Volume 5 Numero 2 2022

MONDO MATEMATICO E DINTORNI

Rivista per i Docenti del Primo Ciclo di Istruzione

Direttori Editoriali
Luciana Delli Rocili
Antonio Maturo
Renata Santarossa

APAV

www.apav.it

ISSN 2612 - 2596 [on line] ISSN 2612 - 1719 [testo stampato]

Volume 5 (2022) Numero 2

MONDO MATEMATICO E DINTORNI

Rivista per i Docenti del Primo Ciclo di Istruzione

Direttori Editoriali
Luciana Delli Rocili
Antonio Maturo
Renata Santarossa

Direttore Responsabile
Bruna Di Domenico

Consulenti Editoriali
Franco Blezza
Diana Cipressi
Franco Eugeni
Mario Innocenzo Mandrone
Ezio Sciarra

Manager di redazione
Fabio Manuppella

Copertina
Fabrizio Di Nicola

Comitato Scientifico/Editoriale
Andrea Bertoni, Ferdinando Casolaro, Angela Chiefari, Bruno Iannamorelli, Cristina Ispas, Domenico Lenzi, Domenico Marconi, Sarka Mayerova, Rosalia Pedone, Franca Rossetti, Anna Vaccarella, Annamaria Viceconte, Thomas Vougiouklis

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo

COPYRIGHT © 2018 Accademia Piceno Aprutina dei Velati in Teramo.
All rights reserved

Editore: Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo (APAV)
Via del Concilio n.24, Pescara, Italy

Codice Fiscale: 92036140678 Partita IVA: 02184450688

Codice destinatario per fatturazione elettronica: M5 UXCRL

IBAN: IT 57 K 02008 15408 000104232062 BIC Swift LINCRITM1760
Banca UNICREDIT - Agenzia Pescara UMBERTO 00760

Periodicità: semestrale

Siti web: www.apav.it; www.eiris.it

Email: apavsegreteria@gmail.com, apavsegreteria@pec.it

ISSN: 2612 - 1719 (testo stampato)
ISSN: 2612 - 2596 (online)

Autorizzazione del Tribunale di Pescara del 9/4/20l9
N. 741/2019 V.G.
N. 03/2019 Reg. Stampa

La Rivista è pubblicata sotto la Licenza Creative Commons Attribuzione 3.0 Italia

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 5, No 2 (2022), 3-4

Prefazione

I nostri studenti ci lanciano un grido d'allarme. L'escalation di comportamenti problematici, dal bullismo al disagio psicologico, riflette un profondo malessere che va oltre semplici atti di ribellione. Dietro questi segnali si nasconde, da parte degli studenti e delle studentesse, un bisogno di essere compresi e valorizzati nella loro complessità.

L'APAV, da sempre in prima linea per l'innovazione nella formazione, ha individuato nel benessere emotivo la chiave per un apprendimento significativo e duraturo. Le ricerche scientifiche più recenti confermano che le emozioni influenzano profondamente i processi cognitivi. Un clima emotivamente positivo in classe favorisce la concentrazione, la motivazione e la costruzione di significati autentici.

Questa edizione di Mondo Matematico e Dintorni nasce dalla necessità di fornire ai docenti gli strumenti e le competenze per rispondere a questa nuova sfida educativa.

Attraverso una serie di esempi pratici e strategie innovative, offriamo ai nostri lettori l'opportunità di:

- **Sviluppare un clima di classe positivo e inclusivo:** Imparerai a creare un ambiente di apprendimento sicuro e accogliente, dove ogni studente si senta valorizzato e motivato.
- **Promuovere le competenze socio-emotive:** Scoprirai come sviluppare l'empatia, l'autoconsapevolezza e le abilità sociali nei tuoi studenti.
- **Integrare le nuove tecnologie in modo efficace:** Esploreremo insieme le potenzialità delle tecnologie digitali per personalizzare l'apprendimento e motivare gli studenti.
- **Adottare metodologie didattiche innovative:** Ti presenteremo una vasta gamma di approcci didattici che favoriscono la partecipazione attiva e la costruzione della conoscenza.

Siamo convinti che un docente che sappia valorizzare le emozioni e le individualità dei suoi studenti sia in grado di fare la differenza.

Le ricerche neuroscientifiche e pedagogiche degli ultimi decenni hanno ampiamente dimostrato il legame indissolubile tra emozioni e apprendimento: un clima emotivamente positivo in classe favorisce la concentrazione, la motivazione e la costruzione di significati duraturi. Le più recenti teorie pedagogiche evidenziano che l'insegnamento è un atto comunicativo che coinvolge non solo la dimensione cognitiva, ma anche quella emotiva e affettiva. Howard Gardner, con la teoria delle intelligenze multiple, e Daniel Goleman, con gli studi sull'intelligenza emotiva, hanno sottolineato come l'apprendimento sia influenzato dall'interazione tra emozioni e cognizione. In questo quadro, il docente diventa una figura cruciale per lo sviluppo delle competenze emotive degli alunni. Il concetto di "competenza" è ormai la pietra angolare intorno a cui dare significato ai processi di cambiamento in atto nei sistemi scolastici dei paesi evoluti tra cui anche l'Italia, seppur in ritardo nel tempo e qualche resistenza in più. La scuola italiana, difatti, è ancora legata ad un modello tradizionale che si concentra più sulla trasmissione dei contenuti che sulla maturazione delle competenze. Lavorare per

competenze significa cambiare il paradigma teorico della scuola: passare da una concezione ancora autoritaria del sapere ad una concezione più autonoma e costruttiva dove, necessariamente, deve emergere il protagonismo significativo dell'alunno, la sua centralità nel processo di insegnamento e apprendimento. La diffusione di approcci come la didattica per competenze (raccomandazione del Consiglio dell'Unione Europea del 2018) e l'introduzione di metodologie come la flipped classroom e il cooperative learning rappresentano un tentativo di rispondere alla necessità di sviluppare competenze trasversali, dove per competenza, accanto alle definizioni ufficiali o consolidate nella letteratura scientifica, si deve intendere quella coniata da Mauro Laeng nella voce dell'Enciclopedia pedagogica da lui diretta: la competenza è "i*l sicuro possesso di abilità non semplicemente ripetitive riferite ad un compito*".

Nonostante il quadro normativo italiano riconosca l'importanza della formazione continua degli insegnanti, è evidente una carenza nell'attribuire il giusto valore alla dimensione emotiva e relazionale nell'ambito educativo. Per favorire un pieno sviluppo della persona e contribuire alla costruzione di una società più equa e inclusiva, è necessario che l'insegnante acquisisca anche altre competenze che trascendano la mera padronanza disciplinare. Le competenze disciplinari, emotive e pedagogiche sono come i fili di un tessuto: intrecciati tra loro, formano un unico, solido e resistente tappeto. Un insegnante completo è colui che sa tessere questo intricato ricamo, creando un ambiente di apprendimento stimolante e accogliente. L'insegnante del futuro deve possedere un ampio spettro di competenze, che spaziano dalla padronanza delle discipline alla capacità di gestire le relazioni interpersonali e di favorire lo sviluppo emotivo degli studenti. Solo così potrà diventare un vero e proprio facilitatore di apprendimento.

L'APAV, unitamente ai docenti che collaborano con essa, da sempre investe nel mondo della scuola; oltre alle diverse iniziative editoriali, ha al suo attivo numerose attività formative telematiche e collaborazioni con alcune università italiane e straniere. Inoltre sulla piattaforma dell'Accademia: Accademy Learning Organization (ALO), dedicata al personale della scuola, si possono attivare corsi dedicati a: Coding; Robotica; Intelligenza Artificiale; Metodologie innovative; Realtà virtuale e aumentata; Approcci metodologici e strategie per promuovere il Social Emotional Learning.

Se desideri diventare un protagonista attivo di questo cambiamento, unisciti alla nostra comunità di docenti innovatori! Visita il sito dell'APAV (www.apav.it) e scopri come possiamo supportarti nel tuo percorso di crescita professionale. Insieme, possiamo costruire una scuola più inclusiva e stimolante per tutti gli studenti.

Renata Santarossa (*Presidente* APAV)

Mario Innocenzo Mandrone (*Vice Presidente* APAV)

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 5, No 2 (2022), 5-26

Puer sapiens

Domenico Lenzi

Università del Salento Lecce,
Dipartimento di Matematica e Fisica,
Via per Arnesano, 73100, Lecce, Italia
domenico.lenzi@unisalento.it

Sunto

In questo articolo cercheremo di evidenziare l'importanza di un uso appropriato ed efficace degli Asili nido e della Scuola per l'infanzia. Essi debbono divenire presidi didattici a tutti gli effetti, con approcci comunicativi e attività adatte alla prima [0-3 anni] e alla seconda infanzia [3-6 anni], che sollecitino l'emersione e la valorizzazione delle attitudini dei bambini tipiche della loro caratteristica di "homo sapiens", onde evitare che queste diventino inefficaci. Col conseguente prevalere nei nostri piccoli, come purtroppo avviene quasi sempre, delle caratteristiche di "scimpanzé sapiens" – pur pregevoli e importanti – che sono in ogni essere umano.
Questo aspetto sarà chiarito nella Premessa.
Alcune considerazioni svolte qui sono riprese da un precedente articolo (si veda [16]) su *Mondo Matematico e Dintorni*.

Parole Chiave Homo sapiens, Scimpanzé sapiens, Asili nido e Scuola dell'infanzia.

1. Premessa

Qualche tempo fa hanno destato interesse misto a curiosità le considerazioni del nobel per la fisica Giorgio Parisi, che ha auspicato l'avvio all'osservazione dei fenomeni fisici già a tre anni, al fine di avviare i bimbi all'astrazione (sic!) a partire da quella tenera età. Però non ci consta che l'esimio scienziato abbia fornito degli esempi. Tuttavia, dubitiamo fortemente che la fisica possa realizzare quell'obiettivo con bambini così piccoli, anche perché certi esperimenti sono più vicini alla nostra sfera animale che non alla nostra essenza di "Homo sapiens", caratterizzata – per ragioni di istinto – dall'attitudine all'astrazione e al ragionamento. D'altro canto, gli uccelli hanno una vasta esperienza di fluidodinamica, ma ciò non consente loro di andare oltre una pregevole pratica di volo.
In realtà, come cercheremo di mostrare, è l'aritmetica che dà la prima spinta all'attivazione dell'attitudine all'astrazione e alla razionalità nel momento in cui il bimbo prende coscienza delle prime proprietà tipiche del far di conto.
In un convegno sull'insegnamento della matematica, organizzato alcuni mesi fa dall'Accademia dei Lincei, è stato detto che "non è mai troppo tardi" per modificare l'atteggiamento di un allievo. Certo, "meglio tardi che mai"; però bisogna tener presente – e non ci stanchiamo di affermarlo – che le potenzialità di tipo "Homo sapiens", che i

bimbi hanno alla nascita, se non vengono attivate finiscono con l'affievolirsi a poco a poco fino ad atrofizzarsi.
La piaga dell'analfabetismo adulto di un tempo, che fu così difficile da estirpare, ne è un chiaro esempio. I più anziani ricorderanno che, negli anni '60 del secolo scorso, la RAI affidò ad Alberto Manzi – scrittore e valente insegnante di scuola elementare – un programma televisivo intitolato *Non è mai troppo tardi*, con lo scopo di contrastare l'analfabetismo adulto. Ma, nonostante la bravura del conduttore, il compito risultò davvero arduo, pur in presenza di risultati soddisfacenti. Senza dimenticare un professore universitario cinese che è in Italia da circa 30 anni, ma non è in grado di pronunciare la lettera "r"; mentre suo figlio, cresciuto qui da noi, ha una *erre* formidabile.
In ambito numerico, spesso vengono dati esempi di attitudini simil-aritmetiche affioranti in animali di varie specie, che denotano capacità insite nel loro istinto; però, sul piano dei conteggi, le loro abilità non vanno oltre i primissimi numeri. Per quantità superiori le loro valutazioni sono prevalentemente di tipo visuo-spaziale. Infatti, il cuculo che va a deporre il suo uovo in un nido che non è il suo si preoccupa di eliminarne uno già presente nella covata, poiché non vuole alterare le apparenze spaziali, insospettendo il legittimo proprietario assente che al suo ritorno sarebbe indotto a eliminare l'intruso, per lui facilmente riconoscibile. Gli animali ricorrono anche a valutazioni di tipo olfattivo, onde le loro stime quantitative – anche di prede o di predatori che non vedono – si basano sull'intensità dell'afrore che percepiscono. Ma è raro che si vada oltre situazioni di questo tipo.
Anche nella specie umana, senza una guida adeguata, non si va molto più in là. Enrico Giusti, professore di analisi matematica e cultore di storia della matematica, ha pubblicato un interessante libretto in cui descrive le abilità aritmetiche di popoli che sono rimasti allo stadio primitivo. Alcuni di essi hanno parole per indicare l'*uno*, il *due* e il *tre* [che hanno un immediato corrispettivo spaziale/geometrico: punto, segmento e triangolo] ma non sanno andare oltre, e utilizzano una parola onnicomprensiva che ricorda la nostra "tanti".
Agli inizi del millennio il professor Roy Britten, del California institute of technology, grazie a una tecnica da lui approntata, ha calcolato che l'Homo sapiens condivide con lo Scimpanzé il 95% del patrimonio genetico. Il che sembra trovare conferma in quanto ha scritto Giulio Maira, un importante neurochirurgo italiano, che ha affermato che noi adoperiamo coscientemente il nostro cervello solo per il 5%. Il che significa che per il resto lo utilizziamo automaticamente, sulla base di istinti e di riflessi spontanei o indotti. Perciò è importante far conservare ai bambini modi di comunicare non approssimativi; che siano del tipo "pane al pane e vino al vino", che nella prima infanzia sono del tutto naturali. E questo forse potrebbe favorire un'ulteriore evoluzione umana in senso positivo, che per Giulio Maira è possibile. Magari utilizzando sapientemente l'Intelligenza Artificiale, e non subendola.
C'è da ricordare anche Heinrich Haeckel, un fisiologo, embriologo e filosofo tedesco, che nel 19° secolo formulò una fondamentale legge biogenetica sull'evoluzione dell'embrione, affermando che questo si sviluppa ripercorrendo le fasi evolutive della propria specie [filogenesi]. Ciò fu da lui condensato nel noto aforisma "l'ontogenesi ricapitola la filogenesi".
La nostra specie non sfugge al percorso delineato da Haeckel. Infatti l'essere umano in una prima fase si evolve come "pesce" nel ventre materno. Poi, dopo la nascita, prose-

gue con un'attività che lo porta prima a strisciare come un rettile, poi a gattonare sui quattro arti e quindi ad acquisire – intorno agli 11/13 mesi – la posizione eretta. Ciò potrebbe indurre a pensare che sollecitare il bimbo affinché in lui si attivino le attitudini tipiche del suo essere "Homo" sia contro il punto di vista di Haeckel, onde andrebbe lasciato al suo sviluppo spontaneo. Ma ciò è errato. Infatti il bambino nel suo evolversi ricapitola la sua filogenesi, ma nel suo divenire [ontogenesi, epigenesi] le capacità acquisite filogeneticamente sono già presenti in lui; perciò va aiutato a svilupparle al più presto al fine di evitare che le sue caratteristiche di tipo animale finiscano per ottundere quelle umane.

Purtroppo, però, c'è la deprecabile tendenza a proporre ai bambini tutta una serie di esperienze da cui ricavare quei concetti aritmetici che invece via via essi possono – e quindi debbono, nel loro interesse– acquisire già a partire dalla prima infanzia; senza poi doverli faticosamente estrarre da situazioni estemporanee, contrabbandate come "attività laboratoriali" dalle quali i piccoli dovrebbero ricavare cognizioni aritmetiche.

Inoltre, un uso incontrollato e smodato dei mezzi di comunicazione elettronica ha negli ultimi anni contribuito ad accentuare le difficoltà di apprendimento dei nostri giovani. Tant'è che recentemente un team incaricato dalla VII commissione del Senato sull'istruzione, per un'indagine conoscitiva sul tema "impatto del digitale sugli studenti", ha dichiarato: «I cervelli dei nostri ragazzi si atrofizzano sempre più, tanto da far parlare di "decerebralizzazione e di dipendenza"».

A proposito del preoccupante affievolimento delle nostre facoltà razionali, vogliamo citare il recente "Come siamo diventati stupidi.", di Armando Massarenti, caporedattore de *Il Sole 24 Ore*. Comunque, il libro ha anche l'ottimistico sottotitolo "Una immodesta proposta per tornare intelligenti".

Ma non possiamo concludere questa premessa senza richiamare un libro del 2018 di Vittorino Andreoli, noto scrittore e psichiatra. Il titolo, estremamente significativo, è "Homo stupidus stupidus, l'Agonia di una civiltà". Andreoli si chiede che ne è dell'uomo quando smarrisce i benefici garantiti dalla parte più evoluta del suo cervello; e se è possibile scongiurare l'agonia in cui sta scivolando la nostra civiltà. Noi, in questo scritto intendiamo, in qualche modo, far fronte – per quanto sia possibile – anche alle negatività evidenziate da Massarenti e da Andreoli.

2. Considerazioni generali

Le attitudini e gli istinti da noi ereditati filogeneticamente si attivano tanto più spontaneamente quanto prima il loro percorso evolutivo è iniziato nel corso della preistoria. Si pensi al cucciolo neonato che spontaneamente succhia il latte materno. Ma istinti e attitudini che caratterizzano l'Homo sapiens, essendo più recenti rispetto al nostro passato di ominidi – risalente a più di quattro milioni di anni fa – per attivarsi hanno bisogno di sollecitazioni e di guida pressoché immediate.

Le caratteristiche di noi umani presero a organizzarsi 100/300 mila anni a.C, quando i nostri progenitori iniziarono a sostituire i rumori prodotti con la bocca con dei suoni orali ben definiti che inizialmente portarono i nostri antenati a pronunciare le prime pa-

role. Queste inizialmente furono nomi di oggetti vari, sui quali successivamente si organizzarono le prime frasi.
Si tratta di una caratteristica che sembra presente anche negli scimpanzé. Infatti, nel secolo scorso una scienziata americana adottò – si fa per dire – uno di questi nostri lontani "cugini" con l'intento di insegnargli a parlare. Come era prevedibile, il risultato fu negativo, per cui la studiosa dirottò sul linguaggio dei segni dei sordomuti. L'esito fu sorprendente. Tant'è che a un certo punto lo scimpanzé costruì la frase "voglio un bebè".
Il linguaggio ha favorito lo scambio di esperienze tra gli esseri umani, facilitando analisi critiche che hanno prodotto, tra l'altro, la presa di coscienza dei numeri naturali – quelli dei primi conteggi – che rappresentano non solo la soglia del ragionamento analitico, ma anche della generalizzazione, nel senso di andare oltre casi particolari concreti ("due più tre", al di là di "due dita più tre dita" o "due palline più tre palline"), riconoscendo situazioni che sono riconducibili le une alle altre e possono essere trattate unitariamente.
Le potenzialità linguistiche e aritmetiche sono state trasmesse nel corso dei millenni fino a costituire un fondamentale patrimonio istintuale dei nostri "cuccioli" sin dalla nascita; e questo preme inconsciamente nelle loro menti. Tali istinti, che sono fondamentali per l'acquisizione della razionalità, andrebbero sollecitati quanto prima, affinché non abbiano difficoltà a emergere e tendano ad atrofizzarsi. Per cui lo "Scimpanzé sapiens" che è in noi finirebbe per prevalere – con le sue pur pregevoli qualità – ma rendendo difficoltosa l'acquisizione delle caratteristiche che ci distinguono come Homo sapiens.
Inoltre, già nella prima infanzia nel bambino potrebbe iniziare a farsi strada un senso di frustrazione, dovuta alla sensazione che non gli vengano prestate le giuste attenzioni in quanto non è in grado di recepirle. E ciò potrebbe portarlo a preoccupanti forme autistiche.
In proposito vale la pena raccontare quanto scrisse il monaco francescano Salimbene de Adam (13° secolo; noto anche come fra' Salimbene da Parma). Il frate descrisse un esperimento di Federico II di Svevia, che pare volesse stabilire quale fosse la lingua naturale del genere umano, un problema di cui i linguisti si erano occupati già al tempo dei faraoni Psammetico.
Federico II decise di far nutrire regolarmente un gruppo di neonati in assoluto silenzio. I piccoli venivano toccati il minimo indispensabile per le cure igieniche, al fine di eliminare completamente la possibilità di interazioni linguistiche con le nutrici.
Come si può leggere in un servizio di Maurizio Peciccia su Repubblica del 7 aprile 2018, l'esperimento descritto dal frate parmense fu ripreso dallo psicoanalista viennese Renè Spitz. Questi, negli anni '4° del secolo scorso, studiò in un orfanotrofio 91 bambini che erano stati abbandonati sin dalla nascita, cui erano dedicati pochissimi contatti interpersonali. È significativo riportare questa parte dello scritto di Peciccia: "*Dopo 3 mesi di carenza di contatti i bimbi … entrarono in uno stato che Spitz paragonò al letargo... Entro la fine del secondo anno di vita, il 37% dei 91 bambini, pur essendo stati alimentati correttamente, morì … Chi riuscì a sopravvivere non fu in grado di parlare o di camminare, spesso i superstiti non erano in grado nemmeno di rimanere autonomamente seduti*".

Però si ha riscontro anche di stati di iperattività, con conseguenti difficoltà di apprendimento. Per quel che riguarda una precoce iperattività, cerchiamo di spiegarci con un esempio. Alla fine degli anni '60 del secolo scorso in moltissime nazioni esplose la co-

siddetta *contestazione*, spesso praticata in modo violento e sconsiderato. I contestatori spesso venivano criticati dicendo che 'non sapevano quel che volevano, ma lo volevano subito'. Qualcosa di simile accade con i nostri infanti, che non si rendono conto delle loro necessità, ma ardono dal desiderio che vengano esaudite. Perciò è importante intervenire al più presto, attivando procedure che essi sono in grado di recepire e che consentono loro di conquistare la razionalità, educandoli a una percezione di tipo analitico, che solleciti le loro prime riflessioni ragionate.

La percezione è il processo che elabora le informazioni che vengono acquisite da un individuo. Più precisamente, essa è il modo in cui l'informazione viene trattata confrontandola con le proprie esperienze e le proprie competenze, adattandola a quanto già si conosce. Però la fase analitica spesso risulta carente, non essendo stata adeguatamente attivata. E la percezione globale [che gestisce la maggior parte delle informazioni che noi recepiamo, per la nostra naturale tendenza di tipo animale a un'organizzazione sincretica e totalizzante di quel che ci appare] finisce col prevalere, costituendo un grave danno per i nostri piccoli.

Qualche anno fa una bambina di cinque anni e mezzo, a cui era stato mostrato l'indice e il medio di una mano, disse che quelle dita indicavano il *tre*. Avendole fatto presente che si trattava del *due*, ella ribattè che lei il *due* lo indicava col pollice e l'indice. La bimba era stata privata della possibilità di utilizzare gli aspetti analitici della rappresentazione numerica, e aveva finito col pensare che un numero si indicasse sinteticamente come nel gioco delle carte, dove ci si tocca il naso o si fa l'occhiolino per far capire al proprio compagno che si ha una certa carta. Situazioni di questo tipo sono molto diffuse e rientrano nel fenomeno che in psicologia della *gestalt* (o della *forma*) va sotto il nome di "chiusura" [nel senso di "completamento"]. Nel caso descritto la bimba aveva ampliato la visione dell'indice e del medio che le erano stati mostrati aggiungendo il pollice, ricostituendo nella sua mente la figura – a lei nota – con cui si rappresenta il *tre*. La chiusura gestaltica si verifica anche quando, vedendo l'orsa minore e l'orsa maggiore, siamo portati a collegare le loro stelle con dei segmenti. Il che ci fa percepire quelle costellazioni come due carri [*piccolo carro* e *grande carro*].

Un'attivazione della percezione di tipo analitico può partire dall'asilo nido, svolgendo attività molto semplici e per niente impegnative, che coinvolgono, facilitandola, l'acquisizione dell'oralità, per la quale la percezione dei fonemi è fondamentale.

Onde gli Asili nido debbono divenire presidi didattici a tutti gli effetti, con approcci comunicativi e attività adatte alla prima infanzia, che sollecitino l'emersione e la valorizzazione delle attitudini dei bambini tipiche della loro caratteristiche umane, onde scongiurare che queste diventino inefficaci. Perciò evitando che l'attivazione delle caratteristiche di "scimpanzé sapiens", pur pregevoli e importanti, siano totalizzanti.

Tali caratteristiche sono in ogni essere umano, ma possono diventare veramente efficaci e significative solo se gestite attraverso le nostre qualità di Homo sapiens.

In accordo con molti studiosi del presente e del passato, tra i quali occupa un posto significativo la nostra Maria Montessori, siamo convinti che i bambini possano essere guidati precocemente verso apprendimenti significativi; prima che si rivelino – come si è detto – situazioni preoccupanti, perciò scongiurandole o attenuandone la comparsa, con la possibilità di intervenire per tempo sulle relative cause. Contrastando anche alcuni influssi negativi su diversi operatori didattici per l'infanzia, dovuti alle idee di Jean Piaget [osannato epistemologo, psicologo e pedagogista svizzero, che nel secolo scorso

dedicò i suoi studi allo sviluppo cognitivo dei bambini], il quale era convinto che nemmeno nella seconda infanzia i bambini fossero in grado di capire il significato del contare. Il Piaget, che in gioventù era stato convinto seguace dell'impostazione didattica della Montessori, successivamente si differenziò dalla studiosa marchigiana, forse a causa di esperimenti di per sé interessanti, ma che da lui furono male interpretati e lo portarono a concludere che prima dei sei/sette anni molti bambini non possano comprendere l'aritmetica.

Ma è il caso di ricordare anche lo statunitense Glenn Doman, che nel secolo scorso operò presso una clinica neurochirurgica di Filadelfia, dedicandosi al recupero di bambini cerebrolesi e scrisse un libro dal titolo "Leggere a tre anni" (Armando editore), estendendo poi la sua attività ai bambini con bisogni speciali [si veda Glenn Doman Doman International (Italy) (metododomanitalia.com)].

Doman ha lasciato la sua impronta in diversi alunni di un tempo nelle scuole della nostra penisola, che frequentava periodicamente. Inoltre egli per molti anni ha collaborato con il direttore didattico americano di origine abruzzese Karl Delacato, un esperto in problemi di lateralizzazione: la capacità di distinguere tra i due orientamenti "da destra a sinistra" e "da sinistra a destra", la cui carenza può essere la causa di difficoltà di lettura [dislessia] in molti bambini.

Il Delacato ebbe in Italia un momento di notorietà quando, una cinquantina di anni fa, aiutò a contrastare i problemi di dislessia di Umberto, figlio di Ugo Pirro, uno sceneggiatore televisivo. Pirro descrisse i problemi del suo bambino nel libro "Mio figlio non sa leggere" (Rizzoli ed. 1981). Peccato che di Delacato e di Doman in Italia si sia persa traccia.

A conferma di quanto detto precedentemente, accenniamo a un esperimento occasionale fatto con una bambina di 2 anni e qualche mese, che non sapeva di avere due mani, due orecchie e perché indicasse la sua età con l'indice e il medio. Dopo una breve spiegazione pratica, le fu chiesto quanti occhi avesse. Allora lei fece ballare le palpebre in successione, come se stesse contando, e poi esclamò: «Due!». A quell'età, attività di questo tipo stimolano i bambini alle loro piccole riflessioni.

3. Sugli Asili nido

Come vedremo, l'attività con gli infanti può partire molto presto, coniugando linguaggio e aritmetica. Precedentemente si è affermato che l'aritmetica dà la prima spinta all'attivazione dell'attitudine all'astrazione e alla razionalità nel momento in cui il bimbo prende coscienza delle prime proprietà del contare. Il momento cruciale è quando egli si rende conto che tre dita più un dito sono assimilabili a tre palline più una pallina, e così via; onde presto, se opportunamente guidato, perverrà al *tre* più *uno* [*quattro*]. Il che può e deve avvenire preparando il terreno già a cavallo della prima e della seconda infanzia, purché si usino modi di comunicare adatti alle varie fasi di quel periodo. E il non farlo determina le successive difficoltà prima nell'acquisizione del linguaggio e poi in matematica, con riflessi negativi anche nello studio delle scienze.

Da piccoli, si è in grado di acquisire via via i suoni della lingua materna e di ogni altra lingua in cui si sia immersi. Ma ciò comporta un'enorme fatica. Il bimbo prima di tutto deve prendere coscienza delle piccole pause che separano le parole che si susseguono; quindi deve riuscire a rendersi conto delle pause più brevi che spezzettano una parola in fonemi, dei quali si può dire che siano l'equivalente orale delle lettere dell'alfabeto.
Il bimbo non ne capisce il significato, ma l'istinto linguistico lo spinge ad adattare l'apparato fonatorio in modo tale da riprodurre i suoni orali percepiti.

Ma in tutta questa fatica, sollecitata dalle voci in cui è immerso, egli si trova di fatto isolato per diversi mesi e riesce a produrre i primi vocalizzi ([1]) intorno ai 3/4 mesi, mentre le prime lallazioni [la-la, ma-ma, pa-pa …] compaiono intorno ai 6/8 mesi. E ciò lo costringe a trascurare l'istinto numerico, che pure preme in lui. Perciò è importante intervenire preventivamente, aiutando il piccolo a prendere coscienza del suo corpo in connessione con attività che favoriscano l'acquisizione dell'oralità e dei primissimi elementi di aritmetica. Però, purtroppo, spesso in questo campo le idee non sono molto chiare.
Spesso si ricorre a cantilene significative legate al corpo del bambino, in cui si distinguono parti caratterizzate da singolarità da altre caratterizzate da duplicità: *fronte bella spaziosa, occhio bello e suo fratello, guancia bella e sua sorella* … . Tuttavia il più delle volte l'attività avviene in maniera estemporanea e superficiale, senza mettere il bimbo in condizione di percepire i primissimi e fondamentali aspetti dell'aritmetica. Non importa che questi siano immediatamente chiari; ma lo saranno quanto prima.
Concretamente, nei primi mesi di vita del bimbo un operatore farà scorrere le mani intorno alla sua testa, pronunciando la corrispondente parola, con la piccola pausa che la suddivide: te-sta. E presto il piccolo capirà che la parola pronunciata è il nome della parte toccata. E la scoperta che le cose hanno un nome che si esprime con un termine orale costituito da fonemi sarà un fatto essenziale per la comunicazione.
La stessa cosa si farà toccando la bocca, però avendo presente che in tal caso la segmentazione naturale del termine "bocca" non è quella in sillabe, bensì la suddivisione bocca. E ciò vale anche per co-llo, pa-ncia … . Quindi si passerà alle parti del corpo che sono abbinate: o-cchio/o-cchio, gua-ncia/gua-ncia, ma-no/ma-no … . Ogni volta toccando entrambe le parti. Inoltre le parole andranno ripetute lentamente, in modo da farne percepire i fonemi.
Poi, al momento opportuno, si inseriranno i primi numeri e si dirà: «Una te-sta, una bocca, un co-llo, una pa-ncia …»; quindi: «uno e due o-cchi, una e due gua-nce, una e due ma-ni ...». Però – e questo è fondamentale – raddoppiando e invertendo il conteggio delle parti caratterizzate da duplicità, affinché il bimbo avverta che si termina sempre col *due*. Ciò è fondamentale per acquisire il *Principio di Indifferenza* nel contare, secondo cui in un conteggio non importa l'ordine in cui si scelgono via via gli oggetti di un raggruppamento, poiché il numero finale è sempre lo stesso: si tratta della quantità di oggetti di quel raggruppamento, che diversi insegnanti inizialmente chiamano "marchio numerico".
Come vedremo, il principio di indifferenza è fondamentale per l'acquisizione del fondamentale Principio di Conservazione delle quantità discrete, che consiste nel fatto che

([1]) I vocalizzi infantili sono i primi fonemi – cioè, i primi suoni elementari – che un bambino produce: *b, f, ch, gh* … . Da non confondere con i vocalizzi usati dai cantanti per riscaldare la voce.

la quantità di oggetti di un raggruppamento non dipende dalla collocazione di questi; e non aumenta – come pensano alunni non adeguatamente addestrati – se gli oggetti si allontanano tra loro, disponendoli su di uno spazio più ampio.
È accertato che un bambino – intorno ai tre anni di età – è in grado di riconoscere la quantità di un raggruppamento di tre oggetti; senza contarli, ma in conseguenza di un'inconscia valutazione spaziale. Tuttavia è importante che egli conti in vari modi quegli oggetti, affinché il Principio di Indifferenza si affermi ulteriormente.
Quindi, poco dopo i tre anni, egli dovrebbe arrivare a padroneggiare – con l'aiuto delle dita – i numeri da 1 a 5 nel loro giusto ordine; accertando ulteriormente che, nel conteggio di un gruppo di dita, non importa in che ordine le dita si scelgano. A tal fine, nel prossimo paragrafo presenteremo alcune cantilene.
Quindi un alunno potrà essere avviato alle prime addizioni utilizzando le dita di una mano, partendo dal fondamentale "più uno". In tal modo si realizzeranno le fasi iniziali di un percorso che faciliterà la presa di coscienza dei numeri naturali, che preludono alla comprensione della rappresentazione analitica e quindi alla razionalità.
Con buona pace di Jean Piaget, il quale, senza rendersene conto, evidenziò – come vedremo descrivendo un suo esperimento – che molte delle difficoltà in aritmetica dipendono da un inadeguato intervento nel corso della prima e della seconda infanzia.
Secondo il Piaget, prima dei 6/7 anni il bimbo non è in grado di acquisire le nozioni basilari dell'aritmetica poiché non ha coscienza del Principio di Conservazione delle quantità discrete, nel senso che il bimbo prima di quell'età è portato a pensare che la quantità di un gruppo di oggetti possa variare qualora si cambi la posizione degli stessi. Queste considerazioni hanno influenzato negativamente le attività scolastiche di moltissime nazioni, che per i loro fanciulli hanno fissato l'inizio della scuola dell'obbligo
Tra gli esperimenti di Jean Piaget ci sembra significativo descrivere quello col piccolo Simon, di cinque anni e sette mesi. Noi lo riportiamo, parzialmente, così come è stato descritto a pag. 75 del libro "La genesi del numero nel bambino [J., Szeminska A. (1968). La nuova Italia]. Le frasi tra virgolette e in carattere normale sono dello sperimentatore, quelle in corsivo sono di Simon.

Simon mette un fiore in ogni vaso. Si tolgono [i fiori, n. d. r.] e si mettono nel recipiente: «Sono lo stesso i fiori e i vasi? » *No*. «Perché? »; *sono di più i vasi*. «Sono sufficienti i fiori per i vasi?». *Si*. [poi i fiori vengono allontanati, n. d. r.] «E adesso?» *Sono di più i fiori*. «I vasi sono sufficienti per i fiori?» *Si*. «Allora sono lo stesso?» *No, qui ce ne sono di più perché sono lontani.*

Simon afferma che *i fiori sono sufficienti per i vasi*; perciò in lui non c'è difetto di memoria a breve termine. Tuttavia egli dice che, nel secondo caso, di fiori *ce ne sono di più perché sono lontani*. Quindi Simon mostra che in situazioni di questo tipo i bambini non possono essere lasciati senza una guida, aspettando che capiscano da soli e da soli raggiungano lo stadio che gli consentirebbe di non sbagliare. Onde in aritmetica vanno aiutati a liberarsi dalla tendenza ai confronti di tipo spaziale, che sono i primi di cui essi hanno esperienza, che ritroviamo in locuzioni del tipo "più lungo", "meno alto", "più largo" ecc.
Comunque il Principio di Conservazione delle quantità discrete può essere meglio compreso in conseguenza di quello di Indifferenza. Infatti, una volta contati degli oggetti, se – dopo averli avvicinati o allontanati – li si riconta scegliendoli via via allo stesso modo, a ognuno competerà lo stesso numero, a prescindere dal fatto che essi siano stati avvici-

nati o allontanati. Perciò il "marchio numerico", che è il numero attribuito all'ultimo oggetto in entrambi i conteggi, rimane lo stesso.
Qui vogliamo ricordare anche una bimba di tre anni e qualche mese con la quale fu realizzato un esperimento significativo. Dopo alcuni conteggi limitati al cinque, la piccola fu avviata alle prime addizioni con l'utilizzo delle dita. Quindi le fu proposto: «Adesso, senza usare le dita, di' quanto fa "tre *più* uno"». La piccola pensò qualche istante, poi rispose "quattro". Ella aveva raffigurato nella sua mente una situazione pratica, ma senza manipolarla nel concreto [non ne aveva più bisogno] muovendo così un ulteriore passo verso l'astrazione.
Il "più uno", come affermano molti studiosi, è essenziale. Infatti può essere un utile *ponte* tra la fase iniziale dell'addizione, quella del "mettere insieme" – spesso trascurata, reputandola scontata – e la fase successiva del sommare, contando l'uno dopo l'altro gli oggetti di due insiemi di cui si è fatto un "tutt'uno".
Tra l'altro, il "più uno" aiuta a evitare gli errori richiamati in un Convegno sulla discalculia svoltosi a Napoli nel 2019. Lì fu presentata una ricerca in cui si evidenziava un errore non infrequente in bambini che non hanno ancora un'idea precisa della nozione di "addizione", pur avendo capito che quest'operazione tende a dare come risultato un numero più grande degli addendi. Infatti venne segnalato che ci sono alunni che, per svolgere 4+3, contano 4, 5, 6, dando 6 come risultato. Ebbene, quei bambini si renderebbero conto che, per svolgere 4+1, non possono limitarsi a contare 4; e ricorderebbero più facilmente il fatto che il conteggio debba iniziare con 5.
Comunque, ribadiamo che non bastano le attitudini di tipo aritmetico per determinare quel salto di qualità verso abilità tipiche della nostra specie. Se il bimbo non viene guidato adeguatamente nella sua prima infanzia, corre il rischio di rimanere ancorato a schemi mentali che sono al di fuori del suo patrimonio genetico di Homo sapiens. E l'aritmetica che affiora in lui, se non curata adeguatamente, non riuscirà a evolversi verso gli stadi caratteristici del ragionare.

4. La seconda infanzia

A causa dell'esigua presenza di asili nido, la Scuola dell'infanzia [ex *scuola materna*] assume un ruolo essenziale e dovrebbe iniziare, almeno per ora, con l'attività già descritta per gli asili nido. Per questa ragione e per altre, connesse con i problemi di dislessia e di discalculia, che attualmente si rivelano intorno alla prima/seconda classe della scuola primaria [ex *scuola elementare*] la scuola dell'infanzia dovrebbe diventare obbligatoria, accompagnata da una riforma del corso di laurea in Scienze della Formazione primaria che presti maggiore attenzione ai problemi di apprendimento dei bambini, preparando futuri insegnanti che siano in grado di consentire ai propri alunni una partecipazione scolastica efficace già a partire dalla scuola dell'infanzia.
Per quel che riguarda la letto/scrittura noi proponiamo di avviare gli alunni tramite l'utilizzo delle figurine che presentiamo nelle Tavole B e C – poste alla fine di questa esposizione – che sono dedicate a un precoce approccio prima alla scrittura e poi alla lettura con l'utilizzo delle cinque vocali e di quattro consonanti. Queste lettere, col loro esiguo numero, consentono di capire più facilmente cosa significhi scrivere e leggere,

permettendo di comporre – allineando le figurine sul tavolo – moltissime parole, tra cui ricordiamo: ali, anello, anno, asilo, asino, asso, ave, avio, elle, Elio, esile, essa, lana, lena, leso, lesso, lino, luna, naso, nave, nonno, olio, oso, osso, sala, sale, sasso, sole, solo, suolo, uno, uso, uovo, valle, vele, viola, vivo, volo, vuoi … .
Nel frattempo l'alunno si eserciterà a "disegnare" le lettere corsive minuscole, avendogli mostrato che molte di esse si ottengono con un piccolo ritocco delle corrispondenti lettere in stampatello, dovuto al fatto che – *correndo* per accelerare i tempi di scrittura – la penna non viene sollevata dal foglio, determinando così un collegamento tra le lettere che si succedono nelle varie parole.
Il fargli allineare le figurine contribuirà a controllare se l'alunno ha un difetto di lateralizzazione. Nel qual caso bisogna intervenire con attività che ora sarebbe complicato descrivere in maniera completa.
Prima di procedere sarà opportuno accertarsi che l'alunno abbia capito come le lettere si succedono in una parola. A tal fine si consiglia di insegnare a rappresentare le parole sopra elencate usando l'alfabeto muto. Meglio se è il vecchio, più conosciuto, che riportiamo nella Tavola A. Quando l'alunno avrà capito cosa significhi scrivere e leggere, si aggiungeranno via via altre lettere.

Tornando all'aritmetica, a proposito del saper *nominare* nel giusto ordine i numeri da *uno* a *cinque* [e in un secondo momento sarà importante arrivare sino a *dieci*, un fatto fondamentale anche per la denominazione dei numeri oltre la decina] qui sotto ricordiamo alcune facili filastrocche. Esse saranno cantate dai bambini nei loro girotondi, accompagnandole con alcune musichette.
Per la prima, sui numeri da uno a tre, si potrà usare l'arietta dell'a-nghi-ngo. Per le altre nei primi due versi si userà la sequenza delle note musicali do – re – mi – fa – sol [per il primo mezzo verso] e, al contrario, sol – fa – mi – re – do [per il secondo mezzo verso]. Invece per gli altri versi si potrà usare – a scelta dell'insegnante – un'arietta orecchiabile, al termine della quale i bimbi si coricheranno mimando il prender sonno.
Il fatto di accompagnare i primi numeri ([2]) con le note musicali – in salita da uno a cinque e in discesa da sei a dieci – aiuta a conservarne l'ordine naturale. È noto che cantanti lirici sono aiutati a ricordare la posizione delle parole dei loro lunghi testi proprio perché sono inserite in arie musicali.

La canzone del contare fino a tre

uno due e tre
gira e canta insieme a me
e così potrai imparare
la canzone del contare
del contare fino a tre
un due tre / un due tre / un due tre …

([2]) Qui i numeri sono abbreviati anche per ragioni mnemoniche. Si pensi alla filastrocca sui complessi dei monti alpini "ma con gran pena le re ca giù".

La canzone del contare fino a cinque

un due tre qua cin / spe-gn'il lu-mi-cin
do re mi fa sol / sol fa mi re do
un due tre qua cin è o-ra di dor-mir
do re mi fa sol / sol fa mi re do

Schiere d'angioletti veglieranno su di te
dormi sonni belli e che la pace sia con te
che la pace sia con te che la pace sia con te …

In seguito si arriverà sino a *dieci* cambiando il secondo verso (si veda qui sotto).

La canzone del contare fino a dieci

un due tre qua cin / spe-gn'il lu-mi-cin
do re mi fa sol / sol fa mi re do
dor-m in-sie-me a me sei sett o no dié
do re mi fa sol / sol fa mi re do

Schiere d'angioletti …

Passando alle difficoltà di calcolo, ne ricorderemo anche alcune già riportate in [16]. Noi sconsigliamo l'uso dei numeri in colore, che costringono gli alunni a ricordare inutilmente, per i numeri naturali, particolari colori compresi tra uno e dieci. In sostituzione qui proponiamo le strisce colorate riportate in terzultima pagina, che potranno essere ritagliate, facendo emergere implicitamente delle facili somme.
Nei primi approcci con l'addizione gli addendi andranno da uno a cinque e saranno rappresentati dalle dita delle mani, mostrate contemporaneamente: un addendo per ciascuna mano (onde si dice che il risultato è dato dal numero totale di dita mostrate). Però, quando le dita si sostituiscono con due gruppi di palline (o altri oggetti), generalmente gli addendi vengono presentati l'uno dopo l'altro. E si dirà anche ora che il risultato si ottiene immaginando – come per le dita – di fare un tutt'uno (l'unione!) dei due gruppi di palline (o di oggetti), contando poi quanti oggetti/palline ci sono in totale. Tuttavia è opportuno che i gruppi di palline che esprimono i due addendi abbiano colore diverso – pur precisando che si prescinde dal colore – onde rimanga presente la percezione visiva dei due addendi in gioco. Ciò consente di conseguire vari obiettivi.

Fig. 1

Il primo è la presa di coscienza della proprietà commutativa dell'addizione, che è legata al Principio di Indifferenza. Infatti, possiamo contare prima le 3 palline marrone e poi le 4 blu, oppure prima 4 palline blu e poi le 4 marrone. Però in entrambi i casi abbiamo le stesse palline, onde in entrambi i casi il risultato del conteggio è lo stesso.

Il secondo obiettivo è che, sapendo che le palline blu sono 4, per avere il risultato è inutile contarle di nuovo; perciò il conteggio proseguirà sulle tre palline marrone (si veda Fig. 2). Il che corrisponde ad aggiungere tre volte una nuova pallina: tre volte il "più uno"!

Fig. 2

Quindi gli alunni possono riesaminare l'operazione di sottrazione, che generalmente viene vista come un togliere, un levare. Infatti, la precedente fig. 1 ci fa capire che le 4 palline blu sono quelle che otteniamo dalle 7 se togliamo le 3 marrone [7-3 = 4]; ma sono anche quelle che aggiunte alle 3 marrone ci hanno dato le 7 [7 = 4+3].
L'operare in termini di complementazione [quanto manca?] è altrettanto frequente che l'operare nel senso del togliere. Si pensi a come generalmente un negoziante dà il resto. Infatti, egli parte dal numero che corrisponde al valore della merce fornita e arriva al numero che corrisponde alla moneta con cui il cliente sta pagando.
Alcuni insegnanti, quando i bambini ormai conoscono la filastrocca dei numeri, presentano l'addizione, dicendo: "il quattro in testa e poi nella filastrocca si va avanti di tre numeri". Ma è chiaro che saltare le fasi precedenti pregiudica una presa di coscienza efficace del significato dell'addizione; non facendo capire il perché di quel quattro in testa e poi … Inoltre, così diventa difficile rendersi conto della proprietà commutativa.

In Fig. 3 si può notare che i numeri posti al di sotto delle palline blu servono a dare loro un nome, ma allo stesso tempo le contano partendo dalla prima pallina blu di sinistra. Infatti, per esempio, dalla pallina 1 alla pallina 4 si denominano e si contano quattro palline. Perciò, per calcolare 4+3, basta partire dal 4 (il quattro in testa!) – che sulla linea corrisponde ad aver fissato quattro palline blu – e prenderne altre tre, contandole di seguito al 4. Allora il fatto che si arrivi a 7 ci dice subito che abbiamo preso in tutto sette palline; quindi 7 è il risultato di 4+3.

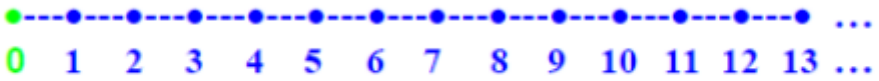


Fig. 3 – La linea dei numeri

Così l'approccio insiemistico rimane salvo. Ma si è semplicemente evoluto evidenziando un nuovo aspetto dell'addizione. Quanto detto riguarda l'addizione come operazione binaria; cioè, che utilizza solo due numeri. Ma – tornando all'aspetto insiemistico – all'alunno si farà capire che potremmo considerare anche più di due numeri, in corrispondenza di più gruppi di palline: per esempio, 4 palline blu, 1 rosa, 2 verdi e 3 marrone.

Non importa in quale ordine, dato che alla fine le palline sono sempre le stesse (si veda Fig. 4). Onde abbiamo un'addizione che estende quella binaria, dato che utilizza più di due numeri. Le cose dette vanno evidenziate con la massima cura e con esempi che chiamino in causa numeri piccoli, onde ognuno di questi sia visivamente espresso tramite palline di colore diverso.

Fig. 4

Ciascuna delle scritture che seguono corrisponde complessivamente al raggruppamento di palline di Fig. 4, onde esse danno sempre lo stesso risultato: il numero totale di palline! Le parentesi indicano che prima sono state aggregate le palline che corrispondono ai numeri che esse racchiudono: 4+1+2+3 = 2+3+4+1 = (4+1) + (2+3) = = (4+1+2) + 3.

Facciamo presente che quando i due addendi di un'addizione sono compresi tra cinque e nove, per rappresentarli si può far ricorso a una convenzione facile da comprendere. Precisamente, mostrando le dita di una mano, se il pollice è chiuso gli attribuiamo il valore cinque; in tal caso, quando esso è accompagnato dal mignolo e via via dalle altre dita fino all'indice, avremo i numeri dal sei al nove: cinque aumentato del numero delle altre dita mostrate. In tal caso la mano chiusa rappresenta il cinque.

In fig 5, a sinistra è rappresentato il sei, a destra il sette; onde insieme esse mostrano il numero tredici; che è dato da 5+5 (i due pollici chiusi) e 1+2 (le dita aperte).

Anche per questo è consigliabile abituare gli alunni a indicare il quattro ripiegando il mignolo; poiché, con questa convenzione, la vecchia rappresentazione del quattro – data dalle dita che vanno dall'indice al mignolo – ci darebbe 9. Oltre al fatto che, in tal modo, si va da *uno* a *cinque* aggiungendo sempre un dito.

Fig.5

Tornando alla sottrazione, sottolineiamo che è importante che l'alunno prenda coscienza del fatto che non importa come si scelgono le palline da sottrarre. Diversamente la procedura di sottrazione in colonna diventa una tecnica da imparare a memoria, senza capire dove siano andate a finire le palline.

Ebbene, il complemento a 10 facilita il calcolo di queste sottrazioni. Infatti, per ricavare 43-8 – considerata una decina – non è necessario, secondo la procedura del prestito, aggiungere quella decina [di palline] al 3 delle unità, ottenendo così 13; per poi sottrarre 8 da 13.

Invece, 8 [palline] si sottraggono direttamente da quella decina di palline, onde di esse ne rimangono 2, che si aggiungeranno alle 3 palline dell'unità, che sono rimaste intatte.

Ciò riduce drasticamente le difficoltà legate alla procedura di sottrazione in colonna, poiché evita di dover ricordare i risultati delle sottrazioni relative ai prestiti.

Per facilitare nei bambini l'apprendimento della scrittura delle cifre numeriche e del loro significato, si possono consegnare loro le due Tavole B e C riportate successivamente, dove ogni cifra è stata "costruita" con una quantità di fiammiferi uguale al numero che essa rappresenta. Si noti che accanto ai fiammiferi che richiamano le cifre uno, due e tre compaiono dei piccoli segni che ricordano il carattere corsivo; mentre per il quattro, il cinque e il sei i fiammiferi ne delineano la forma che è adoperata anche nelle cifre degli orologi digitali. Inoltre cinque fiammiferi li abbiamo costantemente colorati in rosso, in modo da favorire – aggiunti ai residui fiammiferi bianchi – l'immediata percezione della quantità di quelli presenti nella rappresentazione concreta delle cifre dal 6 al 9. In particolare, nel nove i quattro fiammiferi bianchi sono collocati come nel quattro. Tra l'altro, la Tavola C dovrebbero aiutare a distinguere e a fissare i significati delle due cifre 6 e 9, visto che i fiammiferi che rappresentano il 9 sono chiaramente in quantità maggiore rispetto a quelli che rappresentano il 6; e per il confronto basta riferirsi ai bastoncini bianchi, dato che i rossi sono cinque. Ovviamente, si dirà che lo zero (il niente) si rappresenta come un piatto vuoto: O

Per favorire a tempo debito la percezione numerica e facilitare l'acquisizione delle tabelline dell'addizione e della sottrazione, sono molto utili i cinque listelli riportati nella successiva Tavola F, che possono essere consegnati agli alunni in forma cartacea e ingrandita.

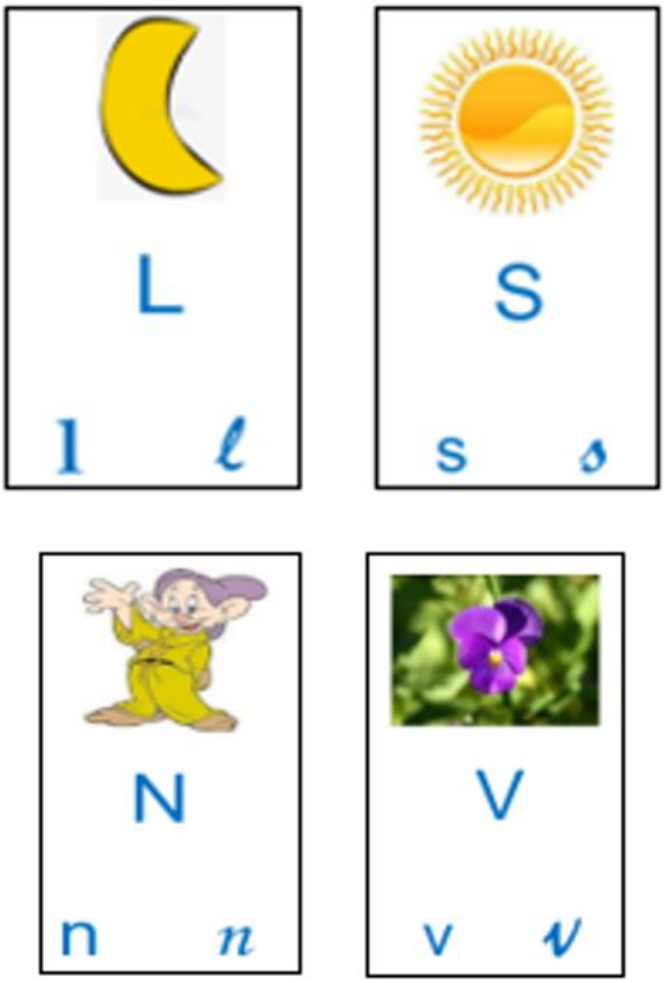
Poi, in un'attività laboratoriale, la seconda serie di listelli – che rappresentano i numeri dal sei al nove – possono essere realizzati dagli stessi alunni, incollando il listello rosso del *cinque* con quelli di valore minore, in modo tale che i due listelli attaccati vengano assimilati rispettivamente alle dita di due mani. Questi listelli possono sostituire gli inutili regoli colorati (*numeri in colore*) che vediamo in Tavola F; i quali, essendo privi di suddivisioni, creano per gli alunni inutili difficoltà mnemoniche, poiché nei regoli il colore è un mezzo attraverso cui risalire al valore numerico, mentre questo dovrebbe essere percepito immediatamente. Il che è facilitato – come si vede nei listelli – da un uso appropriato di tre colori soltanto: bianco, verde e rosso.

Qui – accanto ai *numeri in colore* – i primi cinque listelli sono stati disposti in modo che si percepisca facilmente la complementazione rispetto a *cinque*, dopo che gli alunni vi si siano già esercitati con le dita di una mano. Ciò aiuta a ricordare, per esempio, sia che *due* è quanto manca a *tre* per ottenere *cinque*, ma pure – dato il doppio significato dell'operazione di sottrazione, nel senso del *togliere* – che *cinque* meno *tre* fa *due*.

I nostri listelli si rivelano utilissimi per favorire l'automatizzazione della somma di due cifre il cui valore vada dal *cinque* al *nove*, poiché le parti rosse dei listelli di due di questi numeri corrispondono a 10 (= 5+5); onde basterà sommare le rimanenti parti. In Tavola F abbiamo la descrizione della somma **7 + 8 = 15.**

VECCHIO ALFABETO MUTO

Tavola A



AIUOLE

a i u o l e

Tavola B

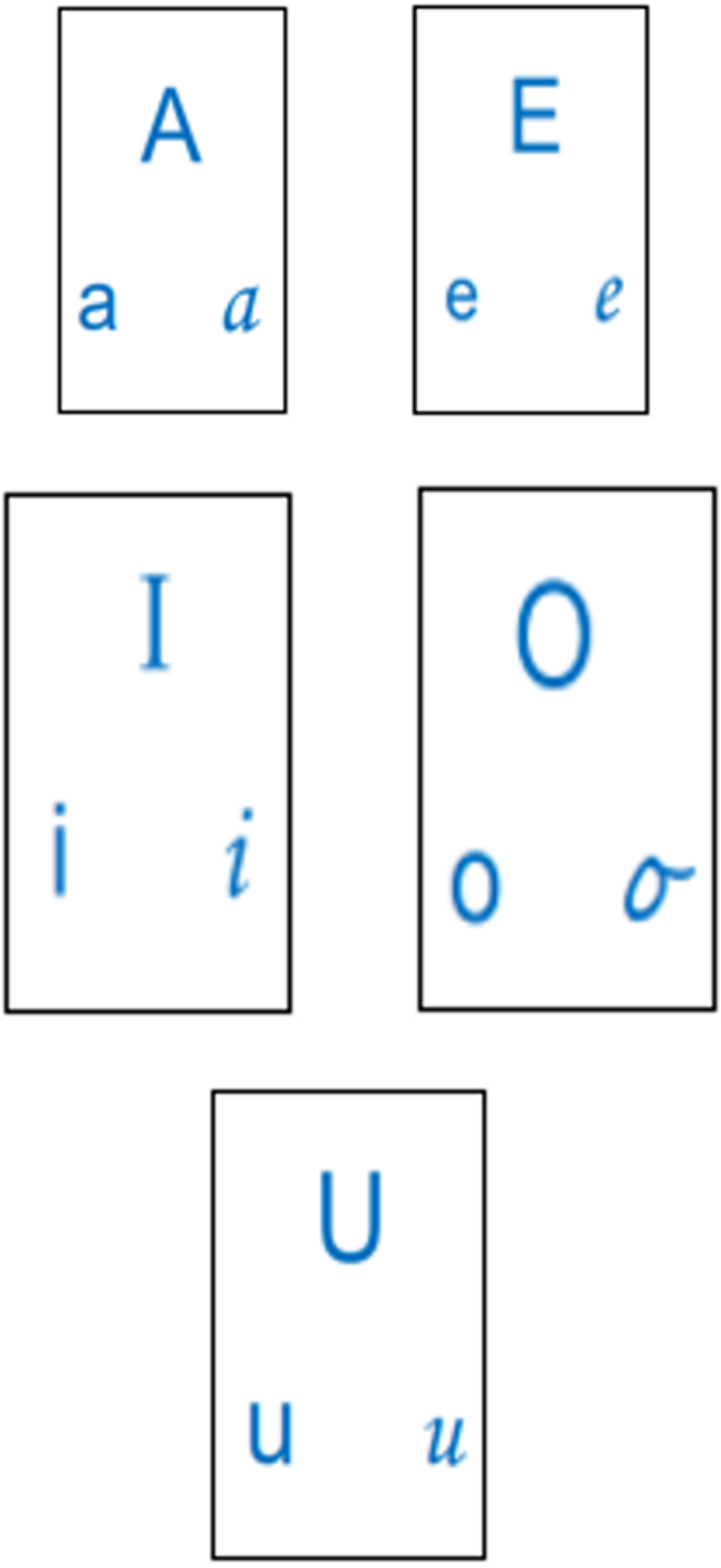
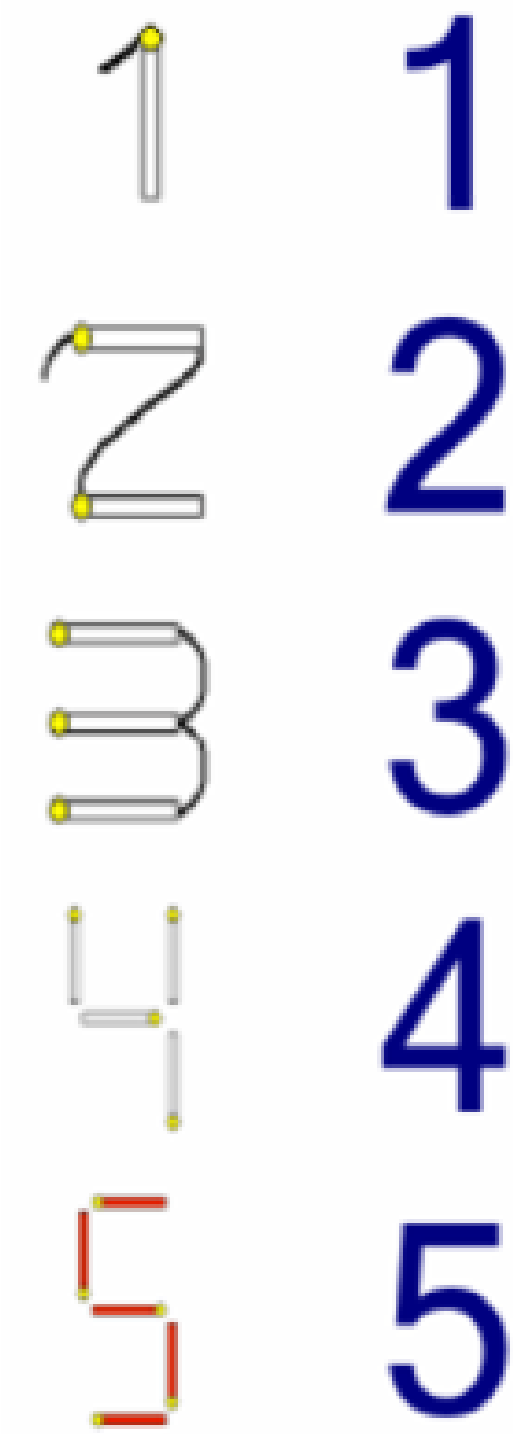
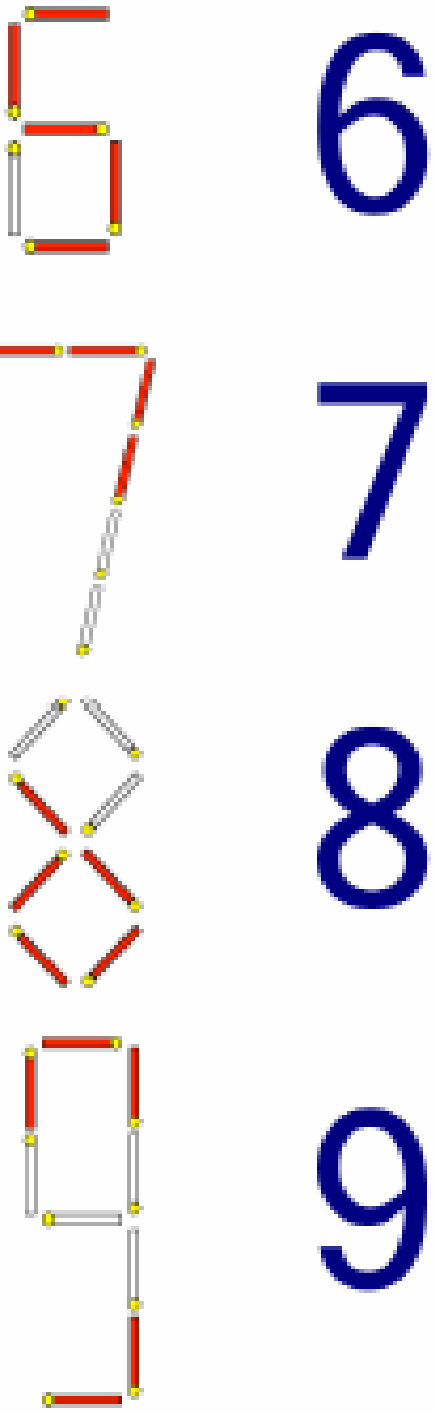


Tavola C





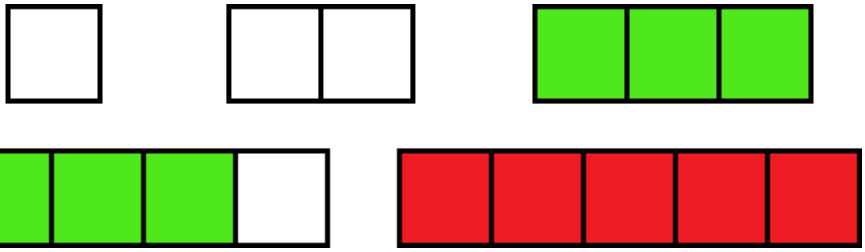
6

7

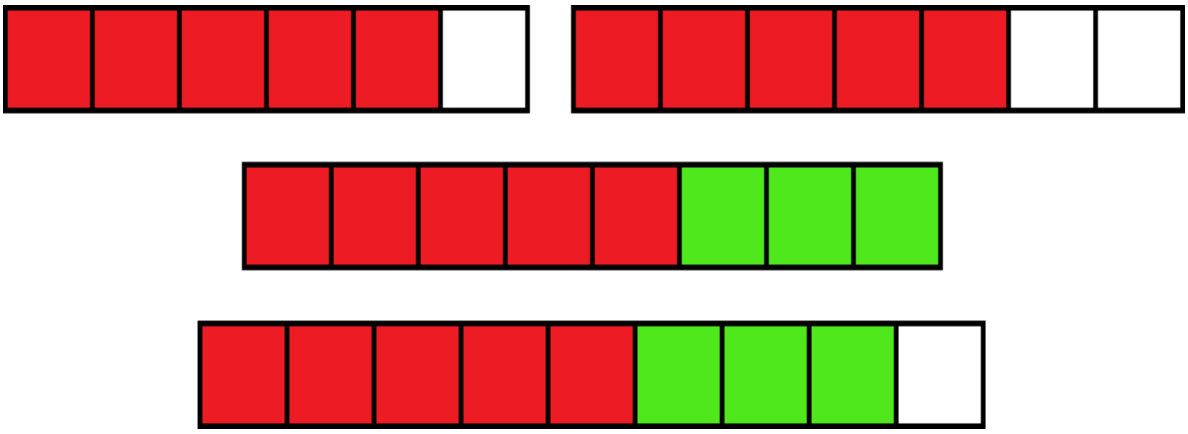
8

9

Tavola D **Tavola E**



strisce colorate da uno a cinque



strisce colorate da sei a nove

7+8 = 5+2 + 5+3 = 10+2+3 = 15

numeri in colore **il complemento a cinque**

Tavola F

Bibliografia

[1] Andreoli V. Homo stupidus stupidus, l'Agonia di una civiltà. Ed. Rizzoli, Milano. 2018.

[2] Brousseau G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, 33-115. 1986.

[3] Butterworth B. (1999). Intelligenza matematica. Ed. Rizzoli, Milano.

[4] Butterworth B. (2005). The development of arithmetical abilities. *The journal of child Psychology and Psychiatry*, 46, 318.

[5] Ceccarelli F. (1982). L'istinto linguistico, Ed. Sansoni.

[6] D'Amore, B. (2002). Basta con i numeri da 1 a 9, basta con i numeri in colore, basta con gli abaci multibase, *Vita Scolastica*, 8.

[7] D'Amore, B. (2002). Gérard Vergnaud. In M. Laeng (Ed.), *Enciclopedia Pedagogica*. (Appendice A-Z, pp. 1508–1509). Brescia: La Scuola.

[8] D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.

[9] D'Amore B. (2008). Le basi della didattica della matematica. *Scuola Italiana Moderna*. 116, n° 6, 41- 45.

[10] De Mauro T. (1995). L'origine del linguaggio (un'intervista a Sara Fortuna), *Rai Educational*. http://www.emsf.rai.it/articoli/articoli.asp?d=40

[11] Devlin K. (2008). L'istinto matematico. *Ed. Mondolibri*. http://www.mondolibri.it/immagini/pdf/assaggio_770149.pdf

[12] Doman G. Leggere a tre anni. *Armando editore.*

[13] Facchini F. (Sett. 24, 2012) Creazione, Dio non è contro Darwin. *Avvenire.* https://www.avvenire.it/agora/pagine/creazione-dio-non-e-contro-darwin

[14] Lenzi, D., Lenzi, R. (2015). Francesca e la sua discalculia un intervento di recupero dalla scuola dell'infanzia alla primaria. Matematicamente.it Magazine. http://www.matematicamente.it/magazine/24aprile2015/222.Lenzi-Francesca-Discalculia.pdf

[15] Lenzi, D., Lenzi, R. (2016). From Homo abilis to homo rationalis through analytic perception and mathematics. *Science & Philosophy*, Vol 4, No 2, 19-28. 282-683-1-PB (5).pdf

[16] Lenzi, D., Lenzi, R. (2018). Sull'acquisizione delle prime abilità aritmetiche per un avvio alla razionalità anche in presenza di disturbi cognitivi. *Mondo Matematico e Dintorni*, Vol 1, Ni 1-2, 17-28. 2-Lenzi_Disturbi_dellapprendimento_13-12-2018.pdf (eiris.it)

[17] Lenzi, D. (2019). Matematica, come prevenire la discalculia usando le filastrocche. Matematica, come prevenire la discalculia usando le filastrocche - Corriere.it

[19] Lieberman D. E., Churchill S. E. (1998) Evoluzione del genere Homo. *Frontiere della Vita*, Treccani. http://www.treccani.it/enciclopedia/evoluzione-del-genere-homo_(Frontieredella-Vita)

[20] Lucangeli D., Poli S., Molin A. (2003). L'intelligenza numerica, vol. 1; *Ed. Erickson,* Trento.

[21] Massarenti A., (2024). Come siamo diventati stupidi. Una immodesta proposta per tornare intelligenti. *Guerini e associati.*

[22] MIUR (2012). *Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione*. Roma. Disponibile da: http://hubmiur.pubblica.istruzione.it//web/istruzione/prot7734_12

[23] J., Szeminska A. (1968). La genesi del numero nel bambino. *La nuova Italia.*

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 5, No 2 (2022), 27 - 40

Le basi del contare

Laura Tomassi

Università di Roma Tor Vergata,
Dipartimento di Matematica,
Viale della Ricerca Scientifica, 1, 00133, Roma, Italy
laura.tomassi1@gmail.com, tomassi@axp.mat.uniroma2.it

Sunto

La comprensione dei sistemi di numerazione è profonda quando si capiscono le motivazioni che determinano la scelta di una base, del simbolismo, della convenzione linguistica che lo caratterizza e del meccanismo. Si presenta un percorso didattico e la relativa esperienza d'aula con alunni di classe prima di scuola secondaria di primo grado, ispirandosi alla storia integrata nella didattica della matematica e proponendo un "problema favola" dal Liber Abaci di Leonardo Pisano detto Fibonacci, nel quale un oggetto, le coppe d'argento, incarnano gli ordini del sistema di numerazione binario.

Parole chiave: sistemi di numerazione; basi; rappresentazione dei numeri; manualità; problemi favola; emozione; immaginazione; incarnazione.

1. Introduzione

Le Indicazioni Nazionali del 2012 indicano l'esigenza di:"*promuovere i saperi propri di un nuovo umanesimo: la capacità di cogliere gli aspetti essenziali dei problemi; la capacità di comprendere le implicazioni, per la condizione umana, degli inediti sviluppi delle scienze e delle tecnologie; la capacità di valutare i limiti e le possibilità delle conoscenze; la capacità di vivere e di agire in un mondo in continuo cambiamento*". In un passo della parte introduttiva si premette la necessità di "*diffondere la consapevolezza che i grandi problemi dell'attuale condizione umana […..]possono essere affrontati e risolti attraverso una stretta collaborazione non solo fra le nazioni, ma anche fra le discipline e fra le culture. Tutti questi obiettivi possono essere realizzati sin dalle prime fasi della formazione degli alunni. L'esperimento, la manipolazione, il gioco, la narrazione, le espressioni artistiche e musicali sono infatti altrettante occasioni privilegiate per apprendere per via pratica quello che successivamente dovrà essere fatto oggetto di più elaborate conoscenze teoriche e sperimentali".* (Profumo, F., 2012). All'inizio della scuola secondaria di primo grado, alle soglie dell'adolescenza, momento in cui secondo Maria Montessori nasce "il neonato sociale" (Montessori, M., Tornar, C., & Salassa, M. 1970), è fondamentale costruire questa forma del sapere

proponendo attività multidisciplinari: a questo non sfugge la didattica della matematica che può essere umanizzata attraverso la storia (Radford, L., Santi G., 2022). Il presente articolo si ispira alla metodologia della storia integrata nella didattica della matematica (Barbin, 2022) e riporta una esperienza didattica che prende le mosse dalla lettura e traduzione di un problema del capitolo XII del Liber Abbaci di Leonardo Pisano detto Fibonacci, testo del 1202 (https://www.progettofibonacci.it/index.html): si ipotizza che possa portare ad una riflessione sul modo di contare e sui sistemi di numerazione. Aspetti fondamentali di questo lavoro sono: la dimensione narrativa dei problemi (Zan, R., 2012) proposti da Fibonacci e riconducibili ai *problemi favola , co*me definiti da Maria Montessori nel suo libro Psicoaritmetica (Montessori, M., 1934; Boscolo, A. 2021) ; la didattica laboratoriale; la dimensione emotiva dell'apprendimento della matematica (Hannula, M. S., Pantziara, M., & Di Martino, P., 2018).

2. La storia integrata nella didattica della matematica

Alla fine del secolo scorso si è intensificato lo studio dell'uso della storia integrata nella didattica della matematica (Vergnaud, 1990), che permette di:

1. comprendere meglio le difficoltà cognitive sperimentate dai nostri studenti, nonché interpretare meglio gli errori e le concettualizzazioni errate che sorgono quando apprendono contenuti matematici specifici;
2. prendere decisioni più illuminate riguardo alla conoscenza insegnata; in particolare, può dare origine a nuovi modi di organizzare e articolare questa conoscenza in classe.

Negli ultimi decenni si sono poste molte domande specifiche la maggior parte delle quali creano campi di ricerca ancora aperti in didattica della matematica. (Chorlay, R., Clark, K. M., & Tzanakis, C., 2022). D'altra parte le sperimentazioni mettono in luce i vantaggi e le criticità dell'uso della storia nella didattica della matematica, nonché la necessità di formare gli insegnanti in questo senso (Barbin, E., 2020). Una delle caratteristiche più importanti di tale metodologia è la multidisciplinarità e l'utilizzo dei testi originali, in particolare per la lettura dei problemi storici. Essi perseguono il fine di realizzare uno "*choc culturale*" ("vertu dépaysante"), che desta l'interesse e permette di riorientare la conoscenza partendo dalle origini. Sono state condotte ricerche-azione sulla risoluzione dei problemi medioevali (Demattè, A., & Furinghetti, F. 2022;), in particolare per quanto riguarda l'apprendimento di elementi prealgebrici o proto algebrici, con l'utilizzo dei "problemi di parole" presenti nei *libri d'abbaco*. Il parallelo tra lo sviluppo del pensiero dei ragazzi e l'evoluzione del pensiero matematico dell'umanità, uno dei principi della didattica della matematica integrata con la storia, è fortemente calzante in questo senso: nel Medioevo latino, dal 1200 in poi, arriva in Europa l'algebra araba, non ancora simbolica, come nella formazione dei ragazzi di scuola media viene introdotto il pensiero protoalgebrico e simbolico. In questo processo fu storicamete fu determinante Leonardo Pisano Fibonacci attraverso la sua opera più famosa, il Liber Abaci. Qui si propone quanto emerso dall'esperienza d'aula relativa

alla soluzione di un problema d'abaco che permette la riflessione sul sistema di numerazione in base 2.

3. Il Liber Abbaci

Scritto da Leonardo Pisano detto Fibonacci , nel 1202 e riedito dallo stesso autore nel 1225, il Liber Abbaci è un testo destinato alla didattica della matematica per la formazione di allievi appartenenti al ceto medio, che nasceva nel tessuto sociale proprio nella fase definita dagli storici " Rivoluzione commerciale" (XIII secolo). Tuttavia, a differenza dei *libri d'abbaco* successivi, scritti in lingua volgare, il Liber ha le caratteristiche di un trattato di matematica, basato sul rigore dimostrativo euclideo e sulla matematica araba, appresa da Fibonacci nel suo soggiorno nella città Nordafricana di Bugia, fondaco pisano dove il padre era impiegato in qualità di funzionario e dove chiamò il giovane Leonardo perché apprendesse l'arte del commercio. Il Liber Abbaci non ha avuto nei secoli successivi una particolare fortuna: dal 1400 è in realtà completamente scomparso dallo scenario fino al secolo XIX, quando il principe Boncompagni ne curò una edizione a stampa. In tempi recenti il professore Enrico Giusti ne ha realizzato una riedizione critica ed è stato tradotto in italiano dal gruppo del professore Franco Ghione, che ne ha riportato il testo sul sito www.progettofibonacci.it . Qui si attinge al XII capitolo del Liber, quello delle *questioni erratiche*, che sono una serie di problemi che vertono su argomenti diversi tra loro, ma raggruppabili in categorie di argomenti di complessità crescente.
Si tratta di piccole narrazioni di carattere realistico dove un oggetto o una situazione rappresentano l'*incarnazione* di un discorso matematico: è sorprendente come questo criterio didattico sia ripreso largamente ai tempi di oggi (Arzarello, F., Robutti, O.,. 2009). Tali problemi costituiscono una fonte storica diretta, in quanto in essi è rappresentata la vita quotidiana, commerciale e le conoscenze tecnico scientifiche del XIII secolo.

4. Il problema delle coppe d'argento

In questo articolo sono riportate esperienze eseguite dai ragazzi di una classe prima di scuola secondaria di primo grado dell'IC Angelo Maria Ricci di Rieti, e di una classe prima della scuola secondaria di primo grado dell'IC Falcone e Borsellino di Roma.
Il primo passo del percorso è la lettura del seguente problema del Liber Abbaci:
Dell'uomo che aveva cinque coppe d'argento (XII.7.60)
Un tale dava a un altro per il suo lavoro quotidiano 1 marco d'argento, che saldava con le cinque coppe d'argento che aveva, a patto che non ne rompesse nessuna; e fece ciò per 30 giorni: il valore della prima coppa fu 1, il cui doppio, cioè 2 marchi, fu il valore della seconda; e il valore della terza fu 4, cioè il doppio della seconda. Poi il valore della quarta fu il doppio della terza, cioè 8, sommati insieme i valori delle quattro

coppe fanno 15 marchi; sottratti questi dai 30 marchi restano 15 marchi per il valore della quinta coppa.

Ai ragazzi viene data una versione semplificata ed adattata:

Un signore assume un operaio per fare dei lavori nella sua casa. L'operaio avrà come ricompensa 1 marco al giorno per 31 giorni e vuole essere pagato giorno per giorno. Il proprietario della casa non ha soldi in moneta ma solo 5 coppe d'argento: la più piccola vale 1 marco, la seconda è il doppio e vale due marchi, la terza 4, la quarta 8 e la quinta 16. In questo modo riesce a pagare l'operaio tutti i giorni a patto che l'operaio non rompa le coppe che via via riceve.

Si comincia con una discussione aperta in classe: le prime idee vengono dalla situazione "inconsueta", dalla moneta *(marco)* sconosciuta ai ragazzi e dal valore delle coppe, che gli studenti individuano essere via via una il doppio della precedente.. Per i ragazzi della 1 B il problema è stato affrontato prima dello studio delle potenze; per i ragazzi della 1 A in contemporanea.

Propongo di rappresentare il problema attraverso:

1. descrizione verbale
2. modalità grafica

La prima forma di rappresentazione spontanea per gli studenti è la produzione di "pergamene" (Figura 2) suggerite loro dall'aspetto del Liber Abbaci, che hanno visto nella versione digitalizzata del manoscritto sul sito del Museo Galileo (https://bibdig.museogalileo.it/tecanew/opera?bid=1072400&seq=1).

Figura 1: Il Prologo del Liber Abaci

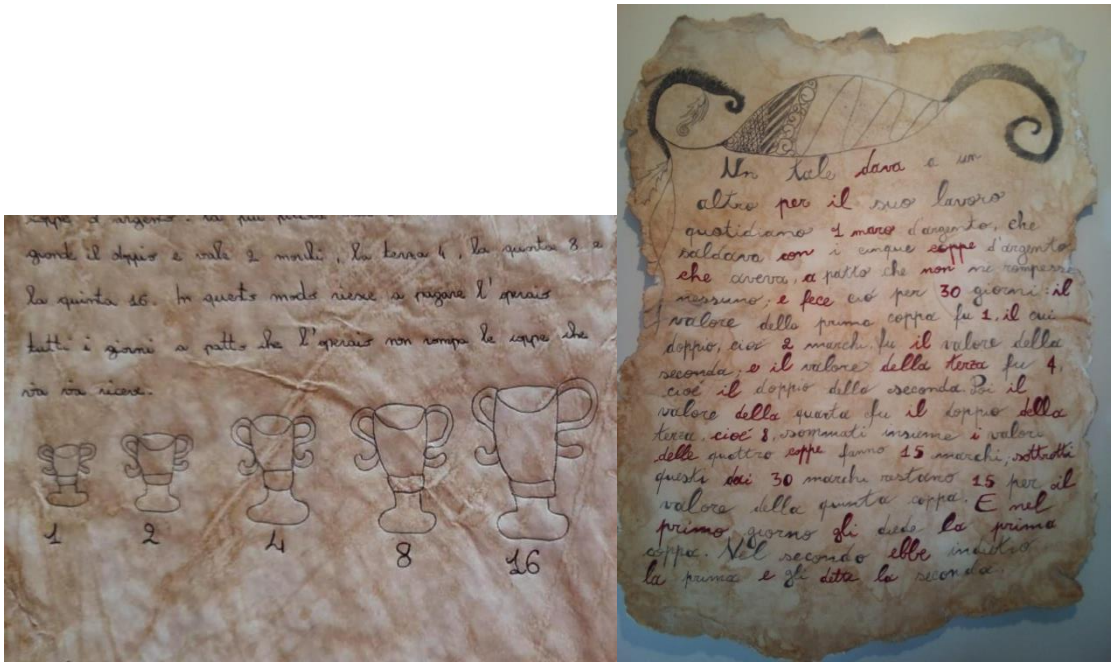
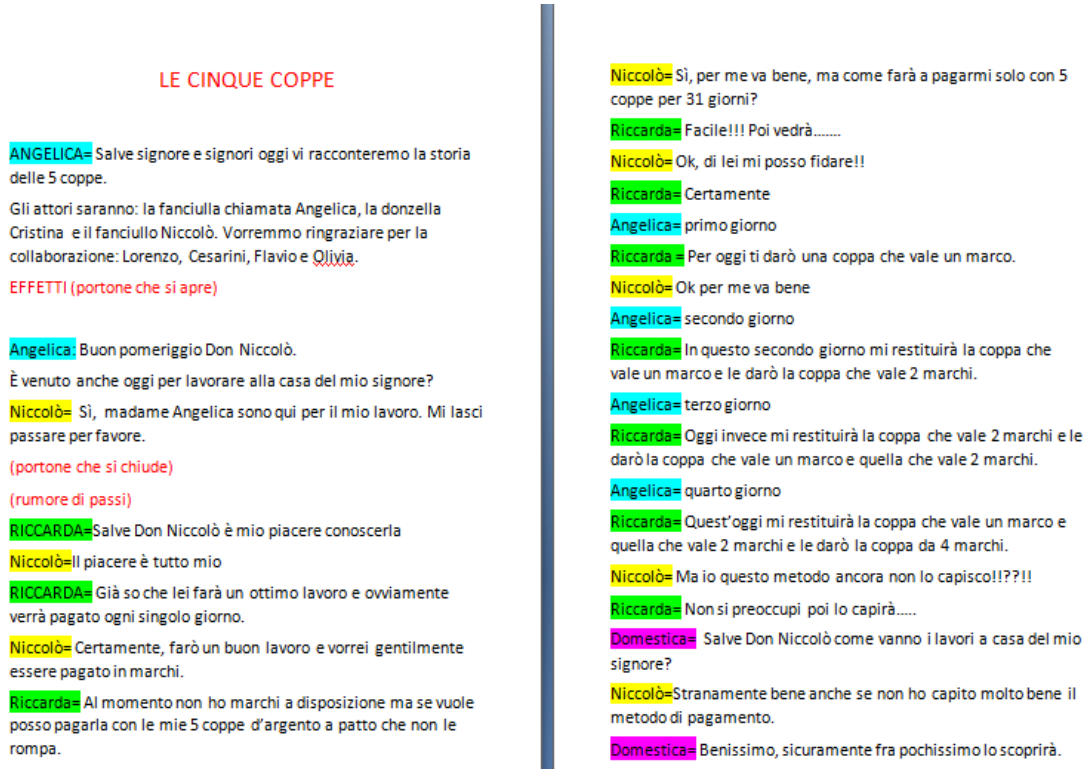


Figura 2: La rappresentazione su "pergamena" fatta dagli studenti

In realtà, la fantasia dei ragazzi li può guidare anche verso modalità espressive imprevedibili: la suggestione del problema Duecentesco, letto senza alcuna introduzione culturale, indirizza i ragazzi verso una sceneggiatura e una rappresentazione teatrale, di cui in Figura 3 sono riportati alcuni passi. Si tratta certo di una risposta non disciplinare al problema, ma di un'esigenza degli studenti, alla quale viene concesso del tempo: si tenga presente che gran parte di queste attività sono state svolte in gruppo il pomeriggio in maniera spontanea dagli studenti, così come le prove della rappresentazione teatrale e la produzione delle "pergamene", senza che fossero assegnate delle consegne da parte dell'insegnante.



LE CINQUE COPPE

ANGELICA= Salve signore e signori oggi vi racconteremo la storia delle 5 coppe.

Gli attori saranno: la fanciulla chiamata Angelica, la donzella Cristina e il fanciullo Niccolò. Vorremmo ringraziare per la collaborazione: Lorenzo, Cesarini, Flavio e Olivia.

EFFETTI (portone che si apre)

Angelica: Buon pomeriggio Don Niccolò.

È venuto anche oggi per lavorare alla casa del mio signore?

Niccolò= Sì, madame Angelica sono qui per il mio lavoro. Mi lasci passare per favore.

(portone che si chiude)

(rumore di passi)

RICCARDA=Salve Don Niccolò è mio piacere conoscerla

Niccolò=Il piacere è tutto mio

RICCARDA= Già so che lei farà un ottimo lavoro e ovviamente verrà pagato ogni singolo giorno.

Niccolò= Certamente, farò un buon lavoro e vorrei gentilmente essere pagato in marchi.

Riccarda= Al momento non ho marchi a disposizione ma se vuole posso pagarla con le mie 5 coppe d'argento a patto che non le rompa.

Niccolò= Sì, per me va bene, ma come farà a pagarmi solo con 5 coppe per 31 giorni?

Riccarda= Facile!!! Poi vedrà.....

Niccolò= Ok, di lei mi posso fidare!!

Riccarda= Certamente

Angelica= primo giorno

Riccarda = Per oggi ti darò una coppa che vale un marco.

Niccolò= Ok per me va bene

Angelica= secondo giorno

Riccarda= In questo secondo giorno mi restituirà la coppa che vale un marco e le darò la coppa che vale 2 marchi.

Angelica= terzo giorno

Riccarda= Oggi invece mi restituirà la coppa che vale 2 marchi e le darò la coppa che vale un marco e quella che vale 2 marchi.

Angelica= quarto giorno

Riccarda= Quest'oggi mi restituirà la coppa che vale un marco e quella che vale 2 marchi e le darò la coppa da 4 marchi.

Niccolò= Ma io questo metodo ancora non lo capisco!!??!!

Riccarda= Non si preoccupi poi lo capirà.....

Domestica= Salve Don Niccolò come vanno i lavori a casa del mio signore?

Niccolò=Stranamente bene anche se non ho capito molto bene il metodo di pagamento.

Domestica= Benissimo, sicuramente fra pochissimo lo scoprirà.

Figura 3: La sceneggiatura dei ragazzi

5. La razionalizzazione

Dopo una prima fase in cui la fantasia è lasciata libera e gli studenti "entrano" nel problema attraverso la loro emotività si chiede di risolvere il problema lavorando in gruppo e di riportare in "forma schematica " la procedura di pagamento dell'operaio, cercando di elaborare un linguaggio simbolico che possa esprimere le grandezze che intervengono nel problema. Si comincia a riflettere su quali "discorsi matematici" sono affrontati in questo problema: i ragazzi si accorgono che il valore delle coppe è esprimibile come le prime cinque potenze di due. Il dubbio più forte risiede in realtà nel considerare il valore della prima coppa come potenza di due: 1 non è naturale per loro come potenza di 2, quando ci si muove lontano dal contesto del libro di matematica. Si propone un'attività nella quale i blocchi aritmetici multibase (come si vede nella figure 4 e nella figura 5) *incarna* le potenze di due, attraverso una rappresentazione geometrica : 2^1 è lineare; 2^2 è quadrata; 2^3 è cubica; 2^4 è un quadrato di quadrato (2^2) ^{2} (come verificano gli studenti per sovrapposizione), anche se un altro modo di vederlo è quello di prendere due cubi, che gli studenti suggeriscono congiunti in vario modo, ad esempio per un vertice.

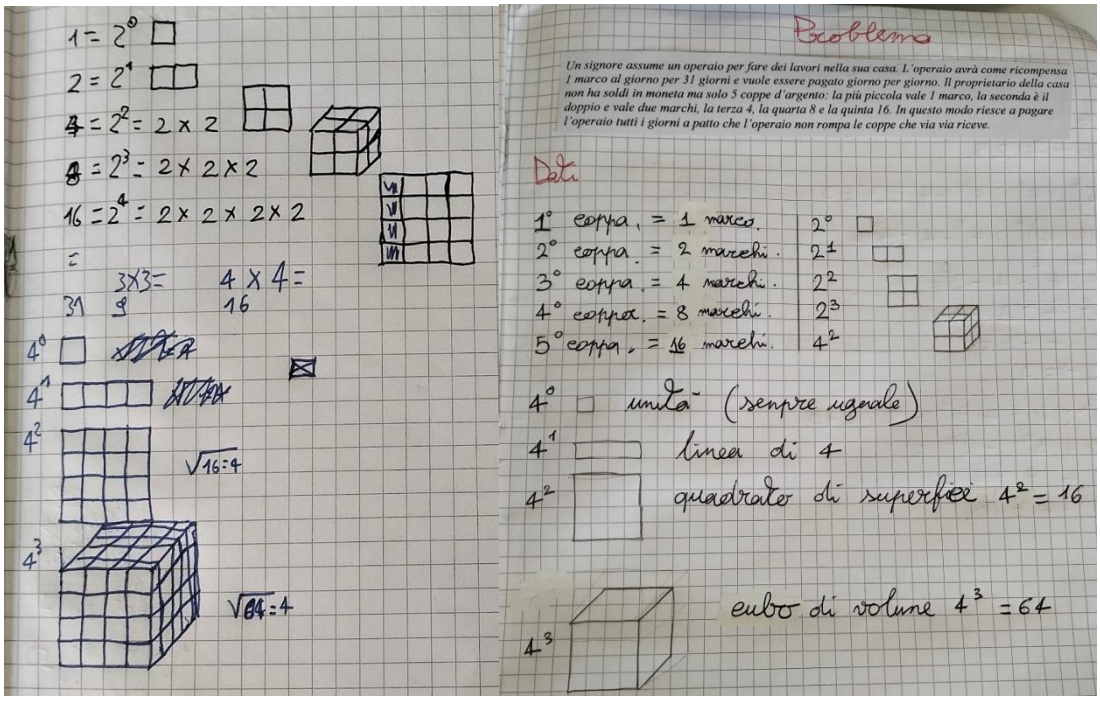


Figura 4: la rappresentazione sul quaderno del problema delle coppe

Si richiede la soluzione vera e propria, ossia come l'operaio può essere pagato. Dopo aver ascoltato la proposta dei ragazzi si legge la soluzione di Fibonacci:
" E nel primo giorno gli diede la prima coppa. Nel secondo ebbe indietro da quello la prima e gli dette la seconda. Nel terzo il signore rese al lavoratore la prima. Nel quarto giorno il signore prese dall'operaio la prima e la seconda, e gli dette la terza; e così lo pagò ogni giorno nell'ordine predetto per 30 giorni."
L'idea di come rappresentare la soluzione viene dagli studenti:

Nella Figura 5 viene riportata una rappresentazione pre-simbolica: si sono stimolati i ragazzi a notare che il valore delle coppe può essere scritto come potenza di due e a notare che le coppe sono in singola copia, quindi nell' espressione matematica relativa, il fattore che moltiplica le potenze di due, può essere 0 o 1 (O oppure X, con i simboli riportati in tabella dagli studenti).

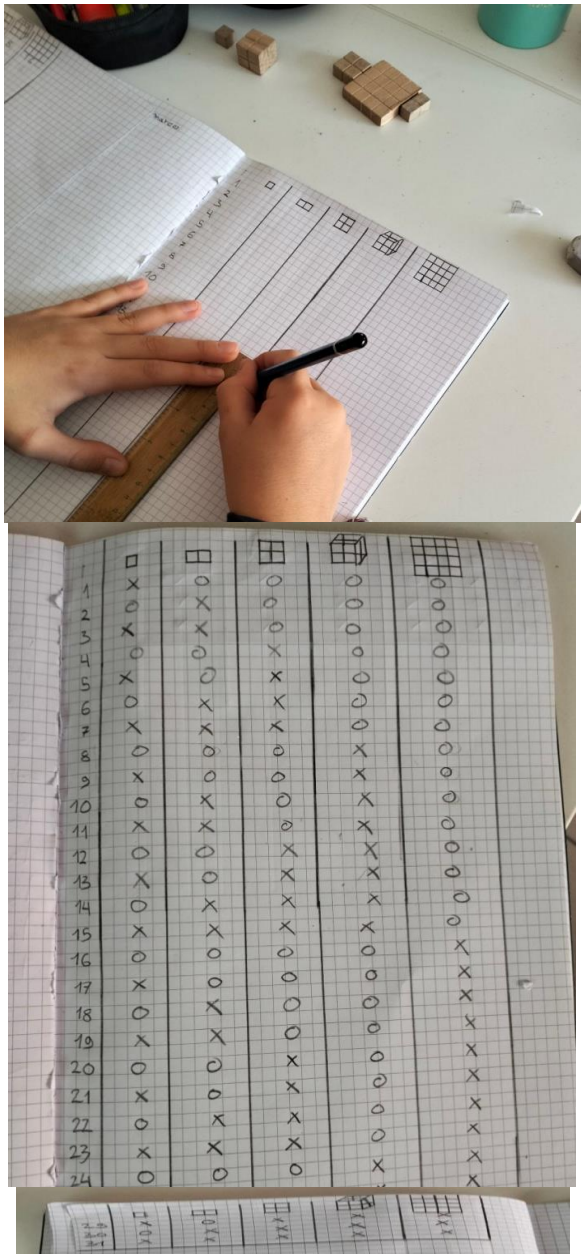


Figura 5: una rappresentazione “presimbolica” della soluzione.

Viene poi proposto un quesito riportato in questo dialogo Insegnante (I)/studenti(S):
I- “Senza risolvere il problema cominciando dal primo giorno siamo in grado di dire come verrà pagato l'operaio in un giorno qualsiasi del mese?”
S-“Prendo quella che si avvicina di più e poi quelle a scendere….”.
I-“Ragioniamo su come scrivere ad esempio il numero 15”
S-”15= coppa da 8+coppa da 4+coppa da 2+ coppa da 1”
I- “Ma stiamo scrivendo i numeri come somma di potenze di 2, mentre di solito sono somme di potenze di …?” .
S- “ .....di 10!. Stiamo lavorando in un sistema secondale!”
S- “No professoressa, duale si dice”
I- “Binario, si dice ragazzi”

S- "Ah il sistema binario quello del computer, che è un sistema semplicissimo che funziona sui coefficienti 0 e 1, esattamente come nel caso delle nostre coppe".
I- "In analogia alle unità, decine, centinaia e migliaia, come possiamo chiamare i corrispondenti del sistema binario?"
S-" Professoressa, chiamiamoli "unità, duine,quadrinaia, ottinaia!"
In ultimo, si assegna un problema: scrivere i numeri da 1 a 31 come somma di potenze di due con coefficiente guardando la tabella che rappresenta il pagamento dell'operaio. Si ragiona su come questo porti il lavoro verso la scrittura dei numeri in un sistema binario, partendo da una rappresentazione simbolica del sistema binario stesso, quella delle coppe in unica copia.
Da questa attività si è cercato di imparare a scrivere delle "formule parlate":
I-"La somma delle prime 3 coppe è 7" e "2 alla terza è uguale a 8"
I-"La somma delle prime 4 coppe è 15" e "2 alla quarta è 16….Allora come possiamo dire?"
S-"Che la somma di un certo numero di coppe è uguale a 2 elevato a quel numero e togliamo 1".
Siamo lontani certo dallo scrivere che $Sn=2^n-1$ ma il concetto è espresso "a parole" e soprattutto si è evidenziata l'esigenza del rintracciare la fisionomia della formula nella regolarità del risultato per esprimerla sotto forma di legge.
La visualizzazione geometrica delle potenze con i *blocchi multibase* ha portato a svolgere manualmente degli esercizi sulle potenze. Nelle prossime immagini si fa vedere lo svolgimento dell'operazione $9^2 : 3^2$. L'immagine è tratta da un video in cui la studentessa deduce che il risultato della divisione tra i due quadrati. corrisponde a misurare il più grande con il più piccolo, è uguale a 3^2

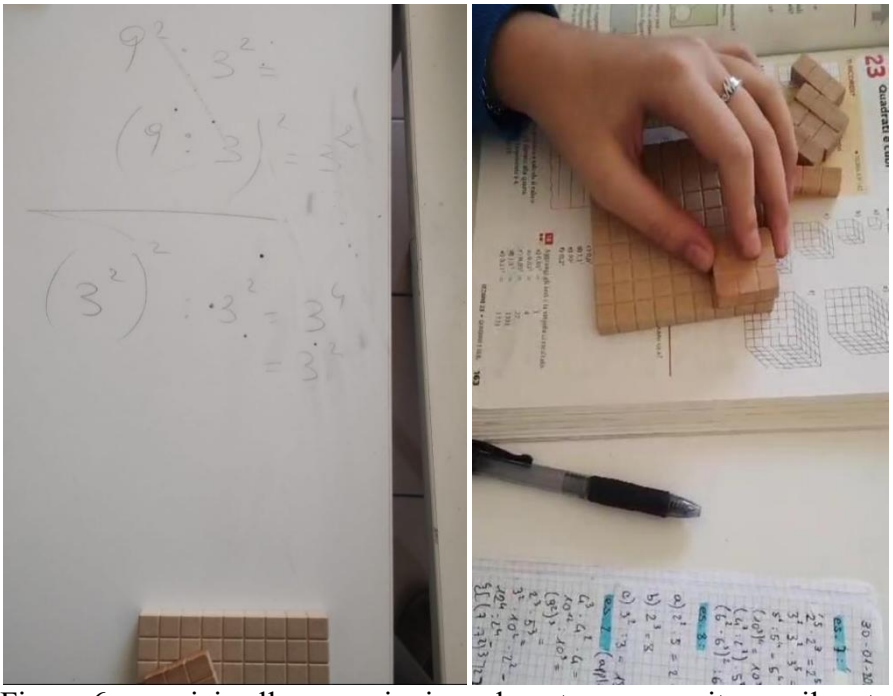


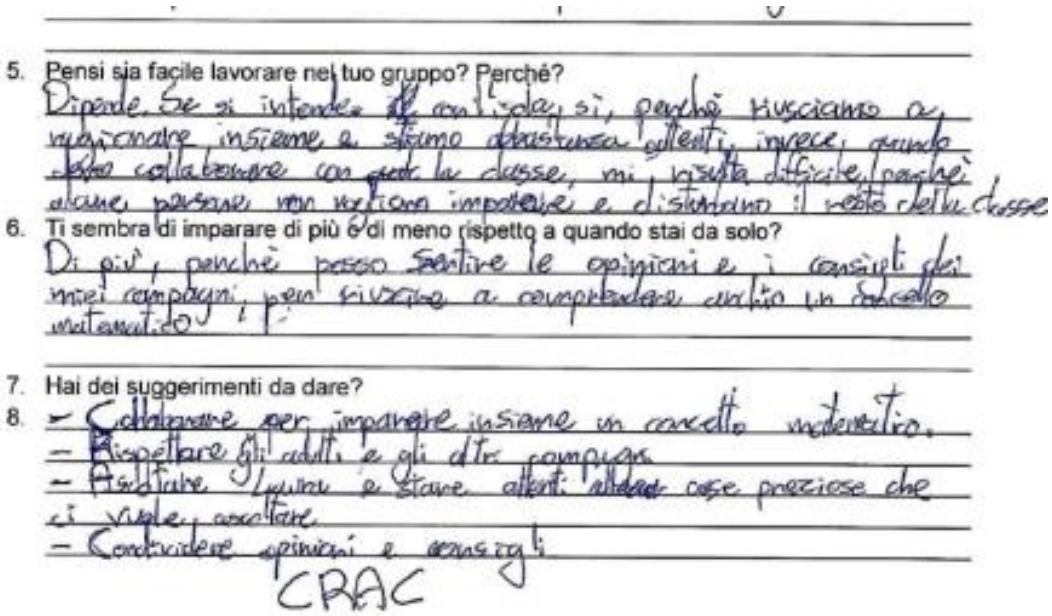
Figura 6: esercizi sulle operazioni con le potenze eseguite con il materiale

6. “apprendere così è un’attività più immersiva”

La conclusione dell’esposizione delle attività dei ragazzi è affidabile alla loro testimonianza diretta. Durante l’esperienza d’aula in 1 A vi è stato un momento di disordine e di scarsa produttività: si è presa occasione per riflettere ed é stato distribuito un questionario per dialogare con la classe. Uno dei risultati è il seguente:

È importante imparare dalle cose che non funzionano, quanto dalle cose che funzionano. Trovare dove i meccanismi si bloccano serve a farli girare meglio: è così nella vita di tutti i giorni ed è così anche a scuola.

1. Ritieni utile lavorare con i materiali nello studio dei concetti di matematica?Giustifica la tua risposta.
   Sì, perché è un metodo di lavoro divertente e che spiega chiaramente alcuni concetti matematici
2. Ti sembra di imparare di più o di meno rispetto a quando leggi solamente? Giustifica la tua risposta.
   Di imparare di più, perché è un'esperienza più immersiva rispetto a studiare
3. Ti sembra di imparare di più o di meno rispetto a quando ascolti? Giustifica la tua risposta.
   Mi sembra di imparare di più, perché se ho il calcolo nella mia mano è più facile da comprendere.
4. Ritieni utile parlare della storia nello studio dei concetti di matematica?Giustifica la tua risposta.
   Sì perché è importante sapere come hanno inventato un certo tipo di calcolo, così da sapere come svolgerlo.



5. Pensi sia facile lavorare nel tuo gruppo? Perché?
Dipende. Se si intende ~~il~~ con l'isola, sì, perché riusciamo a ragionare insieme e stiamo abbastanza attenti, invece, quando devo collaborare con ~~quel~~ la classe, mi risulta difficile, perché alcune persone non vogliono imparare e disturbano il resto della classe
6. Ti sembra di imparare di più o di meno rispetto a quando stai da solo?
Di più, perché posso sentire le opinioni e i consigli dei miei compagni, per riuscire a comprendere anche un concetto matematico
7. Hai dei suggerimenti da dare?
8. – Collaborare per imparare insieme un concetto matematico.
– Rispettare gli adulti e gli altri compagni
– Ascoltare l'aura e stare attenti ~~alle~~ cose preziose che ci vuole ascoltare
– Condividere opinioni e consigli
CRAC

Figura 6

La risposta circa l'utilità dei materiali parla di "esperienza immersiva": è esattamente ciò che si stava cercando di fare, immergere gli studenti completamente nel discorso storico-matematico.
L'immersione è forse testimoniata in maniera incisiva dalle ultime battute della sceneggiatura:

Riccarda= allora, vediamo, me lo spieghi!!

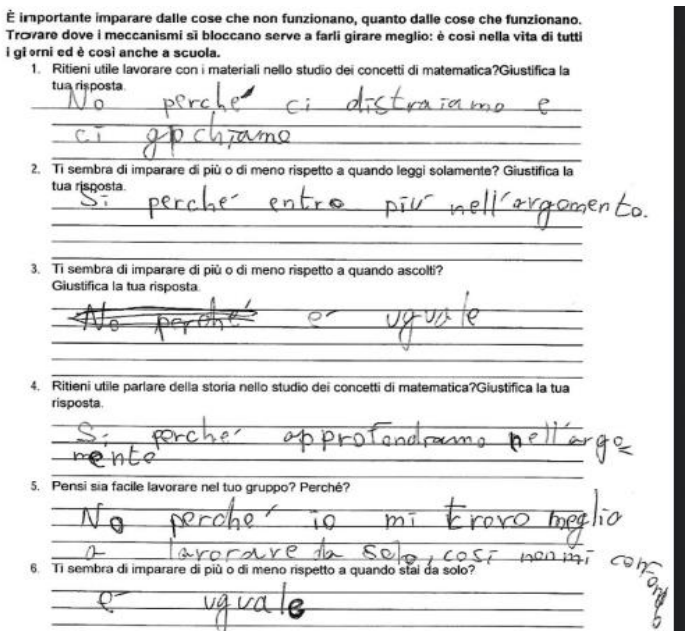
Niccolò= certo ne sono molto contento. Allora prima di tutto devo farle i complimenti per essere stata molto astuta a trovare questo metodo di pagamento facile e pratico. Con la quale lei mi riesce a pagare per tutti i miei 31 giorni di lavoro con solo cinque coppe d'argento che valgono la prima un marco, la seconda 2 marchi, la terza 4 marchi, la quarta 8 marchi e infine la quinta 16 marchi.

Riccarda= Mi complimento davvero molto con lei, io ho fatto proprio questo ragionamento per pagarla. Era un metodo molto difficile da far capire ai lavoratori e devo essere sincera con lei, ho avuto molto operai prima di lei ma quasi nessuno è riuscito a capire questo metodo di pagamento e gliel'ho dovuto far capire io, invece lei anche se con un po' di tempo, è normalissimo ci è riuscito. I miei più grandi complimenti.

Niccolò= Grazie mille contessa Cristina. Penso che qui il mio lavoro sia finito per lei va bene se vado a salutare la domestica Angelica e il buon paesano Flavio?

Figura 7 La conclusione della sceneggiatura

Ma occorre tenere conto di tutti e ricordarsi che non esiste un solo modo di insegnare e di apprendere, come testimoniano le risposte di chi con il metodo del laboratorio storico matematico non si trova bene:



È importante imparare dalle cose che non funzionano, quanto dalle cose che funzionano. Trovare dove i meccanismi si bloccano serve a farli girare meglio: è così nella vita di tutti i giorni ed è così anche a scuola.

1. Ritieni utile lavorare con i materiali nello studio dei concetti di matematica?Giustifica la tua risposta.
   No perché ci distraiamo e ci giochiamo
2. Ti sembra di imparare di più o di meno rispetto a quando leggi solamente? Giustifica la tua risposta.
   Sì perché entro più nell'argomento.
3. Ti sembra di imparare di più o di meno rispetto a quando ascolti? Giustifica la tua risposta.
   ~~No perché~~ è uguale
4. Ritieni utile parlare della storia nello studio dei concetti di matematica?Giustifica la tua risposta.
   Sì perché approfondiamo nell'argomento
5. Pensi sia facile lavorare nel tuo gruppo? Perché?
   No perché io mi trovo meglio a lavorare da solo, così non mi confondo
6. Ti sembra di imparare di più o di meno rispetto a quando stai da solo?
   È uguale

7. Conclusione

Come test conclusivo vengono proposte due attività diverse:
-la soluzione di un problema del liber Abaci, il cosiddetto problema dei pesi (che prevede la scrittura di numeri in base 3)
-la scrittura dei numeri in base 2 ed in base 1
I risultati non sono molto diversi in un'attività e nell'altra: i ragazzi che riescono a risolvere la prima, riescono a risolvere anche la seconda richiesta.
I prerequisiti costruiti sono stati utilizzati per attività riguardanti i codici, in particolare il codice binario..
Analizzare solo i risultati in termini di rendimento disciplinare non è tuttavia esaustivo: va considerato l'atteggiamento positivo nei confronti dell'insegnante e della matematica in generale, la consapevolezza che per comprendere un concetto matematico è necessario il linguaggio, la storia e la cooperazione con gli altri.

Bibliografia e sitografia

Arzarello, F., Robutti, O., (2009). "Embodiment e multimodalità nell'apprendimento della matematica". Insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol.32, A-B n.3, 243-268.

Barbin, É. (2022). On the role and scope of historical knowledge in using the history of mathematics in education. ZDM–Mathematics Education, 54(7), 1597-1611

Barbin, E., Guillemette, D., & Tzanakis, C. (2020). History of mathematics and education. Encyclopedia of mathematics education, 333-342.

Boscolo, A., Crescenzi, M. T., & Scoppola, B. (2021). Sulla genesi e lo sviluppo del pensiero matematico di Maria Montessori. Rivista di Storia dell'Educazione, 8(2), 9-23.

Chorlay, R., Clark, K. M., & Tzanakis, C. (2022). History of mathematics in mathematics education: Recent developments in the field. ZDM–Mathematics Education, 54(7), 1407-1420.

Demattè, A., & Furinghetti, F. (2022). Today's students engaging with Abbacus problems. ZDM–Mathematics Education, 54(7), 1521-1536.

Hannula, M. S., Pantziara, M., & Di Martino, P. (2018). Affect and mathematical thinking. Developing Research in Mathematics Education: Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe, 128.

Montessori, M., (1934) . Psicoaritmetica. L'aritmetica sviluppata secondo le indicazioni della psicologia infantile durante venticinque anni di esperienze. Opera Nazionale Montessori

Montessori, M., Tornar, C., & Salassa, M. (1970). Dall'infanzia all'adolescenza (Vol. 5). Garzanti.

Profumo, F. (2012). Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione. Firenze: Le Monnier.

https://www.progettofibonacci.it/index.html

Radford, L. (1995). Before the Other Unknowns Were Invented: Didactic Inquiries on the Methods and Problems of Mediaeval Italian Algebra. For the Learning of Mathematics, 15(3), 28–38.

Radford, L., & Santi, G. (2022). Learning as a critical encounter with the other: Prospective teachers conversing with the history of mathematics. ZDM–Mathematics Education, 54(7), 1479-1492.

Demattè, A., & Furinghetti, F. (2022). Today's students engaging with Abbacus problems. ZDM–Mathematics Education, 54(7), 1521-1536.

Vergnaud, G. [1990] Epistemology and Psychology of Mathematics Education, in: Mathematics and Cognition, P. Nesher and J. Kilpatrick (eds.), Cambridge University Press, pp. 14-30

Zan, R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri) formulazione del testo. Parte I. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 35, 107-126.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 5, No 2 (2022), 41-54

Le costruzioni geometriche e lo sviluppo del pensiero computazionale: proposta per la scuola secondaria di primo grado

Silvia Cerasaro

Università Tor Vergata di Roma,
Scuola di dottorato
Dipartimento di Matematica
cerasaro@axp.mat.uniroma2.it

Sunto

Di seguito è riportato un percorso geometrico per gli alunni della scuola secondaria di primo grado finalizzato allo sviluppo del pensiero computazionale e al superamento delle difficoltà nella lettura e comprensione di un testo matematico scritto in linguaggio naturale. L'abilità di leggere e comprendere un testo matematico va educata mediante attività che prevedono la traduzione di un comando scritto in azione, come, ad esempio, le costruzioni geometriche. Esse permettono di porre in relazione la descrizione scritta dei concetti geometrici con il diagramma presente sulla fonte storica considerata, e di schematizzare i comandi in sequenze di azioni, che potranno eseguire in maniera autonoma per arrivare alla realizzazione grafica della figura descritta. Infine, le attività presentate in questo articolo sono finalizzate anche alla presa di coscienza che la geometria è nel mondo che ci circonda, mostrando come individuare gli oggetti risultanti dalle costruzioni geometriche svolte in un esempio presente in natura.

Parole chiave: Linguaggio naturale, pensiero computazionale, costruzione geometrica, riga, compasso, Geogebra.

1. Introduzione

E' stata descritta, in un altro articolo, una proposta laboratoriale con costruzioni geometriche destinate agli alunni della scuola primaria [Cerasaro, Mondo Matematico e Dintorni 5(2022) No1]. Quelle descritte di seguito sono delle attività presentate agli alunni della classe seconda della scuola secondaria di primo grado, che avevano avuto esperienze pregresse con le costruzioni geometriche più semplici. La decisione di continuare a presentare ancora attività dello stessa tipologia, con un maggiore grado di difficoltà, è finalizzata a favorire un ulteriore sviluppo del pensiero computazionale,

oltre ad allenare lo studente alla comprensione di quanto legge. In attività presentate agli studenti prima di quelle riportate in questo articolo, era stata riscontrata difficoltà nel tradurre in procedimento matematico ciò che era stato letto con linguaggio naturale. Era stato presentato il seguente problema in cui si chiede di trovare l'altezza di un albero, a partire da alcuni dati, seguita dalla descrizione del procedimento risolutivo:

«C'è un albero, $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$ del quale sta nascosto sotto terra, corrispondente a 21 palmi: si chiede quale sia la lunghezza di quell'albero. Poiché $\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}$ si trovano nel 12, immagina l' albero diviso in 12 parti uguali, di cui un terzo, e un quarto, cioè 7 parti, corrispondono a 21 palmi: Perciò come 7 sta a 21, così, proporzionalmente, 12 parti stanno alla lunghezza dell'albero. E poiché quando quattro numeri sono proporzionali, la moltiplicazione del primo per il quarto è uguale alla moltiplicazione del secondo per il terzo: allora moltiplicando il secondo termine, 21, per il terzo termine, 12, che sono noti, e dividendo similmente per il primo numero, cioè per 7, si otterrà 36 per il quarto numero incognito, cioè per la lunghezza di quell'albero: oppure poiché 21 è il triplo di 7, prendi il triplo di 12, e avrai similmente 36». [Traduzione di Boncompagni, 1857, p. 173, par. XII.3.1. presente sul sito www.progettofibonacci.it,]

Gli studenti hanno letto più volte le prime due righe, che presuppongono anche conoscenze aritmetiche sulla frazione di frazione, non riuscendo, però, a capire la richiesta. Solo dopo una seconda lettura, avvenuta con una divisione in sequenze di quanto letto, hanno individuato l'incognita da determinare, attraverso l'impostazione di una proporzione. La lettura e relativa comprensione del procedimento risolutivo è stato un ulteriore ostacolo, nonostante gli alunni avessero già utilizzato la strategia descritta per arrivare alla soluzione. Questa esperienza mi ha convinto a programmare degli interventi didattici finalizzati alla comprensione di un testo scritto.

Le finalità che si possono raggiungere attraverso le attività proposte sono in continuità con le Indicazioni Nazionali del Curricolo. Relativamente al riprendere e approfondire attività svolte in passato e finalizzate ad un corretto utilizzo e alla comprensione del linguaggio, si può leggere quanto segue:

La costruzione del pensiero matematico è un processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese; è un processo che comporta anche difficoltà linguistiche e che richiede un'acquisizione graduale del linguaggio matematico.

Nei Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado è riportato:

(L'alunno) Utilizza e interpreta il linguaggio matematico e ne coglie il rapporto con il linguaggio naturale.

Per le attività ed i contenuti trattati, ovvero, le costruzioni geometriche, negli Obiettivi specifici di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado si legge:

Riprodurre figure e disegni geometrici, utilizzando in modo appropriato e con accuratezza opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, goniometro, software di

geometria).
Inoltre, si specifica che di estrema importanza è lo sviluppo di una adeguata visione della matematica (...) riconosciuta ed apprezzata (...) per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura…

2. Perché proporre le costruzioni geometriche?

Ci sono motivazioni profonde che mi hanno spinto a proporre delle costruzioni geometriche a classi di scuola secondaria di primo grado e agli studenti della scuola primaria. Innanzitutto, c'è da specificare che la comprensione di un testo di geometria greca è strettamente correlata al contesto culturale, inteso come risultato dell'interazione di un individuo nella civiltà in cui è inserito. La lettura del testo della costruzione stimola la sensazione, concepita come riflessione sensoriale, che diventa una forma: essa è trasformata culturalmente perché in relazione ad artefatti culturali, come il linguaggio, i segni, i diagrammi, le forme stesse [Radford, 2013]. La nostra cultura affonda le sue origini in quella greca, per cui il risultato dell'apprendimento è fortemente influenzato da questo fattore.
Un altro motivo che mi ha convinto ad utilizzare le costruzioni geometriche nei percorsi finalizzati allo sviluppo del pensiero computazionale è giustificata dalla volontà di superare la difficoltà di passare dal discorso retorico a quello dimostrativo, ovvero dall'uso del linguaggio naturale a quello matematico. In realtà, anche il discorso dimostrativo ha una certa retorica, come confermato dalle dimostrazioni riportate negli Elementi di Euclide: il problema è essenzialmente legato alla comprensione del discorso retorico. Infatti, in ogni discorso fatto intervengono diversi fattori psicologici che influenzano la comprensione e proprio per tale motivo si potrebbe pensare a ri-organizzare il discorso geometrico in base alle esigenze psicologiche degli studenti. La lettura di una dimostrazione così come presentata da Euclide sembra non far mantenere l'attenzione fino alla fine, solitamente uno studente la riesce a seguire fino ad un certo numero di passi dai quali non si evince sempre la direzione dell'insieme di azioni compiute. In uno studio che coinvolge studenti di discipline umanistiche, impegnati a realizzare una costruzione euclidea [Mosconi, 1990], è stato dimostrato che raggruppare un insieme di comandi, finalizzati alla realizzazione di una figura geometrica e che concentrano per gradi l'attenzione su una parte di essa, facilita la comprensione: gli ordinamenti diversi di una dimostrazione attraverso l'individuazione di sequenze favoriscono l'apprendimento. Per questo motivo le costruzioni presentate agli studenti sono o già divise per passi numerati da seguire, oppure sono mostrate come in originale per essere poi "tradotte" da loro stessi in sequenze.
Inoltre, queste attività seguono un percorso storico che ha come finalità quello di rendere consapevole lo studente che la matematica e il suo linguaggio sono in continua evoluzione. La lettura di un testo matematico in greco, in latino, in volgare ed in italiano

può porre l'attenzione sull'uso di determinati termini di cui discutere dal punto di vista etimologico anche con l'insegnante di lettere, a favore dell'interdisciplinarietà che l'uso della storia della matematica nella sua didattica comporta [Dematté & Furinghetti, 2022].

3. Prima attività: lettura dei testi della costruzione geometrica del pentagono

Sapendo già costruire con riga e compasso sia il triangolo equilatero che l'esagono, come svolto nel precedente anno scolastico, si vuole ora mostrare agli alunni come costruire il pentagono regolare. Solitamente, nella scuola secondaria di primo grado, le costruzioni geometriche dei poligono regolari vengono trattate nel disegno tecnico nella materia di tecnologia nel primo anno: quella del pentagono che solitamente viene insegnata è quella di Tolomeo (II d.C.). La costruzione che, invece, si presenta è precedente, del III a.C. circa, quella presente negli Elementi di Euclide [Acerbi, 2007], la proposizione 11 del quarto libro. Per stimolare l'attenzione degli alunni e indurli a pensare all'evoluzione del linguaggio della matematica nel corso della storia, si presenta una scheda con il testo di tale proposizione dapprima in greco e in latino, con il solo scopo di suscitare stupore e curiosità, seguito dai testi in volgare e in italiano.

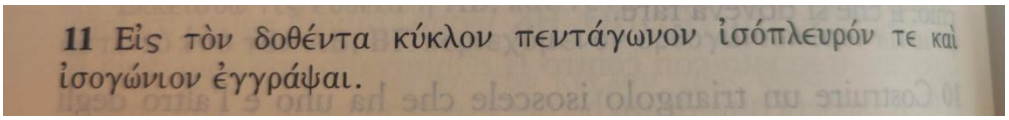
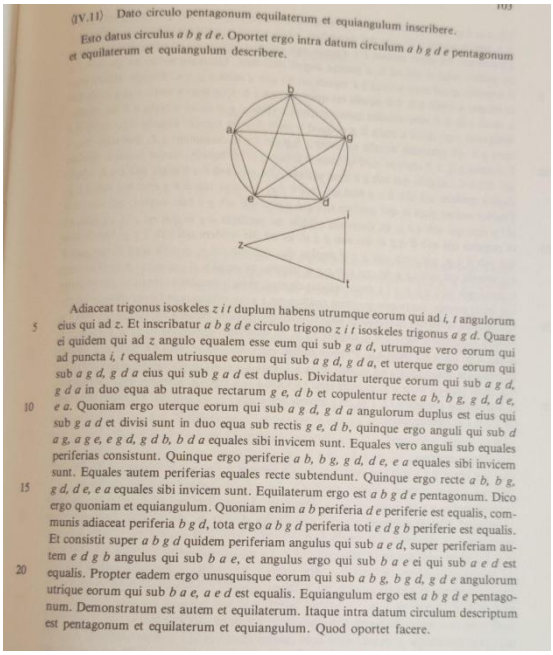

11 Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Figura 1: enunciato della prop. IV.11 degli Elementi di Euclide in greco [Acerbi, 2007]

Alcuni studenti mi hanno chiesto di leggere il testo greco, dopo qualche tentativo di lettura da parte loro: hanno ascoltato con stupore e posto domande sull'uso di un alfabeto diverso da quello usato oggi. Una reazione del tutto simile c'è stata per il testo in latino: qualcuno diceva di riconoscere qualche vocabolo.



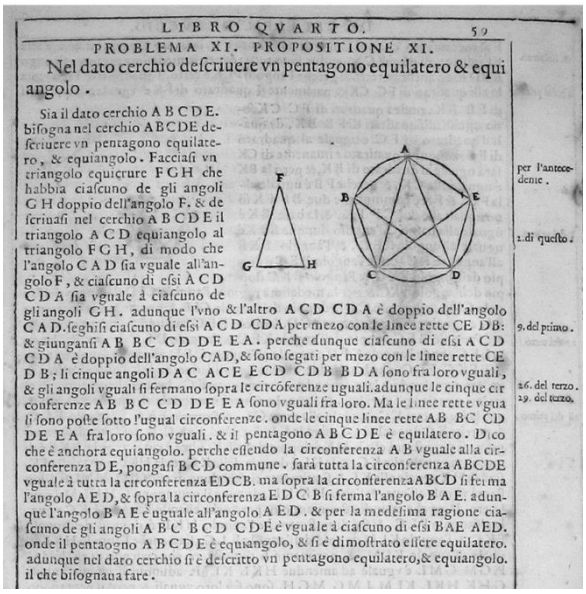
(IV.11) Dato circulo pentagonum equilaterum et equiangulum inscribere.

Esto datus circulus *a b g d e*. Oportet ergo intra datum circulum *a b g d e* pentagonum et equilaterum et equiangulum describere.

Adiaceat trigonus isoskeles *z i t* duplum habens utrumque eorum qui ad *i, t* angulorum eius qui ad *z*. Et inscribatur *a b g d e* circulo trigono *z i t* isoskeles trigonus *a g d*. Quare ei quidem qui ad *z* angulo equalem esse eum qui sub *g a d*, utrumque vero eorum qui ad puncta *i, t* equalem utriusque eorum qui sub *a g d, g d a*, et uterque ergo eorum qui sub *a g d, g d a* eius qui sub *g a d* est duplus. Dividatur uterque eorum qui sub *a g d, g d a* in duo equa ab utraque rectarum *g e, d b* et copulentur recte *a b, b g, g d, d e, e a*. Quoniam ergo uterque eorum qui sub *a g d, g d a* angulorum duplus est eius qui sub *g a d* et divisi sunt in duo equa sub rectis *g e, d b*, quinque ergo anguli qui sub *d a g, a g e, e g d, g d b, b d a* equales sibi invicem sunt. Equales vero anguli sub equales periferias consistunt. Quinque ergo periferie *a b, b g, g d, d e, e a* equales sibi invicem sunt. Equales autem periferias equales recte subtendunt. Quinque ergo recte *a b, b g, g d, d e, e a* equales sibi invicem sunt. Equilaterum ergo est *a b g d e* pentagonum. Dico ergo quoniam et equiangulum. Quoniam enim *a b* periferia *d e* periferie est equalis, communis adiaceat periferia *b g d*, tota ergo *a b g d* periferia toti *e d g b* periferie est equalis. Et consistit super *a b g d* quidem periferiam angulus qui sub *a e d*, super periferiam autem *e d g b* angulus qui sub *b a e*, et angulus ergo qui sub *b a e* ei qui sub *a e d* est equalis. Propter eadem ergo unusquisque eorum qui sub *a b g, b g d, g d e* angulorum utrique eorum qui sub *b a e, a e d* est equalis. Equiangulum ergo est *a b g d e* pentagonum. Demonstratum est autem et equilaterum. Itaque intra datum circulum descriptum est pentagonum et equilaterum et equiangulum. Quod oportet facere.

Figura 2: Prop. IV.11 degli Elementi di Euclide di Busard [1987]

Il testo che maggiormente ha coinvolto i miei alunni è stato quello in lingua volgare in quanto più comprensibile, anche se ancora lontano dal linguaggio usato tutt'oggi.



LIBRO QVARTO. 59

PROBLEMA XI. PROPOSITIONE XI.

Nel dato cerchio deſcriuere vn pentagono equilatero & equiangolo.

Sia il dato cerchio A B C D E. biſogna nel cerchio A B C D E deſcriuere vn pentagono equilatero, & equiangolo. Facciaſi vn triangolo equicrure F G H che habbia ciaſcuno de gli angoli G H doppio dell'angolo F. & deſcrinaſi nel cerchio A B C D E il triangolo A C D equiangolo al triangolo F G H, di modo che l'angolo C A D ſia vguale all'angolo F, & ciaſcuno di eſsi A C D C D A ſia vguale à ciaſcuno de gli angoli G H. adunque l'vno & l'altro A C D C D A è doppio dell'angolo C A D. ſeghiſi ciaſcuno di eſsi A C D C D A per mezo con le linee rette C E D B: & giunganſi A B B C C D D E E A. perche dunque ciaſcuno di eſsi A C D C D A è doppio dell'angolo C A D, & ſono ſegati per mezo con le linee rette C E D B; li cinque angoli D A C A C E E C D C D B B D A ſono fra loro vguali, & gli angoli vguali ſi fermano ſopra le circóferenze uguali. adunque le cinque circonferenze A B B C C D D E E A ſono vguali fra loro. Ma le linee rette vguali ſono poſte ſotto l'ugual circonferenze. onde le cinque linee rette A B B C C D D E E A fra loro ſono vguali. & il pentagono A B C D E è equilatero. Dico che è anchora equiangolo. perche eſſendo la circonferenza A B vguale alla circonferenza D E, pongaſi B C D commune. ſarà tutta la circonferenza A B C D E vguale à tutta la circonferenza E D C B. ma ſopra la circonferenza A B C D ſi ferma l'angolo A E D, & ſopra la circonferenza E D C B ſi ferma l'angolo B A E. adunque l'angolo B A E è uguale all'angolo A E D. & per la medeſima ragione ciaſcuno de gli angoli A B C B C D C D E è vguale à ciaſcuno di eſsi B A E A E D. onde il pentagono A B C D E è equiangolo, & ſi è dimoſtrato eſſere equilatero. adunque nel dato cerchio ſi è deſcritto vn pentagono equilatero, & equiangolo. il che biſognaua fare.

per l'antecedente.

2. di queſto.

9. del primo.

26. del terzo. 29. del terzo.

Figura 3: Prop. IV.11 degli Elementi di Euclide di Federigo Commandino [1575]

Durante la lettura, gli alunni si sono resi conto che, per realizzare il pentagono, occorre disegnare prima un triangolo che *habbia ciascuno de gli angoli G H doppio dell'angolo F.* Ci siamo quindi impegnati a rappresentare tale triangolo.

4. Seconda attività: costruzione del triangolo aureo e la spirale ottenuta da esso

4.1. La costruzione del triangolo aureo

Un triangolo che, oltre ad essere isoscele, ha ciascuno degli angoli alla base doppio di quello al vertice, è chiamato *triangolo aureo*. E' così chiamato perché il rapporto tra il lato obliquo e la base è il numero aureo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}6180339887$ [1]. E' stato richiesto agli alunni di calcolare l'ampiezza di ciascun angolo, visto che sanno già che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°. Attraverso un semplice procedimento aritmetico, gli alunni riescono a capire che gli angoli alla base sono di 72° mentre quello al vertice di 36°, e si passa, quindi alla costruzione. Ho scelto di non utilizzare la costruzione geometrica presente negli Elementi di Euclide, ovvero la IV.10, poiché interviene un ulteriore concetto matematico che, per questioni di tempo, non ho voluto trattare. Così presento la seguente costruzione del triangolo aureo, che può risultare facilmente comprensibile agli allievi[2]:

1. Traccia un segmento BD;
2. M è il punto medio del segmento BD, *a* l'asse del segmento[3];
3. Traccia una circonferenza di centro B e raggio BM;
4. Traccia una retta *r* parallela ad *a* passante per B;
5. Chiama F il punto d'intersezione più in alto di tale retta con la circonferenza;
6. Traccia la circonferenza con centro in F e raggio FD;
7. Chiama E il punto d'intersezione più alto della circonferenza con la retta *r*;
8. Traccia la circonferenza di centro B e raggio BE;
9. Chiama A il punto d'intersezione più alto di con l'asse *a*;
10. Unisci A con B e D;
11. Il triangolo ABD è il triangolo aureo cercato

[1] Gli studenti conoscono già il concetto di rapporto ed hanno studiato il significato geometrico di radice quadrata, intesa dal punto aritmetico come operazione inversa dell'elevamento della potenza di 2: sanno calcolarla attraverso l'uso di una calcolatrice.

[2] Tale costruzione dipende dalla realizzazione del rettangolo aureo.

[3] Gli studenti hanno considerato la costruzione geometrica dell'asse del segmento usata in tecnologia.

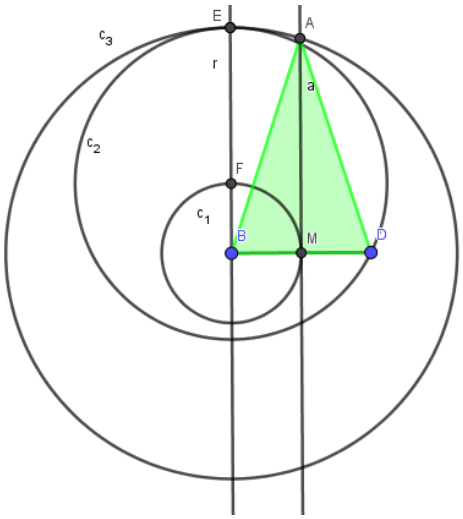


Figura 4: Costruzione geometrica del triangolo aureo

Dopo aver effettuato la costruzione con squadrette e compasso, viene richiesto di eseguire nuovamente la costruzione attraverso il software Geogebra. Il duo di artefatti coinvolti permette il rinforzo di abilità diverse [Maschietto & Soury-Laverg, 2013]: infatti, gli studenti utilizzano i comandi segmento, punto medio, asse del segmento, retta perpendicolare, circonferenza dato centro e un punto, e poligono, che rievocano le definizioni euclidee dei concetti coinvolti.
Svolgere nuovamente la costruzione permette di fissare meglio il procedimento seguito ed usare una differente risorsa, cioè un mediatore visivo digitale [Sfard, 2008] facilita i processi di *seming.* Attraverso l'uso di Geogebra può anche essere richiesto all'allievo di verificare che si tratti effettivamente di un triangolo aureo attraverso l'apposito comando di misurazione delle ampiezze degli angoli. Inoltre, viene richiesto di stampare alcune copie di un triangolo aureo per esercitazione da svolgere in seguito.

4.2. La spirale ottenuta dal triangolo aureo

La costruzione del triangolo aureo è stato un momento per poter parlare di una nuova forma geometrica, ovvero della spirale. Nel caso specifico, è stata costruita la spirale a partire dal triangolo aureo. Abbiamo considerato uno dei triangoli aurei di carta stampati in precedenza, da incollare sul quaderno. E' stato richiesto di tracciare le bisettrice di un angolo alla base, ad esempio D_1, come in figura 5, con la relativa costruzione euclidea[4]. Tale bisettrice incontra il lato opposto al vertice considerato A_1B_1 nel punto C. Il triangolo iniziale resta suddiviso in due triangoli, entrambi isosceli: gli studenti sono arrivati a tale conclusione considerando gli angoli di ciascuno. Hanno notato che D_1B_1C è ancora un triangolo aureo, mentre l'altro è un triangolo isoscele con gli angoli alla base di 36° e quello al vertice di 108°: abbiamo chiamato quest'ultimo *gnomone aureo*.

[4] prop. I.9.

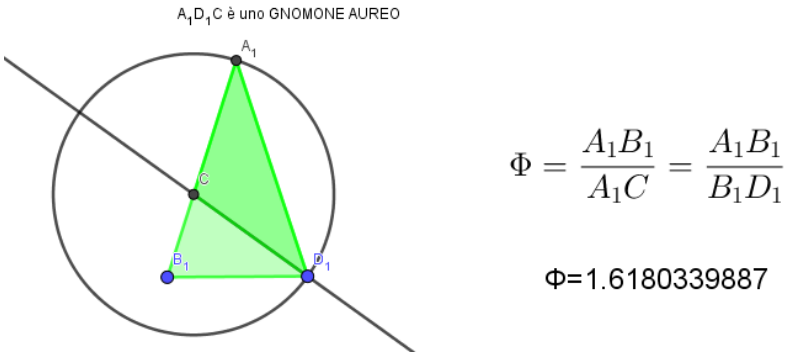


Figura 5: Individuazione dello gnomone aureo e di un altro triangolo aureo

E' stato richiesto di tracciare la bisettrice dell'ultimo triangolo aureo individuato e di continuare a fare la stessa cosa per tutti gli altri triangoli aurei trovati, fin quando possibile. E' stato chiesto di colorare tutti gli gnomoni aurei trovati: partendo dal più piccolo, è stato tracciato un arco di circonferenza avente centro nel vertice con l'angolo maggiore e raggio uno dei lati obliqui, e di continuare in tal modo fino allo gnomone più grande, individuando, quindi la spirale cercata.

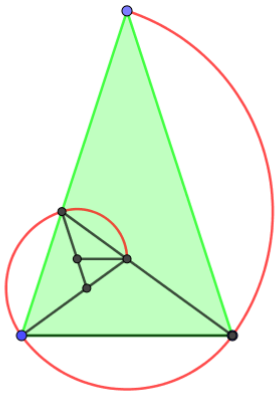


Figura 6: La spirale dal triangolo aureo

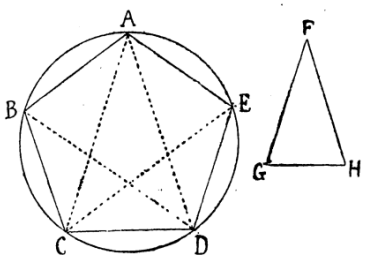
5. Terza attività: il pentagono aureo

E' stata presentata una scheda contenente la proposizione VII.11 degli Elementi di Euclide tratta dalla versione italiana di Enriques [Enriques, 1925]

11.

Inscrivere in un dato cerchio un pentagono equilatero ed equiangolo.

Sia ABCDE il cerchio dato; bisogna dunque inscrivere nel cerchio ABCDE un pentagono equilatero ed equiangolo.



Si costruisca il triangolo isoscele GFH avente gli angoli in G e H doppi dell'angolo in F (IV, 10) e nel cerchio ABCDE si inscriva il triangolo ACD equiangolo a GFH in modo che l'angolo CAD sia uguale all'angolo in F e ciascuno dei due $A\hat{C}D$, $C\hat{D}A$ sia uguale a ciascuno degli angoli posti in G e H (IV, 2). Perciò tanto $A\hat{C}D$ che $C\hat{D}A$ saranno doppi di $C\hat{A}D$.

Ora, si dividano in due parti eguali gli angoli ACD, CDA mediante le rette CE, DB e si traccino le rette AB, BC, [CD] (1), DE, EA. Poichè gli angoli ACD, CDA sono il doppio dell'angolo CAD e sono divisi in due parti eguali dalle rette CE, DB, i cinque angoli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA sono eguali tra loro. Ma angoli eguali insistono su archi eguali (III, 29), quindi i cinque archi AB, BC, CD, DE, EA sono eguali tra loro. Inoltre, rette uguali sono sottese da archi eguali (III, 29), per cui sono eguali tra loro anche le cinque rette AB, BC, CD, DE, EA.

Dunque il pentagono ABCDE è equilatero: dico, che esso è anche equiangolo.

Poichè l'arco AB è uguale all'arco ED, aggiungiamo ad entrambi $\overset{\frown}{BCD}$; tutto l'arco ABCD è quindi uguale all'arco EDCB; ma sopra l'arco ABCD insiste l'angolo AED e sopra l'arco EDCB l'angolo BAE, quindi l'angolo BAE è uguale all'angolo AED (III, 27).

Per la medesima ragione ciascuno degli angoli ABC, BCD, CDE è uguale ad ambedue gli angoli BAE, AED, onde il pentagono ABCDE è equiangolo.

Ma si è mostrato che è anche equilatero. Dunque nel cerchio dato si è inscritto un pentagono equilatero ed equiangolo, c. d. f.

Figura 7: Prop. IV. 11 degli Elementi di Euclide di Enriques [1925]

Gli alunni hanno letto con attenzione il testo, andando ad individuare la presenza di una figura geometrica incontrata da poco: *il triangolo isoscele avente alla base due angoli doppi di quello al vertice*, ovvero, il triangolo aureo. E' stato richiesto di riportare i comandi della costruzione in forma schematica e diretta: abbiamo discusso in merito e sono state prese in considerazioni diverse proposte, che hanno permesso di definire la seguente:

1. Costruisci un triangolo aureo ABD di base AB[5].
2. Individua gli angoli uguali e la loro ampiezza, e i segmenti che danno il rapporto aureo ;
3. Inscrivi il triangolo in una circonferenza C_1 (di centro il circocentro O e raggio il segmento OD);
4. Traccia le bisettrici *a* e *b* degli angoli alla base del triangolo aureo, che incontrano la circonferenza, rispettivamente; in C ed E;
5. Unisci i punti A, B, C, D, E, ed ottieni il pentagono aureo.

Effettuata la costruzione, è stato verificato che si trattasse effettivamente di un pentagono aureo, misurando l'ampiezza di ciascuno degli angoli interni, ed è stata realizzata anche con il software Geogebra.

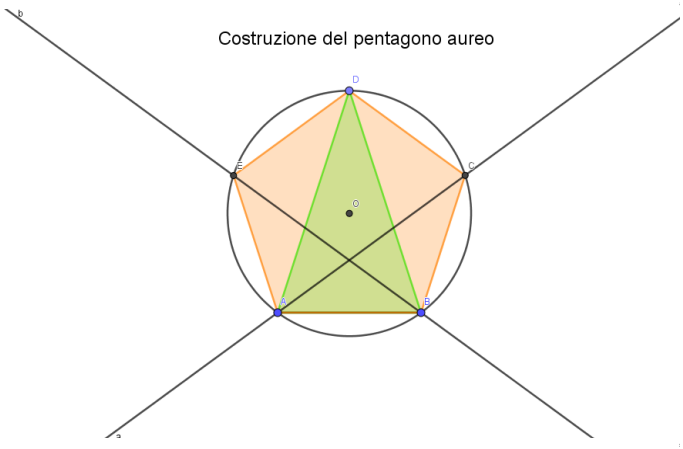


Figura 8: Il Pentagono aureo

[5] Gli studenti hanno incollato il triangolo in carta in loro possesso.

5. Terza attività: costruzione ed uso del compasso aureo

Costruito il pentagono aureo, sono state cercate coppie di segmenti il cui rapporto sia aureo. Gli studenti hanno preso righelli e calcolatrici, ma ho voluto far costruire loro un artefatto che permettesse di rivelarlo solo attraverso una misurazione: il compasso aureo. Esso è composto da due strisce di cartoncino di lunghezza 34 cm, comprese le estremità appuntite e larghezza: 2 cm. Le strisce di carta, che abbiamo anche plastificato, sono fissate con un fermacampione a 13 cm, o 21 cm, numeri il cui rapporto si approssima al numero aureo.

Figura 9: Il compasso aureo

I segmenti le cui lunghezze hanno rapporto pari al rapporto aureo sono individuati dalle sue estremità del compasso. Con tale strumento sono stati verificati i rapporti aurei non solo all'interno del pentagono ma anche di altre figure, come le seguenti.

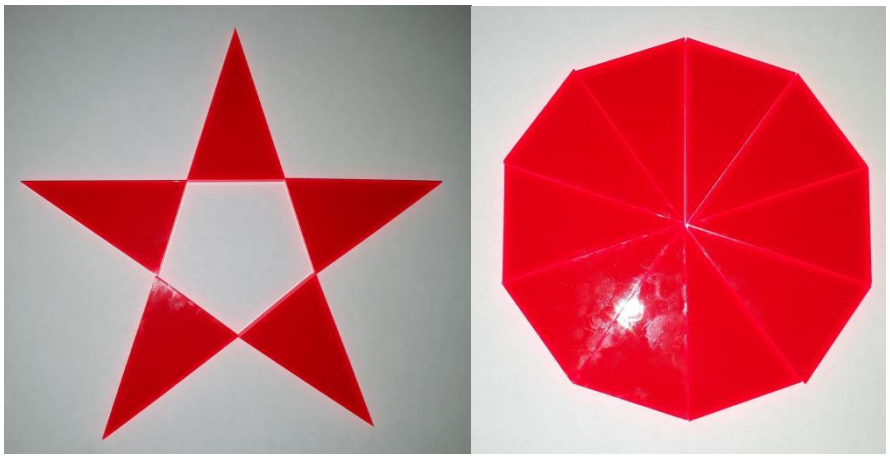


Figura 10: composizioni utilizzate per trovare segmenti in rapporto aureo

6. La geometria della passiflora

Con lo scopo di mostrare che la geometria studiata è presente in natura, è stata presa in considerazione la passiflora, pianta che gli studenti conoscevano poiché presente nel cortile scolastico e studiata in scienze, relativamente al regno vegetale, nell'anno precedente. Avendo ancora delle foto dalle loro ricerche su classroom, è stata proiettata l'immagine del fiore sullo schermo interattivo, chiedendo agli studenti se vedevano delle forme geometriche in esso. Vedere nella realtà la geometria è un'attività che di solito si pone ai bimbi della scuola dell'infanzia per attribuire un nome a delle forme: in questo caso, si fa un lavoro del tutto simile, con l'aggiunta di azioni più specifiche. Qualcuno ha chiesto di poter disegnare su tali figure: per tentativi e perché aiutati dalle costruzioni appena effettuate, hanno disegnato triangoli e pentagoni. Dopo aver chiesto se si trattasse di quelli aurei appena visti, lo hanno verificato con il compasso aureo costruito, intuendo un rapporto molto prossimo a quello aureo ma non preciso a causa delle figure geometriche da essi realizzate. Allora, ho proposto loro di verificare con precisione le figure ipotizzate. Abbiamo usato il software Geogebra della postazione dell'insegnante, collegato allo schermo interattivo: uno di loro si è offerto di usare il software ed è stato guidato a caricare l'immagine della passiflora e, con la dettature della costruzione da parte dei compagni, ha realizzato le forme geometriche ipotizzate. Sono stati trovati triangoli aurei, pentagoni aurei e decagoni, come mostrato nelle figure 11 a e 11 b.

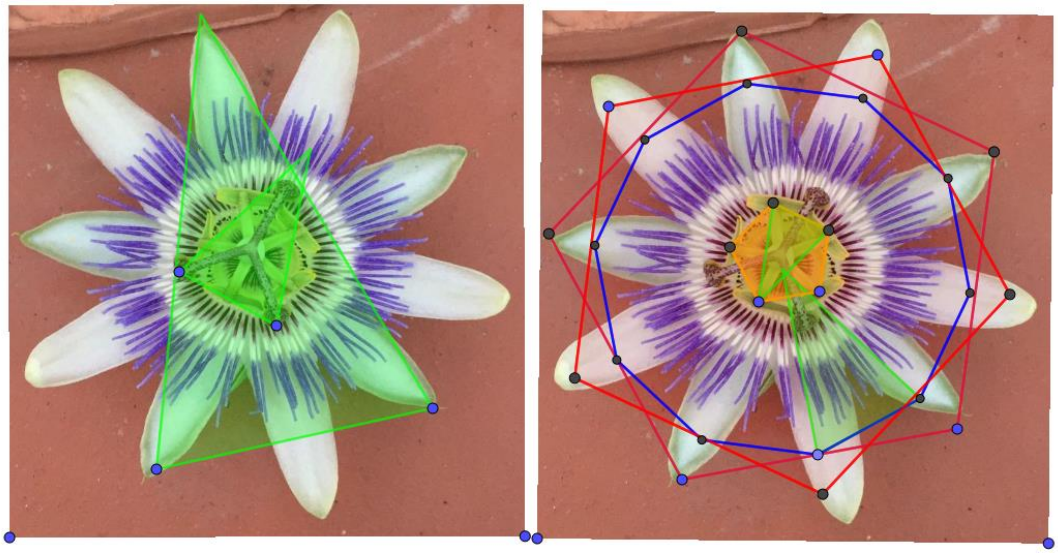


Figura 11: il triangolo aureo (a), il pentagono aureo e il decagono (b) nella passiflora.

E' stato chiesto di fare la stessa cosa con il retro del fiore. Un altro studente ha preso la posizione chiedendo di essere aiutato nella realizzazione di due stelle a 5 punte, sulle estremità dei petali, che aveva individuato. Un'alunna, invece, ha notato un triangolo isoscele più piccolo, chiedendo se si trattasse dello gnomone aureo: è stato individuato

un angolo di 108°, per cui l'intuizione era molto vicina alla sua ipotesi (Figure 12 a e 12 b).

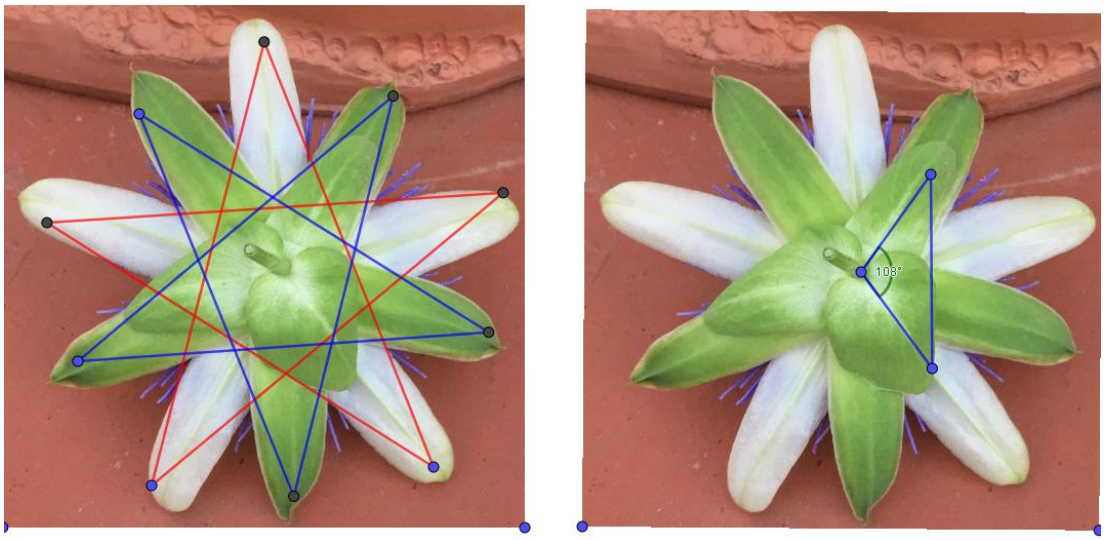


Figure 12: le stelle a 5 punte (a) e lo gnomone aureo (b) nel retro della passiflora.

7. Conclusioni

Il laboratorio appena descritto è fortemente formativo per gli studenti perché li allena allo sviluppo del pensiero computazionale, non solo attraverso la realizzazione di una costruzione geometrica, ma anche attraverso l'analisi del linguaggio naturale e retorico da trasformare in azioni matematiche. Partendo dalla lettura di testi legati a costruzioni geometriche scritte in greco, in latino ed in volgare, gli studenti comprendono che la matematica si è evoluta di pari passo con la lingua: lo sviluppo dell'una è sempre stato a favore dell'altra. Individuare delle sequenze all'interno di un testo dimostrativo permette di superare l'ostacolo della perdita di attenzione nello studente per la realizzazione della costruzione geometrica considerata. Constatare che la matematica, in particolare la geometria, si riscontra in natura, avvicina lo studente alla considerazione che essa non è poi così lontana dalla realtà in cui siamo immersi.
Infine, si può constatare che attività di questo tipo allenano la mente degli studenti anche per l'analisi di un qualunque altro testo e quindi la matematica e la sua storia diventano strumenti utili a sviluppare abilità trasversali.

Bibliografia

Acerbi, F. (2007). Euclide: tutte le opere: testo greco a fronte. Il Pensiero Occidentale. Milano: Bompiani.

Boncompagni, B. (Ed.). (1857). Liber abbaci (Vol. 1). Tipogr. delle Scienze Matematiche e Fisiche

Busard, H.L.L., (1987). The medieval latin translation of Euclid's Elements, Franz Steiner Verlag Stuttgart.

Cerasaro, S., (xxxx). Le costruzioni geometriche e lo sviluppo del pensiero computazionale: proposta per la scuola primaria con l'aiuto dalla storia della matematica, in Mondo Matematico e dintorni.

Commandino M. F., (1575) Degli elementi di Euclide libri quindici, Urbino Domenico Frisolino.

Demattè, A., Furinghetti, F. (2022). Today's students engaging with Abbacus problems. ZDM–Mathematics Education, 54(7), 1521-1536

Enriques, F. (1925). Gli elementi d'Euclide e la critica antica e moderna.

Maschietto M. & Soury-Lavergne S. (2013). Designing a Duo of Material and Digital Artifacts: the Pascaline and Cabri Elem e-books in Primary School Mathematics. ZDM Mathematics Education 45(7), 959-971.

Mosconi, G. (1990). Discorso e pensiero, il Mulino.ù

Radford, L. (2013). Perceiving with the eyes and with the hands. International Journal for Research in Mathematics Education, 3(1), 56-77.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge university press.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 5, No 2 (2022), 55 - 66

L'albergo di Hilbert

Carlo Toffalori

Università di Camerino,
Scuola di Scienze e Tecnologie, Sezione di Matematica
Via Madonna delle Carceri, 9, 62032, Camerino, Italy
carlo.toffalori@unicam.it

Sunto
Esponiamo e discutiamo il famoso aneddoto dell'albergo di Hilbert, confrontandolo col paradosso di Galileo, che tratta questioni analoghe in anticipo di tre secoli. Ne estraiamo vari spunti da esporre agli studenti delle scuole secondarie di secondo grado, e in particolare alcune riflessioni sul ruolo dei paradossi nello sviluppo della matematica.

Parole chiave: Albergo di Hilbert. Paradosso di Galileo. Insieme. Numero cardinale. Paradosso. Assioma.

1. Hilbert

L'aneddoto dell'albergo di Hilbert è famosissimo. Illustra in maniera efficace le insidie dello studio matematico dell'infinito, ma al tempo stesso celebra le idee che Georg Cantor aveva elaborato per affrontarle e superarle. È attribuito a David Hilbert, il grande matematico tedesco che operò nella prestigiosa Università di Göttingen dal 1895 fino al pensionamento nel 1930. Sarebbe stato pronunciato a metà degli anni venti, nel corso di lezioni dedicate a spiegare le teorie di Cantor. A metterlo per scritto fu però George Gamow, fisico e divulgatore della scienza. Lo fece in modo brillante e spiritoso nelle pagine iniziali del suo libro *One Two Three… Infinity* del 1947 (Gamow 1961, p. 17), all'interno del capitolo *Big numbers*, paragrafo *How to count Infinities*. Gamow avrebbe appreso la storia dell'albergo proprio a Göttingen, quando vi trascorse alcuni mesi nel periodo di post-dottorato. Nell'occasione avrebbe incontrato lo stesso Hilbert e soprattutto Lothar Nordheim, ossia l'assistente che aveva trascritto tra il 1924 e il 1925 le lezioni in questione. In verità Gamow afferma in (Gamow 1961) di aver tratto l'aneddoto *"dal volume ancora non pubblicato, e neppure mai scritto, tuttavia ampiamente diffuso sulla collezione completa delle storie di Hilbert, autore Richard Courant"* – un'attribuzione vagamente surreale e certamente scherzosa e fittizia.

Ma da allora a oggi le lezioni di Hilbert sono state finalmente raccolte e pubblicate a cura di William Ewald e Wilfried Sieg (Ewald et al. 2013).
La storia dell'albergo si trova al loro interno, per la precisione nel volume 3, alla pagina 730. Dunque non c'è niente di meglio che leggerla esattamente come Hilbert l'avrebbe pronunciata nel gennaio 1924: *«Supponiamo ora che l'albergo abbia un numero infinito di camere numerate 1, 2, 3, 4, 5, ..., in ognuna delle quali vi è un ospite. Appena un nuovo ospite sopraggiunge, il proprietario deve solo spostare ciascuno dei vecchi ospiti nella stanza con il numero immediatamente successivo e la camera 1 è libera per il nuovo arrivato»*.
Proseguendo, Hilbert considera pure il caso in cui all'albergo, già completo, arriva un'infinità di ospiti. Nota che anche a questa emergenza si trova facilmente rimedio: *«Si può anche sistemare un numero infinito di nuovi ospiti dell'albergo: ciascuno dei vecchi ospiti, che originariamente occupavano la stanza con il numero n, farà riferimento alla stanza con il numero 2n, liberando così le infinite stanze con numeri dispari per i nuovi ospiti»*
Hilbert aggiunge che, con lo stesso principio, si potrebbe far fronte a ogni possibile crisi di alloggi: *«in un mondo con un numero infinito di case non ci sarebbe carenza di abitazioni»*. Propone infine una variante dell'argomento, riferita non più a un hotel, ma a un ballo infinito: *«Allo stesso modo, in una compagnia di danza con infiniti ballerini, se tutti sono impegnati e arriva una nuova signora, l'organizzatore del ballo può facilmente abbinarla e non rimarrà senza accompagnatore».*
Che di coppie di ballerini o di camere di un albergo si tratti, la conclusione è la stessa, sorprendente e paradossale: nell'ambito infinito dei numeri interi positivi 1, 2, 3, 4, …, tanti sono i numeri nella loro totalità (come dire le camere originariamente occupate dagli infiniti ospiti) quanti i numeri che si ottengono escludendo 1 (come dire le stanze dove si trasferiscono questi ospiti all'arrivo di un nuovo cliente), quanti ancora i numeri che si ottengono raddoppiandoli, ovvero gli interi positivi pari (nella metafora, le stanze dove gli ospiti si spostano quando sopraggiunge una comitiva infinita). Gli interi positivi restano sempre dello "stesso numero", sia che se ne aggiunga o sottragga uno, sia che li si raddoppi o dimezzi.

2. Galileo

In verità un'analoga riflessione era stata svolta da Galileo Galilei quasi tre secoli prima di Hilbert, nel corso della prima giornata dei suoi *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (Galilei 1958). L'ambito è ancora quello dei numeri interi positivi, di cui però si considerano non i successori o i doppi, ma i quadrati. È di questi che dibattono Sagredo e Salviati insieme a Simplicio: di 1, 4, 9, 16, 25, … confrontati con le loro "radici" 1, 2, 3, 4, 5, … .

Ma la sostanza del ragionamento si ripete. Salviati dapprima osserva come i quadrati siano tanti quanti le rispettive radici, cioè tanti quanti gli interi positivi, perché *«ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più d'una sola radice, né radice alcuna più d'un quadrato solo»*; ma d'altra parte sottolinea come i numeri, dunque le radici, siano ben più dei quadrati, e anzi consistano per la maggior parte di non quadrati. In effetti la differenza tra due quadrati consecutivi cresce progressivamente in ragione dei numeri dispari (avendosi, come ben sappiamo, $(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$ per ogni intero positivo n), e perciò i quadrati si diradano.
Trasferendo il discorso tre secoli dopo all'albergo di Hilbert, potremmo allora suggerire al suo gestore di spostare i clienti già sistemati nella camera non col numero doppio, ma col numero al quadrato, come dire da 1 a 1, da 2 a 4, da 3 a 9, da 4 a 16 e via dicendo, in modo da liberare una quantità ben più ampia di stanze per eventuali nuovi arrivati.
Galilei e Salviati però, di fronte alla stranezza appena rilevata, dei quadrati che sono tanti quanti i numeri, eppure al tempo stesso molti meno dei numeri, si arrestano come sbigottiti e cambiano discorso, limitandosi a qualche riflessione generale: *«Io non veggo che ad altra decisione si possa venire, che a dire, infiniti essere tutti i numeri, infiniti i quadrati, infinite le loro radici, né la moltitudine de' quadrati essere minore di quella di tutti i numeri, né questa maggior di quella, ed in ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore aver luogo ne gl'infiniti, ma solo nelle quantità terminate»*.
Non però che questa conclusione sia da sminuire e disprezzare. Galileo e Salviati, infatti, sembrano ammettere che una qualche aritmetica dell'infinito esista, ma sia troppo complicata per le nostre menti. Si noti che l'opinione assolutamente prevalente in quell'epoca, e in verità nei secoli anteriori e in quelli successivi fino all'Ottocento, basata sul dettato aristotelico, era che l'infinito attuale non potesse essere oggetto di nessuna scienza.

3. Cantor

Che cosa distingue allora a distanza di quasi tre secoli l'albergo di Hilbert e il paradosso dei quadrati di Galileo?
Come Salviati evidenzia, entrambi cozzano contro l'ottava nozione comune di Euclide: *«Ed il tutto è maggiore della parte»*. I numeri interi positivi sono in effetti di più di quelli > 1, o dei numeri pari o dei quadrati. Eppure per altri versi sono tanti quanti.
Per chiarire il discorso è bene individuare e distinguere tra loro due diversi criteri di confronto tra insiemi: l'uguaglianza e l'equipotenza. Due insiemi si intendono uguali quando ammettono esattamente gli stessi elementi, mentre si chiamano equipotenti quando tra loro intercorre una corrispondenza biunivoca.

Nel caso finito i due concetti sono strettamente collegati, vale infatti la seguente osservazione elementare di calcolo combinatorio (talora denominata Principio di Hume, o di Cantor): *due insiemi finiti hanno lo stesso numero di elementi se e solo se sono in corrispondenza biunivoca tra loro*.
In particolare, un sottoinsieme proprio di un insieme finito deve avere un numero minore di elementi.
Ma all'infinito uguaglianza ed equipotenza divergono radicalmente: come abbiamo visto gli elementi di un insieme si possono aggiungere e togliere, raddoppiare e dimezzare, eppure restano tanti quanti prima.
In particolare l'insieme degli interi positivi è certamente diverso, e più grande, dei suoi sottoinsiemi (propri!) costituiti dagli interi > 1, o pari, o quadrati. Eppure, come l'albergo di Hilbert e il paradosso di Galileo testimoniamo, tutti questi insiemi sono equipotenti: le funzioni

- successore,
- doppio,
- elevamento al quadrato

stabiliscono corrispondenze biunivoche tra l'insieme degli interi positivi e, rispettivamente, i tre sottoinsiemi in questione, nell'ordine in cui li abbiamo elencati.
Si noti tuttavia come la relazione binaria di equipotenza, ovvero il secondo termine a confronto nel principio di Hume, conserva un suo significato anche in ambito infinito. Anche di due insiemi infiniti è lecito domandarsi se stanno in corrispondenza biunivoca o no. Anzi, si controlla facilmente che l'equipotenza è una relazione di equivalenza tra insiemi, dunque riflessiva, simmetrica e transitiva. Fu proprio questa osservazione a ispirare a Cantor la maniera di introdurre nuovi numeri "cardinali" per indicare il "numero degli elementi" pure nel caso infinito: basta convenire che due insiemi, eventualmente infiniti, hanno lo "stesso numero" di elementi se e solo se sono in corrispondenza biunivoca. Formalmente parlando, allora, il numero cardinale di un insieme A si introduce come la sua classe di equivalenza rispetto alla relazione di equipotenza, dunque la collezione di tutti gli insiemi che stanno in corrispondenza biunivoca con A.
Si noti che questo metodo di costruzione di nuovi oggetti numerici, ottenuti come classi di equivalenza di numeri già accettati e riconosciuti, è ricorrente in matematica: produce infatti gli interi a partire dai naturali, i razionali a partire dagli interi, i reali a partire dai razionali e, volendo, anche i numeri complessi a partire dai reali. Dunque è del tutto legittimo applicarlo nuovamente in questa occasione, sia pure in un contesto meno intuitivo, o forse solo meno familiare, per ricavare i numeri cardinali.
Come che sia, albergo di Hilbert e paradosso di Galileo ci dicono che l'insieme degli interi positivi ha lo stesso numero cardinale di elementi dei sottoinsiemi degli interi maggiori di 1, degli interi positivi pari e dei quadrati.

Delle ricerche di Cantor su insiemi e infinito, che dal 1874 si estesero con qualche intervallo fino al primo Novecento, ricordiamo ancora due tra i risultati più importanti e famosi ((Cantor 2020), vedi anche (Toffalori 2016)):

- (1874) la cardinalità dei numeri reali – il continuo – è diversa da quella dei numeri interi positivi – il numerabile – e in un senso opportuno la supera;
- (1891) anzi, in generale ci sono numeri cardinali infiniti sempre più grandi.

Ricordiamo che le visionarie teorie cantoriane suscitarono nella comunità matematica del tempo reazioni discordi: furono criticate e disprezzate da alcuni, elogiate da altri.
Tra i detrattori ci fu Poincaré, che le ritenne un caso clinico, una malattia da cui salvaguardare la matematica. Tra gli estimatori Hilbert, di cui si ricorda il complimento espresso nel famoso trattato *Sull'infinito* (Hilbert 1978): *«Nessuno potrà cacciarci dal Paradiso che Cantor ha creato per noi»*.
Ma torniamo alla domanda iniziale di questo capitolo, a proposito delle caratteristiche che distinguono tra loro i pur simili ragionamenti dell'albergo di Hilbert e del paradosso di Galileo. Una differenza notevole, a mio avviso la principale, è che il secondo precede Cantor, e il primo lo segue: $1638 < 1874 < 1924$. Come dire che Galileo vagheggia, e al limite ispira, l'approccio che Cantor seguirà per la sua matematica dell'infinito, mentre Hilbert illustra e propaganda questa novità, quando essa è già sbozzata e stabilita. Il ragionamento di Cantor è un paradosso da decifrare, quello di Hilbert un esempio forse bizzarro ma assodato. All'approfondimento di questo argomento dedicheremo i capitoli che verranno.

4. La mattina dopo

Frapponiamo però un breve intermezzo, riservato a una variante spiritosa che Piergiorgio Odifreddi segnala a proposito dell'albergo infinito (Odifreddi 2020, p. 166). L'interrogativo è: la mattina dopo, chi tra i clienti paga la propria camera? Perché il primo ospite può chiedere al portiere, partendo, di mettere il suo pernottamento in conto alla camera 2, e il secondo, allo stesso modo, alla 3, e via dicendo. Nell'ambito finito ci sarebbe comunque un ultimo ospite, che si troverebbe a saldare la spettanza di tutti. Ma all'infinito l'ultimo ospite non c'è, e quindi nessuno sborsa niente.
In verità questa variazione sul tema dell'albergo è già presente in una poesia del 2000, dedicata all'albergo di Hilbert da Larry Lesser ((Lesser 2006), vedi anche (Kragh 2014)). Vi si racconta di un nuovo ospite imprevisto, che va inizialmente a occupare la camera 1 ma poi, in ragione di arrivi successivi – prima 8 clienti singoli come lui, poi una comitiva infinita – si sposta progressivamente nella camera 9 e poi in quella col numero doppio, cioè la 18.

La mattina dopo scopre di non aver soldi per pagare, ma viene rassicurato dal cliente della camera 19:

> *«Last thing I remember at the end of my stay*
> *It was time to pay the bill but I had no means to pay.*
> *The man in 19 smiled, "Your bill is on me.*
> *20 pays mine, and so on, so you get yours for free!"»*

Appunto: nessuno salda niente. Un possibile rimedio per il gestore dell'albergo è tuttavia quello di pretendere da ogni nuovo cliente il pagamento anticipato al momento dell'arrivo. Ma allora altri problemi sopravvengono a turbare i delicati bilanci dell'hotel hilbertiano. Li traiamo da (Wijeratnea et al. 2014).
Un gestore sensibile e cortese potrà concedere a ogni ospite costretto a spostarsi dalla camera originaria un piccolo sconto, per compensare il disagio. Anzi, potrebbe stabilire a priori che il prezzo è funzione decrescente del numero della stanza, per esempio 1 (il totale) per la camera 1, 1/2 per la 2, 1/3 per la 3, in generale $1/n$ per la n.
Il guadagno complessivo, nel caso di albergo completo, resta infinito, perché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente.
Quando però sopraggiunge un altro cliente, occorre rimborsare quelli che si spostano,

- il primo, che va dalla camera 1 alla 2, per $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$,
- il secondo, che muove dalla 2 alla 3, per $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3}$,
- in generale l'n-mo, che si sposta dalla n alla $n + 1$, per

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Ne consegue che la quota da risarcire complessivamente è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, la quale per fortuna è serie convergente e quindi garantisce un indennizzo finito e pertanto un guadagno ancora infinito. Altrettanto vale se i nuovi clienti che arrivano in ritardo sono più di uno, ma pur sempre un numero finito.
Supponiamo però che a giungere sia una comitiva infinita. Stavolta il rimborso dovuto all'ospite della camera n è $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$ e quindi la spesa da preventivare in totale è $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$: una serie divergente, e quindi una spesa infinita. In questo caso c'è davvero il pericolo per l'albergo di non aver alcun margine di ricavo?

5. I paradossi dell'infinito

Le preoccupazioni finanziarie dell'albergo di Hilbert e i problemi che ne derivano sul calcolo delle serie paiono divertenti e stimolanti, adatti a proporsi nelle classi delle scuole secondarie. C'è però chi dubita che il concetto astratto dell'infinito, che pure occhieggia dietro al racconto di Hilbert e al paradosso di Galileo, sia di per sé argomento idoneo per gli stessi studenti, e anzi sconsiglia vivamente dal trattarlo. Non condivido questa opinione.

Certo, l'idea sottilissima dell'infinito va accostata con la dovuta cautela e con i modi didattici appropriati. Ma concordo col parere espresso da Hans Enzensberger, l'autore del *Mago dei numeri* (Enzensberger 2005) nell'altra sua opera *Gli elisir della scienza* (Enzensberger 2004):

«Pare essere un'idea fissa della pedagogia che i bambini non siano capaci di pensiero astratto. Mentre si tratta di una convinzione infondata. E' semmai giusto il contrario. Il concetto dell'infinitamente grande e dell'infinitamente piccolo è, per esempio, immediatamente accessibile a livello intuitivo per qualunque scolaro di nove o dieci anni».

Credo anch'io che il concetto di infinito sia ben presente nella mente anche infantile, e per di più affascinante, tale da destare non solo nei bambini, ma pure negli adolescenti stupore e interesse.

Le stravaganze paradossali di Galileo e Hilbert certamente contribuiscono in questa direzione, ma suscitano anche la curiosità di capirne le ragioni. Ribadiamo allora la differenza sostanziale che sta tra i due esempi: il primo viene prima di Cantor, e il secondo dopo. Se dunque l'argomento dei quadrati di Galileo è un enigma privo di risposta che sollecita una soluzione, al contrario l'aneddoto di Hilbert è solo un gioco, la presentazione scherzosa ma cosciente e motivata delle singolarità dell'infinito matematico. Come già si diceva, quello di Galileo è un vero paradosso, quello di Hilbert non più.

La constatazione stimola qualche riflessione sulla funzione cruciale e benemerita del paradosso, non solo in matematica, ma nella scienza e nella filosofia. Il paradosso infatti non è tanto un impaccio forse divertente ma inestricabile, quanto l'occasione di evidenziare concetti ancora incompresi se non addirittura inespressi e teorie bisognose di raffinarsi se non addirittura di formarsi. È quindi un invito a capire meglio le cose.

Nel caso di Galileo e Hilbert, il concetto base da comprendere e determinare, per poter poi abbozzare lo studio matematico dell'infinito, è quello di insieme. Intuitivamente, lo si immagina come una collezione arbitraria di oggetti, che si chiamano elementi. Ma dei concetti matematici non basta fornire un'idea vaga. Occorre una definizione precisa oppure un'assiomatizzazione.

Consideriamo per esempio il modello principe di una teoria matematica, che è la geometria di Euclide.

All'inizio degli *Elementi* (Euclide 2007) si introducono i concetti di punto, linea e retta, affermando del primo che è *«ciò che non ha parti»*, della seconda che è *«lunghezza senza larghezza»* e della terza che è *«una linea che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa»*: non propriamente definizioni, ma descrizioni intuitive, tant'è che alcuni le chiamano "termini" ed Euclide stesso avverte l'esigenza di integrarle con postulati – quello che stabilisce l'esistenza di una linea retta passante per due punti distinti, o l'altro più delicato e discusso sulle parallele.

Nel loro seguito però gli *Elementi* propongono altre definizioni, nitide, convincenti e precise, come appunto quella di rette parallele, cioè prive di punti di comune. In questo modo, sapendo già che cosa significano punto e retta, si deduce distintamente che cosa si debba intendere per parallelismo.

Gli assiomi intervengono quindi a chiarire i concetti basilari, su cui gli altri successivi si fondano.

Allo stesso modo che punti e rette in geometria, così nella teoria di Cantor il concetto fondamentale di insieme richiede una definizione formale o un efficace approccio assiomatico. Solo su una base di questo genere si potrà poi sviluppare lo studio degli insiemi, con le varie nozioni che la riguardano, da quelle apparentemente più semplici, come unioni e intersezioni, alle altre più fini e delicate, come appunto i numeri cardinali infiniti.

Solo in questo modo si potrà poi arrivare alle tappe che già abbiamo citato:

- considerare, nell'ambito degli insiemi, la relazione binaria di equipotenza, che ne collega due esattamente quando stanno in corrispondenza biunivoca;
- mostrare che questa è una relazione di equivalenza;
- definire come numero cardinale di un insieme la sua classe di equipotenza.

Solo così si potrà scoprire che perfino tra gli insiemi infiniti si incontra una molteplicità di cardinalità, a cominciare dal numerabile (quella dei numeri interi, o dei numeri interi maggiori di 1, o dei numeri pari, o dei quadrati) e dal continuo (quella dei reali, diversa dalla precedente). Solo così si arriverà a escludere, come fece Cantor nel 1874, qualsiasi corrispondenza biunivoca tra interi positivi e reali (Cantor 2012, pp. 17-22), e addirittura a provare (il risultato del 1891) che ogni insieme ne ammette uno di cardinalità più grande: quello dei suoi sottoinsiemi (Cantor 2012, pp. 139-142). Solo così si potranno chiarire i dubbi di Galileo e suggerire l'albergo di Hilbert e le sue varianti.

Torniamo allora alla questione di definire o assiomatizzare gli insiemi: un compito niente affatto facile. Cantor intraprese la prima via, senza grande successo. Propose per esempio nel suo articolo più bello, le *Grundlagen* del 1883 (Cantor 2012, pp. 77-134), la famosa descrizione di un insieme come di *"ogni Molti che si possa pensare come un Uno"* (p. 127): affascinante, pervasa di suggestioni platoniche, pur tuttavia lontana dal tipico rigore matematico, semmai analoga alle pseudo-definizioni euclidee di punto e retta.

L'approccio assiomatico indusse invece ad accogliere tra i fondamenti degli insiemi la seguente affermazione, apparentemente indiscutibile.

Principio di comprensione (Gottlob Frege, 1879). Ogni proprietà definisce un insieme (quello degli elementi che soddisfano quella proprietà).

Eppure proprio questo principio, e la nascente teoria degli insiemi, finirono per sperimentare imbarazzi analoghi a quelli di Galileo sull'infinito. Ne citiamo due, tra i più famosi.

Paradosso di Cantor (espresso in lettere a Hilbert del 1897 ed a Dedekind del 1899). L'unione U di tutti gli insiemi è l'insieme più grande e quindi ha la massima cardinalità possibile. Ma l'insieme delle parti di U ha cardinalità più grande.

Paradosso di Russell (lettera a Frege, 1901-02). Consideriamo la proprietà di un insieme di *non appartenersi*. Col principio di comprensione si forma l'insieme V degli insiemi che non si appartengono. Ma allora V si appartiene se e solo se non si appartiene.

Al momento in cui comparvero, questi paradossi suscitarono le polemiche e i sarcasmi che già si dicevano contro la teoria degli insiemi, provenienti anche da parte di grandi matematici come Poincaré. Hilbert ritenne tuttavia che essi sottolineassero il bisogno di un approccio matematico più persuasivo e rigoroso e incaricò il suo collaboratore Ernst Zermelo di provvedervi. In realtà solo nel 1922, dunque un secolo fa, si giunse all'assiomatizzazione degli insiemi che si attribuisce a Zermelo e Fraenkel e si indica di conseguenza con l'acronimo ZF.
Oggi i paradossi di Cantor e Russell sono sostanzialmente superati e risolti da questa assiomatizzazione più attenta e consapevole dei rischi da essi segnalati. In essa, infatti, si finisce col vietare a U e V la qualifica di *insieme*, e dunque la capacità di provocare i conseguenti intoppi. Non ogni collezione di oggetti messi assieme da una qualche comune proprietà può ritenersi un insieme: talora sì, talora no, sulla base appunto di norme pesate e meditate. L'alternativa a queste regole è di cadere nel ridicolo – come mostrato dalle reazioni negative ai paradossi di Cantor e Russell.
È poi notevole osservare come tra gli assiomi di Zermelo e Fraenkel ce ne sia uno che stabilisce l'esistenza di insiemi infiniti – una vera rivoluzione, se confrontata alla posizione che per millenni aveva perseguito la scienza ufficiale, di negare ogni rilevanza all'infinito attuale. Anzi, oggi si assume come definizione di *insieme infinito* (secondo Dedekind) per l'appunto la proprietà di stare in corrispondenza biunivoca con una parte propria: come accade appunto agli interi positivi, nei confronti degli interi > 1 o dei loro doppi (l'albergo di Hilbert) o dei loro quadrati (il paradosso di Galileo).

6. Conclusioni

Il paradosso di Galileo sollecita la teoria cantoriana degli insiemi e dell'aritmetica transfinita, che viene poi appropriatamente esemplificata dall'albergo di Hilbert.
Allo stesso modo i paradossi di Cantor e di Russell raccomandano una più rigorosa descrizione del concetto di insieme, e vengono poi superati grazie agli assiomi di ZF.
Due storie simili e ugualmente istruttive. Per cominciare, infatti, entrambe manifestano il ruolo positivo che assume nella matematica e più in generale nella scienza il paradosso, inteso non più come un inghippo senza via d'uscita, ma al contrario come un benemerito segnale di allarme, che evidenza concetti ancora oscuri e bisognosi di indagini, dunque in definitiva uno stimolo a capire più e meglio. È il paradosso di Galileo che in qualche modo spinge a investigare l'infinito, così come sono i paradossi di Cantor e Russell a ispirare gli assiomi ZF.
L'influsso positivo dei paradossi mette poi in risalto la vera natura della scienza, che non è sapienza precostituita, stabilita una volta per tutti; ma è sforzo dinamico, vivace e inappagato di aprire ed esplorare orizzonti sempre nuovi.
Del resto, la storia stessa degli insiemi dopo ZF ci conferma questa vocazione pluralista della matematica.
Si ricordi infatti che le pur brillanti e rivoluzionarie idee di Cantor non costituiscono l'unico approccio possibile all'infinito. Altre teorie sono state elaborate, chiaramente alternative quali l'analisi non standard e lo studio degli infinitesimi – che Cantor fieramente avversò.
Ma quand'anche restiamo legati alla sua concezione, alla sua idea di insieme, e in particolare agli assiomi di Zermelo-Fraenkel che abbiamo appena celebrato, è lecito domandarsi a loro proposito se essi

a) oltre a superare le provocazioni di Cantor e Russell, sappiano escludere ogni ulteriore paradosso,
b) rispondano a ogni dubbio concernente gli insiemi.

La risposta è sorprendente: non c'è alcuna certezza per a), mentre è ben noto che ZF non sa risolvere questioni sugli insiemi come l'assioma della scelta e l'ipotesi del continuo (si vedano (Leonesi et al. 2007) e (Toffalori 2019)).
Di più: i teoremi di incompletezza di Kurt Gödel negano l'esistenza di sistemi assiomatici che, integrando o sostituendo ZF, riescano nell'intento b).
Così dobbiamo prendere atto che perfino la matematica vive una sua condizione paradossale, ben lontana dall'onniscienza che in genere le si attribuisce. Le è infatti vietato di comprendere i fondamenti ultimi degli insiemi e, in definitiva, di sé stessa, visto che gli insiemi e il loro linguaggio ormai la permeano abbondantemente. Una situazione che è ben rappresentata da Robert Musil, il grande scrittore austriaco, nel suo famoso saggio giovanile *L'uomo matematico* (Musil 2016) – in realtà pubblicato nel 1913, quasi venti anni prima di Gödel, e almeno dieci prima dell'albergo di Hilbert:

«Ma a un tratto, quando ogni cosa era stata realizzata per il meglio, saltan su i matematici – quelli che si lambiccano il cervello più vicino alle fondamenta – e si accorgono che nelle basi di tutta la faccenda c'è qualcosa che non torna. Proprio così, i matematici guardarono giù al fondo e videro che tutto l'edificio è sospeso in aria.»

Credo che una discussione su questi argomenti e in ultima analisi su matematica e scienza, stimolata dall'albergo di Hilbert, sia ragionevole e forse auspicabile tra gli studenti delle scuole superiori. I quali però potranno almeno divertirsi con le bizzarrie dell'albergo infinito, che abbiamo cercato di descrivere nei capitoli precedenti.

Ringrazio il dr. Fabio Galluccio, la cui tesi di Laurea Magistrale in Matematica e Applicazioni contiene gran parte degli argomenti esposti in questa nota.

Bibliografia

Cantor G. (2012). La formazione della teoria degli insiemi (scritti 1872-1899), a cura di G. Rigamonti, Sesto S. Giovanni: Mimesis.

Enzensberger, H. M. (2004). Gli elisir della scienza, Torino: Einaudi.

Enzensberger, H. M. (2005). Il mago dei numeri, Torino: Einaudi.

Euclide (2007). Tutte le opere, a cura di F. Acerbi, Milano: Bompiani.

Ewald W. & Sieg W., editors (2013). David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917-1933, Berlin-Heidelberg: Springer Verlag.

Galilei G. (1958). Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, Torino: Bollati Boringhieri.

Gamow G. (1962). One, two, three, … infinity, New York: The Viking Press.

Hilbert D. (1978). Sull'infinito, in: *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di V. M. Abrusci, Napoli: Bibliopolis, pp. 233-266.

Kragh H. (2014). The True (?) Story of Hilbert's Infinite Hotel, arXiv:1403.0059v2.

Leonesi S. & Toffalori C. (2007). Matematica, miracoli, paradossi. Storie di cardinali da Cantor a Gödel, Milano: Bruno Mondadori, 2007.

Lesser L. M. (20026). Hotel Infinity, *American Mathematical Monthly* 113, p. 704; https://larrylesser.com/greatest-lesser-hits/ .

Musil R. (2016). L'uomo matematico, in: *Racconti matematici*, a cura di C. Bartocci,

Torino: Einaudi, pp. 289-294.

Odifreddi P. (2020). Ritratti dell'Infinito, Milano: Rizzoli.

Toffalori C. (2016). Cantor. La teoria degli insiemi, a cura di G. Rivieccio, Grandangolo Scienza, Milano: Corriere della Sera.

Toffalori C. (2019). L'equazione degli alef. $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, Bologna: il Mulino.

Wijeratnea C., Mamolo A. & Zazkis R. (2014). Hilbert's Grand Hotel with a series twist. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(6), 904–911.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 5, No 2 (2022), 67 - 78

Sulla modellizzazione delle relazioni interpersonali in una classe: dall'approccio tradizionale ai nuovi punti di vista

Parte seconda: analisi delle relazioni interpersonali in un gruppo di docenti

Luciana Delli Rocili[1], Antonio Maturo[2], Renata Santarossa[3]
[1]Vicepresidente Mathesis Abruzzo, email lucianadr@live.it
[2]Presidente Mathesis Abruzzo, email antomato75@gmail.com
[3]Presidente APAV, email santarossa.renata@gmail.com

Sunto Nel lavoro precedente sono state presentate alcune modellizzazioni matematiche del sistema di relazioni che si è creato in una classe di studenti a partire da quelle classiche di Moreno. In questo lavoro si indaga sul sistema di relazioni riguardanti un gruppo di docenti frequentanti un corso di aggiornamento.

Parole Chiave: Analisi delle relazioni interpersonali in un gruppo di docenti, modelli matematici in sociologia, un caso studio

1. Introduzione

Il caso studio che viene proposto come esempio, intende dare un contributo pedagogico al docente, affinché, riflettendo sulla propria storia di formazione, sui modelli pedagogici e sugli stili educativi interiorizzati nel corso della propria esperienza, acquisisca maggiore padronanza nelle cosiddette competenze pedagogiche trasversali, tra le quali risultano centrali quelle di tipo relazionale.
La Psicologia Positiva (Seligman, Csikszentmihalyi, 2000) ha fornito contributi innovativi a livello teorico ed applicativo: essa enfatizza il ruolo fondamentale delle risorse e potenzialità dell'individuo che le ricerche precedenti, volte ad analizzare carenze, deficit e patologie, non mettevano in luce.
Per il bambino la prima struttura sociale, dopo la famiglia, è la classe, che è un ambiente di apprendimento in cui la conoscenza viaggia con la buona capacità del docente di canalizzare e favorire le relazioni spontanee ed evitare i conflitti. Altro elemento fondamentale per un docente è saper organizzare i gruppi all'interno della classe, perché la fluidità delle relazioni favorisce la cooperazione e la condivisione delle risorse intellettive (intelligenza generale, secondo Morin), elementi fondamentali che permettono agli studenti di affrontare efficacemente le situazioni che la realtà quotidianamente propone. In questo modo ciascuno studente sarà in grado di costruire il

proprio sapere, di utilizzare le proprie intelligenze e le proprie propensioni per raggiungere il successo formativo.

Pertanto, ciò che produce apprendimento non può essere attribuito solo alla lezione frontale, alla didattica attiva o ancora all'esperienza da laboratorio, in qualche modo al metodo, perché esso rappresenta il mezzo attraverso il quale si giunge all'apprendimento ma non mette in luce i reali fattori psicologici che favoriscono oppure no l'apprendimento.

Senza la creazione di una relazione di classe positiva, si rivela inutile ogni riflessione sul come insegnare, come costruire situazioni che consentano apprendimento, come procedere in maniera efficace. (Sasso, 2009).

Partire dal presupposto che l'apprendimento si sviluppa in base a quello che studenti e insegnanti fanno in classe, significa non tener conto di doversi confrontare con persone.

Già dal 18 aprile 2007, l'allora Ministro della PI, Fioroni, con Prot. n. 1958/DGS ha emanato una nota il cui oggetto era: "*Piano nazionale per il benessere dello studente: linee di indirizzo per l'anno scolastico 2007/2008."*

Nel documento, in premessa, si legge: <<*È stata del tutto condivisa, a questo riguardo, l'elaborazione proposta in sede internazionale che individua la salute come progressiva integrazione nella crescita personale dei livelli di organizzazione bio-psico-sociali*>>.

Purtroppo, le Istituzioni Scolastiche del territorio Nazionale non sono riuscite a trovare gli strumenti necessari per garantire il benessere dello studente. Dopo 10 anni, il 31 luglio 2017, al Miur è nato il Tavolo Tecnico per l'elaborazione di linee guida per una Psicologia al servizio del sistema formativo. L'obiettivo è: «elevare la qualità della vita scolastica», lottare contro il disagio giovanile, bullismo e drop out.

Gli studenti condividono con i coetanei la maggior parte delle esperienze che fanno a scuola. Il benessere fisico non è determinato solo dall'assenza di malattia o di comportamenti a rischio, ma dipende, anche, da variabili soggettive quali l'autostima, la visione che l'individuo ha di sé, la soddisfazione per la propria vita, le relazioni sociali.

A scuola gli studenti quotidianamente sperimentano i processi di apprendimento vivendo straordinarie opportunità di crescita intellettuale, di maturazione, di acquisizione di consapevolezza critica e di responsabilità ma, al tempo stesso, si misurano anche con le difficoltà, la fatica, gli errori e i momentanei insuccessi.

Dunque, la *qualità delle relazioni*, il *clima scolastico* e le diverse *modalità con cui si vive la scuola*, sia come studente, sia come insegnante, sia come genitore, *influenzano*, più o meno direttamente, *la qualità della vita*, nonché la percezione che ciascuno prova del benessere e della salute.

Ancora oggi molti Istituti scolastici sono convinti di rispondere a tale obbligo ricorrendo a vari progetti: *progetto accoglienza, progetto educazione alimentare, progetto educazione stradale, progetto dispersione scolastica, progetto orientamento*.

Quali sono i risultati? L'Italia ha uno dei più alti tassi di abbandono scolastico dell'area Ocse, c'è poco interesse per l'istruzione ed esiste una vasta gamma di problematiche generalmente diffuse in tutte le scuole che passa sotto il nome di "*disagio scolastico*".

Tutto ciò ha creato un fenomeno di retrocessione, dovuto all'analfabetismo funzionale di ritorno che ha *effetti determinanti sulla capacità di un soggetto di esprimere il proprio diritto alla cittadinanza***.**

Il 19,7% dei giovani in età lavorativa (16-29 anni) e il 26,36% degli adulti (30-54 anni) hanno scarsa capacità di lettura; il 29,76% degli adulti in età lavorativa ha scarse competenze matematiche. il 17,75% dei giovani under 25 ha abbandonato la scuola prima di aver terminato le superiori. Non diminuiscono le situazioni difficili e complesse che gli insegnanti devono gestire quotidianamente in classe. Diventa sempre più complicato incanalare le necessità personali, affettive e sociali dei giovani e orientarle secondo le esigenze formative richieste dal sistema scolastico, nonché adeguarsi alle continue innovazioni assunte nei vari contesti della società moderna.

Dobbiamo riconoscere che negli ultimi anni, la scuola è stata oggetto di numerose riforme e cambiamenti; vi è stato un aumento del livello di problematicità in corrispondenza delle diverse fasi dell'evoluzione del sistema scuola e ogni singolo istituto scolastico ha dovuto rispondere con responsabilità.

Nella scuola avviene la negoziazione, la mediazione intorno alle scelte da compiere, con un presumibile e inevitabile aumento della conflittualità, dello stress e della fatica di accettarsi, comprendersi, trovare modalità per assumere posizioni diverse da quelle più abituali ed integrarle tra di loro per arrivare a soluzioni vantaggiose per tutti e soprattutto per gli alunni.

Wentzel K. R., University of Maryland College Park, (1997), nella sua ricerca *"Student motivation in middle school: The role of perceived pedagogical caring"*, illustra, in maniera convincente, come la situazione motivazionale della classe abbia origini sociali e quanto sia importante il ruolo dei genitori, dell'insegnante e dei pari.

A sostegno della ricerca di Wentzel vi sono altri risultati di ricerche più recenti che ritengono fondamentale il ruolo dell'insegnante nei processi sottesi alle dinamiche di gruppo classe.

Nello specifico l'insegnante rappresenta un "*contesto normativo*" in grado di indirizzare i comportamenti del gruppo e del singolo studente della classe.

In qualche modo il sistema classe rappresenta la struttura di base attraverso cui l'organizzazione scolastica persegue il suo obiettivo istituzionale: "il successo formativo". Ma è anche un ambito entro il quale si manifestano bisogni individuali: bisogno di *avere amicizie*, di *conquistare prestigio* o di *scaricare aggressività*. (Carli e Mosca 1980).

Purtroppo, i contenuti e il metodo sono il mezzo dell'apprendimento che non mettono in luce i reali fattori psicologici che causano l'apprendimento.

Si apprende per imitazione, investendo affettivamente qualcuno che riteniamo essere migliore di noi. Questo qualcuno non corrisponde realmente a una persona ma all'ideale che noi proiettiamo su una persona. Da questo fattore discendono le didattiche unidirezionali (lezione frontale o conferenza).

Altro fattore che produce apprendimento è la sperimentazione, applicazione attiva con verifica dei risultati, simulazioni. Una occasione che produce esperienza mediante una serie di errori e di verifiche.
Non sempre l'insegnante riesce a cogliere correttamente la qualità e la quantità dei rapporti interpersonali che si tessono all'interno di una classe.
Il gruppo di bambini dà a ciascuno la necessaria sicurezza e costituisce un insieme funzionale le cui attività si evolvono a partire dagli scambi tra i bambini stessi.

2. Un caso studio ad una classe di docenti con applicazione di matrici sociometriche

Il caso di studio che viene presentato è stato sperimentato su un gruppo di docenti che hanno partecipato ad un corso di formazione e hanno interpretato il ruolo di studenti rendendosi parte attiva di questo metodo utile per conoscere le relazioni esistenti tra gruppi: il sociogramma di Moreno. Uno strumento che consente di avere informazioni importanti per creare un buon clima di classe e prevenire i conflitti, perché un clima positivo favorisce l'apprendimento, la motivazione, la socializzazione.
J. L. Moreno, il fondatore della sociometria, individua nella differenza esistente tra la percezione dell'insegnante e il reale status sociale degli allievi, la causa che forse maggiormente incide negativamente nella costruzione di rapporti adeguati e gratificanti tra studenti e docenti (J.L. Moreno,1943). Egli dà per scontata la natura associativa degli individui e vede nel gruppo soprattutto lo scenario del suo programma di riforma sociometrica che si sviluppa lungo due direttrici: analisi e intervento.
Il momento dell'analisi è rappresentato dal test sociometrico che consiste nel chiedere a tutti i membri del gruppo classe con quali compagni preferirebbero interagire maggiormente o non interagire affatto. Il test può essere somministrato solo attraverso un delicato processo di coinvolgimento dei soggetti, come una sorta di riscaldamento che li induce a essere sinceri e spontanei nelle risposte, in quanto i quesiti permettono poi di verificare il modo con cui ogni soggetto percepisce la sua posizione nel gruppo, cioè la sua socioempatia positiva o negativa. I dati forniti dal test sociometrico, possono essere elaborati utilizzando una matrice di registrazione (sociomatrice), oppure un grafico (sociogramma). La sociomatrice è una tabella a doppia entrata su cui si registrano scelte e rifiuti secondo dei segni convenzionali.

Per prima cosa abbiamo individuato 24 docenti in maniera del tutto casuale e abbiamo predisposto alcune attività laboratoriali da svolgere in gruppi da sei persone, affinché si cominciassero a conoscere. Successivamente sono stati somministrati alcuni test sociometrici, di cui riportiamo i primi due.

Sulla modellizzazione delle relazioni interpersonali in una classe: dall'approccio tradizionale ai nuovi punti di vista. Parte seconda: analisi delle relazioni interpersonali in un gruppo di docenti

Cognome e Nome……

Scuola……

Data……

CRITERIO: **sociale**

1. Scrivi i cognomi e i nomi dei colleghi e delle colleghe con cui ti piacerebbe lavorare in gruppo. Puoi scrivere quanti nomi vuoi.

2. Scrivi i cognomi e i nomi dei colleghi e delle colleghe con cui non ti piacerebbe lavorare in gruppo. Puoi scrivere quanti nomi vuoi.

Cognome e Nome……

Scuola……

Data……

CRITERIO: **personale**

1. Scrivi i cognomi e i nomi dei colleghi e delle colleghe che inviteresti al tuo tavolo per il pranzo. Puoi scrivere quanti nomi vuoi.

2. Scrivi i cognomi e i nomi dei colleghi e delle colleghe con cui non inviteresti al tuo tavolo per il pranzo. Puoi scrivere quanti nomi vuoi.

Test n. 1 Criterio sociale

Cognome e Nome……

Scuola……

Data……

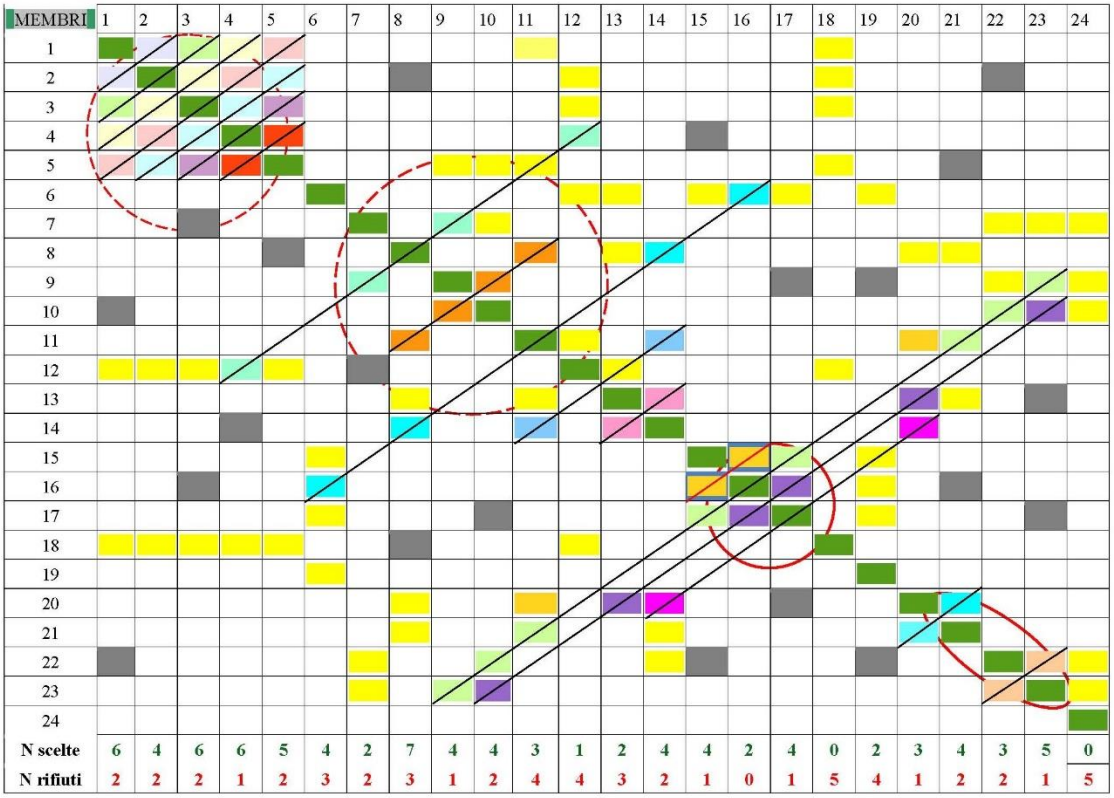
CRITERIO: **sociale**

1. Scrivi i cognomi e i nomi dei colleghi e delle colleghe con cui ti piacerebbe lavorare in gruppo. Puoi scrivere quanti nomi vuoi.

2. Scrivi i cognomi e i nomi dei colleghi e delle colleghe con cui non ti piacerebbe lavorare in gruppo. Puoi scrivere quanti nomi vuoi.

Test n. 2 Criterio personale

Dopo aver raccolto i dati, abbiamo compilato la matrice sociometrica, uno strumento di esplorazione che dà la possibilità di accertare la posizione di ciascun docente nel gruppo e tutte le interrelazioni che ha stabilito e che è in grado di stabilire potenzialmente.
Nel caso di una classe, questo metodo ci permette di vedere quali alunni sono più accettati dalla classe e quali meno, e quindi si può poi intervenire per risolvere le difficoltà di quei bambini che stentano ad instaurare rapporti significativi e vengono così emarginati.
Di seguito si riporta la matrice sociometrica:



MEMBRI	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1																								
2																								
3																								
4																								
5																								
6																								
7																								
8																								
9																								
10																								
11																								
12																								
13																								
14																								
15																								
16																								
17																								
18																								
19																								
20																								
21																								
22																								
23																								
24																								
N scelte	6	4	6	6	5	4	2	7	4	4	3	1	2	4	4	2	4	0	2	3	4	3	5	0
N rifiuti	2	2	2	1	2	3	2	3	1	2	4	4	3	2	1	0	1	5	4	1	2	2	1	5

Tabella 1 Sociomatrice del Corso di Pizzoferrato, luglio 2018

Nell'andare a compilare la sociomatrice, nella prima riga e nella prima colonna sono stati scritti, in ordine alfabetico, i nomi dei docenti (nel nostro caso sono stati sostituiti i nominativi con i numeri). Focalizzandoci sulle scelte ricevute (caselle colorate con colori diversi dal giallo) e sui rifiuti subiti (caselle colorate in giallo), ossia sul *grado di accettazione e rifiuto sociale dei docenti frequentanti il corso***,** si nota, ad esempio, che il docente n.1, rappresentato dalla prima colonna, ha ricevuto le scelte positive di 2, 3, 4, 5, 10, 22 ed è stato rifiutato da 12 e 18. Il docente n. 2 in seconda colonna è stato scelto da 1, 3, 4, 5 ed è stato rifiutato da 12 e 18.

Nella riga marginale sono state calcolate le scelte totali ricevute (numeri in verde) ed i rifiuti ricevuti (numeri in rosso).

Da una semplice lettura qualitativa della matrice possiamo osservare che la diagonale, connotata con il riempimento verde scuro non è da considerare; sono invece da prendere in considerazione tutte le altre caselle con riempimento colorato opportunamente affinché possano risaltare le scelte reciproche (simmetria rispetto alla diagonale).

Si osservi inoltre che nell'ambito della reciprocità non ci sono solo le scelte positive, ma anche i rifiuti. È il caso del 15 rifiutato dal 16 e del 16 rifiutato dal 15, chiaro esempio di conflittualità.

3. Valutazioni quantitative

Poiché nel gruppo sono elementi fondamentali la *coesione*, l'*espansività*, l'*aggressività* e la *conflittualità*, passiamo alla valutazione quantitativa di alcuni indici della matrice sociometrica

(a) L'indice di coesione = scelte reciproche / scelte effettuate.

56/87 = 0,64

Secondo Carli e Mosca (1980), rappresenta la forza dei legami tra gli individui che appartengono al gruppo.

(b) Indice di espansività = scelte espresse / membri;

140 / 24 = 5,8

(c) Indice di aggressività = rifiuti espressi / membri;

55 /24 =2,29

(d) Indice di conflittualità = rifiuti reciproci / rifiuti espressi;

1 / 55 = 0,018

È possibile inoltre, da un'analisi qualitativa della matrice, ipotizzare i possibili gruppi che si potrebbero creare naturalmente: i primi sette elementi costituiscono un gruppo compatto, coeso, lo si può notare dalla densità delle scelte simmetriche. Altro gruppo è costituito da 8, 10, 11 i cui caratteri simmetrici sono disgregati con 6, 14 e 15 membri periferici. I legami di questo gruppo si basano su rapporti asimmetrici, spesso 6, 14 tendono a costituire un sottogruppo del gruppo. All'interno del gruppo si tende a gerarchizzare le relazioni, in questo caso il gruppo è una costruzione mentale dei suoi membri e non un'identità sociale. Infine, notiamo ancora due gruppi, che possiamo chiamare satelliti, in quanto poco armonizzati e con membri che non riescono ad identificarsi nello stesso gruppo e quindi cercano di spostarsi verso altri gruppi.
In particolare, il gruppo formato da 15, 16, 17, 18, 19, 20 è caratterizzato da non tutte scelte reciproche, anzi, con situazioni bilaterali conflittuali che hanno generato canali di comunicazione alternativi e non sempre stabili. Infine il gruppo costituito da 21, 22, 23, 24 si caratterizza per essere disgregato con la tendenza a preferire rapporti bilaterali che si tengono al margine degli altri gruppi.

4. Conclusioni

Questo caso di studio ci permette di conoscere e discutere su alcune caratteristiche dei gruppi: una caratteristica molto importante è la *numerosità* di un gruppo, le relazioni a due, dette anche *diadiche*, sono molto importanti perché soddisfano il bisogno di essere riconosciuti ed accettati dall'altro ma presentano il limite di essere molto povere sul piano funzionale e comunicativo.
Spesso poi sono rette più che da un reale legame affettivo, da vincoli disfunzionali di prevaricazione/sottomissione che alla lunga possono provocare sentimenti di disagio e malessere i quali, in una situazione come quella di una classe scolastica, sono deleteri rispetto al processo di crescita e di apprendimento degli alunni. Il gruppo, in pratica, inizia quando si ha l'incontro di almeno tre persone. In questo caso, il terzo individuo ha la funzione di mediare gli scambi tra gli altri due, favorendo lo sviluppo delle attività tramite l'integrazione e il confronto delle idee espresse in una dinamica che non sottostà più solamente alla logica di accettazione/rifiuto come potrebbe avvenire in una relazione a due. Infatti, la presenza di un terzo può essere produttiva e piacevole.
I gruppi più numerosi, dieci o più membri, tendono invece a suddividersi in sottogruppi, sono caratterizzati da scarso senso d'appartenenza che causa un minor impegno da parte dei soggetti coinvolti che si traduce spesso in menefreghismo riguardo alle sorti del gruppo stesso. Esso inoltre è difficile da coordinare nel caso in cui debba operare per raggiungere determinati scopi e può causare l'isolamento o addirittura l'esclusione di alcuni membri un po' più timidi e timorosi di esprimere le proprie idee. Per questo motivo le classi scolastiche, come sono concepite oggigiorno, non sono dei gruppi ottimali per agevolare gli scambi relazionali e le attività e quindi la crescita degli alunni.
In questa sede, sperimenteremo sul gruppo in formazione, come l'insegnante può realizzare e poi utilizzare il sociogramma di Moreno per la creazione di gruppi classe collaborativi e predisposti all'apprendimento.
Il gruppo di bambini dà a ciascuno la necessaria sicurezza e costituisce un insieme funzionale le cui attività si evolvono a partire dagli scambi tra i bambini stessi, dagli scambi tra questi e gli insegnanti e attraverso i cambiamenti che gli alunni contribuiscono a suscitare nell'ambiente.
J. L. Moreno, il fondatore della sociometria, individua nella differenza esistente tra la percezione dell'insegnante e il reale status sociale degli allievi, la causa che forse maggiormente incide negativamente nella costruzione di rapporti adeguati e gratificanti tra alunni e docenti (J.L. Moreno,1943). Il sociogramma è quindi un grafico contenente due elementi fondamentali: dei *simboli*, indicati con cerchi, quadrati, nomi, sigle, che rappresentano i soggetti, e delle *linee* che rappresentano le scelte, i rifiuti e altre informazioni tratte dal test sociometrico.

Si tratta di uno strumento di esplorazione che dà la possibilità di accertare la posizione degli alunni nel gruppo e tutte le interrelazioni che ha stabilito e che è in grado di stabilire potenzialmente. In questo modo si può vedere quali alunni sono più accettati dalla classe e quali meno, e quindi si può poi intervenire per risolvere le difficoltà di quei bambini che stentano ad instaurare rapporti significativi e vengono così emarginati. Apparentemente l'approccio a questo metodo può sembrare abbastanza complesso, ricordiamo però che, gli strumenti tecnologici di cui oggi ci serviamo, ci permettono di ottenere la rappresentazione grafica delle relazioni di gruppo mediante applicazioni facili da usare. Ad esempio, in linea con la scuola digitale, il docente può costruire il test con *Google Modulo*; gli studenti rispondono al test da un tablet o computer o smartphone, le risposte convergono sulla sorgente di Google Modulo che ha generato il test, vengono computerizzate e trasferite su un foglio di calcolo che il docente scarica da Google affinché venga letto dall'applicazione *Gephi* che crea la matrice sociometrica e vari tipi di grafi.

Bibliografia

Delli Rocili L., Maturo A., (2013), Teaching mathematics to children: social aspects, psychological problems and decision-making models, in *Interdisciplinary approaches in social sciences*, Editura Universitatii A.I. Cuza, Iasi, Romania.

Delli Rocili L., Maturo A., (2015), Interdisciplinarità, logica dell'incerto e logica fuzzy nella scuola primaria, *Science & Philosophy*, 3(2), pp.11-26.

Delli Rocili L., Maturo A., (2017), Social problems and decision making for teaching approaches and relationship management in an elementary school, in *Mathematical-Statistical models and qualitative theories for economic and social sciences*, Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol. 104, Springer, pp. 81-94.

Delli Rocili L., Maturo A., (2019), Problems and decision-making models in the first cycle of education, in *Qualitative and Quantitative Models in Socio-Economic Systems and Social Work*, Series in System, Decision and Control, Springer.

Hoskova-Mayerova Š., Maturo A., (2017). *Fuzzy Sets and Algebraic Hyperoperations to Model Interpersonal Relations*, in Recent Trends in Social Systems: Quantitative Theories and Quantitative Models Studies in Systems, Series: Decision and Control, Vol. 66, Springer, pp. 211-222.

Hošková-Mayerová, Š., Maturo, A., (2019). On some applications of fuzzy sets and algebraic hyperstructures for the management of teaching and relationships in schools, in Series in System, Decision and Control, Springer.

Hošková-Mayerová, Š., Maturo, A., (2018). *Algebraic Hyperstructures and Social Relations*, Italian Jurnal of Pure and Applied Mathematics - N. 39–2018 (701–709)

Moreno J.L., (1953). *Who Shall Survive*? New York: Beacon Press.

Moreno J.L., (1951). *Sociometry. Experimental Methods and the Science of Society*, New York: Beacon Press, 1951.

Ragin C.C. (2000). Fuzzy-Set Social Science, University Chicago Press, Chicago, USA.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 5, No 2 (2022), 79 – 84

Riflessioni su una lodevole iniziativa: i giochi del Mediterraneo

Franco Eugeni* e Davide Eugeni**

***gia professore ordinario di Filosofia della Scienza; **studente**

Sunto. I giochi Matematici del Mediterraneo sono stati una buona occasione per un colloquio tra nonno e nipote su alcune questioni stimolanti della Matematica.

Parole chiave: Principio del cassetto, problema probabilistico dei compleanni, congettura di Collatz

1. Introduzione

Mio nipote Davide Eugeni circa un anno fa ha partecipato a "I Giochi matematici del Mediterraneo" che sono rivolti ai nostri alunni delle classi terze, quarte e quinte della primaria e agli alunni della scuola secondaria. Sono organizzati dalla **Università Bocconi di Milano** e con l'**A.I.P.M.** «Alfredo Guido» (Accademia Italiana per la Promozione della Matematica).

Dopo la prova abbiamo fatto una chiacchierata e Davide ha fatto suoi i problemi dei quali abbiamo discusso, il primo dei quali era una delle domande della prova.

2. Il **principio dei cassetti**

Il **principio dei cassetti**, in inglese detto "the Pigeonhole principle" (il principio delle casette dei piccioni) è molto interessante e non occorre di dimostrazione per la sua banale evidenza. Fu enunciato per la prima volta dal matematico tedesco **Lejeune Dirichlet (1805-1859)**, nel 1834 con il nome il di *Schubfachprinzip* (esattamente "principio del cassetto"). Iniziamo con un esempio.

Supponiamo di avere 9 cassetti e 10 (almeno) caramelle. L'obiettivo è mettere tutte le caramelle nei 9 cassetti , allora il principio del cassetto asserisce che in un cassetto vi sono almeno due caramelle.

Supponiamo di avere 10 piccioni ed una piccionaia con 9 casette . L'obiettivo è mettere tutti e 10 i piccioni nelle 9 casette. Allora il principio delle casette dei piccioni, asserisce che in un casetta vi sono almeno due piccioni

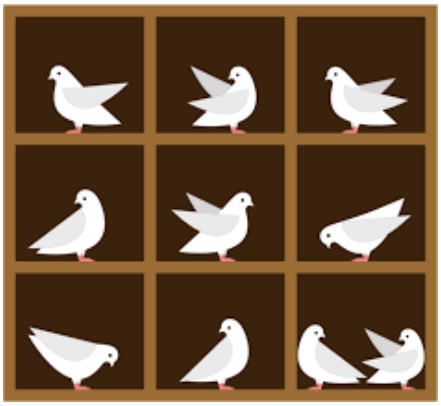


Figura1: 9 casette per 10 piccioni

In generale se ho n+k oggetti da mettere in n cassetti, allora il principio del cassetto asserisce che in un cassetto vi sono almeno due oggetti.

Un altro modo di vedere il principio è che una piccionaia con *n* caselle può contenere al più *n* piccioni!

In generale il principio, che è un esempio di un argomento facente parte della combinatorica, o matematica combinatoria, si applica in più casi e in vari ambienti, ma quello che sembra essere difficile nei casi pratici è comprendere chi sono i cassetti e chi sono le caramelle.

Veniamo al nostro problema:

vi sono 10 persone e le monete. L'obiettivo è distribuire le monete (mettere le monete nelle tasche) alle persone, in modo tale che in alcuna tasca ci possano essere più di 8 monete. Si chiede se ci sono due persone che hanno in tasca lo stesso numero di monete?

Scegliere la risposta: SI - NO - forse .

Il ragionamento di Davide è corretto ed è il seguente:

Nella prima tasca 0 monete, nelle 2° tasca 1 moneta, nella 3° tasca 2 monete, …., nella 9° tasca 8 monete, nella 10° tasca non potendoci essere più di 8, ce ne sarà un numero tra 0 ed 8 estremi inclusi. Dunque ci sono due persone aventi lo stesso numero di monete e la risposta è SI!

Non poteva mai essere *forse* perché forse equivale a non so, e *forse* non è una risposta probabilistica, come qualcuno ha ipotizzato!

Tuttavia è interessante capire che si tratta di un problema del genere del principio del cassetto, in quanto si può asserire che ci sono 10 piccioni = 10 tasche e ci sono 9 casette che sono i numeri di monete, 0, 1, 2, …, 8. Nell'associare (= mettere) i 10 piccioni (tasche) alle casette (numeri di monete) per il principio delle casette dei piccioni vi sono almeno due piccioni (due tasche) in una stessa casetta (avente lo stesso numero di monete).

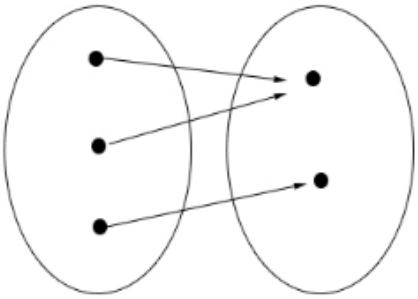


Figura 2: 2 casette associate a 3 piccioni.

Il ragionamento della piccionaia è più complicato del ragionamento diretto, ma serve ad inquadrare il problema in una teoria generale e a capire che a volte è difficile distinguere quali sono i piccioni e quali le casette.

3. Il **paradosso del compleanno**

Vogliamo continuare il discorso con un **esempio probabilistico**. L'esempio che portiamo è noto come il **paradosso del compleanno**.

Supponiamo di avere un gruppo di persone. Ci si chiede quale sia la probabilità che nel gruppo ci siano due persone con il medesimo compleanno.

Figura 3: il paradosso dei compleanni

E' ovvio che per avere la certezza dell'evento occorre considerare un gruppo di almeno 366 persone (367 se si considera l'anno bisestile). Ma dal punto di vista probabilistico le cose vanno in modo molto differente.

Il **paradosso del compleanno** venne pubblicato nel 1939 da un matematico statunitense, Richard von Miles (1883-1953). Il **paradosso**, legato alla teoria **della** probabilità, afferma che, contro ogni forma di intuizione, la probabilità che in un gruppo di sole 23 persone almeno due di esse compiano gli anni lo stesso giorno è circa 0,51 (51%); con 30 persone essa supera 0,70 (70%), con 50 persone tocca addirittura 0,97 (97%), come appare chiaro dal grafico dell'evento.

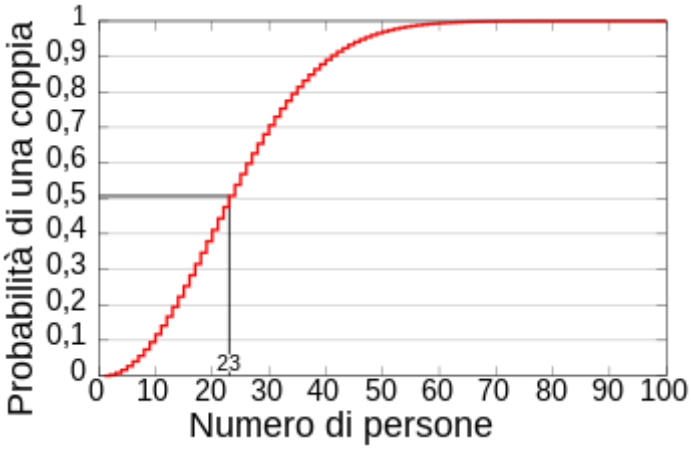


Figura 4: probabilità di avere lo stesso compleanno

Esistono problemi che si enunciano facilmente, ma la cui soluzione sembra essere di difficoltà enorme, per ottenere la quale non si ha ancora la matematica giusta.

4. La congettura di Collatz

Un problema irrisolto: La congettura di Collatz (conosciuta anche come **congettura 3*n* + 1)** è una congettura matematica tuttora irrisolta. Fu enunciata per la prima volta nel 1937 da Lothar Collatz (1910-1990), da cui prende il nome. Paul Erdős disse, circa questa congettura, che "la matematica non è ancora matura per problemi di questo tipo".

Procedura: prendete un numero naturale qualsiasi. Se è pari, dividetelo per 2, se invece è dispari, moltiplicatelo per **3** e aggiungete **1**. Nei due casi otterrete un nuovo numero su cui potrete ripetere ancora la stessa operazione e così via …

5, 3×5+1=16, **8,4,2,1**

12, 6,3, 3×3+1=10, 5, 3×5+1 =16, **8,4,2,1**

11, 3×11+1 =34, 17, 3×17+1 =52, 26, 13, 3×13+1=40, 20,10,5, 3×5+1 =16, **8,4,2,1**

7, 3×7+1 =22, 11 continua quella sopra….

In alcuni casi la procedura può essere molto lunga ad esempio per il numero 27, sono stati fatti manualmente ben 111 passi, arrivando fino al numero 9232, che diviso più volte per 2 porta a 577, e da questo dopo una ventina di passaggi ulteriori si arriva ad 1 (provare con una calcolatrice del telefono).

La congettura di Collatz afferma che la procedura indicata porta sempre ad 1. Non è stata mai provata.

Il grande matematico ungherese Paul Erdős (1913-1996), considerato il più grande esperto di Teoria dei numeri, di tutti i tempi disse, circa questa congettura, che «la matematica non è ancora matura per affrontare problemi di questo tipo».

La procedura ha dato 1, su un numero enorme di prove al computer. La congettura è stata verificata (al 2020) mediante computer per tutti i valori fino ad 1 seguito da 20 zeri (sarebbe 100 quintilioni).

100.000.000.000.000.000.000

quntilioni-quadrilioni-trilioni-bilioni-miliardi-milioni-migliaia-centinaia[1]

con uno zero in più sarebbe un sestilione che si scrive 10^21 ovvero n10 seguito da 21 zeri.

Pensare che basterebbe un solo esempio per dire che la congettura di Collatz non è vera. Tuttavia i matematici pensano che sia vera poiché intuitivamente, sarebbe sorprendente se il più piccolo controesempio, fosse così grande da superare questo numero: 1 seguito da 20 zeri. Con l'aumento della velocità dei computer, verranno controllati valori sempre più alti, pur ricordando che questi test non potranno mai dimostrare la correttezza della congettura, ma solo l'eventuale falsità, scoprendo un esempio che lo falsifica.

[1] Negli Stati Uniti, Francia e Brasile bilioni e miliardi coincidono e la scala è diversa.

Bibliografia

T. Andreescu, Z. Feng, (2003) 102 combinatorial problems, Birkhauser, Boston.

A. Bertoni, M. Torelli, (1977) Elementi di matematica combinatoria, Isedi, Milano.

M. Cerasoli, F. Eugeni, M. Protasi, (1988) Elementi di matematica discreta, Zanichelli, Bologna.

F. Conti, M. Barsanti, T. Franzoni (1994) Le olimpiadi della matematica, problemi delle gare italiane 1988-1994, Zanichelli, Bologna.

F. Conti, M. Barsanti, C. De Lellis, T. Franzoni (2002) Le olimpiadi della matematica, problemi delle gare italiane 1995-2001, Zanichelli, Bologna

F. Eugeni F. (1996). La matematica attraverso i problemi, In: *Cento anni di Matematic*a, Editori Palombi, Roma.

Sitografia

http://it.wikipedia.org/wiki/Paradossodelcompleanno

http://it.wikipedia.org/wiki/congetturadicollatz

INDICE

Prefazione ***Renata Santarossa, Mario Innocenzo Mandrone***	Pag…3
Puer sapiens ***Domenico Lenzi***	Pag 5
Le basi del contare ***Laura Tomassi***	Pag 27
Le costruzioni geometriche e lo sviluppo del pensiero computazionale: proposta per la scuola secondaria di primo grado ***Silvia Cerasaro***	Pag 41
L'albergo di Hilbert ***Carlo Toffalori***	Pag 55
Sulla modellizzazione delle relazioni interpersonali in una classe: dall'approccio tradizionale ai nuovi punti di vista. Parte seconda: analisi delle relazioni interpersonali in un gruppo di docenti ***Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo, Renata Santarossa***	Pag 67
Riflessioni su una lodevole iniziativa: i giochi del Mediterraneo ***Franco Eugeni, Davide Eugeni***	Pag 79

Istruzioni per gli autori

Chi desidera inviare un articolo per la Rivista Mondo Matematico e Dintorni deve seguire i seguenti criteri per il formato:

1. L'articolo deve essere in word, carattere Times New Roman, 12 p; il titolo dell'articolo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 18 p.
2. I margini sono di 3 cm sotto, sopra, a destra e a sinistra. L'interlinea è multipla 1,15 p.
3. L'articolo deve essere diviso in paragrafi numerati, di cui il primo è una introduzione e l'ultimo una conclusione. I paragrafi vanno separati da due interlinee. Il titolo di ogni paragrafo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 14 p.
4. Ogni articolo deve avere una lunghezza minima di 6 pagine e non deve superare, di regola, le 14 pagine.
5. Dopo l'ultimo paragrafo va inserita la bibliografia. Almeno 4 fra libri e articoli nel formato cognome, nome (anno), titolo dell'articolo, titolo del libro o rivista, editore, città.
6. La bibliografia non va numerata. I riferimenti bibliografici nel testo devono avere la forma (cognome dell'autore, anno).
7. Non mettere note bibliografiche a piè di pagina. Tutta la bibliografia va messa alla fine.
8. I disegni vanno fatti con programmi di elaborazione grafica (non in Word!) e salvati in jpg o in png.
9. L'articolo deve essere inviato in formato doc o docx ed in formato pdf per il controllo dell'impaginazione e deve avere un numero pari di pagine.

Tutti gli articoli ricevuti saranno esaminati da due revisori che invieranno il loro parere sulla pubblicazione ed eventuali proposte di correzioni ai direttori editoriali.
Gli articoli possono essere inviati ad uno dei seguenti indirizzi email:

antomato75@gmail.com

lucianadr@live.it

santarossa.renata@gmail.com

marioinnocenzomandrone@gmail.com

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo
ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola
(Decreto del 21/07/2009 e Direttiva 170/2016)

www.apav.it