passione immaginando i teneri fiori e i frutti che un giorno, chissà quando, spunteranno! La tua dedizione è totale! Il tuo tempo è prezioso!
Alle medie si coltivano i teneri germogli a farli diventare arbusti. Alcuni forti e dritti, altri meno! Alle superiori se la pianta non è florida, bisogna tagliare alcuni rami storti, innestarne degli altri, o a volte riseminare, ma il terreno non è più vergine.
Ognuno ha fatto il meglio che ha potuto, senza dubbio. Chi ne paga le spese però, è la pianta! Il compito più importante secondo me, ce l'ha proprio la scuola primaria!
E tutta la mia stima va proprio a chi è impegnato lì, dove iniziano le buone abitudini, che determineranno nel bambino la fiducia nelle proprie capacità e nella possibilità di riuscire.
Il mio metodo è nato nel 2012 per la scuola secondaria, l'ho testato con i miei alunni che testimoniano di aver smesso di brancolare nel buio nella lettura della traccia e di aver affrontato con molta più sicurezza lo svolgimento. Come sottolineato da Dilts (2004), fornire un metodo chiaro e una guida sicura è essenziale per aiutare gli studenti a sviluppare fiducia e competenze. E poi mi sono detta che era necessario andare alla radice del problema.
Quindi l'ho esteso alla primaria con l'intenzione di poter supportare chi vuole seminare bene sin dall'inizio. Chi ben comincia è a metà dell'opera! E se adesso ti stai chiedendo in che modo questo metodo potrà aiutarti a concimare il seme nel modo migliore, sto per condividerti "*la*" buona pratica per affrontare esercizi e problemi con serenità da adesso in poi.
Non è colpa tua e nemmeno del bambino: tutto dipende dalla mancanza di un accordo tra le scuole di diverso ordine e grado su un unico metodo di lavoro per risolvere i problemi. Cosa in cui sarai incappato di sicuro anche tu, a tuo tempo.
Del resto, è toccato anche a me! Al biennio dello scientifico, i nodi sono venuti al pettine e mi sono scontrata con dei problemi che non capivo. Malgrado studiassi la teoria e non avessi niente da rimproverarmi, puntualmente alla verifica prendevo 4.
Mio padre, ingegnere, mi aveva sempre seguita negli studi: e quando venne a parlare con la mia prof. questo gli disse: *ci vuole intuito! verrà col tempo*…in effetti neanche mio papà sapeva come aiutarmi e mi disse che aveva avuto le stesse difficoltà anche lui.
Il biennio passò e la media del sei fu l'unico risultato possibile per me.
Al triennio trovai altri tipologie di problemi e il biennio restò solo un brutto ricordo.
Il mio piano di studi dell'università fu prettamente algebrico, guarda caso...
Vinco il concorso a 26 anni ed è solo in classe che incomincio a capire, da insegnante, le difficoltà degli alunni. In effetti non avevo ricevuto un metodo e non lo avevo. Ma le

difficoltà in questo campo erano sentite un po' ovunque. Sentivo altri colleghi dire ai genitori sempre la stessa frase: *ci vuole intuito*…come a dire…"*io che ci posso fare"* …
Quando "*facilitavo*" la comprensione della traccia, lo svolgimento era affrontato con maggiore semplicità, ma in autonomia, gli studenti non riuscivano a capire, spesso anche i più dotati.

Mi capitò un'ottima collega di italiano, alla quale chiesi di assegnare l'analisi grammaticale sulla traccia dei problemi. Ci confrontammo per le prove Invalsi, e fu lì che mi resi conto di qual è la parte della traccia che guida realmente alla comprensione.

Nacque il metodo dei verbi. Grazie al quale gli alunni furono felicissimi di riuscire finalmente a capire le domande e dare la risposta.

Questo successo mi incoraggiò a sviluppare il metodo per i problemi per la scuola secondaria di primo grado, che testai ampiamente in ogni occasione possibile.

Ottenuto il passaggio di ruolo, atterro sul liceo scientifico e, quando si dice che il caso non esiste, mi assegnano al biennio. Ecco lì quei famosi problemi ad aspettarmi. Come avevo visto fare alla mia prof. anni prima, mi preparo i problemi già svolti per la lezione del giorno dopo. Volo basso, insomma. Tutto fila liscio finché un alunno mi chiede aiuto per un problema che aveva tentato con il suo insegnante privato (malgrado fosse il migliore alunno della classe, aveva un aiuto a casa, e questo la dice lunga sulla situazione di allora!) e che non erano riusciti a fare. Mancano 15 min alla campanella: avrei potuto dire…*dammelo che lo vediamo la prossima volta*…ma non ce la faccio!

Dico sempre che i problemi vanno affrontati e non solo quelli a scuola: che i problemi fanno crescere! Inoltre, voglio premiare la sua iniziativa. Non posso darmi alla fuga…sarei incongruente!

Leggo la traccia e …una goccia di sudore mi percorre la tempia, bocca asciutta, un groppo in gola…ripiombo in un istante ai miei 14 anni, alle verifiche da 4 e alla paura di non farcela!

Non me la sento di dire…*non so aiutarti, ci devo pensare*…che figura ci faccio?!

Prendo tempo: dico che ho bisogno di andare un attimo in bagno.

Mi lavo il viso con l'acqua fresca, mi bagno i polsi, mi guardo allo specchio e prendo una ferma decisione: *"Ale ora vai dentro e quel problema lo fai!!"* mi dico!

Mi concentro e non so come, riesco a vedere quello che prima non vedevo, a capire quello che la paura mi aveva nascosto, dal buio alla luce: il problema è risolto!

Lui se ne va tutto contento ed io con la mia più dolorosa lezione: è lì che ho capito che avere un titolo di studio in matematica non basta per arrivare al cuore di chi la subisce come un trauma e si aspetta da te una soluzione!

Un pensiero si impossessa di me: non sarebbe mai più capitato né a me, né a nessuno di non avere un riferimento, una guida certa e sicura a cui affidarsi per fare i problemi.

Intanto tocca anche a me affrontare i problemi della primaria con mio figlio al quale naturalmente ho insegnato il metodo dei verbi; così lo chiamiamo in casa. Metodo che usa ad oggi che ha 21 anni, anche per estrarre informazioni da un qualsiasi tipo di testo, non solo matematico.

E così mi do alla ricerca: studio la comunicazione e l'intelligenza emotiva fino a conseguire un importante master sul tema.
Studio le connessioni linguistiche, esploro il testo scientifico e il funzionamento della mente umana e concludo che:

- l'unica via per comprendere la traccia di un problema sta nel …riformularla …in pensierini!
- l'unico modo per risolvere il problema senza perdersi in mille tentativi è il passo del gambero.

HVP i 7 passi per far capire i problemi alla primaria è la naturale estensione alla base del metodo nato in quel periodo.
Ho notato che tanti passi avanti sono stati fatti da allora, ma la difficoltà della comprensione della traccia resta.
La lettura selettiva per la ricerca delle parole chiave è stata esclusa per le sue ambiguità che spesso confondono invece di guidare con sicurezza.
Siamo passati alla drammatizzazione e alla ricerca di significato, che lascia tanto, troppo spazio alla personalità e alla fantasia del lettore, che deve sforzarsi per comprendere il contesto del problema senza sapere come integrarlo con dati, richiesta e procedimento.
Per passare a metodiche miste che di metodo hanno davvero pochino, poiché lasciano un nervo scoperto che nessuno ha risolto, sempre lo stesso secolare invito: "*leggi bene*!"
Che più che un invito è un'arma: dipende tantissimo dal tono di voce il cui effetto è gettare il malcapitato in totale confusione con la domanda più terribile nel cuore…" *forse non sono abbastanza intelligente?"*
E se continua a non capire perde fiducia in sé stesso e si allontana da questa materia con tutto quello che ne consegue.
Quindi questa presentazione è per tutti quegli adulti che soffrono quando i bambini pensano "*non ci riesco, sono stupido, sono negato*" perché purtroppo è questa l'autostima dei bambini quando si scontrano sempre con le stesse difficoltà.
È per chi ha cuore che il bambino diventi bravo, sicuro e autonomo e soprattutto alimenti la sua autostima. È proprio la cura per l'autostima dei bambini e degli alunni in generale quello che mi ha fortemente spinto a realizzare tutto ciò che stiamo per vedere.

3. Il Metodo

Devi sapere che il grande ostacolo che impedisce agli alunni di capire come si risolvono i problemi è che hanno la sensazione che si risolvano per tentativi o per intuito. E soprattutto che siano uno diverso dall'altro. Anche se sono esercizi: pur trattandosi di un argomento già studiato, dove la difficoltà dovrebbe essere ridotta.
Il limite in ciò è che l'intuito uno ce l'ha dopo che è già riuscito in precedenza a risolvere una grande quantità di problemi.
E allora come devono ottenerlo l'intuito? per quegli alunni che hanno difficoltà nei problemi e negli esercizi e continuano a sbagliarli è un po' come ad oggi chiedere un finanziamento per pagare a rate: devi risultare un buon pagatore, cioè non devi aver

saltato alcuna rata di un finanziamento precedente. Ma un giovane al primo finanziamento, come fa ad essere un buon pagatore, se è al primo finanziamento?
E infatti il problema alla base di tutto è che i tentativi e l'intuito non sono un metodo. Invece che cosa deve avere davvero un metodo con cui l'alunno possa diventare bravo e sicuro?
È presto detto, un vero metodo per gli alunni deve

- essere semplice da capire e da usare,
- non deve basarsi sui tentativi perché sono stancanti, ti fanno quasi sempre sbagliare e avvilire

e soprattutto un metodo:

- deve includere tutti, anche quei bambini che l'intuito ancora non ce l'hanno
- deve essere adatto alla maggior parte dei problemi e non solo alla primaria

Per fortuna il metodo c'è e stai per scoprirlo.
HVP si basa su una semplicissima idea! Pensa quanto sei fortunato tu alla primaria.
È qui che il bambino impara la costruzione della frase: dal pensierino al periodo. Si ricorda ancora cosa è un pensierino, cosa che ragazzi e adulti hanno invece dimenticato.
È un fatto che, se semplifichi la traccia o dai direttamente dati e richiesta, è tutto molto più semplice e predispone alla comprensione della consegna e alla risoluzione.
Tutto è allora sapere come tornare indietro:

- sciogliere il periodo in pensierini
- rintracciare quali di questi forniscono informazioni utili
- motivare quelli che invece descrivono solo il contesto
- riordinarli così come si svolgerebbe la cosa nella realtà
- eseguire infine le azioni individuate nell'ordine cronologico.

E vediamo allora come si snodano i 7 passi per evitare i tre errori classici in cui siamo incappati tutti:

- usare inconsapevolmente il famoso e ingannevole "*leggi bene*!"
- arrendersi all'idea di dover essere un facilitatore, invece che una guida
- affidarsi all'intuito invece di dare un metodo affidabile

così da smettere di credere che, se uno l'intuito non ce l'ha ancora, allora è spacciato!
E incominciamo dai passi 1 a 3 con cui il bambino impara:

4. ***"come"* leggere "*bene/attentamente*" la traccia**

- **in modo attivo sin dal primo rigo del primo problema con l'addizione**
- **senza rischiare il loop del "*non ho capito!" e del "non lo so fare!"***

con la "*ricerca dei verbi*".
così che potrai rendere i tuoi alunni *parte attiva* del processo di lettura e comprensione della traccia e impedire che dubitino delle loro capacità;

Per mostrarti come funziona la ricerca dei verbi, il pilastro di questo metodo, farò un passo indietro al momento in cui, per presentarlo in classe, coniai questo esempio illuminante.

Se dici: "*ho visto Paolo al cinema*" quante azioni hai compiuto?
Se vuoi contare i verbi presenti nella frase, una sola azione! *hai visto* Paolo.
Ma, se ti immagini in questa scena, capisci che un motivo per cui hai visto Paolo al cinema dovrà pur esserci: come è successo? quale potrebbe essere il presupposto?
Magari il più semplice e scontato è: "*sono andato al cinema e ho visto Paolo*".
Qui però le azioni sono due: *andare* e *vedere*.
Inoltre, l'unica azione che c'era, *vedere*, è diventata la seconda che viene compiuta (questo ricordatelo, ci servirà tra poco…!)
Ti starai chiedendo a cosa ci serve individuare i verbi e far emergere quelli nascosti?
Ci serve a dare senso compiuto ed esaustivo all'informazione *ho visto Paolo…,* senza lasciare nulla al caso o alla libera interpretazione di qualcun altro!
Il primo errore madornale che tutti abbiamo subito da sempre è proprio questo "*leggi bene"*: si dà per scontato che la mancata comprensione sia dovuta a mancata attenzione, impegno e concentrazione dell'altro. A ben pensarci è quello che succede in ogni tipo di comunicazione. Sai, quando si dice: *ah! ma allora non hai capito niente!!!* Causa di discussioni e litigi.
Inoltre, il "*leggi bene"*, soprattutto se detto con un certo tono di voce, è un'arma potente che mette in soggezione e genera l'ansia di non essere in grado o non abbastanza intelligente *per*.
La verità è un'altra e diciamocelo chiaramente! la convinzione che, se due non si capiscono, di sicuro dipenda dall'altro e non da chi parla è un luogo comune da abbandonare. Se è importante quanto stiamo dicendo, perché lasciare possibilità di dubbio e di libera interpretazione all'altro? per poi arrabbiarci se ci ha messo del suo?
E come fare per evitarlo? semplice: mettendo in luce tutti i presupposti. E qui siamo indubbiamente in vantaggio rispetto a qualunque altra forma di comunicazione non scientifica: il linguaggio matematico ha un carattere oggettivo, per cui se ti dico *quanto hai avuto di "resto"* il termine specifico *resto* ha lo stesso significato per tutti, in Italia come all'estero, e presuppone la presenza di un *minuendo* e di un *sottraendo*, di un *ordine fra di loro*, e anche dell'operazione *sottrarre*.
Tutti suoi presupposti - verbi nascosti che potremo indicare così:

- *c'è* il minuendo
- *c'è* il sottraendo
- *fai* la sottrazione

Vedi! nessuna ambiguità, a patto che tu la sottrazione già l'abbia studiata. Vale per tutti e non è necessario specificarlo, quanto piuttosto farlo emergere al momento opportuno!
E qui nessuno potrà dire *non ho capito*, a patto che abbia ricevuto gli strumenti del metodo sin dal primo giorno!
E come fare per individuare tutti i presupposti? applicando i primi tre passi del metodo:
Passo 1: leggi la traccia una prima volta tutta intera. In questo modo la mente prende confidenza con il contesto del problema, ma è una lettura passiva.
Passo 2: qui incomincia la fase attiva, devi individuare l'argomento: è geometria? e di che figura si parla? è costo unitario e totale? il peso lordo netto e tara?

Devi saperlo sin dall'inizio, così da procurarti gli strumenti: formule, regole, diagrammi, quello che serve.
Passo 3: armati di una matita e sottolinea tutti i predicati che trovi, e la lettura attiva continua. E poi vai a caccia di verbi che non avresti detto tali, ma sono azioni che, comunque, dovrai compiere se fossi il protagonista del problema.
E a breve ti dico come si fa con un esempio, ma prima devi conoscere il secondo errore madornale che ci ha consegnato la scuola…
Per tanto tempo, là fuori, ci si è concentrati sulla ricerca delle parole chiave, per poi concludere che non sono la soluzione. Una mezza verità!
Come potrebbero non essere importanti, le parole chiave, quando sono il linguaggio specifico della materia! Tuttavia, da sole non possono garantire la comprensione: infatti *resto* è un termine specifico sia della sottrazione che della divisione e non a caso, ovviamente. Calato in un determinato contesto sarà sottrazione e in un altro sarà divisione. Queste ambiguità sono davvero pochine e sempre *più che sensate*, come nel caso del *resto*, ma le devi riconoscere. E per fugare ogni dubbio per te e per i tuoi alunni, ho dotato il metodo di un paragrafo specifico che li sistema, una volta e per sempre.
Vedi perciò come grazie al metodo HVP, potrai rendere i tuoi alunni parte attiva del processo di lettura e comprensione della traccia così da impedire che dubitino delle loro capacità escludendo così sin da subito il rischio del "*non lo so fare*"!
E ora i passi 4 e 5 con cui il bambino impara:

5. **"*come*" individuare con sicurezza le informazioni utili allo svolgimento, soprattutto quelle nascoste**

- **senza confondersi con quelle legate al contesto**
- **e stabilire subito la tipologia di problema proposto**

con la "*classificazione dei verbi*"
così che il bambino arrivi da solo a formulare dati e richieste e a individuare il tipo di operazione necessaria, mentre tu sfuggi definitivamente all'idea di doverlo facilitare;
E anche qui ho un esempio per te. Se ti dico: "*vuoi venire a vedere il mio armadio nuovo in montagna"*? quali saranno le azioni da compiere per rendere effettivo questo invito?
Andando all'essenziale, puoi riformulare il periodo così:

- *vieni in montagna nella mia casa*
- *entra nella camera da letto*
- *potrai vedere l'armadio nuovo".*

Anche qui c'era il non detto: per vedere l'armadio perlomeno dovrai partire per la montagna, entrare in casa e poi in camera da letto, senza soffermarci su tutti i dettagli della pianificazione del viaggio!
La cosa più importante su cui voglio focalizzare le tua attenzione è l'ordine delle azioni: è cronologicamente inverso all'ordine in cui vengono elencate. Prima vai in montagna, poi vedi l'armadio! e la parola montagna dove si trova? alla fine della frase!!!

Per lo più si è portati a credere che le priorità andrebbero comunicate per prime, ma in realtà, non è così. Tendenzialmente noi parliamo al contrario.
Questo è un meccanismo della mente umana che si riversa nel linguaggio: la mente si focalizza sull'ultima parola, l'ultimo concetto della frase, per poi elaborare il resto. Perché a ben vedere, se non ipotizzi il viaggio in montagna, l'armadio nuovo non lo vedrai!
Qui hai ritrovato il valore dei verbi e verbi nascosti, hai anche capito il valore della cronologia delle azioni. Il testo del problema è sempre cronologico nel significato, ma sta al lettore rintracciare l'ordine in cui si susseguono le azioni che in effetti dovrà compiere, immaginandosi come il protagonista di quel problema.
Ti faccio subito vedere come fare, applicando i passi 4 e 5 del metodo al seguente problema, dove abbiamo già sottolineato i verbi:

La mamma <u>va</u> al mercato e <u>compra</u> 4 kg di pere.
Quanto <u>ha speso</u> in tutto la mamma, se le pere <u>costano</u> 2 € al kg?

Passo 4: classifica i verbi trovati in dati, richiesta e procedimento. E procurati lo strumento, diagramma a blocchi, tabella, da usare a seconda dell'argomento.
Vedi però che i verbi *<u>ha speso</u>* e *<u>costano</u>* sono in ordine inverso, perché:

- prima la mamma sa quanto costano le pere (*il dato*)
- poi si chiede quanto spende in tutto (*la richiesta*)

I verbi *<u>va</u>* e *<u>compra</u>* sono invece già in ordine, ma non forniscono info utili al problema. Sono verbi di contesto e vanno utilizzati per una drammatizzazione.
Infine, le informazioni utili sono:

Dati	**Richiesta**
peso = 4kg (*<u>compra</u>*)	costo totale? (*<u>ha speso in tutto</u>*)
costo u. = 2€ al kg (*<u>costano</u>*)	

Passo 5: grazie a uno storytelling, puoi riproporre il problema, modificando solo il contesto e generando un serio allenamento riguardo lo schema costo unitario-costo totale.
Il problema sarebbe identico senza questo contesto? e se la mamma andasse dal fruttivendolo o al centro commerciale? oppure se invece della mamma fosse la zia o Lucia a fare la spesa? e se comprasse arance invece di pere? avevi mai pensato che da una singola *traccia - problema* puoi tu stessa/o generare infinite *tracce-esercizio*, senza bisogno di girovagare nel web alla ricerca di chissà cosa?
In questo modo metti fine definitivamente all'illusione che ogni problema sia diverso dall'altro e che seppure ne hai risolto uno, nulla è detto su quanto sarai in grado di risolverne altri.
Invece puoi formare la corretta idea che esistono categorie di problemi ben definite, sulle quali allenarsi come in palestra, rinforzando il muscolo con sane ripetizioni a difficoltà crescente.

Senza ricorrere a inglesismi, lo story è quello che i bambini chiamano "*facciamo finta che…"* in cui si immedesimano perfettamente in ciò che fanno.
Dà vita al role playing, una strategia usata anche in molti contesti lavorativi: pone la persona al centro della situazione, attivando tutta una serie di processi neurologici emozionali che nella lettura non si attivano da soli. Il cervello non distingue una cosa reale da una cosa vividamente immaginata e fa emergere il famoso *non detto*, i presupposti e l'ordine cronologico delle cose, oltre ai collegamenti tra le varie informazioni.
Inoltre, trova delle giustificazioni logiche a quanto proposto, secondo il proprio personalissimo modo di immaginare. Proprio come fanno i bambini.
La PNL, programmazione neurolinguistica, neuroscienza nata nel secolo scorso (Bandler 2009*)*, spiega molto bene quanto ti ho detto. E così anche in questa seconda fase, il bambino è parte attiva: da solo arriva a formulare dati e richieste, utilizzando le informazioni del contesto per individuare il tipo di operazione da compiere.
E così anche in questa seconda fase, il bambino è parte attiva: da solo arriva a formulare dati e richieste, utilizzando le informazioni del contesto per individuare il tipo di operazione da compiere.
E tu sfuggi all'idea di dover facilitare il tutto, guidandolo invece attraverso i passi del metodo.

E infine i passi 6 e 7 con cui il bambino impara:

6. **"*come*" risolvere un qualsiasi problema**

- **ponendo solide basi allo sviluppo della mentalità del problem solving**
- **adesso e per il futuro**

scomponendo la traccia in "*pensierini*" e usando la strategia del "*passo a gambero".*
così che il bambino è guidato dal principio alla fine, sviluppa autonomia e, cosa più importante di tutte, grazie a te forma o amplifica il suo "*intuito*".
Intuito viene dal latino e significa «*entrar dentro con lo sguardo*», cioè?
Vuol dire che le intuizioni escono dalle nostre esperienze già immagazzinate, dai successi e dai fallimenti. Le neuroscienze dimostrano che il cervello è plastico e che l'intuito si può sviluppare e allenare come in palestra si allena un muscolo! Porre le basi di una buona considerazione di sé e delle proprie capacità sin da piccoli è la garanzia di un adulto equilibrato e sereno. Come affermano Bandler e Fitzpatrick (2006), lo sviluppo dell'autonomia e della fiducia è il risultato di un approccio metodico che guida il bambino attraverso il processo di apprendimento.
E anche qui ho un esempio per te.
Immagina di dover organizzare una cena per i tuoi amici. Decidi di cucinare qualcosa di buono, hai due strade.
La prima: vedi cosa hai in dispensa e ti arrangi come puoi.
La seconda: scegli di fare una bella *carbonara* come la faceva tua madre; quindi, apri il suo ricettario e stabilisci cosa ti serve per quel piatto. Guanciale, olio, uova, bucatini,

sale e formaggio. L'olio, il sale le uova ci le hai in dispensa. Mancano i bucatini, il guanciale e il formaggio.

Esci a fare la spesa e…ora sì che puoi soddisfare la tua richiesta "*pasta alla carbonara*"!

Dimmi: da dove sei partita/o? dai dati in dispensa, o dalla richiesta "*carbonara*"?

E la ricetta ti è servita o avresti potuto affidarti al caso?

E qual è la caratteristica di una ricetta imprescindibile per una buona riuscita?

Tante domande, ma vediamo cosa c'entrano col problema.

Vedi, l'errore più grave nello svolgimento è proprio questo: iniziare il problema dai dati!

Un errore che mostrerà la sua gigantesca gravità man mano che i problemi si fanno più complessi. Finché ci sta una sola operazione, non te ne accorgi.

Già a due operazioni, partire dai dati invece che dalla richiesta, innesca una mentalità errata, fa perdere padronanza dello svolgimento e induce il bambino a credere di non essere capace da solo.

Come succede generalmente? … *"allora, per trovare questo mi serve quest'altro…"* e mentre trovi quest'altro, ti sei dimenticato cosa volessi trovare all'inizio e devi ricominciare daccapo… a meno che non hai qualcuno che ti aiuta a ricordare, insomma un vero rompicapo. Il tutto avviene a voce, senza lasciare una minima traccia di quello che stavi pensando!!!

La verità è che, ormai l'hai capito, il linguaggio dei problemi va introdotto con metodo. Proprio per accostare il bambino dal vissuto all'astrazione matematica, i compiti di realtà della primaria devono agganciarsi alla grammatica del bambino. Quale? i pensierini, soggetto-verbo-complemento, uno per volta in ordine cronologico. Una vera e propria ricetta passo passo, dalla richiesta ai dati, come nella nostra "*carbonara*".

Solo così hai la garanzia di "*impiattare*" quello che vuoi (la richiesta del problema) e non di accontentarti di quello che ti capita (quello che ottieni se parti dai dati)!

Come farlo: con il *passo a gambero*, a ritroso, decidi cosa vuoi cucinare, lo immagini già fatto, e poi risali ai dati, attraverso la ricetta (la traccia, riscritta in pensierini in ordine cronologico) e se ti manca qualcosa, te lo procuri a mano a mano che ti serve! Ti faccio subito vedere come fare, applicando tutti i passi.

Passo 6: riformula la traccia ricavando i pensierini, in modo da utilizzare un verbo per volta.

Passo 7 a gambero: parti dalla richiesta, scrivi l'operazione necessaria a rispondere alla richiesta e infine passa al calcolo per trovare il risultato. Se necessario ripeti più volte il passo a gambero.

Ora sai come, applicando tutti 7 passi, il bambino è attivamente guidato dal principio alla fine, sviluppa autonomia e, cosa più importante di tutte, da forma al suo "*intuito*".

4. Conclusione

Come avrai capito il metodo è un metodo attivo, quindi di teoria ne ho fatta già abbastanza. Mi auguro di averti incuriosito al punto che vorrai tu stesso
Metterti in gioco con la seguente traccia. Come guideresti i tuoi alunni alla risoluzione del seguente problema?
Fabrizia oggi ha venduto tutte le sue 25 cassette di gamberi e ha ricavato 5.000€. Li aveva comprati a 25€ al kg. Ogni cassetta conteneva 25 kg. di gamberi. Quanto ha ricavato per ogni kg. di gamberi? Quanto ha guadagnato in tutto?

E' la stessa che ho proposto ai corsisti al simposio a Chieti e ho riscontrato che, data la complessità della traccia che presenta più richieste anche nascoste, dopo un po' di tempo in cui si sono impegnati a capire il problema e soprattutto a immaginare come avrebbero potuto presentarlo ai propri alunni, hanno davvero molto apprezzato come la guida dei 7 passi li avrebbe favoriti in modo importante. Vuoi scoprirlo?

Per ricevere il video del problema svolto e vedere il metodo in azione, fanne richiesta a: 8inmate@gmail.com

Bibliografia

Eco Umberto, 1979, *Lector in fabula*, Bompiani, Milano

Dilts Roberts, 2004, *Il manuale del coach*, Alessio Roberto Editore, Milano

Bandler Richard, 2009, *Il potere dell'inconscio e della PNL*, Alessio Roberto Editore, Milano

Bandler Richard, Fitzpatrick Owen, 2006, *PNL è libertà*, Alessio Roberto Editore, Milano

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 6, No 1 (2023), 57 - 64

Sulla modellizzazione delle relazioni interpersonali in una classe: dall'approccio tradizionale ai nuovi punti di vista

Parte terza: Alcune modellizzazioni matematiche delle relazioni interpersonali in una classe

Luciana Delli Rocili[1], Antonio Maturo[2], Renata Santarossa[3]

[1]Vicepresidente Mathesis Abruzzo, email lucianadr@live.it
[2]Presidente Mathesis Abruzzo, email antomato75@gmail.com
[3]Presidente APAV, email santarossa.renata@gmail.com

Sunto

Si introducono alcune modellizzazioni matematiche, e relative interpretazioni sociali, del sistema di relazioni che si presenta in una classe, generalizzando quelle classiche di Moreno ed utilizzando vari strumenti matematici come la "teoria dei grafi", la "logica trivalente" e la "logica fuzzy". La teoria svolta può essere utilizzata in situazioni riguardanti un gruppo di studenti oppure un gruppo di docenti frequentanti un corso di aggiornamento, in particolare per comprendere meglio vari aspetti dei gruppi presentati nella parte prima e nella parte seconda del lavoro.

Parole chiave

Relazioni interpersonali in una classe, modellizzazioni con la teoria dei grafi, con la logica trivalente, con la logica fuzzy

1. Formalizzazione del sistema di relazioni di una classe con la teoria dei grafi

Sia $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ l'insieme di studenti in una classe K. Il sistema di relazioni all'interno della classe può essere rappresentato da un insieme $R = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m\}$ di relazioni che tengono conto di almeno tre criteri di associazione: *gioco*, *lavoro*, *tempo libero* (Delli Rocili, Maturo, 2018; Delli Rocili, Maturo, Santarossa, 2022A, 2022B).

Per ogni relazione ρ in S e per ogni $x, y \in S$, scriviamo $x \rho y = 1$ se $x \rho y$ e $x \rho y = 0$ altrimenti.

In particolare, chiamiamo *relazione nulla* la relazione ω tale che $x \omega y = 0$, $\forall x, y \in S$ e *relazione totale* o *unitaria* la relazione υ che soddisfa la condizione $x \upsilon y = 1$, $\forall x, y \in S$.

Per ogni $\rho_j \in R$, abbiamo:

- Il grafo orientato $G_j = (S, \rho_j)$ *associato* a ρ_j, che ha come vertici gli studenti della classe K e come archi le coppie $(x, y) \in S \times S$ tali che $x \rho_j y$.
- La matrice binaria $M_j = (m_{rs}^j)$ *associata* a ρ_j, con $m_{rs}^j = 1$ se $s_r \rho_j s_s$ e $m_{rs}^j = 0$ altrimenti.
- La chiusura simmetrica di ρ_j, definita come l'unione $\rho_j \cup \rho_j^{-1}$, ossia come la relazione σ_j tale che $x \sigma_j y \Leftrightarrow (x \rho_j y$ oppure $y \rho_j x)$. Il grafo $H_j = (S, \sigma_j)$ è il grafo non orientato associato a ρ_j (ed a σ_j).
- La matrice binaria $N_j = (n_{rs}^j)$ *associata a* σ_j.

Per ogni coppia ordinata (x, y) di studenti, se esiste un cammino di lunghezza k che va da x a y, ma non un cammino di lunghezza k-1, diciamo che la relazione ρ_j (risp. σ_j) da x a y vale al livello k e scriviamo $x \rho_j^k y$ (resp. $x \sigma_j^k y$). Ovviamente, poiché ci sono n elementi, il livello massimo di una relazione è minore o uguale a n-1. Indichiamo con ρ_j^0 (risp. σ_j^0) la relazione identica.
Per ogni relazione ρ in S, sono particolarmente significative le relazioni associate a ρ:
(a) ***Inversa*** di ρ, denotata con ρ^{-1}, tale che $x \rho^{-1} y$ se e solo se $y \rho x$;
(b) ***Opposta*** di ρ, denotata con $\sim\rho$, tale che $x \sim\rho\, y = 1$ se e solo se $x \rho y = 0$.

Volendo studiare gli effetti congiunti di due o più relazioni in S bisogna considerare alcune operazioni fra relazioni. Se α e β sono due relazioni in S si definiscono:
(1) La ***disgiunzione*** o ***unione*** $\alpha \cup \beta$, tale che, per ogni $x, y \in S$,
$x (\alpha \cup \beta) y = \max\{x \alpha y, x \beta y\}$;
(2) La ***congiunzione*** o ***intersezione*** $\alpha \cap \beta$, tale che,
$x (\alpha \cap \beta) y = \min\{x \alpha y, x \beta y\}$;
(3) L'***implicazione*** $\alpha \rightarrow \beta$, tale che, per ogni $x, y \in S$,
$x (\alpha \rightarrow \beta) y = 1$ se $x \alpha y \leq x \beta y$; $x (\alpha \rightarrow \beta) y = 0$ se $x \alpha y > x \beta y$.

Un primo studio è verificare se la classe è divisa in gruppi $\{K_1, K_2, \dots K_v\}$ tali che tali che elementi di gruppi distinti non sono in relazione tra di loro. Ciò porta alla considerazione delle componenti connesse dei grafi $G_j = (S, \rho_j)$ e $H_j = (S, \sigma_j)$.
Poniamo $\rho_j^n = \cup \{\rho_j^k, k = 0, 1, 2, \dots, n\text{-}1\}$, $\sigma_j^n = \cup \{\sigma_j^k, k = 0, 1, 2, \dots, n\text{-}1\}$.

Le relazioni ρ_j^n e σ_j^n sono, rispettivamente, le *chiusure riflessive* e *transitive* di ρ_j e σ_j. Quindi l'insieme quoziente S/ρ_j^n è l'insieme delle componenti fortemente connesse di $G_j = (S, \rho_j)$, mentre S/σ_j^n è l'insieme delle componenti connesse.

Se (S, ρ_j) è un grafo orientato fortemente connesso, allora in qualche modo la classe scolastica può essere considerata *equilibrata* rispetto alla relazione ρ_j; se invece ci sono più componenti fortemente connesse, la classe è divisa ed è necessario intervenire per migliorare le relazioni fra gli studenti.
Inoltre, se (S, σ_j) è un grafo connesso vi è qualche tipo di connessione per ogni coppia di studenti, ma tale connessione può avere un significato recondito, di interpretazione non banale. In alcuni casi può rappresentare un legame a senso unico, ad esempio un ordinamento in S.
In conclusione, per ogni relazione ρ_j, il numero di componenti connesse e il numero di componenti fortemente connesse indica, da due punti di vista diversi, il *grado di frammentazione* della classe rispetto a ρ_j.

In (Delli Rocili, Maturo, Santarossa, 2022A) sono stati definiti:

- il *grado di ricettività sociale* o *prestigio* di un elemento x di S, rispetto ad una attività A, come il numero di scelte ricevute da x;
- il *grado di espansione socio-affettiva* o *integrazione* di x, rispetto ad A, come il numero di scelte fatte da A.

Ad ogni attività A si può associare una relazione ρ_A definita come segue: per ogni x, y appartenenti ad S, x ρ_A y se e solo se x sceglie y per l'attività A.
Misure più generali del grado di prestigio e del grado di integrazione di ogni studente rispetto ad una relazione ρ_j (associata ad una attività A_j) si ottiene considerando anche i livelli di ordine k > 1 di ρ_j. Per ogni studente x e per ogni relazione ρ_j, sia $c_j^k(x)$ il numero di studenti y della classe, diversi da x, tali che x ρ_j^k y e sia $p_j^k(x)$ il numero di studenti z, diversi da x, tali che z ρ_j^k x.
Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ sono numeri reali non negativi soddisfacenti le condizioni:

(1) $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_{n-1}$;
(2) $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} = 1$;
(3) α_k è il grado di importanza attribuito al livello k della relazione ρ_j;

allora possiamo definire i *gradi globali* di integrazione e prestigio di x per mezzo delle formule:

$c_j^n(x) = \alpha_1 c_j^1(x) + \alpha_2 c_j^2(x) + \ldots + \alpha_{n-1} c_j^{n-1}(x)$; (grado globale di integrazione)

$p_j^n(x) = \alpha_1 p_j^1(x) + \alpha_2 p_j^2(x) + \ldots + \alpha_{n-1} p_j^{n-1}(x)$. (grado globale di prestigio)

Definiamo i numeri $c_j^k(x)/(n-1)$ e $p_j^k(x)/(n-1)$, appartenenti all'intervallo [0, 1], rispettivamente, come indice *globale di integrazione* e *indice globale di prestigio*.

Ovviamente, se si vuole dare importanza solamente ai livelli di ordine k minore o uguale ad un intero h fissato, si pone $\alpha_k = 0$ per $k > h$. Se $h = 1$ allora $c_j^n(x)$ e $p_j^n(x)$ si riducono, rispettivamente, al *grado di integrazione* e al *grado di prestigio* di x.

Altre informazioni sulla struttura dell'insieme delle relazioni in una classe si ottengono dall'analisi delle relazioni atomiche di R. Si dicono *relazioni atomiche* o *elementari* di R le relazioni non nulle di tipo $\varphi_1 \cap \varphi_2 \cap ... \cap \cap \varphi_m$ con $\varphi_i \in \{\rho_i, \sim\rho_i\}$. Le relazioni atomiche sono a due a due disgiunte e la loro unione è uguale alla relazione unitaria. Esse permettono di individuare particolari sottogruppi sociali del gruppo S degli studenti.

2. Una modellizzazione delle relazioni in una classe con la logica a tre valori

Le considerazioni svolte nel paragrafo 4, in cui per ogni relazione ρ e per ogni coppia ordinata di studenti (x, y) sono considerate le due possibilità: x sceglie y oppure x rifiuta y, ci portano a ritenere che una modellizzazione più efficace di quella classica si può ottenere nell'ambito della logica a tre valori. A partire dai risultati presentati da Reichenbach (1942), Fadini (1979), de Finetti (1970), Gentilhomme (1968), Heyting (1971), Maturo (1993) e altri, possiamo assumere che nell'insieme S degli studenti (o dei docenti frequentanti un corso) sia definito un insieme R di relazioni a tre valori di verità: T = "vero", F = "falso", I = "indeterminato".
Per ogni $x, y \in S$ e per ogni $\rho \in R$, assumiamo che:
$x \rho y = T$ se x sceglie y; $x \rho y = F$ se x rifiuta y; $x \rho y = I$ se x non sceglie e non rifiuta y. La notazione di "indeterminato", scelta da Reichenbach, può avere varie interpretazioni. Ad esempio, nella logica intuizionistica di Heyting, significa che non è dimostrabile né che valga il valore T, né che valga il valore F. La logica intuizionistica sembra molto adatta ai problemi delle relazioni sociali in una classe, perché per una persona non scelta né rifiutata non è stato dimostrato né che la persona è gradita né che non è gradita.
Si introduce un ordinamento fra i valori di verità ponendo F < I < T. Per una elaborazione numerica delle relative conviene attribuire dei valori numerici a F, I, T, ponendo F = 0, I = i, T = 1, dove i è un opportuno numero reale compreso fra 0 e 1, dipendente dal valore che vogliamo attribuire *all'indifferenza*, ossia al fatto di non essere né scelti, né rifiutati. In alcuni casi è comodo porre i = 1/2, ma solo in circostanze particolari.
Volendo studiare gli effetti congiunti di due o più relazioni a tre valori in S bisogna considerare alcune operazioni fra relazioni trivalenti. La disgiunzione e la congiunzione sono definite in maniera formalmente analoga al caso delle relazioni bivalenti.

Se α e β sono due relazioni a tre valori in S si definiscono:

- La *disgiunzione* o *unione* $\alpha \cup \beta$, tale che, per ogni x, y$\in$S,
  $x\ (\alpha \cup \beta)\ y = \max\{x\ \alpha\ y, x\ \beta\ y\}$;
- La *congiunzione* o *intersezione* $\alpha \cap \beta$, tale che,
  $x\ (\alpha \cap \beta)\ y = \min\{x\ \alpha\ y, x\ \beta\ y\}$;

Per quanto riguarda l'implicazione $\alpha \to \beta$, la condizione, per ogni x, y$\in$S,

$x\ (\alpha \to \beta)\ y = 1$ se $x\ \alpha\ y \leq x\ \beta\ y$; $x\ (\alpha \to \beta)\ y = 0$ se $x\ \alpha\ y > x\ \beta\ y$;

vale (per il principio di prolungamento) se $x\ \alpha\ y$, $x\ \beta\ y$ appartengono a $\{0, 1\}$.

In Reichenbach, sono definite *l'implicazione standard* e *l'implicazione alternativa* che estendono la condizione $x\ (\alpha \to \beta)\ y = 1$ se $x\ \alpha\ y \leq x\ \beta\ y$ anche al caso in cui uno almeno fra $x\ \alpha\ y$, $x\ \beta\ y$ è indeterminato. Le due implicazioni differiscono per il significato da attribuire ai casi rimanenti T$\to$I e I$\to$F. L'implicazione standard attribuisce ad entrambi il significato I, mentre per l'implicazione alternativa T$\to$I = F e I$\to$F = T.

Nell'interpretazione del significato logico dell'evento condizionato come ente a tre valori (de Finetti 1970; Maturo 1993) l'implicazione è sostituita dalla quasi-implicazione di Reichenbach, in cui T$\to$T = T, T$\to$F = F e in tutti gli altri casi si ottiene il valore I.

Il problema di vedere quale dei tre tipi di implicazione o quasi implicazione sia più adeguato, per l'analisi delle relazioni in una classe, è oggetto di ricerca.

Per quanto riguarda la negazione di una relazione, la definizione più accettata è quella di "negazione diametrale", in cui ~T = F, ~F = T, ~I = I (Fadini, 1979; de Finetti 1970; Maturo 1993). Essa soddisfa alla regola dei segni, ~(~H) = H, per ogni H$\in$$\{F, I, T\}$.

Essa però non vale nella logica intuizionistica di Heyting.

Diversi tipi di negazione (Reichenbach ,1944, p. 151) sono la "negazione completa" in cui ~T = I, ~F = T, ~I = T e la "negazione ciclica", che assume ~T = I, ~F = T, ~I = F.

Anche il problema di vedere quale dei tre tipi di negazione sia più adeguato, per l'analisi delle relazioni in una classe, è oggetto di ricerca.

In ogni caso, per ogni x$\in$S, e per ogni relazione $\rho_j \in R$ possiamo definire i numeri:

- $c_j^1(x)$ = numero di elementi y per cui $x\ \rho_j\ y = 1$, detto "*grado di integrazione*" di x;
- $c_j^{1*}(x)$ = numero di elementi y per cui $x\ \rho_j\ y = i$, detto "*grado di debole* (o *indeterminata*) *integrazione*" di x;
- $c_j^{1**}(x)$ = numero di elementi y per cui $x\ \rho_j\ y = 0$, detto "*grado di non-integrazione*" di x;
- $p_j^1(x)$ = numero di elementi y per cui $y\ \rho_j\ x = 1$, detto "*grado di prestigio*" di x;
- $p_j^{1*}(x)$ = numero di elementi y per cui $y\ \rho_j\ x = i$, detto "*grado di debole* (o *indeterminato*) *prestigio*" di x;

- $p_j^{1**}(x)$ = numero di elementi y per cui y ρ_j x = 0, detto “*grado di non-prestigio*” di x;

Valgono le condizioni:
$c_j^1(x) + c_j^{1*}(x) + c_j^{1**}(x) = n\text{-}1$, $p_j^1(x) + p_j^{1*}(x) + p_j^{1**}(x) = n\text{-}1$.
In corrispondenza, per ogni $\rho_j \in R$, otteniamo i seguenti indici:

- $\gamma_j^1 = c_j^1(x)/(n\text{-}1)$, $\pi_j^1 = p_j^1(x)/(n\text{-}1)$, detti, rispettivamente, *indice di integrazione* e *indice di prestigio*;
- $\gamma_j^{1*} = c_j^{1*}(x)/(n\text{-}1)$, $\pi_j^{1*} = p_j^{1*}(x)/(n\text{-}1)$, detti, rispettivamente, *indice di debole integrazione* e *indice di debole prestigio*;
- $\gamma_j^{1**} = c_j^{1**}(x)/(n\text{-}1)$, $\pi_j^{1**} = p_j^{1**}(x)/(n\text{-}1)$, detti, rispettivamente, *indice di non-integrazione* e *indice di non-prestigio*.

Vi possono essere varie possibili formalizzazioni con la teoria dei grafi. Una può essere quella di considerare, per ogni $\rho_j \in R$, un grafo orientato completo con vertici gli studenti e assegnare ad ogni arco (x, y) il valore assunto da x ρ_j y, appartenente all’insieme {0, i, 1}. In corrispondenza si ottiene una socio-matrice i cui elementi appartengono a {0, i, 1}. Un’alternativa è associare ad ogni arco (x, y) una coppia di numeri $(a, b) \in \{0, 1\}^2$, tali che a = 0, 1 a seconda che se x non sceglie o sceglie y, mentre b = 0, 1, a seconda che x non rifiuta o rifiuta y. Evidentemente $a + b \leq 1$ ed è impossibile il caso in cui (a, b) = (1, 1). In corrispondenza si ottiene una doppia socio-matrice.
Con qualche cautela si possono indagare i significati dei cammini nel grafo ottenuto e ricavare formule che estendono quelle del paragrafo precedente.

3. Conclusioni e prospettive di ricerca

Può essere significativa indagare sull’estensione al caso fuzzy delle teorie dei paragrafi precedenti. Si può generalizzare la teoria del paragrafo 1, assumendo che x ρ_j y sia uguale ad un numero reale appartenente all’intervallo [0, 1]. La generalizzazione della teoria del paragrafo 2 si ottiene assumendo che x ρ_j y sia rappresentata da una coppia (a, b) di numeri reali appartenenti all’intervallo [0, 1] e soddisfacenti la condizione $a + b \leq 1$, con il significato che a misura il grado in cui x sceglie y, mentre b misura il grado in cui x non sceglie y rispetto alla relazione data.

Bibliografia

De Finetti B., (1970), Teoria delle probabilità, Einaudi, Torino.

Delli Rocili L., Maturo A., (2013), Teaching mathematics to children: social aspects, psychological problems and decision-making models, in *Interdisciplinary approaches in social sciences*, Editura Universitatii A.I. Cuza, Iasi, Romania, pp.243-255

Delli Rocili L., Maturo A., (2015), Interdisciplinarità, logica dell'incerto e logica fuzzy nella scuola primaria, *Science & Philosophy*, 3(2), pp.11-26.

Delli Rocili L., Maturo A., (2017), Social problems and decision making for teaching approaches and relationship management in an elementary school, in *Mathematical-Statistical models and qualitative theories for economic and social sciences*, Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol. 104, Springer, pp. 81-94.

Delli Rocili L., Maturo A., (2019), Problems and decision-making models in the first cycle of education, in *Qualitative and Quantitative Models in Socio-Economic Systems and Social Work*, Series in System, Decision and Control, Springer, pp.243-256.

Delli Rocili L., Maturo A., Santarossa R., (2022A), Sulla modellizzazione delle relazioni interpersonali in una classe: dall'approccio tradizionale ai nuovi punti di vista. Parte prima: analisi delle relazioni interpersonali in una classe, *Mondo Matematico e Dintorni*, Vol.5, No 1, 47- 54.

Delli Rocili L., Maturo A., Santarossa R., (2022B), Sulla modellizzazione delle relazioni interpersonali in una classe: dall'approccio tradizionale ai nuovi punti di vista. Parte seconda: analisi delle relazioni interpersonali in un gruppo di docenti, *Mondo Matematico e Dintorni*, Vol.5, No 2, 67-78.

Fadini, A., (1979), *Introduzione alla teoria degli insiemi sfocati*, Liguori, Napoli.

Gentilhomme, M.Y., (1968), Les ensembles flous en linguistiques, *Cahiers de linguistique theorique et appliquée*, Bucarest, (5) 47, pp. 47-65.

Heyting A., (1971*), Intuitionism: an introduction*, North -Holland Publishing Company, Amsterdam

Hoskova-Mayerova, Š., Maturo, A. (2016). *An analysis of Social Relations and Social Group behaviors with fuzzy sets and hyperstructures*, International Journal of Algebraic Hyperstructures and its Applications. 2016, 2(1), pp. 91-99.

Hoskova-Mayerova Š., Maturo A., (2017). *Fuzzy Sets and Algebraic Hyperoperations to Model Interpersonal Relations*, in Recent Trends in Social Systems: Quantitative Theories and Quantitative Models Studies in Systems, Series: Decision and Control, Vol. 66, Springer, pp. 211-222.

Hošková-Mayerová, Š., Maturo, A., (2018a). *Decision-making Process Using Hyperstructures and Fuzzy Structures in Social Sciences*, in Soft Computing Applications for Group Decision-making and Consensus Modeling, Series: Studies in Fuzziness and Soft Computing Vol. 357, pp. 103-112.

Hošková-Mayerová, Š., Maturo, A., (2018b). *Algebraic Hyperstructures and Social Relations*, Italian Jurnal of Pure and Applied Mathematics - N. 39–2018 (701–709)

Hošková-Mayerová, Š., Maturo, A., (2019). On some applications of fuzzy sets and algebraic hyperstructures for the management of teaching and relationships in schools, in Series in System, Decision and Control, Springer, to appear

Klir G, Yuan B. (1995). *Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and applications*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Maturo A., Tofan I. (2016), *Fuzziness Teorie e applicazioni*, Aracne Editrice, Roma

Maturo, A., Porreca, A., (2016), Algebraic hyperstructures and fuzzy logic in the treatment of uncertainty. Science&Philosophy. 4(1), 31–42.

Maturo A., Sciarra E., Tofan I. (2008). A formalization of some aspects of the Social Organization by means of the fuzzy set theory, *Ratio Sociologica* 1(2008), 5–20.

Moreno J.L., (1953). *Who Shall Survive*? New York: Beacon Press.

Moreno J.L., (1951). *Sociometry. Experimental Methods and the Science of Society*, New York: Beacon Press, 1951.

Ragin C.C. (2000). Fuzzy-Set Social Science, University Chicago Press, Chicago, USA.

Reichenbach H., (1944), *Philosophic foundation of quantum mechanics*, University of California Press, Bercheley and Los Angeles.

Ross T. J. (1995). *Fuzzy logic with engineering applications*, McGraw-Hill, New York.

Russell B., (1962), *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milano.

Zadeh L. A. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*. 8. 338-358.

Zadeh L. A. (1975), The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Inf Sci 1975; 8 Part I:199–-249, Part II 301–357, Part III. Inf Sci 1975; 9: 43–80.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 6, No 1 (2023), 65 - 68

Sui criteri di divisibilità

Franco Eugeni

Ricordando il prof. Bruno Bizzarri[1]

di Torano Nuovo (TE - Abruzzo)

Sunto Dopo un richiamo sui criteri di divisibilità più noti, si esaminano i criteri di divisibilità per 7. Oltre al classico criterio di Gauss si presentano i recenti criteri di Sence-Zibowski e di Bruno Bizzarri.

Parole Chiave Criteri di divisibilità. Recenti criteri di divisibilità per 7.

1. I criteri di divisibilità più noti

Nella Teoria elementare dei numeri i **criteri di divisibilità** sono delle regole che permettono di verificare la divisibilità di un dato numero intero per un altro (usualmente minore) senza eseguire un modo diretto l'operazione di divisione. Tali criteri sono ben utilizzati nell'insegnamento nella Scuola Media e riportate sui libri del settore. Due primi casi semplicissimi sono il criterio di divisibilità per 2 e per 3. Ricordiamo che:

1.- *Un numero naturale N è divisibile per 2 se l'ultima sua cifra*[2] *è 0 o un numero pari.*

2.- Un numero naturale N è divisibile per 3 se la somma delle sue cifre, eventualmente reiterata, è un ovvio multiplo di 3.

Esempio 1.1. Il numero 9810450367200 ha per somma delle cifre 9+8+1+4+5+3+6+7+2 = 45 reiterando 45 ho 4+5 = 9 chiaro multiplo di 3.

Un più veloce criterio di divisibilità per 3 consiste nel poter raggruppare le cifre non nulle in somme pari a 9. Da 9810450367200 passo a 814572 (senza zeri, 3, 6, 9) che ripartisco in somme di 9:

(8+1) – (4+5)– (7+2)

Così: 451, 335, 45727 non sono divisibili per 3, come si vede ad occhio, mentre 33339621, 5554418, 77722114455669 lo sono sempre come si vede ad occhio.

---

[1] Bruno Bizzarri (1950-2002) mio studente nel 1970, quando insegnavo Matematiche Complementari ai Matematici a L'Aquila, poi professore di ruolo nelle Medie, inseguiva il sogno di trovate una lista di primi consecutivi di lunghezza superiore a quella di 40 trovata da Eulero, ed operava cpn ricrche essenzialmente sperimentali su lunghi elenchi di numeri , prodotti da qualche algoritmo. Congetturò che tutti i primi gemelli fossero del tipo $6k \pm 1$ (k intero).

[2] Nel caso in cui il criterio parli di "ultime cifre", si intende considerare sempre quelle più a destra: le unità, le decine, etc.

Tutti i vari criteri nelle loro varie forme, consistono di solito in opportune manipolazioni sulle cifre che compongono il numero e quindi dipendono dalla base in cui il numero viene espresso. Naturalmente noi tratteremo, come è usuale, solo numeri interi in rappresentazione decimale. L'utilizzo dei criteri dovrebbero presentare interesse nei casi in cui i calcoli potessero essere abbastanza semplici da potersi fare a mente o, in ogni caso, potessero essere più veloci rispetto, alla divisione diretta, diversamente perdendo il loro interesse.

Da un esame dei testi scolastici troviamo sempre i criteri di divisibilità per i numeri che vanno da 2 a 12, mancando sempre il criterio di divisibilità per 7. A titolo di ricordo riportiamo i criteri noti.

3.- Un numero naturale N è divisibile per 4 se le ultime due cifre sono 00 o sono un multiplo di 4.

4.- Un numero naturale N è divisibile per 5 se l'ultima cifre è 0 o 5.

5.- Un numero naturale N è divisibile per 6 se è divisibile per 2 e per 3.

6.- Un numero naturale N di almeno tre cifre è divisibile per 8 se termina con tre zeri o se è divisibile per 8 il numero formato dalle sue ultime tre cifre. Ma un criterio generale è controllare se è divisibile per 2 tre volte consecutive.

7.- Un numero naturale N è divisibile per 9 se la somma delle sue cifre , eventualmente reiterata, è un ovvio multiplo di 9.

8.- Un numero naturale N è divisibile per 10 se la sia ultima cifra è 0.

9.- Un numero naturale N è divisibile per 11 se la differenza (presa in valore assoluto), fra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari, è 0 oppure un ovvio multiplo di 11.

***10.-** Un numero naturale N è divisibile per 12 se è divisibile per 3 e per 4.*

2. Criterio di Gauss di divisibilità per 7

I precedenti criteri derivano dal teorema generale di divisibilità, teorema che nasce da una teoria di Gauss molto complessa, che non ci sembra il caso di esporre in questo contesto. Da questa teoria di Gauss emerge un criterio di divisibilità per 7, molto complicato, ed è questa la ragione per la quale, nei libri scolastici questo criterio è saltato.

Criterio della divisibilità per 7 (secondo Gauss): *Un numero naturale N è divisibile per 7 se scritto a rovescio e combinato scalarmente per la sequenza (1,3,2,-1,-3,-2) e divisibile per 7.*

Esempio 2.1.- Il numero N ha esattamente 6 cifre, sia N =364595. Calcolo il prodotto scalare del numero N rovesciato (695463) per la sequenza, cioè:

(5,9,5,4,6,3) x (1,3,2,-1,-3,-2)= 5x1 + 9x3+5x2+4x(-1)+5x(-3)+3x(-2) = 42-28 = 14 = 2X7

Dunque il numero N è divisibile per 7!

Esempio 2.2.- Il numero N ha più di 6 cifre, sia N =49.614.138. Calcolo il prodotto scalare del numero N rovesciato (83141694) per la sequenza allungata, per ripetizione, di due cifre cioè:

(8,3,1,4,1,6,9,4)X(1,3,2,-1,-3,-2, **1,3**) = 21 = 3x7

Esempio 2.3.- Il numero N ha meno di 6 cifre, sia N =2191. Calcolo il prodotto scalare del numero N rovesciato (1912) per la sequenza accorciata ai soli primi 4 elementi (1,3,2,-1) cioè:

(1,9,1,2)X (1,3,2,-1) = 28 = 4x7!

Il criterio di Gauss per il numero 7 è veramente complesso!

3. Nuovi criteri di divisibilità per il numero 7

Il seguente criterio è presentato dal matematico David Sence in The Mathematical Gazette del 1956, anche se come appare in Eugene Dickson, History of Theory of Numbers, fu scoperto dal matematico russo Andrej Zibowski[3] nel 1861.

Criterio della divisibilità per 7 (secondo Sence-Zibowski): *Un numero naturale N è divisibile per 7 se tale è il numero M ottenuto dal precedente togliendo da esso l'ultima cifra e sottraendogliela moltiplicata per 2!*

Esempio 3.1. Il numero N = 2191 è divisibile per 7 se lo è il numero M = 219-2x1 = 217, che lo è se il numero M' = 21-2X7 = 7, che lo è effettivamente.

Esempio 3.2. N =49.614.138 è divisibile pe 7 se lo sono in successione i numeri:

4.961.413-2x8 = 4.961.397, 496.139 - 14 = 496.125 , 4.9612-10 = 49.602 , 4960 – 4 =4956

495-12 = 483 , 48-6 = 42 = 6x7 che lo è , come lo sono tutto quelli considerati.

Criterio della divisibilità per 7 (secondo Bizzarri[4]): *Un numero naturale N è divisibile per 7 se tale è il numero M ottenuto dal precedente togliendo da esso le ultime due cifre e sommandole al doppio della parte residua.*

[3] A. Zibowski, Bull. Acad. Imp. Sci. Saint–Petersbourg, 3 (1861). Cf. L.E. Dickson, History of the Theory of Numbers, Vol. 1, p. 339, disponibile gratuitamente nell'Internet Archive all'indirizzo: https://archive.org/details/historyoftheoryo01dick/page/338/mode/2up (visitato il 31/10/2022).

[4] Bizzarri ha trovato il criterio secondo suoi metodi empirici. La dimostrazione del criterio di Bizzarri e la prova della sua generalizzazione a divisori diversi dal 7 , riportata al paragrafo successivo ed esposta nelle conclusioni è mia, ed è inedita.

Esempio 3.3.- N =49.614.138 è divisibile per 7 se lo sono in successione i numeri:

38+ 2X496.141 = 992.320 , 20+ 2X9.923 = 19.866 , 66+2X198 = 462 , 62+2x4 = 70

che lo è , come lo sono tutto quelli considerati.

Il procedimento di Bizzarri è chiaramente più breve di quello di Sence-Ziboski! Entrambi i processi di Sence-Ziboski, e di Bizzarri, sono stato generalizzati di Sergio Invernizzi[5], nel seguente.

Criterio della divisibilità per 7 (secondo Invernizzi) Sia dato un intero $N \geq 2$, con n cifre nel suo sviluppo in base 10. Scelto un intero k ($1 \leq k < n$) sia a il numero definito dalle ultime k cifre di n, e sia b il numero definito dalle cifre restanti[6], segue allora $N = 10^k b + a$. Orbene N è divisibile per 7 se e solo se lo è

4. La dimostrazione del Criterio di Bizzarri ed oltre

Sia dato un intero N di n > 2 cifre, rappresentato in base 10 da:

$N = a_n 10^n + \dots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = b\, 10^2 + a$

Dove si è posto $a := a_1 10 + a_0$, $b := a_n 10^{n-2} + \dots + a_2$. Sia ora d (in particolare 7) un divisore di N, dunque:

$N = \alpha\, d$.

Considero il numero formato dalle prime due cifre di N (cioè a) sommato a k volte[7] la parte residua delle cifre (cioè b):

$M = a + k\, b$

Ricerchiamo le condizioni su k affinché d divida M, cioè tali che sia:

$M = a + k\, b = \beta\, d$

segue, essendo : $N = b\, 10^2 + a = \alpha\, d$, e quindi

$a = M = N - b\, 10^2 + k\, b = \alpha\, d - b\, (10^2 - k)$

[5] S. Invernizzi, comunicazione personale.
[6] Ad esempio, se N = 631534, scegliendo k = 3 si ha a = 534, b = 631 e quindi $N = b\text{x}10^3 + a = 631\text{X}10^3 + 534$.
[7] Si noti che per la prova del criterio del 7, il teorema va provato con k = 2, qui siamo in una situazione più generale.

INDICE

Istruzioni per gli autori

Chi desidera inviare un articolo per la Rivista Mondo Matematico e Dintorni deve seguire i seguenti criteri per il formato:

1. L'articolo deve essere in word, carattere Times New Roman, 12 p; il titolo dell'articolo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 18 p.
2. I margini sono di 3 cm sotto, sopra, a destra e a sinistra. L'interlinea è multipla 1,15 p.
3. L'articolo deve essere diviso in paragrafi numerati, di cui il primo è una introduzione e l'ultimo una conclusione. I paragrafi vanno separati da due interlinee. Il titolo di ogni paragrafo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 14 p.
4. Ogni articolo deve avere una lunghezza minima di 6 pagine e non deve superare, di regola, le 14 pagine.
5. Dopo l'ultimo paragrafo va inserita la bibliografia. Almeno 4 fra libri e articoli nel formato cognome, nome (anno), titolo dell'articolo, titolo del libro o rivista, editore, città.
6. La bibliografia non va numerata. I riferimenti bibliografici nel testo devono avere la forma (cognome dell'autore, anno).
7. Non mettere note bibliografiche a piè di pagina. Tutta la bibliografia va messa alla fine.
8. I disegni vanno fatti con programmi di elaborazione grafica (non in Word!) e salvati in jpg o in png.
9. L'articolo deve essere inviato in formato doc o docx ed in formato pdf per il controllo dell'impaginazione e deve avere un numero pari di pagine.

Tutti gli articoli ricevuti saranno esaminati da due revisori che invieranno il loro parere sulla pubblicazione ed eventuali proposte di correzioni ai direttori editoriali.
Gli articoli possono essere inviati ad uno dei seguenti indirizzi email:

antomato75@gmail.com

lucianadr@live.it

santarossa.renata@gmail.com

mandronemarioinnocenzo@gmail.com

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo
ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola
(Decreto del 24/07/2009 e Direttiva 170/2016)

www.apav.it