Volume 5 Numero 1 2022

MONDO MATEMATICO E DINTORNI

Rivista per i Docenti del Primo Ciclo di Istruzione

Direttori Editoriali
Luciana Delli Rocili
Antonio Maturo
Renata Santarossa

APAV

www.apav.it

ISSN 2612 - 2596 [on line] ISSN 2612 - 1719 [testo stampato]

Volume 5 (2022) Numero 1

MONDO MATEMATICO E DINTORNI

Rivista per i Docenti del Primo Ciclo di Istruzione

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo

Editore: Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo (APAV)
Via del Concilio n.24, Pescara, Italy

Codice Fiscale: 92036140678 Partita IVA: 02184450688

Codice destinatario per fatturazione elettronica: M5 UXCRL

IBAN: IT 57 K 02008 15408 000104232062 BIC Swift LINCRITM1760
Banca UNICREDIT - Agenzia Pescara UMBERTO 00760

Periodicità: semestrale

Siti web: www.apav.it; www.eiris.it

Email: apavsegreteria@gmail.com, apavsegreteria@pec.it

ISSN: 2612 - 1719 (testo stampato)
ISSN: 2612 - 2596 (online)

Autorizzazione del Tribunale di Pescara del 9/4/20l9
N. 741/2019 V.G.
N. 03/2019 Reg. Stampa

Messaggio di Benvenuto della Presidente dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati

Cari Dirigenti, cari Docenti e cari Studenti,
È con grande piacere che vi presento l'Accademia Piceno Aprutina dei Velati, un centro di eccellenza dedicato alla formazione e alla crescita continua di tutto il personale della scuola Italiana. La nostra missione è chiara e ambiziosa: vogliamo accompagnarvi in un percorso che non solo arricchisce le vostre competenze, ma che trasforma profondamente il vostro modo di essere, di pensare, di insegnare e di vivere l'educazione e l'istruzione.
Uno dei pilastri fondamentali del nostro lavoro è la ricerca didattica.
Il nostro gruppo di docenti formatori è costantemente impegnato nel confrontarsi con i numerosi centri di ricerca didattica universitaria, nello studiare e sviluppare metodologie innovative, capaci di rendere l'apprendimento un'esperienza coinvolgente e significativa. Crediamo che la ricerca continua sia essenziale per offrire ai nostri studenti le migliori strategie educative, sempre al passo con le esigenze di un mondo in evoluzione.
Siamo inoltre orgogliosi di sottolineare l'importanza della nostra piattaforma Academy Learning Object (ALO), accreditata dal MIM, su cui è possibile trovare i nostri artefatti, nonchè, all'occorrenza, crearne dei nuovi. Essa rappresenta un punto di forza del nostro approccio formativo. Grazie a questa piattaforma, è possibile collaborare, apprendere da remoto e essere seguiti da tutor esperti che supportano il docente in formazione durante il processo di ricerca-azione, nonchè validazione delle attività formative progettate, garantendo così un feedback continuo e costruttivo. In questo modo, non solo si apprendono nuove competenze, ma si entra a far parte di una vera e propria comunity di buone pratiche, il cui compito è quello di promuovere la ricerca, la produzione, la condivisione, lo scambio dei contenuti didattici digitali, delle strategie, delle metodologie e delle pratiche innovative di transizione digitale all'interno della scuola.
Un altro aspetto distintivo del nostro approccio è l'integrazione dell'intelligenza emotiva nel processo formativo. Crediamo che la vera efficacia didattica nasca dalla capacità di comprendere e valorizzare le emozioni, sia proprie che degli studenti. Nei nostri corsi, poniamo grande attenzione alla personalizzazione dell'insegnamento, affinché ogni docente possa sviluppare una didattica che non solo trasmetta conoscenze, ma che sappia anche toccare e motivare profondamente ogni singolo studente.
I nostri obiettivi sono ambiziosi, ma raggiungibili: vogliamo che ogni partecipante ai nostri corsi esca arricchito, con strumenti concreti, indispensabili per affrontare le sfide educative e utili per stimolare una crescita personale e professionale continua.
Vi invitiamo a unirvi a noi in questo percorso di scoperta, innovazione e trasformazione. Siamo qui per ispirarvi, per sfidarvi e per supportarvi nel vostro cammino verso l'eccellenza.
Con stima,
La Presidente dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati in Teramo

Renata Santarossa

Introduzione all'Accademia

Siamo centro di competenza che si avvale della ricerca e sviluppo per la scelta delle proprie proposte formative. In questo modo applichiamo la ricerca scientifica per sviluppare prodotti e sperimentare forme e modelli didattici innovativi ma soprattutto efficaci. Inoltre, abbiamo la possibilità di offrire i nostri artefatti in diverse modalità didattiche attraverso il nostro ambiente di apprendimento virtuale Academy Learning Object.

Breve Storia e Missione

L'Accademia è stata fondata a L'Aquila nel 1586, dal matematico gesuita Padre Sertorio Caputo (Paterno Calabro 1566- l'Aquila 1608), morto in odore di santità. Chiusa prima delle due guerre mondiali, fu rifondata in modo informale alla fine degli anni '70 e poi regolarmente rifondata e registrata sulla fine degli anni '80 da Ilio Adorisio, Franco Pellegrino, Bruno Rizzi, Franco Eugeni, Antonio Maturo. Inizialmente ha operato fino a tutto il 1993 oganizzando Convegni e pubblicando la Rivista "Ratio Mathematica" sotto la Presidenza del prof. Ilio Adorisio e successivamente sotto la lunga presidenza del prof. Franco Eugeni (1993-2010).
Dal 1996 al 2010 l'APAV è stata tra le prime Agenzie formative a possedere una propria piattaforma e-learning con la quale ha gestito, per conto dell'Università di Teramo, i Master telematici rivolti agli insegnati di tutte le discipline, con una media di mille iscritti annui.
Dal 2009 è Agenzia di formazione riconosciuta dal MIUR, dapprima sotto la presidenza del prof. Giuseppe Manuppella e dal 2022 sotto la presidenza della prof.ssa Renata Santarossa (già Dirigente Scolastico e Docente Universitaria).
Pubblica tre riviste, delle quali due internazionali "Ratio Mathematica" (fondata nel 1989) e "Science & Philosophy" (fondata nel 2004) che sono certificate ANVUR, l'ente che ne attesta l'elevata specializzazione scientifica. La terza Rivista "Mondo Matematico e Dintorni" (fondata nel 2014) è dedicata a tematiche della Scuola Secondaria di I grado.
Le riviste sono dirette da: Antonio Maturo, Franco Eugeni, Luciana Delli Rocili, Fabrizio Maturo e Renata Santarossa.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 5, No 1 (2022), 5-26

Le discipline STEM: il valore di un approccio interdisciplinare Didattica e metodologie innovative nella scuola primaria e secondaria di primo grado

Mario Innocenzo Mandrone

V. Presidente Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV)

e- mail: almavit@libero.it   marioinnocenzomandrone@gmail.com

Abstract In questo lavoro si cercherà di mettere in evidenza come un approccio interdisciplinare alle discipline STEM possa favorire azioni dedicate a rafforzare nei curricoli lo sviluppo delle competenze matematico-scientifico-tecnologiche e digitali legate agli specifici campi di esperienza con l'adozione di metodologie didattiche innovative e l' utilizzo di strumenti tecnologici e informatici in modo critico e creativo, secondo quanto previsto dall'articolo 1, comma 552, lett. a) della legge 197 del 29 dicembre 2022 e dalla riforma inserita nel PNRR (Piano Nazionale di Ripresa e Resilienza). Quando si parla di discipline STEM non si fa riferimento, banalmente, all' insieme delle materie scientifiche, ma ad un nuova filosofia educativa che si serve dell'educazione scientifica per fornire una soluzione ai problemi di una realtà che è sempre più complessa e in costante mutamento. L'approccio interdisciplinare porta ad una contaminazione tra teoria e pratica in modo tale che abilità provenienti da discipline diverse (in questo caso scienza, tecnologia, ingegneria e matematica) possono contaminarsi e fondersi in nuove competenze. Pertanto spazi e strumenti digitali per le discipline STEM rappresentano una sfida fondamentale per il miglioramento dell'efficacia didattica e per l'acquisizione delle competenze tecniche, creative, digitali, di comunicazione e collaborazione, delle capacità di problem solving, di flessibilità e adattabilità al cambiamento, di promozione del pensiero critico nella società digitale.

Parole chiave: Discipline STEM, problem solving, cooperative learning, pensiero computazionale e coding, didattica per problemi, attività laboratoriale, pensiero critico, società digitale.

1. Introduzione

Vola solo chi osa farlo (Luis Sepùlveda)

La società in cui viviamo si presenta con caratteristiche di complessità che non sempre è facile comprendere e decifrare. Le nuove scoperte e la tecnologia hanno cambiato le nostre abitudini e influenzato il mondo del lavoro, la scuola, il tempo libero, la politica e i rapporti sociali. Al cittadino di oggi sono richieste nuove competenze per poter affrontare la complessità e adattarsi ai futuri cambiamenti. Per effetto della nuova civiltà tecnologica, oggi, è quanto mai sentita l'esigenza di una scuola nuova rinnovata nella didattica, nei metodi, nei contenuti, nell'organizzazione. Per questo motivo le politiche europee nel settore dell'istruzione e della formazione sono state poste al centro della strategia " Europa 2020" per incentivare la crescita e l'occupazione al fine di rendere l'economia europea la più competitiva nella società della conoscenza e dell'ITC. L'Unione Europea si pone, difatti, il conseguimento dei seguenti obiettivi strategici:

1. Fare in modo che l'apprendimento permanente e la mobilità divengano una realtà;
2. Migliorare la qualità e l'efficacia dell'istruzione e della formazione;
3. Promuovere l'equità, la coesione sociale, la cittadinanza attiva e il dialogo interculturale;
4. Incoraggiare la creatività e l'innovazione.

Il complesso dei documenti proposti dall'Unione Europea e i sostanziali cambiamenti costituzionali indotti nel sistema scolastico italiano, ridistribuendo funzioni e responsabilità, sono diretti a promuovere e realizzare una scuola che si propone al territorio per il suo impegno e per la partecipazione e la condivisione di obiettivi e valori tra tutti i soggetti coinvolti nell'azione educativa. Non si tratta, quindi, di questioni concernenti soltanto l'organizzazione o la gestione delle scuole, ma, al contrario, di una profonda innovazione nel concetto stesso di formazione scolastica che ha fatto emergere l'attenzione per la qualità non più astrattamente intesa e genericamente definita ma riferita alle singole componenti: qualità dell'organizzazione, qualità delle relazioni umane, qualità dei processi, qualità della didattica, qualità del Sistema-Scuola, presupposto imprescindibile della qualità del Sistema-Paese. In definitiva l'attenzione deve essere focalizzata sulla qualità del processo che consente di riflettere sulle modalità attuative dell'azione didattica e/o organizzativa. Il sistema scolastico italiano assume come orizzonte di riferimento verso cui tendere il quadro delle competenze-chiave per l'apprendimento permanente definite dal Parlamento europeo e dal Consiglio dell'Unione europea che hanno individuato otto competenze-chiave (22/05/2018), (non ordinate gerarchicamente ma da considerarsi tutte di pari importanza), che rappresentano la cornice e lo sfondo per tutti i saperi. Esse sono:

1. Competenza alfabetica funzionale
2. Competenza multi-linguistica
3. Competenza matematica e competenza in scienze, tecnologie e ingegneria
4. Competenza digitale
5. Competenza personale, sociale e capacità di imparare ad imparare

6. Competenza sociale e civica in materia di cittadinanza
7. Competenza imprenditoriale
8. Competenza in materia di consapevolezza ed espressione culturali

L'individuazione delle otto competenze chiave europee (dette anche competenze chiave di cittadinanza) da parte dell'Unione Europea è il frutto di un lungo percorso, iniziato nel 2006 e profondamente innovato nel 2018. Il testo di riferimento che le definisce è la Raccomandazione relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente (con il suo Allegato Quadro di riferimento europeo), approvata dal Parlamento Europeo il 22 maggio del 2018. La citata Raccomandazione del Parlamento Europeo utilizza queste parole per la definizione del concetto di competenza : «un insieme di conoscenze, abilità e atteggiamenti». Da questa definizione deriva poi anche quella di "competenze chiave", che sono: «quelle di cui tutti hanno bisogno per la realizzazione e lo sviluppo personali, l'occupabilità, l'inclusione sociale, uno stile di vita sostenibile, una vita fruttuosa in società pacifiche, una gestione della vita attenta alla salute e la cittadinanza attiva. Esse si sviluppano in una prospettiva di apprendimento permanente, dalla prima infanzia a tutta la vita adulta, mediante l'apprendimento formale, non formale e informale in tutti i contesti, compresi la famiglia, la scuola, il luogo di lavoro, e altre comunità».
Tra le tante definizioni della "competenza" mi piace citare quella coniata da Mauro Laeng nella voce dell "Enciclopedia pedagogica" da lui diretta: la competenza è il "sicuro possesso di abilità non semplicemente ripetitive riferite ad un compito". Tale definizione ha il pregio di racchiudere in poche parole gli elementi essenziali del concetto:

1. Il contesto problematico (il compito);
2. Il radicamento personale (sicuro possesso);
3. La natura originale della risposta (non ripetitività).

Pertanto, accanto alle definizioni ufficiali o consolidate nella letteratura scientifica, si può sinteticamente dire che "la competenza è la capacità di interagire efficacemente con la realtà".

I passi indispensabili da svolgere per una didattica per competenze sono:

1) Aggregare le discipline per assi culturali e identificare i "saperi essenziali" come nuclei portanti;

2) Scegliere un approccio misto che alterna-in modo intelligente-lezioni,compiti,laboratori, esperienze;

3) Sollecitare gli studenti a proporre pubblicamente l'esito del proprio lavoro.

Le "competenze-chiave" sono delle "meta-competenze", cioè delineano strumenti culturali, metodologici, relazionali che permettono alle persone di partecipare e incidere sulla realtà. Elementi quali il pensiero critico, la risoluzione di problemi, il lavoro di squadra, le abilità comunicative e negoziali, le abilità analitiche, la creatività e le abilità interculturali sottendono a tutte le competenze chiave. Il concetto di competenza si coniuga con un modello di insegnamento/apprendimento che mette in gioco il ruolo dei processi di elaborazione personale delle conoscenze, attraverso problemi che suscitino forte interesse da parte dell'allievo e per la cui risoluzione i contenuti disciplinari, considerati in forma integrata, devono costituire risorse fondamentali. Lavorare per competenze significa cambiare il paradigma teorico della scuola: passare da una concezione autoritaria del sapere ad una concezione più autonoma e costruttiva, dove, necessariamente, deve emergere il protagonismo significativo dell'alunno, la sua centralità nel processo d'insegnamento e apprendimento. In tale scenario, alla scuola spettano alcune finalità specifiche:

1. offrire agli studenti occasioni di apprendimento dei saperi e dei linguaggi culturali di base;
2. far sì che gli studenti acquisiscano gli strumenti di pensiero necessari per apprendere a selezionare le informazioni;
3. promuovere negli studenti la capacità di elaborare metodi e categorie che siano in grado di fare da bussola negli itinerari personali;
4. favorire l'autonomia di pensiero degli studenti, orientando la propria didattica alla costruzione di saperi a partire da concreti bisogni formativi.

Nell'insegnamento per competenze risulta essere di fondamentale importanza:

1. la centralità dell'alunno e del processo di apprendimento;
2. l'assunzione di responsabilità educativa del docente/educatore;
3. la flessibilità didattica: metodo induttivo, peer-tutoring, laboratorialità, approccio collaborativo; apprendimento sociale in contesto significativo;
4. la valorizzazione dell'esperienza;
5. l'attenzione ai processi metodologici e strategici e alla dimensione relazionale;
6. l'attenzione agli aspetti affettivo-emotivi dell'apprendimento;
7. l'attribuzione di autonomia e responsabilità all'allievo attraverso i compiti significativi.

2. Indicazioni metodologiche per un insegnamento efficace delle discipline STEM

L'acronimo STEM (Science-Technology-Engineering-Mathematics) è nato negli Stati Uniti nell'anno 2002 per indicare un gruppo di discipline ritenute necessarie allo sviluppo di conoscenze e competenze scientifico-tecnologiche richieste prevalentemente dal mondo economico e lavorativo. L'approccio STEM parte dal presupposto che le sfide di una modernità sempre più complessa e in costante mutamento non possono essere affrontate che con una prospettiva interdisciplinare, che consente di integrare e contaminare abilità provenienti da discipline diverse (scienza e matematica con tecnologia e ingegneria) intrecciando teoria e pratica per lo sviluppo di nuove competenze, anche trasversali. Le discipline STEM sono considerate funzionali all'acquisizione delle quattro competenze definite come fondamentali dalla NEA (National Education Association) nel corso di un lungo percorso durato due anni e culminato nel rapporto "Framework for 21st Century Learning". In particolare, tra le 18 skill individuate, quattro di queste sono state considerate particolarmente rilevanti e accorpate nel modello delle 4 C:

a) Critical thinking (pensiero critico), ovvero capacità di osservazione, analisi, problem solving e abilità di praticare inferenze corrette;
b) Communication (comunicazione);
c) Collaboration (collaborazione);
d) Creativity (creatività o pensiero creativo), ovvero la capacità di pensare fuori dagli schemi, trovando soluzioni innovative ai problemi.

A livello europeo, il sostegno allo sviluppo delle competenze negli ambiti STEM ha trovato espressione nella Raccomandazione sulle competenze chiave per l'apprendimento permanente del 2018. Rispetto alla precedente formulazione del 2006, la nuova Raccomandazione ha previsto tra le otto competenze, la competenza matematica e competenza in scienze, tecnologie e ingegneria. Più in generale, la Commissione europea promuove l'evoluzione dell'idea STEM in STEAM (dove A identifica l'Arte e, di conseguenza, le discipline umanistiche) come "un insieme multidisciplinare di approcci all'istruzione che rimuove le barriere tradizionali tra materie e discipline per collegare l'educazione STEM e ICT (tecnologie dell'informazione e della comunicazione) con le arti, le scienze umane e sociali". In questa prospettiva si pone anche il Piano d'azione per l'istruzione digitale 2021-2027 - Ripensare l'istruzione e la formazione per l'era digitale, secondo il quale bisogna promuovere competenze trasversali quali le competenze digitali, il pensiero critico, la capacità di risolvere problemi. I vigenti documenti programmatici relativi alla scuola dell'infanzia, al primo e al secondo ciclo di istruzione offrono molti spunti di riflessione per un approccio integrato all'insegnamento delle discipline STEM. La consapevolezza della necessità della collaborazione tra i diversi saperi, la contaminazione tra la formazione scientifica e quella umanistica è ben chiara nelle Indicazioni nazionali per il curricolo del 2012: "il bisogno di conoscenze degli studenti non si soddisfa con il semplice accumulo di tante informazioni in vari campi, ma solo con il pieno dominio dei singoli ambiti disciplinari e, contemporaneamente, con l'elaborazione delle loro molteplici connessioni. È quindi decisiva una nuova alleanza fra scienza, storia, discipline umanistiche, arti e tecnologia”, dal momento che “le discipline non vanno presentate come territori da proteggere definendo confini rigidi, ma come chiavi interpretative disponibili ad ogni possibile utilizzazione”.L’approccio inter e multi disciplinare,quindi, unitamente alla contaminazione tra teoria e pratica, costituisce pertanto il fulcro dell’insegnamento delle discipline STEM, che risultano particolarmente indicate per favorire negli alunni e negli studenti lo sviluppo di competenze tecniche e creative, necessarie in un mondo sempre più tecnologico e innovativo. A tal fine, gli insegnanti, qualunque sia il grado scolastico, possono fare riferimento (a titolo esemplificativo e non esaustivo) alle seguenti metodologie:

1) Laboratorialità e learning by doing :
Il vantaggio di un approccio laboratoriale consiste nel fatto che gli alunni, posti davanti a un problema reale che devono affrontare e risolvere cooperativamente, sono sollecitati a progettare e sperimentare vie nuove che spesso prendono avvio dalla discussione fra i componenti del gruppo. La didattica laboratoriale può essere introdotta in ogni ciclo di studi e in ogni disciplina. Il compito del docente è quello di:

1. Progettare l’attività da proporre agli alunni;
2. Favorire le dinamiche di gruppo;
3. Risolvere eventuali situazioni conflittuali;
4. Valutare i prodotti del gruppo e sollecitare i ragazzi ad autovalutare in maniera oggettiva il loro stesso lavoro.

2) Problem solving e metodo induttivo :
Lo sviluppo delle competenze di problem solving, essenziale per le discipline STEM, è articolato nelle seguenti fasi principali:
1) Focalizzare : serve per definire il problema isolandolo da una serie di altre questioni ritenute secondarie; 2) Analizzare : serve per raccogliere tutti i dati del problema, a quali conoscenze bisogna ricorrere, quali mezzi si hanno disposizione; 3) Risolvere: rappresenta la fase creativa durante la quale si propongono tutte le soluzioni conosciute e se ne inventano di nuove, si esaminano tutte e, infine, si decide quale sia la migliore; 4) Eseguire: in questa ultima fase si esegue la soluzione scelta e si valuta se l’opzione considerata è quella giusta per la risoluzione. Il metodo induttivo, che parte dall’osservazione dei fatti e conduce alla formulazione di ipotesi e teorie, è un approccio efficace per lo sviluppo del pensiero critico e creativo. Inoltre, stabilire collegamenti con il mondo reale può rendere l’apprendimento più significativo e coinvolgente.

2) Attivazione dell’intelligenza sintetica e creativa:
L’osservazione dei fenomeni, la proposta di ipotesi e la verifica sperimentale della loro attendibilità, la ricerca di soluzioni innovative a problemi reali stimola il ragionamento attraverso la scomposizione e ricomposizione dei dati e delle informazioni e,

specialmente quando la situazione non presenta soluzioni univoche, attiva il pensiero divergente, favorendo lo sviluppo della creatività.

3) Organizzazione di gruppi di lavoro per l'apprendimento cooperativo:
Il lavoro di gruppo, dove ciascuno studente assume specifici ruoli, compiti e responsabilità, personali e collettive, consente di valorizzare la capacità di comunicare e prendere decisioni, di individuare scenari, di ipotizzare soluzioni univoche o alternative. Promuovere l'apprendimento tra pari è un'efficace strategia didattica per favorire l'apprendimento collaborativo e la condivisione delle conoscenze. Le modalità di interdipendenza delle variabili proprie di questa metodologia (motivazione dei ragazzi, dinamiche dei rapporti personali interne ai gruppi, compito e ruolo dell'insegnante) hanno generato un notevole numero di varianti al cooperative learning. Non è difficile trovare in letteratura o in rete le differenze fra le varie modalità di gestione dei gruppi quali:
Learning together (imparare insieme); Group Investigation (G.T.) Small Group Teaching ; Student Team Learning;

4) Promozione del pensiero critico nella società digitale:
L'utilizzo di risorse digitali interattive, come simulazioni, giochi didattici o piattaforme di apprendimento online, può arricchire l'esperienza di apprendimento degli studenti. Queste risorse offrono spazi di esplorazione, sperimentazione e applicazione delle conoscenze, rendendo l'apprendimento più coinvolgente e accessibile. L'utilizzo delle nuove tecnologie non deve essere però subìto ma governato dal sistema scolastico.

5) Adozione di metodologie didattiche innovative:
Per sviluppare la curiosità e la partecipazione degli studenti, la scuola dovrebbe superare i modelli trasmissivi adottando una didattica attiva che pone gli studenti in situazioni reali che consentono di apprendere, operare, cogliere i cambiamenti, correggere i propri errori, supportare le proprie argomentazioni. Si segnalano, a tal proposito, le seguenti metodologie che prevedono sempre il coinvolgimento attivo degli alunni e la generazione di idee per la ricerca di soluzioni innovative a problemi reali:

1. Problem Based Learning (PBL) , approccio basato sulla risoluzione di problemi;
2. Design thinking , approccio che si fonda sulla valorizzazione della creatività degli studenti;
3. Inquiry Based Learning (IBL), apprendimento basato sull'esplorazione o ricerca. Approccio educativo che favorisce lo sviluppo del pensiero critico, la risoluzione di problemi e lo sviluppo di competenze pratiche.

Integrare queste e altre metodologie può consentire agli studenti di affrontare sfide in modo innovativo e sviluppare una comprensione più approfondita dei concetti. Nella progettazione delle attività connesse alle discipline STEM,(l'apprendimento per esperienza, l'utilizzo della tecnologia in modo critico e creativo, la didattica inclusiva , l'utilizzo di attività laboratoriali) occorre prendere in considerazione le potenzialità e le diverse modalità di apprendimento degli alunni. Da evitare, quindi, la proposta di situazioni che richiedano soluzioni univoche o la semplice applicazione di formule o meccanismi automatici. Promuovere, invece, attività che incoraggino fantasia e creatività e che permettano agli alunni di ricercare in autonomia le soluzioni ai problemi proposti avendo a disposizione una pluralità di strumenti e materiali, anche tecnologici e digitali, per consentire agli alunni di sviluppare le proprie abilità organizzative imparando, così, fin dalla scuola primaria ad essere autonomi, a gestire il proprio tempo e a organizzare il proprio lavoro. Inoltre, in matematica, come in tutte le altre discipline scientifiche, il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, diventa elemento fondamentale, perché gli consente di formulare ipotesi, sperimentarle e controllarne le conseguenze, di argomentare le proprie scelte, di negoziare conclusioni ed essere disponibile ed aperto alla costruzione di nuove conoscenze.

3. Coding, pensiero computazionale e informatica: quale evoluzione possibile?

L'articolo 24 bis del decreto legge n. 152/2021, convertito, con modificazioni, nella legge n. 233/2021, ha disposto che nel Piano nazionale di formazione triennale destinato al personale docente, a partire dal 2022/2023, sia individuata tra le priorità nazionali, l'approccio agli apprendimenti della programmazione informatica (coding) e della didattica digitale.

Già la legge 107/2015, all'articolo 1, comma 7, lettera h) aveva previsto tra gli obiettivi formativi prioritari per le istituzioni scolastiche lo "sviluppo delle competenze digitali degli studenti, con particolare riguardo al pensiero computazionale, all'utilizzo critico e consapevole dei social network e dei media nonché alla produzione e ai legami con il mondo del lavoro". Il documento ministeriale "Indicazioni nazionali e nuovi scenari" del 2018, ha precisato che, per pensiero computazionale, si intende un processo mentale che consente di risolvere problemi di varia natura seguendo metodi e strumenti specifici pianificando una strategia. La locuzione "computational thinking" fu usata per la prima volta da Seymour Papert nell'introduzione al suo linguaggio di programmazione didattico "LOGO", sviluppato al M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology). Secondo Jeannette Wing, direttrice del Dipartimento di Informatica della Carnegie Mellon University, il pensiero computazionale è "il processo mentale che sta alla base della formulazione dei problemi e delle loro soluzioni così che le soluzioni siano rappresentate in una forma che può essere implementata in maniera efficace da un elaboratore di informazioni sia esso umano o artificiale." (2006), ovvero è lo sforzo che ogni individuo deve mettere in atto per fornire a un altro individuo o macchina tutte e sole le "istruzioni" necessarie affinché questi, eseguendole, sia in grado di portare a termine il compito. Pertanto le informazioni fornite dal problema vanno analizzate e organizzate in base a criteri logici:

1. Formulare i problemi in modo da poter usare un sistema di calcolo per risolverli;
2. Rappresentare i dati mediante modelli e simulazioni;
3. Automatizzare la risoluzione del problema mediante un algoritmo;
4. Analizzare e testare le possibili soluzioni alla ricerca della soluzione migliore;
5. Generalizzare il processo di problem-solving per poterlo trasferire ad una ampio spettro di altri problemi.

Nelle Indicazioni nazionali e nuovi scenari del 2018, al punto 5, viene ribadita l'importanza del pensiero computazionale come uno degli strumenti culturali per la cittadinanza: "L'esercizio della cittadinanza attiva necessita di strumenti culturali e di sicure abilità e competenze di base, cui concorrono tutte le discipline. […] Lingua e matematica,apparentate, sono alla base del pensiero computazionale. Molte sono le piattaforme didattiche sviluppate per muovere i primi passi nel mondo del coding. Tra queste ricordiamo:

Scratch: La piattaforma online più famosa, sviluppata dal Lifelong Kindergarten del MIT Media Lab. Ha un'interfaccia grafica molto intuitiva. Con Scratch è possibile programmare animazioni, giochi e storie interattive e condividere il risultato con gli altri membri della community.

CoderDojo: Il progetto consente di apprendere le basi del coding e migliorare le abilità di programmazione.

Codeacademy : una piattaforma con centinaia di progetti e con tantissime risorse utili per lo studio.

Lego Mindstorms : piattaforma basata sui famosi mattoncini, che ha anche una versione didattica con cui è possibile costruire e programmare un vero robot.

Minecraft Education: Basato sul noto videogame Minecraft, Minecraft Education consente di approcciarsi alla programmazione e di sviluppare tutte quelle skills utili a relazionarsi con gli altri in maniera divertente e interattiva.

L'Italia è stata tra i primi Paesi che hanno introdotto il coding nella scuola, insieme alle altre misure per la digitalizzazione. Ed è anche tra i Paesi della IEA, la International

Association for the Evaluation of Educational Achievement, che hanno deciso di valutare le competenze informative mediante l'Indagine ICILS – International Computer and Information Literacy Study. I percorsi da seguire, soprattutto nell'ambito delle prime classi della scuola primaria, devono quindi partire dalla manipolazione per arrivare alla formalizzazione in modo da permettere lo sviluppo di processi cognitivi di astrazione e generalizzazione. Procedendo in modo completamente interattivo si possono far acquisire le abilità anzidette utilizzando il metodo della ricerca-azione. La Ricerca-Azione, pertanto, è:

1. Un metodo che aiuta a gestire situazioni problematiche in quanto costringe a mettere in azione tutto il repertorio di conoscenze e strumenti utili per affrontarle;
2. Uno strumento per ideare e praticare strategie didattiche diversificate e far fronte a situazioni problematiche di varia natura;
3. Uno stimolo a saper accettare il rischio e affrontare situazioni incerte.

Inoltre, l'utilizzo di nuove tecnologie e nuovi strumenti informatici consente la creazione di situazioni di apprendimento che sviluppano le abilità caratterizzanti i processi propri dell'indagine scientifica inducendo una metodologia di indagine e di scoperta guidata dal docente.
Quindi, il pensiero computazionale va ben oltre l'uso della tecnologia ed è indipendente da essa (sebbene la sfrutti intensivamente); esso si basa sul pensiero algoritmico e il suo obiettivo principale è la descrizione di procedimenti effettivi per la risoluzione dei problemi. È fondamentale che le procedure e gli algoritmi vengano costantemente accompagnate da una riflessione meta-cognitiva che consenta all'alunno di chiarire e di motivare le scelte che ha effettuato. Queste strategie operative possono contribuire all'acquisizione delle competenze matematiche, scientifiche e tecnologiche, in un mondo in cui la tecnologia è in costante evoluzione. In questo specifico contesto, nell'ambito del coding, del pensiero computazionale e dell'informatica può trovare spazio anche un corretto e consapevole utilizzo dell'intelligenza artificiale (IA) che, in ambito scolastico, può fornire varie opportunità formative, quali la personalizzazione dell'apprendimento e l'ampliamento dell'accesso all'istruzione, soprattutto in contesti in cui le risorse sono limitate.
Le prime vere conquiste nel campo dell'intelligenza artificiale sono avvenute a partire dagli anni Cinquanta. Difatti i primi studi risalgono al 1956, quando venne effettivamente coniato il termine "intelligenza artificiale (IA) durante la famosa conferenza al Dortmouth College di Hanover, nel New Hampshire. Nel 1961 venne costruita nel New Jersey la prima catena produttiva costituita da robot industriali e pochi anni dopo, nel 1965, l'informatico tedesco Joseph Weizenbaum creò il primo chatbot in grado di dialogare con un essere umano. Con l'intelligenza Artificiale Generativa GPT (Generative Pre-trained Tranformer) è possibile conversare attraverso una comoda interfaccia a chat, che viene per questo chiamata ChatGPT.L'interfaccia è

attualmente raggiungibile all'indirizzo https://chat.openai.com/ e permette di porre una sequenza di domande su qualsiasi tematica. E' stata sviluppata da OpenAI, un'organizzazione di ricerca in intelligenza artificiale con sede a San Francisco, California, fondata da un gruppo di investitori di fama mondiale, tra cui Sam Altman, Greg Brockman e il ben noto Elon Musk, il visionario fondatore di SpaceX, Tesla ed altro. Musk su Twitter ha scritto: "ChatGPT is scary good. We are not far from dangerously strong AI." (ChatGPT funziona spaventosamente bene. Non siamo lontani dal creare un'intelligenza artificiale pericolosamente potente). Naturalmente esistono altre intelligenze artificiali (BERT di Google o Turing NGL di Microsoft) che funzionano alla stessa maniera, cioè che sono in grado di comprendere il linguaggio umano e fornire delle risposte coerenti, ma la quantità di parametri gestita da GPT (almeno fino a questo momento) è dieci volte più elevata di tutte le altre. L'accuratezza raggiunta da GPT è del 60%, cioè vi è un'alta probabilità che risponda in modo completo ed esaustivo già dopo la prima domanda. Le risorse digitali, gli strumenti e gli approcci didattici basati sull'IA possono migliorare l'efficacia dell'insegnamento e dell'apprendimento consentendo agli studenti di accedere a contenuti educativi di qualità. È importante, comunque, affrontare anche i rischi associati all'uso dell'IA che potrebbe portare a una dipendenza eccessiva dalla tecnologia, rischiando di trascurare altre competenze e abilità fondamentali per gli studenti, quali la creatività, il pensiero critico e la risoluzione dei problemi in modo autonomo. L'alunno, quindi, riflettendo su quello che fa, impara a lavorare in modo critico, a confrontarsi con i compagni e l'eventuale errore contribuisce a sviluppare capacità di inferenza, a riformulare ipotesi errate, a costruire nuova conoscenza da condividere con altri. **(**Riflessione e consapevolezza). La dimensione sociale della conoscenza, nell'imparare dagli altri e con gli altri, valorizza, inoltre, i processi di apprendimento e la condivisione dei saperi. (Apprendimento collaborativo).

4. La competenza matematica e la competenza in campo scientifico e tecnologico

"La matematica alberga nel cuore dell'uomo perché essa traduce quel bisogno di chiarezza, di certezza, di rigore e di coerenza che è tipico di ogni uomo che voglia conoscere". (G. Melzi - Perché la matematica)

La competenza matematica è l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza delle competenze aritmetico-matematiche, l'accento è posto sugli aspetti del processo e dell'attività oltre che su quelli della conoscenza. La competenza matematica comporta, in misura variabile, la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero (pensiero logico e spaziale) e di presentazione (formule, modelli, schemi, grafici, rappresentazioni).

La competenza in campo scientifico si riferisce alla capacità e alla disponibilità a usare l'insieme delle conoscenze e delle metodologie possedute per spiegare il mondo che ci circonda sapendo identificare le problematiche e traendo le conclusioni che siano basate su fatti comprovati.

La competenza in campo tecnologico è considerata l'applicazione di tale conoscenza e metodologia per dare risposta ai bisogni avvertiti dagli esseri umani. La competenza in campo scientifico e tecnologico comporta la comprensione dei cambiamenti determinati dall'attività umana e la consapevolezza della responsabilità di ciascun cittadino. (Dalla Raccomandazione del Consiglio dell'Unione europea relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente del 23 maggio 2018).

Le conoscenze matematiche contribuiscono,quindi, alla formazione culturale delle persone offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e eventi quotidiani; contribuiscono a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri. In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte. Nella scuola secondaria di primo grado si svilupperà un'attività più propriamente di matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione. L'alunno analizza le situazioni per tradurle in termini matematici, riconosce schemi ricorrenti, stabilisce analogie con modelli noti, sceglie le azioni da compiere (operazioni, costruzioni geometriche, grafici, formalizzazioni, scrittura e risoluzione di equazioni…) e le concatena in modo efficace al fine di produrre una risoluzione del problema. Un'attenzione particolare andrà dedicata allo sviluppo della capacità di esporre e di discutere con i compagni le soluzioni e i procedimenti seguiti. Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo." (Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione). Quali "fattori imprescindibili" per sviluppare competenze e apprendimenti stabili e "con valore per la cittadinanza" sono indicati:

1. l'integrazione delle discipline;
2. la cooperazione e l'apprendimento sociale;
3. la laboratorialità ;
4. l'adozione di un curricolo di istituto verticale

Bisogna pertanto promuovere:

1. apprendimenti significativi;

2. uso flessibile degli spazi come luoghi attrezzati che facilitino approcci operativi alla conoscenza;
3. interventi adeguati nei riguardi delle diversità;
4. l'esplorazione e la scoperta";
5. l'apprendimento collaborativo";
6. la "consapevolezza del proprio modo di apprendere" (metacognizione: "imparare ad apprendere");
7. didattica di tipo "laboratoriale"

Un approccio attivo e dinamico alle discipline STEM consente di coltivare specifiche abilità che saranno molto importanti nella vita futura come la curiosità, l'intuizione, il pensiero logico e spaziale, l'astrazione, il rigore nella ricerca delle cause di un fatto e nella spiegazione delle sue conseguenze. Tutto ciò, nella vita di tutti i giorni, aiuta a …

1. Ragionare in modo più analitico e rigoroso
2. Sviluppare un'attitudine alla valutazione critica e una capacità ad elaborare decisioni sulla base di elementi verificati
3. Acquisire la capacità di affrontare una qualsiasi situazione problematica riflettendo sulle cause, individuando le informazioni che ci servono, valutando costi e benefici delle diverse soluzioni e scegliendo la strategia più adeguata.

In questa prospettiva, la problematizzazione e l'attività di problem solving svolgono una funzione insostituibile: sollecitano gli alunni a individuare problemi, a sollevare domande, a mettere in discussione le conoscenze già elaborate, a trovare appropriate piste d'indagine, a cercare soluzioni originali.". Fondamentale si rivela a tale scopo la didattica cooperativa. L'apprendimento cooperativo, che rappresenta niente altro che l'evoluzione scientifica e pedagogica del classico lavoro di gruppo, permette:

a) una reale cooperazione attraverso una l'interdipendenza positiva (nessuno studente può svolgere il compito da solo; il compito può essere svolto se tutti forniscono il loro contributo)

b) una responsabilità individuale da parte di tutti i componenti attraverso attività diversificate. In questo modo sarà evidente all'insegnante quantità e qualità del contributo di ciascuno.

c) un clima piacevole e accogliente attraverso attività ripetute nel tempo su singole abilità sociali (l'accoglienza, l'empatia, l'aiuto reciproco, la responsabilità e la gestione delle divergenze…)

d) l'apprendimento di competenze sociali.

5. Traguardi per lo sviluppo della competenza matematica e delle competenze di base in scienza e tecnologie al termine della scuola primaria

La competenza matematica fa riferimento all'applicazione di principi e processi matematici di base nel contesto quotidiano. Essa include il ragionamento matematico, il cogliere le prove che supportano le argomentazioni e il comunicare in linguaggio matematico utilizzando sussidi appropriati. Pertanto, al termine della scuola primaria, l'alunno deve

1. muoversi con sicurezza nel calcolo scritto e orale con i numeri naturali;
2. descrivere, determinare e classificare figure in base a caratteristiche geometriche,
3. progettare e costruire modelli concreti di vario tipo; costruire rappresentazioni e ricavare informazioni dai dati rappresentati in tabelle e grafici;
4. riconoscere e quantificare, in casi semplici, situazioni di incertezza;
5. risolvere facili problemi,
6. descrivere il procedimento seguito e riconoscere strategie di soluzione diverse dalla propria;
7. costruire ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri;
8. sviluppare un atteggiamento positivo rispetto alla matematica.

La competenza di base in scienza e tecnologia fa riferimento all'utilizzo con padronanza di strumenti e apparecchi tecnologici per raggiungere un obiettivo, formulare decisioni o conclusioni sulla base di dati probanti, facendo riferimento agli aspetti essenziali dell'indagine scientifica. Pertanto,in scienze,l'alunno:

1) sviluppa atteggiamenti di curiosità, esplora i fenomeni con un approccio scientifico in modo autonomo;
2) osserva e descrive lo svolgersi dei fatti, formula domande, anche sulla base di ipotesi personali;
3) propone e realizza semplici esperimenti;
4) produce rappresentazioni grafiche e schemi di livello adeguato;
5) elabora semplici modelli;
6) espone in forma chiara ciò che ha sperimentato, utilizzando un linguaggio adeguato;
7) trova da altre fonti (Internet, libri, discorsi degli adulti....) informazioni e spiegazioni dei problemi che lo interessano.

Per quanto riguarda tecnologia, infine, l'alunno:

1) riconosce e identifica nell'ambiente che lo circonda elementi e fenomeni di tipo artificiale;

2) ricava informazioni utili su proprietà e caratteristiche di beni o servizi leggendo etichette, volantini o altra documentazione tecnica e commerciale;
3) si orienta tra i diversi mezzi di comunicazione ed è in grado di farne un uso adeguato a seconda delle diverse situazioni;
4) conosce e utilizza semplici oggetti e strumenti di uso quotidiano ed è in grado di descriverne la funzione principale e di spiegarne il funzionamento.

Per quanto concerne i traguardi per lo sviluppo delle competenze in matematica al termine della scuola secondaria di primo grado, l'alunno:
1) si muove con sicurezza nel calcolo anche coni numeri razionali e ne padroneggia le diverse rappresentazioni;
2) riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza;
3) spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi;
4) si orienta con valutazioni di probabilità, nelle situazioni di incertezza, (vita quotidiana, giochi...) ; 5) analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni.

In scienze, invece, al termine della scuola secondaria di primo grado, l'alunno:
1. esplora e sperimenta, in laboratorio e all'aperto, lo svolgersi dei più comuni fenomeni, ne immagina e ne verifica le cause,
2. ricerca soluzioni ai problemi utilizzando le conoscenze acquisite;
3. sviluppa semplici schematizzazioni e modellizzazioni di fatti e fenomeni ricorrendo, quando è il caso, a misure appropriate e a semplici formalizzazioni;
4. collega lo sviluppo delle scienze allo sviluppo della storia dell'uomo;
5. manifesta curiosità e interesse verso i principali problemi legati all'uso della scienza nel campo dello sviluppo scientifico e tecnologico.

Per quanto riguarda tecnologia, l'alunno:
1) riconosce nell'ambiente che lo circonda i principali sistemi tecnologici e le molteplici relazioni che essi stabiliscono con gli essere viventi e gli altri elementi naturali;
2) conosce i principali processi di trasformazione di risorse o di produzioni di beni e riconosce le diverse forme di energia coinvolte;
3) conosce le proprietà e le caratteristiche dei diversi mezzi di comunicazione ed è in grado di farne un uso efficace e responsabile rispetto alle proprie necessità di studio e socializzazione;

4) sa utilizzare comunicazioni procedurali e istruzioni tecniche per eseguire, in maniera metodica e razionale, compiti operativi complessi, anche collaborando e cooperando con i compagni;
5) progetta e realizza rappresentazioni grafiche utilizzando elementi del disegno tecnico o altri linguaggi multimediali e di programmazione

6. Le attività di problem solving

Il Coding e l'attività di problem solving si rivelano perfettamente idonei per coinvolgere e motivare gli alunni rendendoli protagonisti dei loro processi di apprendimento e formazione.
Risolvere problemi è una competenza fondamentale e trasversale alla varie discipline. Andreas Schleicher, statistico di origine tedesca e ricercatore nel campo dell'educazione, capo divisione e coordinatore del programma OCSE per la valutazione internazionale degli studenti (PISA), riconosce che in campo matematico

1. "students need to Know how and why we study mathematics (epistemic belief),
2. be able to think like a mathematician (epistemic understanding)
3. and grasp the practises assiociated with mathematics (methodological Knowledge);

ma omette, a questo riguardo, quel fattore fondamentale, che è " the passion of Know" (epistemic love). Pertanto, qualunque proposta o progetto culturale deve essere in grado di alimentare competenze critiche, capacità di affrontare i problemi ed esaltare il ruolo delle dimensioni operative. E' indispensabile porre in essere ed attivare non solo un ambiente di apprendimento che stimoli motivazioni, curiosità e partecipazione, ma un ambiente che offra anche solidi alfabeti e codici per rappresentare il mondo, comprenderlo, comunicarlo. Proprio per questo occorre una interpretazione evoluta dei modelli di apprendimento, del valore "gnoseologico" (formativo) delle discipline di studio, ove una didattica laboratoriale, operativa, di stile cooperativo si fa nettamente preferire a didattiche unilaterali, povere e trasmissive. Peraltro, tenendo presente che le finalità della scuola sono finalità essenzialmente formative, l'azione educativa e didattica deve mirare soprattutto alla formazione di competenze in termini di conoscenze, capacità e di atteggiamenti. In tale prospettiva occorre quindi privilegiare una didattica formativa, una didattica che miri, non solo alla trasmissione dei saperi, ma anche e soprattutto ai processi della loro riscoperta, ricostruzione, reinvenzione attraverso i quali si realizza sia l'acquisizione delle conoscenze sia la formazione delle capacità e degli atteggiamenti. A tal fine oggi si privilegia il problem-solving ed il cooperative learning. Il problem-solving facilita il recupero dell'interesse e dell'attenzione nei confronti degli allievi meno motivati e più svantaggiati. Esso si configura, pertanto, come un potente strumento didattico capace di trasformare gli studenti da passivi e annoiati ripetitori di definizioni, teoremi e meccanici esecutori di algoritmi in menti attive capaci di padroneggiare in modo flessibile e creativo gli strumenti matematici. Gli approcci alla risoluzione di un problema possono essere di vario tipo (intuitivo, sistematico, algoritmico, parziale per tentativi, per esclusione). Questa visione multi-approccio a giochi e problemi si contrappone alla vecchia logica dell'algoritmo predefinito, del "come si fa" e favorisce l'attivazione di facoltà e di inclinazioni diverse e complementari tra loro: intuito, comprensione degli schemi, progettualità, analiticità, tendenza ad algoritmizzare, ecc. A tal proposito di fondamentale importanza nell'ambito dell'apprendimento si rivela il Cooperative Learning. Nella didattica collaborativa il docente assume il ruolo di tutor nel senso che deve favorire l'interazione fra gli studenti, stimolare la discussione, facilitare l'apprendimento ricorrendo a continue sollecitazioni e lavorando in gruppo. Caratteristiche positive del lavoro cooperativo sono:

1. Lo sviluppo di un legame concreto tra gli studenti che, lavorando in gruppo, attivano processi di reciproco apprendimento;
2. Lo stimolo alla responsabilizzazione;
3. Lo sviluppo delle "abilità sociali".

Nella scuola primaria e nella scuola secondaria di primo grado conoscenze ed abilità non vanno imposte agli allievi in modo formale ma attraverso esperienze didattiche significative nelle quali ogni alunno possa essere motivato all'apprendimento e coinvolto attivamente.È fondamentale in questo contesto sollecitare gli alunni a giustificare le loro affermazioni al fine di abituarli a 1) individuare, descrivendole, regolarità presenti in semplici contesti concreti; 2) esprimere semplici congetture verificandole in casi particolari. Tutto ciò al fine di favorire il sorgere e lo svilupparsi delle seguenti competenze:

1. Individuare il problema da risolvere dichiarando esplicitamente l'obiettivo da raggiungere;
2. Rappresentare una stessa situazione problematica con diverse modalità (verbale, iconica, simbolica);
3. Individuare il contesto più favorevole per la risoluzione della situazione problematica affrontata;
4. Valutare la compatibilità delle soluzioni trovate con i dati forniti dal problema in esame;
5. Esporre con chiarezza il procedimento risolutivo.

Non si può ignorare, infine, la necessità per gli alunni di una nuova alfabetizzazione culturale, di una comunicazione ricca di informazioni medializzate (testi, suoni, immagini multimediali, computer e differenti sussidi didattici) che facilitino sia il lavoro del docente sia l'acquisizione dei saperi da parte degli alunni.

7. La tecnica del problem solving

Nel linguaggio comune il termine "problema" viene adoperato spesso in luogo di parole come "difficoltà" , "ostacolo", "dubbio", ecc. Per Duncker (1973) il problema sorge quando un essere umano ha una meta e non sa come raggiungerla. Per la psicologia della gestalt (Kanizsa,1973) un problema sorge quando un essere vivente, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un'attività istintiva o attraverso un comportamento appreso. Per Polya (1979) "Avere un problema significa: cercare coscientemente un'azione appropriata per ottenere uno scopo chiaramente concepito ma non immediatamente ottenibile". Per il matematico ungherese G. Polya "Risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Il problem solving è un atteggiamento mentale o un'attività del pensiero che un individuo mette in atto per raggiungere una condizione desiderata partendo da una condizione data. Più propriamente esso è l'insieme di tutti i metodi e le tecniche di soluzione dei problemi e delle relative strategie da mettere in atto per la loro trattazione". La tecnica del problem solving è spesso caratterizzata dalle seguenti fasi:

1. Analisi quantitativa e qualitativa del problema
2. Soluzione del problema posto
3. Applicazione della soluzione
4. Estensione della soluzione
5. Processo di controllo

L' importanza e l'efficacia dell'insegnamento per problemi è già stato sottolineato nelle parole di illustri Maestri: nel 1912, Guido Castelnuovo, al III Convegno della Mathesis, affermava che lo studente "non comprenderà l'interesse di una teoria finché non ne avrà vista qualche pratica conseguenza"; per Bruno de Finetti – in Matematica Logico-Intuitiva - la questione rilevante "è non tanto quella di far apprendere la matematica, quanto quella di farla comprendere come qualcosa di vivo nel regno del pensiero". Emma Castelnuovo – nella sua esposizione "Verso un insegnamento della matematica che produce cultura scientifica" - sostiene che per insegnare a saper vedere con gli occhi fisici e con quelli della mente "bisogna insegnare a fare le cose: a osservare, a sperimentare, a ragionare, a intuire." Infine, secondo l'idea di Polya, autore di eccellenti opere sull'insegnamento per problemi - la via efficace per "formare" è "nel fare", per cui "il risolvere i problemi è un'arte pratica, come il nuotare o lo sciare o il suonare un piano: potete impararlo solo con l'imitazione e la pratica". Il problem solving si configura, pertanto, come un potente strumento didattico capace di trasformare gli studenti da annoiati ripetitori passivi di definizioni, teoremi e meccanici esecutori di algoritmi, in menti attive capaci di padroneggiare in modo flessibile e creativo gli strumenti matematici. Esso tende alla ricerca di una risposta da dare ad un problema che non è necessariamente di tipo numerico (problemi di determinazione): si può, infatti, cercare un oggetto geometrico (problemi di costruzione) o la dimostrazione di una certa proprietà (problemi di dimostrazione), oppure, semplicemente, risolvere problemi complessi che la vita reale ci pone. Risolvere i problemi è una questione di abilità vera e propria e qualunque abilità può essere acquisita con l'imitazione e l'esercizio; si impara a risolvere i problemi soprattutto … risolvendoli. Gli approcci alla risoluzione di un problema possono essere di vario tipo (intuitivo, sistematico, algoritmico, parziale per tentativi, per esclusione, ecc.); un alunno può manifestare una propensione per alcune tipologie di approccio piuttosto che per altre e, in relazione alla specificità del problema, un approccio può rivelarsi più idoneo e fruttuoso di un altro. Questa visione multi-approccio a giochi e problemi si contrappone alla vecchia logica dell'algoritmo predefinito, del "come si fa", e favorisce l'attivazione di facoltà e di inclinazioni diverse e complementari tra loro: intuito, comprensione degli schemi, progettualità, analiticità, tendenza ad algoritmizzare, ecc. A tal proposito il "Cooperative learning" si rivela di fondamentale importanza nell'ambito dell'apprendimento. Nella didattica collaborativa il docente assume il ruolo di tutor nel senso che deve favorire l'interazione tra gli studenti, stimolare la discussione, facilitare l'apprendimento ricorrendo a continue sollecitazioni. Numerose ricerche hanno dimostrato che con il "cooperative learning" si recuperano allievi problematici, poco motivati allo studio e con problemi affettivi, si facilita l'integrazione di allievi disadattati per handicap o etnie diverse, si valorizzano gli allievi bravi (gifted student), si sviluppano competenze sociali del senso civico, del rispetto dell'altro, si favorisce lo sviluppo di un cittadino democratico (competenze di cittadinanza). In particolare, nella scuola primaria l'itinerario didattico deve partire dall'esplorazione della realtà che ci circonda. Le osservazioni, le conversazioni, le discussioni, le attività di rielaborazione grafica, pittorica e manipolativa sono essenziali per riflettere e rielaborare la realtà in termini matematici. Il bambino, attraverso un percorso di conoscenza e scoperta, impara ad organizzare le proprie esperienze attraverso azioni consapevoli; sperimentando impara a confrontare, a ordinare, a compiere stime approssimative, a formulare ipotesi, a verificarle con strumentazioni adeguate, quindi a interpretare e a intervenire consapevolmente nel suo mondo. È fondamentale, in questo contesto, sollecitare gli alunni a giustificare le loro affermazioni al fine di abituarli a:

1. Individuare, descrivendole, regolarità presenti in semplici contesti concreti;

2. Esprimere semplici congetture verificandole in casi particolari;
3. Avanzare congetture cercando di convalidarle sia empiricamente, sia mediante argomentazioni adeguate, eventualmente ricorrendo anche a contro-esempi.

8. Considerazioni finali - Dimensioni culturali e formative della matematica

Spesso accade che molte persone, del resto intelligenti e colte, dichiarino apertamente, a volte senza rammarico e addirittura con una specie di vanto di "... non aver mai capito la matematica". Non considerano come una lacuna nelle proprie conoscenze l'aver cacciato nell'oblio più profondo il concetto di logaritmo, anche se, per esempio, parlano quotidianamente di tassi, di percentuali, di elasticità dei prezzi e così via. In questo ordine di idee si potrebbe dire che spesso chi dichiara di non sapere nulla di matematica spesso "fa" della matematica molto meglio di quanto egli stesso non creda. Quante volte, per esempio, accade di leggere dei ragionamenti giuridici che sono tipicamente matematici, perché seguono tutte le regole del ragionamento matematico: schematizzazione, formulazione astratta, deduzione rigorosa in base a regole fisse. Si potrebbe dire, forse in modo paradossalmente esagerato, che la persona colta, che non deve utilizzare direttamente la matematica nella sua vita professionale, può anche conoscere pochissimo di matematica, ma tale persona deve sapere che il metodo matematico non è solo un insieme di strumenti, ma una mentalità che è il fondamento di ogni mentalità scientifica, perché abita da sempre nel cuore dell'uomo, come sete di sapere certo. Pertanto noi pensiamo che una persona colta può anche ignorare la matematica nei suoi sviluppi tecnici, ma non può dimenticare che la matematizzazione è una strada che ogni scienza percorre perché conduce alla chiarezza, alla semplicità, al rigore della deduzione. La matematica ha, quindi, non solo una sua intrinseca valenza didattica, ma possiede anche una profonda valenza formativa in quanto induce alla: 1) riflessione critica 2) acquisizione di metodo; 3) analisi per la ricerca di soluzioni a problemi; 4) sintesi e semplificazione delle conclusioni; 5) limpidezza di linguaggio; 6) facoltà di astrazione; 7) deduzione logica. La Matematica è stata sempre considerata uno strumento fondamentale per capire il mondo che ci circonda; rappresenta una disciplina dinamica, in continuo divenire con tanti problemi non ancora risolti. Tre sono i filoni che oggi si studiano con interesse: **1)** Lo studio della genesi dei concetti matematici. **2)** La riflessione sulla Matematica così come si è sviluppata (riflessione sul presente basandosi sul passato). **3)** I problemi fondazionali, cioè la giustificazione delle teorie matematiche. Una delle acquisizioni recenti, ma fondamentali, che nasce dallo studio (epistemologico) della Critica dei Principi è il riconoscimento della perdita della certezza della Matematica (nel *senso comune*) a livello dei fondamenti e della ricerca di una ridefinizione del senso di tale certezza, che anziché indebolirne la forza culturale sembra averne moltiplicato le potenzialità. Oggi in Matematica convivono tutti questi approcci: astratto, formale, costruttivo. Abbiamo subito una rivoluzione culturale che ha sconvolto le certezze dei nostri padri; oggi l'unica certezza che abbiamo è la perdita delle certezze. Quello che è certo, invece, è che l'educazione matematica contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti: di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo e quindi di verifica o smentita. Essa tende a sviluppare, in modo specifico, concetti, metodi e atteggiamenti utili a produrre le capacità di ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà e a formare le abilità necessarie per interpretarla criticamente e per intervenire consapevolmente su di essa. "Educare alla matematica – scrive il Pellerey (1984) – significa in primo luogo abituare a porsi problemi significativi, a tradurli in rappresentazioni matematiche adatte, a controllarne la risolubilità, a trovare e interpretare correttamente e validamente le soluzioni più adeguate". Quello che è certo è che l'importanza dell'insegnamento della matematica si deve misurare non solo su quello che dà nell'immediato agli allievi perché possano muoversi bene nell'insieme delle attività e delle conoscenze umane, ma anche, come ogni vero insegnamento, sugli strumenti che fornisce ai bambini e ai ragazzi di oggi perché possano affrontare, nel corso della loro vita, i grandi problemi dell'umanità del futuro, di cui oggi possiamo solo intuire le difficoltà. Attualissime sono a tal riguardo le parole del matematico italiano Alessandro Padoa (1868- 1937): "Nessun altro studio richiede meditazioni più pacate ; nessun altro meglio induce ad essere cauti nell'affermare, semplici ed ordinati nell'argomentare, precisi e chiari nel dire; e queste semplicissime qualità sono sì rare che possono bastare da sole ad elevare chi ne è dotato al di sopra della maggioranza degli uomini . Perciò io esorto a studiare matematica pur chi si accinge a diventare avvocato o economista, filosofo o letterato, perché io credo e spero che non gli sarà inutile saper ben ragionare e chiaramente esporre".

Bibliografia

B.De Finetti Il saper vedere in matematica, Loescher, 1967

G.Polya , Come risolvere i problemi di matematica, Feltrinelli, Milano, 1983

G.Polya , La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi, Feltrinelli, Milano (nuova edizione UTET Università di Torino, 2016)

K. Devlin , Dove va la matematica, Bollati Boringhieri, Torino, 2000

Gagnè R., Le condizioni dell'apprendimento, A. Armando, Roma, 1973.

Kleinmuntz B., Problem solving. Ricerche, modelli, teoria, A. Armando, Roma, 1976.

Mialeret G., L'apprendimento della matematica. Saggio di psicopedagogia, Roma, Armando, 1969.

Pellerey M. , Apprendere a pensare matematicamente: Resnick L.B. & Ford, W.W., Psicologia della matematica e apprendimento scolastico, Sei, Torino, 1991

Popper K., Logica della scoperta scientifica, Einaudi editore, 1970

Sitografia

https://www.digitaldocet.it/allegati/damore/problemi/588_Problemi.pdf

https://annali.unife.it/adfd/article/view/1571/1365

https://whenmathhappens.com/3-act-math/

https://it.mathigon.org/

https://mathisvisual.com/

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 5, No 1 (2022), 27-38

Strumenti di calcolo aritmetico degli Incas

Bruno Iannamorelli

jannab@tiscali.it

Sunto
Riscoprire il sistema di rappresentazione dei numeri e gli strumenti di calcolo aritmetico utilizzati dagli Incas ha almeno due obiettivi: uno culturale e l'atro didattico.
Innanzitutto possiamo comprendere l'alto grado di civiltà raggiunto da quei popoli prima che arrivassero gli europei a "scoprirli" o meglio a conquistarli (dipende dai punti di vista).
Inoltre, il loro abaco, la *yupana*, è molto più intelligente di un pallottoliere e con la *taptana* si possono eseguire moltiplicazioni senza l'applicazione delle tabelline, ma semplicemente contando. Questi strumenti hanno ancora una formidabile valenza didattica e potrebbero essere usati anche nelle nostre scuole.

Parole chiave: quipu, yupana, taptana, Incas, calcolo aritmetico.

1. Le cordicelle a nodi degli Incas

I conquistatori spagnoli sbarcati nell'America del Sud subito dopo la "scoperta" di Colombo del 1492 rimasero certamente meravigliati dalla civiltà inca che occupava i territori dell'attuale Bolivia, del Perù e dell'Ecuador. Pur ignorando la ruota, la trazione animale e una scrittura paragonabile a quella europea, gli Incas erano ingegnosi e si servivano di un sistema molto elaborato di cordicelle a nodi (quipu) per archiviare dati.
Il quipu (nella lingua degli Incas significa "nodo") era costituito da una funicella alla quale erano legate tante cordicelle lunghe una cinquantina di centimetri. Su ogni cordicella venivano rappresentati numeri secondo il principio della base decimale praticando una sequenza di nodi a livelli diversi: il livello più basso era riservato alla rappresentazione delle unità (cinque nodi indicavano 5 unità), il livello successivo andando verso l'alto era quello delle decine (tre nodi a questo livello indicavano 3 decine) e così via procedendo verso l'alto.

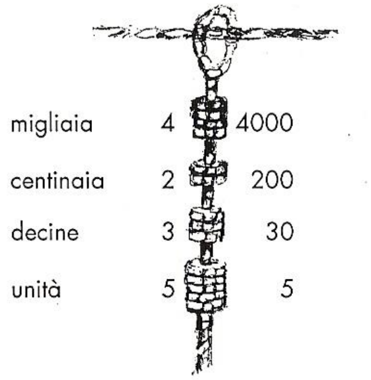


Fig.1 Rappresentazione su una cordicella di un quipu inca del numero 4235

In ogni città o villaggio dell'impero degli Incas vi erano funzionari, detti *quipucamayoes* (guardiani dei nodi), incaricati di registrare su *quipu* le nascite, i matrimoni, i decessi, i giovani idonei alle armi oppure l'inventario delle risorse e altri dati utili all'amministrazione locale. Erano funzionari di governo importanti e godevano di uno status sociale elevato. La scritta in alto di uno dei sette disegni dedicati ai *quipucamayoes* del peruviano Guanam Poma de Ayala (Fig. 2), che si trovano in una lettera di 1179 pagine spedita al re di Spagna attorno al 1600, indica che la persona che ha in mano il quipu è addirittura il Segretario dell'Inca e del suo Consiglio.

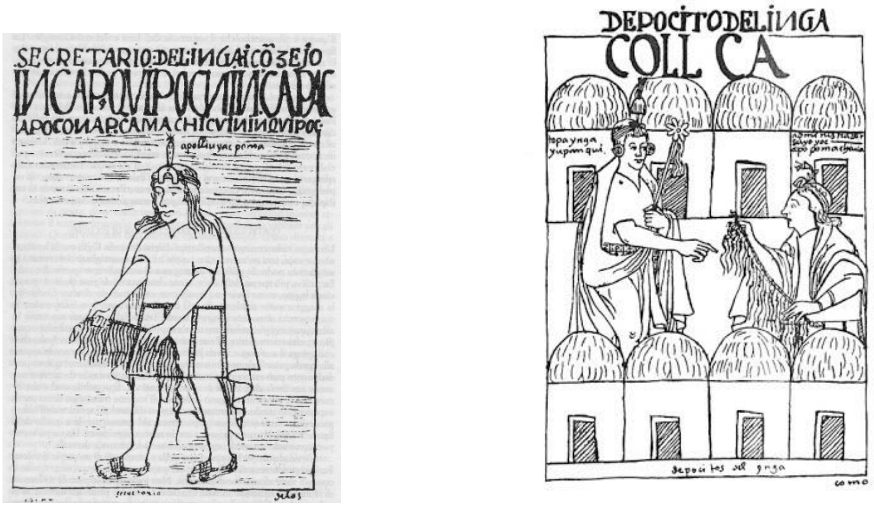


Fig. 2 Un *quipucamayu* inca alle prese con un *quipu*

Il colore delle cordicelle di uno stesso quipu variava a seconda del tipo di informazione che forniva: il colore bianco era riservato all'inventario degli ovini o caprini, il verde ai bovini e così via. La prima cordicella a destra di colore verde indicava il numero di tori, la seconda il numero di vacche da latte, poi le vacche sterili e infine i vitelli. Questa era la classificazione che ancora nel XIX secolo veniva praticata dai pastori degli altipiani del Perù o della Bolivia.

Un'evoluzione del quipu, tuttora in uso presso gli indios della Bolivia e del Perù è il chimpu. Le singole cordicelle del quipu sono state sostituite con un fascio di cordicelle sottili: tre nodi su una sola cordicella del fascio indicano 3 unità, tre nodi su due cordicelle simboleggiano invece 3 decine, cinque nodi su tre cordicelle rappresentano 5 centinaia e così via. I vari nodi si trovano a diversi livelli come nel quipu ma il numero di cordicelle sulle quali si eseguono i nodi mostrano con maggiore chiarezza l'ordine decimale corrispondente (fig. 3).

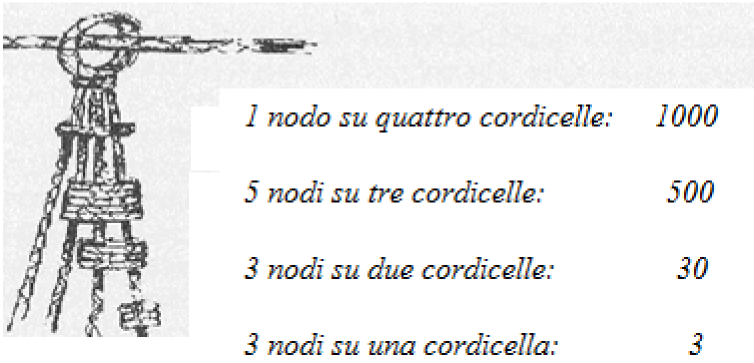


Fig. 3 *Il chimpu*

La numerazione con l'impiego di cordicelle a nodi non è una esclusiva degli Incas. Sistemi analoghi sono stati utilizzati anche dagli esattori palestinesi, i pubblicani, nel 2° secolo d. C. come pure dagli arabi, dai cinesi già nel 500 a. *C.*, dai siberiani, dagli africani della Nigeria, dagli indiani d'America. Ancora alla fine del secolo scorso i mugnai tedeschi si servivano di cordicelle a nodi per registrare i commerci di grano con i contadini o di farina con i fornai.
In alcuni villaggi dell'India abitati da analfabeti, il censimento della popolazione nel 1872 è stato fatto distribuendo ad ogni famiglia quattro cordicelle di colori diversi. Sulla cordicella nera andavano fatti tanti nodi quanti erano gli adulti maschi della famiglia, su una rossa venivano registrate le donne adulte, su una bianca i ragazzi e su una gialla le ragazze: il sistema delle cordicelle a nodi era quindi un metodo popolare ben noto a coloro che non sapevano scrivere.

2. Uno strumento di calcolo inca: la *yupana*

Sulla corda principale di un quipu si trovavano spesso corde che rappresentavano una somma, come è stato mostrato in fig. 4. In questo modo potevano registrare il numero complessivo dei bovini o degli ovini o altro.

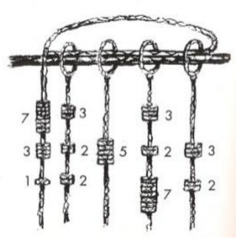


Fig. 4 Rappresentazione su un quipu della somma (32+327+50+322=731)

Ma dove veniva eseguita l’addizione? E come? Queste curiosità possono essere soddisfatte da un passo di un libro scritto da padre José de Acosta, un sacerdote spagnolo vissuto in Perù dal 1571 al 1586:

“Vederli usare un’altra specie di quipu, con chicchi di granoturco, è perfetta letizia. Allo scopo di eseguire calcoli molto difficili per i quali un contabile capace avrebbe bisogno di carta e penna, questi indiani fanno uso delle loro granaglie. Ne mettono una qua, tre in un altro posto, e otto non so dove. Muovono qua e là un chicco e la realtà è che sono capaci di completare i loro calcoli senza fare il più piccolo errore. In verità, nell’esercizio della matematica sono migliori di noi che usiamo carta e inchiostro. Se questo non è ingegno e queste popolazioni sono animali selvaggi, lasciate che lo giudichi chi vuole! Quello che io reputo certo è che in quello che si impegnano a fare sono superiori a noi”.

Fig. 5 Tratta da Nueva Cronica y Buen Gobierno di Felipe Guanam Poma de Ayala

L'altra specie di quipu di cui parla José de Acosta è la *yupana*: la scacchiera raffigurata in basso a sinistra di fig. 5. Felipe Guanam Poma de Ayala non fornisce spiegazioni sull'uso della yupana e pertanto su di essa sono state elaborate diverse interpretazioni. Non è mia intenzione alimentare la discussione sui vari modelli interpretativi della yupana, ma faccio riferimento solo all'uso che oggi se ne fa nelle scuole di alcuni Paesi dell'America Meridionale. La yupana viene raffigurata su un cartoncino come in fig. 6.

Fig. 6 Una yupana utilizzata oggi nella scuola primaria del Perù

Sulla colonna a destra vengono sistemate le unità collocando chicchi di mais nei dieci fori. Quando questa colonna è piena si tolgono tutti i chicchi e se ne colloca uno nella colonna adiacente a sinistra, dove si sistemano le decine e così via. Rappresentare un numero sulla yupana è molto semplice e calcolare somme o differenze è banale. La moltiplicazione e la divisione vengono considerate come addizioni e sottrazioni ripetute.

Per comprendere la meraviglia di José de Acosta nel vedere i contabili Incas all'opera con l'altra specie di quipu si può vedere qualche filmato su youtube che mostra bambini o maestre peruviane intente ad eseguire calcoli con la loro yupana.

3. Una possibile interpretazione dell'antica *yupana*

Sulla yupana raffigurata in fig.5 sono state avanzate diverse interpretazioni. Probabilmente il disegnatore inca autore del disegno per conto di Felipe Guanam Poma de Ayala ha volutamente nascosto qualche particolare. Accettando questa ipotesi, sostenuta da alcuni studiosi, forse la scacchiera veniva utilizzata ruotandola di 90° nel verso antiorario, come avviene oggi nelle scuole peruviane (fig.6).
L'interpretazione che avanzo, e che probabilmente è stata proposta già da altri, si basa su un atto di fede: gli antichi incas avevano una intelligenza vivace e cercavano di economizzare gli sforzi come usano fare i matematici. Mi spiego: se su ogni colonna della scacchiera avessero praticato 1, 2, 4, 8 incavi avrebbero realizzato qualcosa di simile a quello che George Papy chiamava il mini-computer. Posizionando un gettone nella casella con un incavo e uno in quella con quattro incavi si ottiene il numero 5.

Un gettone nella casella con un incavo, uno in quella con due incavi e uno in quella con quattro incavi si ha il numero 7 e così via. Gli Incas sono stati ancora più attenti a minimizzare il numero di incavi: hanno praticato su ogni colonna 1, 2, 3, 5 incavi. In questo modo un chicco di mais posizionato nella prima casella in alto vale 1, nella seconda vale 2, nella terza vale 3, nella quarta in basso vale 5. Pertanto, per rappresentare il numero 7 non occorrono sette chicchi ma solo due: uno nella casella che vale 2 e uno in quella che vale 5. Il numero 9 non necessita di nove chicchi ma solo di tre: uno nella casella che vale 5, uno in quella che vale 3 e uno in quella che vale 1. È una bella economia e, ad esempio, per rappresentare il numero 12869 (fig.7) occorrono nove chicchi e non ventisei.

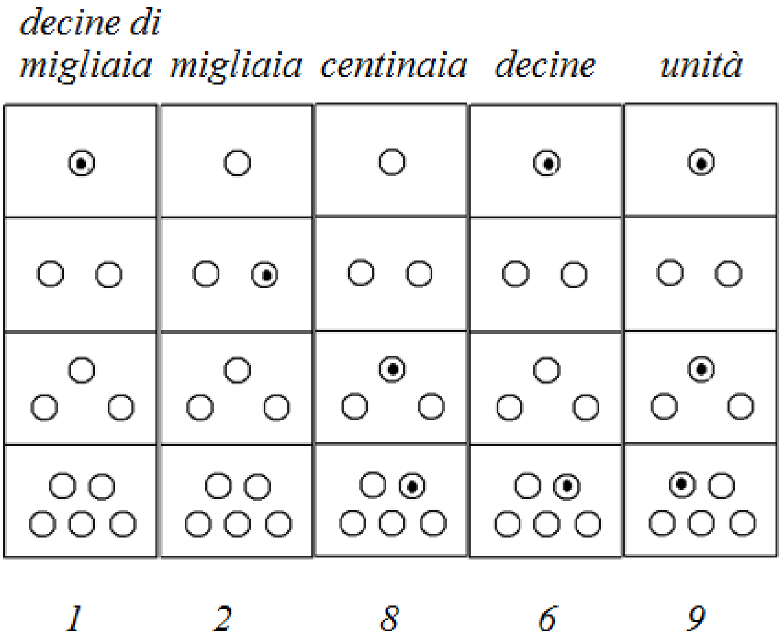


Fig. 7

4. La taptana

Altri strumenti di calcolo scavati o incisi nella pietra sono stati rinvenuti in vari Paesi dell'America Latina e anche su questi si hanno scarse notizie, ma svariate interpretazioni. Presento solo uno di questi, ancora in uso nelle scuole di quei Paesi, chiamato *taptana* (tavola). È la versione moderna di un antico strumento di calcolo ritrovato in una incisione su una pietra in una regione dell'attuale Ecuador chiamata Canari e per questo motivo lo strumento di calcolo è noto come "contador Canari".

Fig. 8

La taptana in uso oggi in alcune scuole del Perù è una tavoletta di legno con due sequenze di incavi grandi a spirale (o disposti in una griglia quadrata 3x3) e segnati da 1 a 9. I numeri a sinistra sono disposti in maniera crescente nel verso orario mentre a destra nel verso antiorario. Lo zero si trova invece su due incavi lunghi in alto. Le due spirali ricordano le due griglie quadrate 3x3 del reperto archeologico riportato in fig.8.

Lungo i bordi a destra e a sinistra ci sono altri nove incavi piccoli dove vengono posizionate palline colorate: dal basso verso l'alto il colore delle palline rappresenta le unità, le decine, le centinaia e così via salendo. È questa la legenda della taptana che deve essere fissata per poter iniziare ad operare. Per rappresentare i numeri si posizionano palline colorate negli incavi grandi delle due spirali. Inoltre, i fori piccoli al di sopra di ogni incavo numerato e l'incavo lungo posizionato al centro vengono utilizzati per le diverse operazioni aritmetiche.

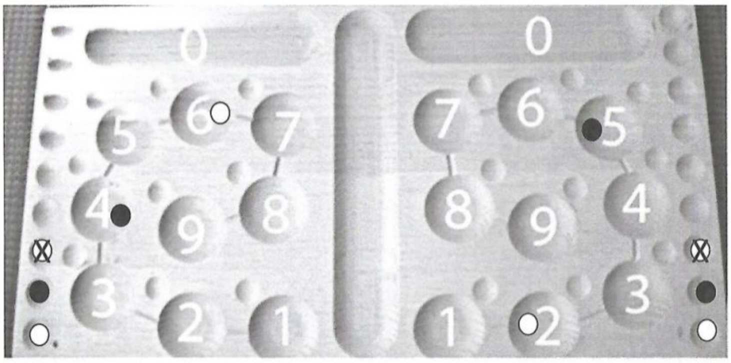


Fig. 9 Taptana in uso oggi

Nella fig. 9 sono rappresentati i numeri 46 a sinistra e 52 a destra, in quanto la legenda è: la pallina bianca indica le unità, la nera indica le decine e quella segnata con la X indica le centinaia.

5. L’addizione con la taptana

Per calcolare la somma 46 + 52 sulla taptana si procede alla maniera seguente:

1. La pallina bianca a sinistra viene spostata dalla posizione 6 al piccolo foro sovrastante per indicare che si sta operando con quella quantità. La pallina bianca a destra viene spostata in avanti di sei posti fino alla posizione 8. Una volta compiuta l’operazione, la pallina bianca a sinistra viene tolta dal foro piccolo

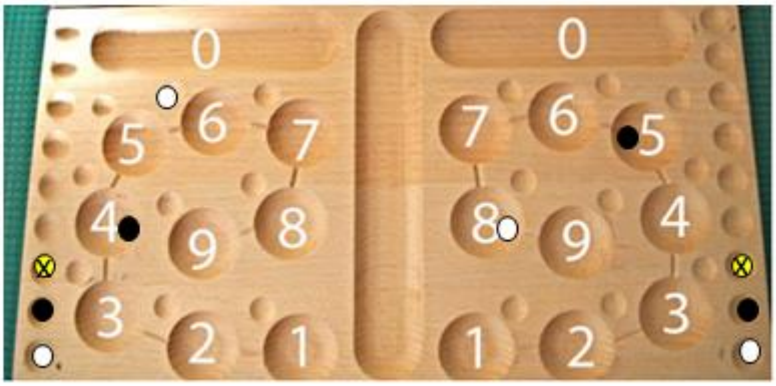
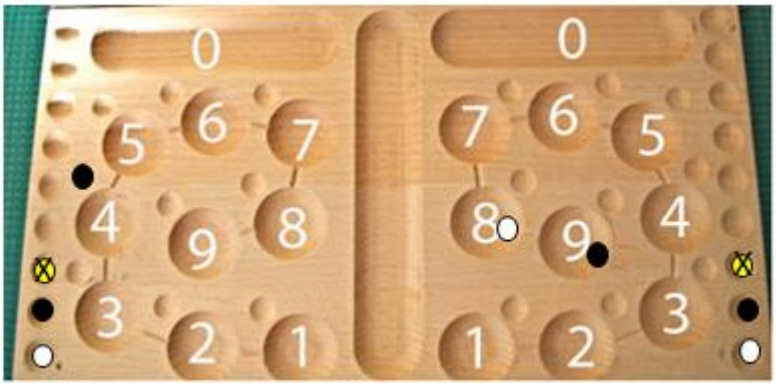


Fig. 10

2. La pallina nera a sinistra viene spostata nel foro piccolo sovrastante la sua posizione. La pallina nera a destra viene spostata di quattro posti fino alla posizione 9. Una volta compiuta l’operazione, la pallina nera nel foro piccolo viene tolta e a destra compare la somma 98 = 46 + 52.



Fig, 11

6. La sottrazione con la taptana

Per calcolare la differenza 75 – 36, si rappresentano i due numeri sulla taptana: 75 a sinistra e 36 a destra. La differenza comparirà a sinistra e la parte destra rimarrà vuota. Le fasi dell'operazione sono le seguenti:

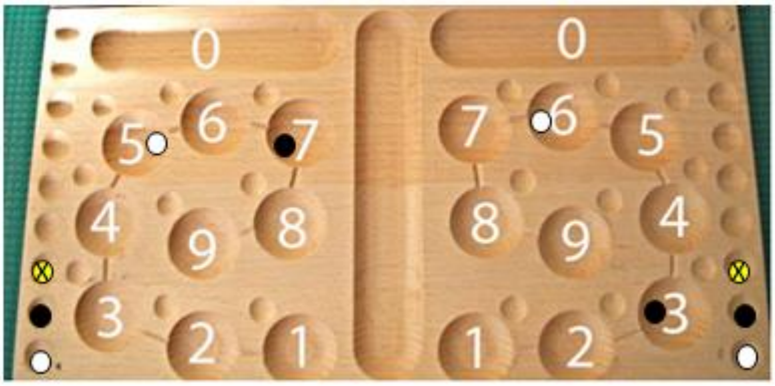


Fig.12

1. La pallina bianca a destra viene collocata nel foro piccolo sovrastante la sua posizione. La pallina bianca a sinistra arretra di sei posti: passa per le posizioni 4, 3, 2, 1, 0, 9. Si ferma sul 9, ma fa arretrare di un posto la pallina nera delle decine che passa da 7 alla posizione 6.

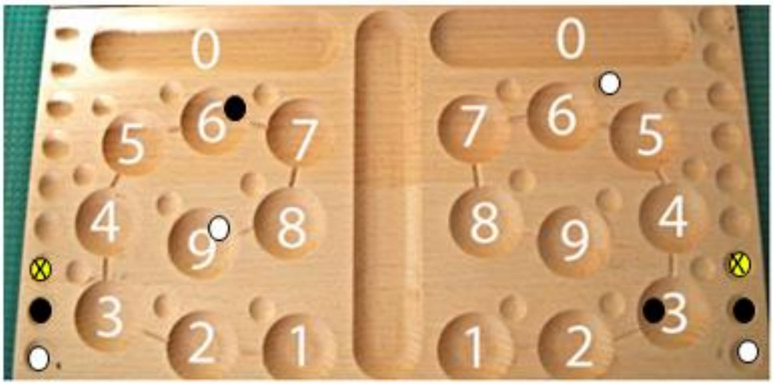


Fig. 13

2. Si opera ora con le decine. La pallina nera a destra viene posta nel foro piccolo sovrastante la sua posizione. La pallina nera a sinistra arretra di tre posizioni passando per 5, 4, 3 e si ferma sul 3. Completata l'operazione, la pallina nera a destra viene tolta dal foro piccolo e a sinistra rimane la differenza 39 = 75 – 36.

7. La moltiplicazione con la taptana

Per calcolare il prodotto 38 x 12, il più grande dei due fattori viene rappresentato a sinistra della taptana (una pallina nera nella posizione 3 e una bianca nella posizione 8) mentre il più piccolo, scelto come moltiplicatore, si rappresenta nell'incavo lungo al centro della taptana con una pallina nera e due bianche.

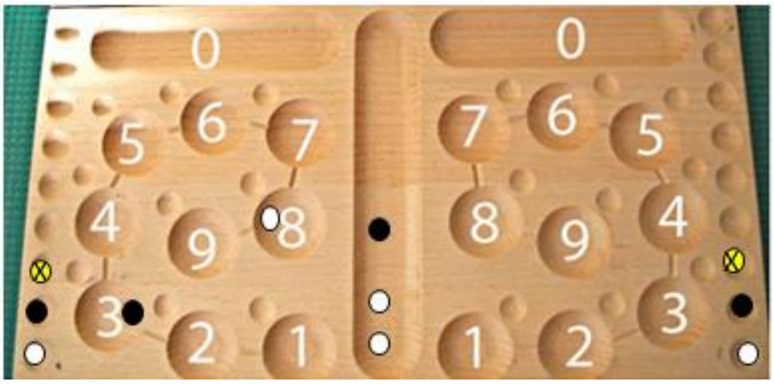


Fig. 14

1. Si comincia ad effettuare i prodotti parziali. Nella metà a destra della taptana si collocano nella posizione 8 due palline bianche (8x2) e una nera (8x10), mentre nella posizione 3 si pongono due palline nere (30x2) e una pallina segnata con la X (30x10).

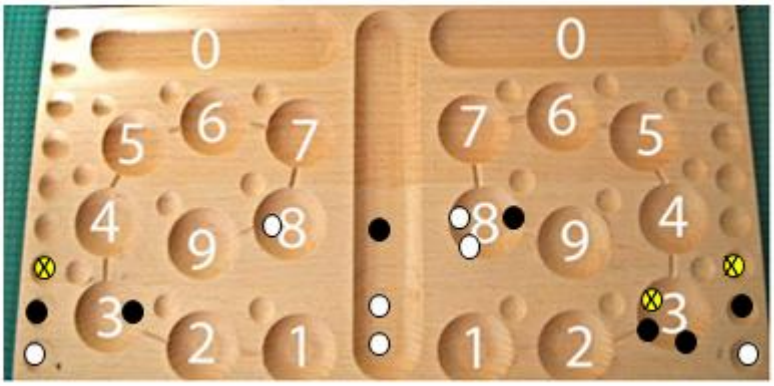


Fig. 15

2. Si procede con gli avanzamenti delle palline a destra della taptana: una delle due palline bianche della posizione 8 viene posta nel foro piccolo sovrastante e l'altra avanza di otto posizioni passando per 9, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. La pallina bianca si ferma sul 6, ma poiché è passata per lo 0 fa avanzare di un posto la pallina nera che passa dalla posizione 8 alla 9. La pallina bianca viene tolta dal foro piccolo. Se nella posizione 8 ci fosse un'altra pallina bianca, cioè il moltiplicatore fosse 13, allora questa andrebbe collocata nel foro piccolo e quella che prima è avanzata fino alla posizione 6 dovrebbe avanzare ancora di otto posizioni.

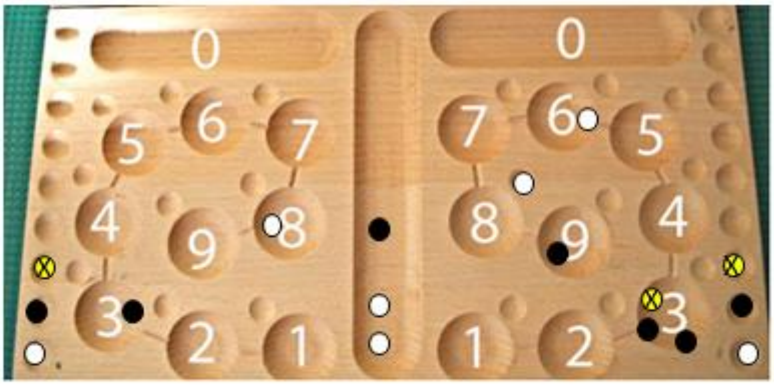


Fig. 16

3. Le unità sono finite e ora si opera con le decine. Una pallina nera dalla posizione 3 viene collocata nel foro piccolo sovrastante. La pallina nera dalla posizione 9 avanza di tre posti passando per 0, 1, 2 e si ferma nella posizione 2, ma poiché è passata per 0 fa avanzare la pallina delle centinaia di un posto da 3 a 4. La pallina nera viene tolta dal foro piccolo.

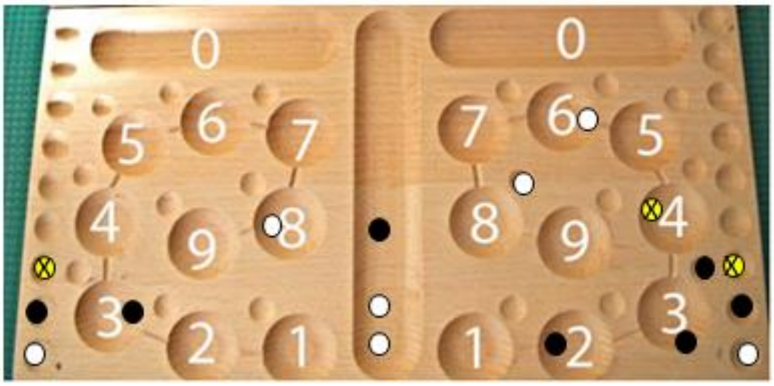


Fig. 17

L'altra pallina nera dalla posizione 3 viene posta nel foro piccolo sovrastante. La pallina nera dalla posizione 3 avanza di tre posti e si ferma nella posizione 5. La pallina nera viene tolta dal foro piccolo e a destra della taptana rimane rappresentato il prodotto 456 = 38 x 12.

Fig. 18

8. La divisione con la taptana

Il dividendo si rappresenta a sinistra della taptana, il divisore nell'incavo lungo centrale (come per la moltiplicazione) e poi si procede a sottrazioni ripetute. Si sottrae il divisore dal dividendo fino a trovare un numero più piccolo del divisore che è il resto della divisione. Il numero di sottrazioni effettuate si registra nell'incavo dello 0 a destra della taptana: questo è il quoziente.

Bibliografia

Ascher, M., Ascher, R., (1997). Mathematics of the Incas: code of the quipu. Mineola N. Y.:Dover.

Radicati di Primeglio, (1979). El sistema contable de los Incas: YUpana y quipu. Lima: UNMSM Libreria Studium.

Jannamorelli B., (2018). Strumenti di calcolo ingenui ... ma ingegnosi e multiculturali, Bologna: Pitagora Ed.

Montaluisa, L., (2010). Taptana Montaluisa. Quito: UPS.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 5, No 1 (2022), 39-46

Tinkering: la coraggiosa arte di sbagliare

Maria Grazia Pietrantonio

Istituto Comprensivo Numero Uno Chieti

mariagraziapietrantonio@gmail.com

Sunto Nel mondo delle STEAM si è fatta largo in questi ultimi anni una nuova tecnologia dal sapore un po' antico: il Tinkering. Attraverso essa gli studenti possono apprezzare l'arte di reinventare per mezzo di materiali diversi oggetti e la loro destinazione d'uso usando la creatività e le abilità progettuali.

Parole chiave Tinkering, Exploratorium, spirale creativa

1.Un po' di storia

Troppo spesso incontriamo alunni che hanno paura di esprimersi perché sono preoccupati di fare degli errori, di non essere capiti o peggio presi in giro dai compagni. Il Tinkering aiuta i bambini a non aver paura dei propri sbagli perché tutto ciò che noi facciamo o diciamo è perfettibile e può essere reso migliore. Il termine Tinkering viene dal verbo inglese "to tinker" che vuol dire letteralmente *armeggiare* tentare di rimaneggiare qualcosa per trasformarla o modificarne l'uso. Era un termine utilizzato dagli idraulici inglesi quando dovevano rappezzare un tubo di una condotta che perdeva, per cui il Tinkering, che si ispira a questo termine, vuol dire proprio "sporcarsi le mani" per realizzare o modificare qualcosa. Per questo motivo il Tinkering ci porta a lavorare come se fossimo in un laboratorio o in una bottega di un artigiano, che ha cura del materiale che usa e mette in gioco la sua creatività per trasformarlo. Questa nuova disciplina STEM nasce nell'Esploratorium di San Francisco, fondato dal fisico statunitense Frank Oppenheimer nel 1969, un grande museo interattivo delle scienze, delle tecnologie e dell'arte. Lo spazio dell'Exporatorium dedicato al Tinkering è ricco di molti oggetti creati con i materiali più disparati e dai colori sgargianti, tutto ciò è importante per lo sviluppo della creatività. Bruno Munari, famoso artista scrittore e designer, ha dato vita, negli anni settanta, ad un progetto di educazione creativa che proponeva di crescere attraverso una "ginnastica mentale" che stimolasse la creatività, la conoscenza, la sperimentazione e l'autoapprendimento. Il progetto di Munari prevedeva di stimolare la creatività attraverso il gioco proponendo materiali, oggetti e strumenti su cui concentrarsi, più era varia l'offerta più sarebbe stata di stimolo alla creatività.

In questa visione il Tinkering diviene uno strumento utile a sviluppare la creatività nei bambini e a tutto ciò fa eco l'immaginazione e se vogliamo, il Tinkering, è "*l'immaginazione messa al lavoro*".

Insegna dell'Exploratorium di San Francisco che indica la zona dei laboratori di Tinkering

Dopo la pandemia e l'uso quasi esclusivo dei mezzi multimediali per comunicare, il tornare a ripensare la quotidianità e rimodularla per creare qualcosa di diverso altro non è che uno strumento attivo allo sviluppo di un pensiero divergente. Tale esercizio ci permette di esplorare con occhi diversi la realtà circostante e ci attiva nel trovare soluzioni originali ai più disparati problemi.

2. La spirale creativa

L'intuizione nasce dalla mente vulcanica di Mitch Resnick, fondatore del Lifelong Kindergarten Group del MIT di Boston e ideatore di Scratch e autore di "Come i bambini- immagina, crea, gioca e condividi" Un interessante percorso che analizza le modalità di apprendimento, cercando di evidenziare la dimensione creativa, quale chiave di volta per affrontare e vincere la sfida che si pone davanti ai bambini di oggi, per poter diventare gli adulti di domani. Tale sfida parte dalla radicale trasformazione in atto nella nostra società: il lavoro cambia velocemente, adattandosi a un flusso costante di nuove tecnologie, nuove fonti di informazione e nuovi canali di comunicazione. Molte professioni stanno scomparendo e si dibatte molto su quali scenari ci aspettano; in uno dei suoi libri, "Now you see it", l'autrice americana Cathy Davidson stima che "circa i due terzi dei bambini che oggi frequentano la scuola primaria andranno a fare lavori che ancora non sono stati inventati".
Per questo motivo Mitch Resnick asserisce, "affinché le persone possano realizzarsi e vivere al meglio, in un panorama in rapido cambiamento, la capacità di pensare e agire in modo creativo è più importante che mai". Perché se è vero che la rivoluzione digitale ha messo strumenti sofisticati nelle mani di tutti, alla portata di tutti", è

anche vero che tali "oggetti digitali" sono inutili se non supportati dalle idee e dalla competenza di chi li utilizza. Da qui prende spunto l'attività di ricerca di Mitch Resnick, che spende la sua vita nella continua sperimentazione, e utilizza i dati che emergono dalle sue ricerche per fornire sempre più strumenti adeguati all'istruzione e allo sviluppo della conoscenza in tanti settori, dalla programmazione alla robotica. Da questa sua continua ricerca nasce la piattaforma Scratch, Resnick ha sempre sostenuto l'importanza della diffusione di coding e pensiero computazionale nella didattica: attraverso il coinvolgimento in esperienze creative di apprendimento, mediante il linguaggio di programmazione di Scratch e la relativa comunità online, ha permesso a milioni di bambini e ragazzi in tutto il mondo di creare e condividere le proprie storie interattive, i propri giochi e le proprie animazioni, i propri progetti matematici. Oltre a sviluppare ex novo dei progetti Scratch funziona come un grande laboratorio dove ciascuno può usufruire del lavoro di un altro e modificarlo e renderlo più ricco e funzionale.

Tale processo di rimodulazione dei vari prodotti messi a disposizione nella piattaforma ha portato Resnick, a sviluppare un'interessantissima visione del processo di apprendimento, efficacemente rappresentata come "spirale dell'apprendimento creativo":

l'esplorazione del mondo (e la conseguente conoscenza) avviene attraverso la manipolazione degli oggetti e la sperimentazione, il costruire cose e verificarne la funzionalità, il ragionare per prototipi e identificare gli errori…tutte modalità con cui i bambini imparano e attraverso cui sviluppano la conoscenza delle leggi fondamentali dell'ambiente in cui vivono. Secondo Resnick, questa è la palestra per esercitare il pensiero creativo lungo tutto l'arco della vita. Immaginare, creare, sperimentare, condividere e riflettere dovrebbero essere tappe di un processo da riprodurre continuamente, la ciclica riproposizione di una sequenza (per usare una metafora adeguata, in termini di programmazione) da applicare e coltivare per tutta la vita, quale motore inesauribile del proprio processo di apprendimento.

3. L'importanza dell'errore…elogio alla creatività

A Fukuoka (Giappone), durante il convegno CAP 2018 – Communicating Astronomy with the Public – un congresso internazionale nel quale, ogni anno, astronomi da tutto il mondo discutono e si confrontano sui nuovi metodi per coinvolgere il pubblico dei non esperti, dagli adulti ai giovanissimi – Sara Ricciardi, ricercatrice all'Inaf Oas di Bologna, ha organizzato un workshop dedicato al Tinkering per la divulgazione dell'astronomia. Workshop che ha ottenuto una menzione speciale nel meeting report del CAP 2018 pubblicato a inizio luglio sulla rivista Nature Astronomy. Sara Ricciardi e Fabrizio Villa avevano già sperimentato questo metodo nei laboratori dell'Oas (Osservatorio di astrofisica e scienza dello spazio) dell'Inaf di Bologna. Entrambi astrofisici, hanno lavorato per il satellite Planck e ora si occupano principalmente dello sviluppo di ricevitori per Alma. Entrambi uniscono una passione per la loro professione e una missione per appassionare le nuove generazioni. Una delle principali caratteristiche del loro metodo di approccio all'astrofisica è quello dell'arrangiarsi per provare a creare oggetti che prima non esistevano, servendosi della fantasia e del gioco di squadra. Sembra facile ma il lavoro di preparazione è complesso e articolato e richiede la partecipazione di tinkerer molto motivati.

Seppure nella semplicità dei mezzi messi a disposizione, il gioco propone ai bambini lo studio di oggetti difficilmente comprensibili a discenti della loro tenera età. Immagina, crea, riproduci e realizza, l'attività scientifica non si può prescindere da questi elementi: è necessario parlarsi e lavorare in squadra, riflettere e immaginare. «Il tinkering è una pratica importante per i ragazzi perché, invece di trasmettere un sapere, cerca di sviluppare un'attitudine a farsi domande, mettersi in gioco, imparare a conoscere. Nel 21esimo secolo queste qualità non saranno importanti solo per i ricercatori, che per fare ricerca di frontiera devono per forza essere coraggiosi e provare nuove strade, ma anche per tutti i futuri cittadini che vorranno vivere attivamente un'era in cui sarà fondamentale interagire in modo creativo con gli strumenti tecnologici, in un dialogo continuo tra linguaggi diversi. È un metodo eccezionale anche per noi ricercatori che ci occupiamo di didattica e comunicazione, perché consente di mostrare in pratica come lavora una vera e onesta comunità scientifica. In una sessione di tinkering i ragazzi si organizzano in gruppi traendo spunto gli uni dagli altri, in competizione o in cooperazione, arrivando a un sapere condiviso, frutto del coinvolgimento in un'attività estremamente significativa in cui i ragazzi si sentono protagonisti. Questo meccanismo è esattamente ciò che avviene in una comunità scientifica, dove i vari gruppi tentano nuove strade per poi condividere le scoperte, che vengono valutate democraticamente ed eventualmente accettate come sapere comune».

4. Cosa fanno i bambini nel momento Tinkering

Come in ogni progettazione di un percorso didattico-educativo, anche il Tinkering prevede diverse fasi:

Fase 1: Si focalizza l'obiettivo: si discute sull'oggetto da realizzare in base ai materiali messi a loro disposizione non perdendo di vista la finalità della realizzazione.

Fase 2: Collaborazione: si mettono in gioco le idee per cercare di raggiungere l'obiettivo. Il lavoro si svolge in piccoli gruppi, nella migliore tradizione dei laboratori di apprendimento, dalla fucina delle idee viene scelta quella più razionale e funzionale.

Fase 3: Immaginazione e creazione: utilizzando i materiali, di riciclo e facile consumo, a loro disposizione, si comincia la progettazione del prodotto da realizzare.

Fase 4: Sperimentazione: si usa l'oggetto creato e si verifica la sua funzionalità. Se non dovesse corrispondere alle aspettative del progetto iniziale, si evidenziano le falle del prodotto realizzato.

Fase 5: Risoluzione dei problemi: Analizzando ciò che non va nel prodotto realizzato si trovano strade alternative e si prova finché non si è soddisfatti del risultato ottenuto, altrimenti si torna a progettare e a verificare.

Fase 6: Si prendono iniziative: Si capisce l'errore e non ci si scoraggia ma si riparte per trovare una soluzione e superare l'ostacolo utilizzando la creatività

Fase 7: Utilizzo della motricità fine: il lavoro di Tinkering non elogia solo la creatività e l'errore ma anche la motricità fine che sviluppa delle capacità cognitive importanti per l'autonomia del bambino.

Fase 8: Avere fiducia di sé: Il Tinkering sviluppa una grande fiducia delle proprie capacità. Elogiando l'errore e il superamento di esso, permettono lo sviluppo armonico della personalità e consentono al bambino di prendere fiducia nel proprio lavoro.

Il senso più profondo di un'esperienza di tinkering non sta nella trasmissione di un contenuto specifico ma nel coinvolgimento in un processo in cui i bambini si sentono coinvolti e capaci di individuare soluzioni possibili per risolvere un problema. In questo processo l'errore è parte integrante, passaggio essenziale e imprescindibile. Questo dà un contributo importantissimo a un cambiamento di paradigma fondamentale rispetto a quello che spesso è la norma nelle istituzioni scolastiche. Nella scuola, quando i contenuti vengono parcellizzati, separati artificiosamente nelle discipline e nei manuali, messi alla prova in test costruiti e spessissimo dalle soluzioni chiuse, i bambini vengono esercitati a scappare dall'errore, averne paura come misura diretta e proporzionale della loro performance e, in ultima istanza, del loro valore. Certo anche nella scuola ci sono voci di maestri e insegnanti che lavorano in modo interdisciplinare e che sanno valutare l’errore come un’opportunità di crescita, piuttosto che un insuccesso. Quello che mi piace pensare è di poter in qualche modo ispirare e suggerire modalità nuove di fare didattica e creare e utilizzare nuovi ambienti di apprendimento. I ricercatori in questo potrebbero avere un ruolo fondamentale». (Sara Ricciardi, ricercatrice all’Inaf Oas di Bologna).

Una parte fondamentale del Tinkering riguarda la narrazione: ai makers (coloro che creano, gli studenti) viene chiesto di descrivere il loro processo creativo-ingegneristico, di documentare durante tutte le fasi dell’attività le loro azioni, attraverso diari di bordo o diagrammi di flusso, di raccontare l’idea da cui sono partiti per arrivare al risultato che presentano.

5. Conclusioni: Il Tinkering e la matematica.

L’attitudine che si sviluppa attraverso le pratiche di questo nuovo atteggiamento riguardante l’approccio a un problema è fondamentale in quanto esso:

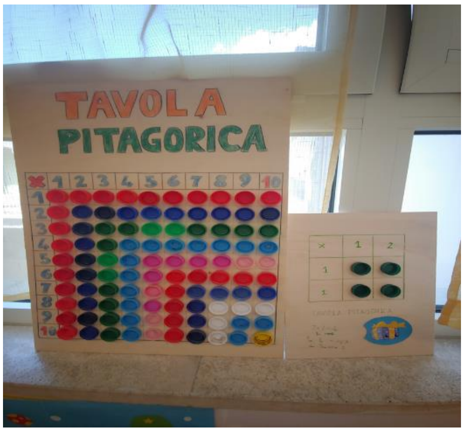
facilita lo sviluppo delle capacità di problem solving e di astrazione;

aiuta a potenziare il pensiero logico e la creatività;

promuove l'inclusività e l'autostima;

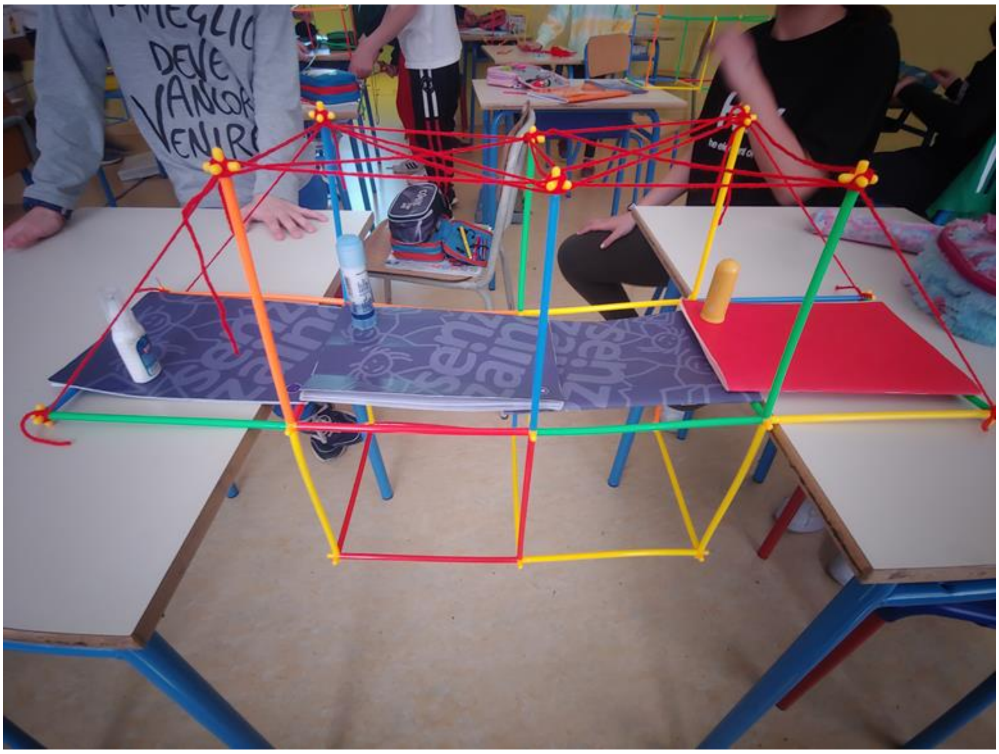
incoraggia la collaborazione di gruppo per il raggiungimento di un obiettivo comune.

Un aspetto importante per queste attività è che lo studente possa ricevere un feedback immediato sulle sue scelte e quindi vedere se le soluzioni trovate sono soddisfacenti o se è necessario trovare delle alternative. In questo modo verrà sempre tenuto alto il livello di curiosità e di interesse. Non ci sono scadenze e risposte corrette proprio perché spesso i problemi hanno più di una soluzione e, come specificato precedentemente, il focus è sul processo di esplorazione più che sul risultato finale. Il compito dell'insegnante è quello di guidare gli studenti verso la scoperta di un nuovo modo di apprendere che si basa su un approccio pratico e creativo.



Esempio di lavoro sulla costruzione di strumenti utili alla matematica: la tavola più piccola nasce da un'interpretazione da parte di un alunno della tavola Pitagorica

La simmetria con l'utilizzo di un modello



Bibliografia

Antonietti e S. Monteni, Educare al pensiero creativo, Erikson, 2014

IL LIBRO/1 Macchine e invenzioni bizzarre di W. H. Robinson

"Come i bambini- immagina, crea, gioca e condividi", Erickson

Now You See It: How Technology and Brain Science Will Transform Schools and Business for the 21s t Century, New York times Besteseller, 2012

New Perspectives in Science Education - 12th Edition. 16-17 March 2023

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 5, No 1 (2022), 47-54

Sulla modellizzazione delle relazioni interpersonali in una classe: dall’approccio tradizionale ai nuovi punti di vista.

Parte prima: analisi delle relazioni interpersonali in una classe

Luciana Delli Rocili[1], Antonio Maturo[2], Renata Santarossa[3]

[1]Vicepresidente Mathesis Abruzzo, email lucianadr@live.it

[2]Presidente Mathesis Abruzzo, email antomato75@gmail.com

[3]Presidente APAV, email santarossa.renata@gmail.com

Sunto La comprensione delle relazioni interpersonali in una classe è essenziale per poter pianificare una efficiente azione didattica ed educativa. Nel lavoro, dopo aver esaminato alcune situazioni che mostrano la necessità di valutare le relazioni in una classe e intervenire per il loro miglioramento, si presentano alcune modellizzazioni matematiche del sistema di relazioni, a partire da quelle classiche di Moreno

Parole Chiave: Analisi delle relazioni interpersonali in una classe, modellizzazione con matrici sociometriche, un caso studio

1. Introduzione

Nella vecchia impostazione scolastica la conflittualità e la relazionalità fra gli studenti erano gestiti con un sistema autoritario da parte del docente che dispensava premi e punizioni anche corporali, sospensioni e così via. Nei tempi recenti è sempre meno possibile avere atteggiamenti autoritari e le relazioni fra gli studenti vanno gestite con l’autorevolezza derivante da una preparazione su aspetti pedagogici e psicologici, e anche nella comprensione e modellizzazione dei problemi che si presentano.

Uno strumento matematico per la comprensione dei problemi di relazione è costituito dalle matrici sociometriche di Moreno, che permettono di individuare i vari gruppi presenti in classe, rispetto a varie tipologie di relazioni, e di capire come intervenire in situazioni difficili.

Il punto di partenza per gestire le relazioni all’interno di una classe è la individuazione di un itinerario di lavoro che preveda almeno tre momenti fondamentali:

1) Rilevare ed analizzare le relazioni sociali tra gli alunni.

2) Intervenire, organizzando attività per il miglioramento delle relazioni socio-affettive tra gli alunni.

3) Fare verifiche e valutazioni, attraverso la tabulazione e il confronto dei dati rilevati.

2. L'analisi sociometrica classica delle relazioni interpersonali in una classe

Sulla base degli obiettivi sopra evidenziati, particolarmente significativa appare l'applicazione dei test sociometrici di Moreno. Essi permettono di studiare le relazioni sociali in maniera scientifica e forniscono una grande quantità di dati e informazioni utili allo scopo di gestire conflittualità e relazionalità all'interno di una classe. Ciò ha anche un immediato beneficio da un punto di vista didattico, in quanto, una volta gestite le tensioni esistenti all'interno della classe, c'è una maggiore possibilità da parte degli alunni di concentrarsi sull'apprendimento e sulle ricerche compiute in classe.

Il test sociometrico è uno strumento che ci permette di determinare in quale misura gli individui sono accettati in un gruppo, di scoprire le relazioni che intercorrono tra gli individui, di studiare la natura del gruppo, di determinare la posizione di ogni bambino all'interno del gruppo. Il test presenta i pregi della semplicità d'uso e della rapidità nella somministrazione.

La tecnica sociometrica consiste nel chiedere a ogni individuo di dichiarare con quali, tra i compagni esistenti nella classe, preferirebbe associarsi per svolgere determinate attività ed in particolari situazioni. Ogni bambino deve indicare almeno un compagno.

Dalle risposte ottenute si ottengono delle matrici quadrate, dette *matrici sociometriche*, di ordine uguale al numero di alunni della classe, in cui le righe rappresentano gli individui che fanno le scelte e le colonne gli individui scelti.

Sia $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ l'insieme degli studenti della classe. Se M_A, di termine generale m^A_{ij}, è la matrice sociometrica ottenuta da interviste relative ad una attività A, si pone $m^A_{ij} = 1$ se lo studente S_i sceglie S_j per l'attività A e si pone $m^A_{ij} = 0$ in caso contrario.

La riga marginale della matrice ha elemento generico r^A_j uguale al numero di scelte ricevute dallo studente S_j, mentre la colonna marginale ha elemento generico f^A_i uguale al numero di persone scelte dallo studente S_i.

Attività A	S_1	S_2		S_j		S_n	scelte fatte
S_1	m^A_{11}	m^A_{12}		m^A_{1j}		m^A_{1n}	f^A_1
S_2	m^A_{21}	m^A_{22}		m^A_{2j}		m^A_{2n}	f^A_2
S_i	m^A_{i1}	m^A_{i2}		m^A_{ij}		m^A_{in}	f^A_i
S_n	m^A_{n}	m^A_{n2}		m^A_{nj}		m^A_{nn}	f^A_n
scelte ricevute	r^A_1	r^A_2		r^A_j		r^A_n	

Tabella 1 Matrice sociometrica con riga e colonna marginali

In relazione all'attività A, il valore r^A_j indica come l'individuo S_j è gradito dal gruppo (detto grado di *ricettività sociale* o *prestigio*, rispetto all'attività A), mentre f^A_i indica il desiderio di socializzare di S_i (detto grado di *espansione socio-affettiva* o *integrazione* rispetto ad A).
Per avere un quadro completo della socializzazione all'interno della classe bisogna individuare più ambiti di attività, chiamati anche *criteri di associazione* (es: *gioco*, *lavoro*, *tempo libero*) e stabilire un numero massimo di persone che un bambino può scegliere per ogni attività.
L'analisi delle matrici sociometriche ottenute si può limitare alle varie rappresentazioni e interpretazioni della riga marginale (scelte ricevute) e della colonna marginale (scelte fatte), per ogni attività.
Volendo considerare congiuntamente il grado di *ricettività sociale* e il grado di *espansione socio-affettiva* di ogni bambino rispetto ad una data attività A, si può rappresentare ogni bambino S_i con il punto del piano $P^A_i = (r^A_i, f^A_i)$. Questo permette di ottenere varie informazioni fra cui:

1. l'individuazione di gruppi, per mezzo di algoritmi di cluster analysis;
2. l'individuazione di legami lineari o funzionali fra i gradi di ricettività sociale e espansione socio-affettiva all'interno del gruppo.

Inoltre, definendo una distanza in R^2, i bambini sono rappresentati da punti di uno spazio metrico. Si può considerare il centro rispetto alla distanza considerata (in genere il baricentro, considerando la distanza euclidea) e si identificano i bambini che essendo più lontani dal centro, possono avere la necessità di qualche intervento per avvicinarli agli altri.
Considerando tutte le attività insieme e, per ogni attività, la ricettività sociale e l'espansione socio-affettiva, se ci sono h attività, ogni bambino è rappresentato da un punto dello spazio numerico di dimensione 2h.

In questo spazio modelli matematici e studi statistici possono portare a individuare, con precisione scientifica, classificazioni e opportuni interventi necessari.

3. Un caso studio in una classe di studenti con applicazione di matrici sociometriche

Un caso studio di vari anni fa, ma molto significativo per come si è presentato e per come è stato affrontato, riguarda l'esperienza didattica dell'insegnante Luciana Delli Rocili, che essendo preparata alla valutazione sociometrica per aver studiato in maniera approfondita l'argomento su vari testi, ha potuto affrontare e risolvere scientificamente i difficili problemi di una classe seconda elementare, formata da alunni di varie provenienze e con vari problemi.

Oltre alle carenze e alle difficoltà di apprendimento manifestate dai bambini, il problema più urgente da risolvere era costituito dal grave scompenso di socialità e di disciplina, che non permetteva di organizzare ed attuare nessun tipo di attività didattica o intervento educativo. Molte erano le componenti negative che interagivano nella situazione del gruppo - classe e che avevano bisogno di essere attentamente individuate ed analizzate. L'esistenza di alcuni piccoli 'provocatori', la presenza di un numero rilevante di bambini in svantaggio socio-culturale o in difficoltà di apprendimento, o affetti da handicap, soprattutto per quanto riguarda la sfera psichica, creavano grossi problemi di adattamento e determinavano una situazione di estrema aggressività in tutti i bambini.

La presenza di soggetti non bene accetti al gruppo, l'assenza di rapporti interpersonali tra gli alunni della classe, l'esigenza di instaurare un livello sia pur minimo di disciplina e di tranquillità, hanno convinto l'insegnante che bisognava focalizzare l'attenzione sugli aspetti affettivi, emotivi e sociali della vita dei bambini.

Per poter avere un quadro della situazione della classe, e poter intervenire, l'insegnante ha predisposto un itinerario di lavoro basato su tre test sociometrici relativi a tre criteri di associazione: *gioco, lavoro, tempo libero*.

Su questa base l'insegnante ha distribuito alla classe, formata da 15 bambini, un questionario con le seguenti domande:

Domanda n. 1: *Con quali bambini o bambine preferiresti giocare durante la ricreazione*?

Domanda n. 2: *Con quali compagni vorresti lavorare per realizzare e dipingere i cartelloni murali che illustrano le stagioni dell'anno*?

Domanda n. 3: *Alla festa del tuo compleanno, quali compagni della tua classe inviteresti*?

È stato posto il limite di scegliere almeno una persona e al massimo tre persone.

Nella prima fase della ricerca è stato chiesto ad ogni studente di indicare solo una scelta per ciascun criterio.

Quindi ad ogni coppia ordinata di studenti (u, v) è stata associata una terna ordinata di numeri xyz, dove x è l'indicatore del primo criterio, y quello del secondo criterio e z quello del terzo. Ciascuno di questi indicatori è 1 se il bambino u ha scelto v rispetto al criterio assegnato ed è 0 se non non ha scelto v.
I risultati ottenuti sono mostrati nella seguente Tabella 2. Per motivi di chiarezza, le terne xyz costituite da tutti i valori zero non sono mostrate nella tabella.

Alunni	Valeria	Sabrina	Monica	Nedi	Wendy	Francesca	Jessica	Vincenzo	Andrea	Francesco	Simone	Sem	Marco	Gianluca	Renzo	Choices done	Number children chosen
Valeria		100		010	001											3	3
Sabrina	100							010							001	3	3
Monica	001	110														3	2
Nedi					111											3	1
Wendy				111												3	1
Francesca							111									3	1
Jessica						111										3	1
Vincenzo		001								100					010	3	3
Andrea														111		3	1
Francesco								101					010			3	2
Simone									111							3	1
Sem										111						3	1
Marco										101		010				3	2
Gianluca													111			3	1
Renzo								111								3	1
Choices received	2	4	0	4	4	3	3	6	3	6	0	1	4	3	2	Tot 45	Tot 24
Number choosing children	2	3	0	2	2	1	1	3	1	3	0	1	2	1	2	Tot 24	
Choices received for each criterion	101	211	000	121	112	111	111	222	111	312	000	010	121	111	011		

Tabella 2 Risultati della prima indagine sociometrica

La tabella 2 è adatta a molte elaborazioni matematiche, a seconda del punto di vista. Ad esempio, se consideriamo per ogni bambino B il punto del piano (B_r, B_f), con B_r numero di scelte ricevute e B_f numero di scelte fatte, otteniamo la seguente Tabella 3, in cui ogni bambino è rappresentato da un punto del piano.

3			Valeria	Sabrina Vincenzo
2	Monica		Marco	Francesco
1	Simone	Francesca Jessica Gianluca Andrea Sem	Nedy Wendy Renzo	
0				
Scelte fatte / Scelte ricevute	**0**	**1**	**2**	**3**

Tabella 3 Bambini rappresentati come punti del piano

Dalla tabella 3 possiamo avere vari tipi di divisioni in gruppi di bambini. Ad esempio, potremmo definire:

• Il gruppo di *elevata socializzazione*, formato dai bambini B tale che ($B_r \geq 2$, $B_f \geq 2$), ossia {Valerio, Marco, Sabrina, Vincenzo, Francesco}.

• Il gruppo di *bassa socializzazione*, come l'insieme di bambini B tale che ($B_r \leq 1$, $B_f \leq 1$), ossia {Simone, Francesca, Jessica, Andrea, Sem, Gianluca}.

• Il gruppo asimmetrico *orientato alla ricettività sociale*, come l'insieme dei bambini B tali che ($B_r \geq 2$, $B_f \leq 1$), cioè {Nedi, Wendy, Renzo}.

• Il gruppo asimmetrico *orientato all'espansione socio-affettiva*, come l'insieme dei bambini B tali che ($B_r \leq 1$, $B_f \geq 2$}, cioè {Monica}.

Partendo dai dati emersi dall'indagine sociometrica, integrati e confermati per la maggior parte anche dall'osservazione diretta e dai colloqui avuti con i precedenti insegnanti, la docente ha iniziato ad organizzare le attività didattiche facendo leva sulle preferenze e le relazioni elettive emerse, con lo scopo di poter arrivare a formare dei gruppi funzionali in cui anche i bambini "isolati" potessero avere possibilità di inserimento e di valorizzazione.
Ad esempio, dall'osservazione delle Tabelle 2 e 3 possiamo vedere che Monica e Simone erano piuttosto marginali rispetto agli altri, mentre Francesco e Vincenzo hanno ottenuto un alto gradimento da parte dei loro coetanei rispetto a ciascun criterio. Inoltre, 9 dei 15 bambini avevano scelto lo stesso compagno per tutte le attività.
È stato quindi necessario migliorare l'atteggiamento dei bambini isolati agli occhi della classe e dimostrare che ogni bambino può essere apprezzato per le sue abilità specifiche.
Nelle fasi successive della ricerca, è stata data la possibilità di scegliere fino ad un massimo di tre persone e sono state analizzate le relative tabelle con significati più complessi.

Questo tipo di lavoro ha dato anche la possibilità di confrontare dei dati concreti ed attendibili, mediante la somministrazione di altri test sociometrici a distanza regolare di tempo, in modo da avere dei validi criteri di osservazione circa le eventuali modificazioni intervenute rispetto alla situazione di partenza.

4. Conclusioni e prospettive di ricerca

La ricerca prosegue in tre direzioni:

(1) Analizzare classi di docenti, ad esempio a partire da corsi di aggiornamento, invece di classi di studenti;
(2) Elaborare modelli matematici nuovi per comprendere meglio il sistema di relazioni all'interno di una classe, utilizzando ad esempio la teoria dei grafi e le nuove teorie sulle iperstrutture algebriche e fuzzy set;
(3) Vedere se, sostituendo alla logica bivalente una logica trivalente o addirittura polivalente, possono emergere nuove idee sull'andamento delle relazioni in una classe e su come gestirle.

Bibliografia

Delli Rocili L., Maturo A., (2013), Teaching mathematics to children: social aspects, psychological problems and decision-making models, in *Interdisciplinary approaches in social sciences*, Editura Universitatii A.I. Cuza, Iasi, Romania.

Delli Rocili L., Maturo A., (2015), Interdisciplinarità, logica dell'incerto e logica fuzzy nella scuola primaria, *Science & Philosophy*, 3(2), pp.11-26.

Delli Rocili L., Maturo A., (2017), Social problems and decision making for teaching approaches and relationship management in an elementary school, in *Mathematical-Statistical models and qualitative theories for economic and social sciences*, Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol. 104, Springer, pp. 81-94.

Delli Rocili L., Maturo A., (2019), Problems and decision-making models in the first cycle of education, in *Qualitative and Quantitative Models in Socio-Economic Systems and Social Work*, Series in System, Decision and Control, Springer.

Hoskova-Mayerova Š., Maturo A., (2017). *Fuzzy Sets and Algebraic Hyperoperations to Model Interpersonal Relations*, in Recent Trends in Social Systems: Quantitative Theories and Quantitative Models Studies in Systems, Series: Decision and Control, Vol. 66, Springer, pp. 211-222.

Hošková-Mayerová, Š., Maturo, A., (2019). On some applications of fuzzy sets and algebraic hyperstructures for the management of teaching and relationships in schools, in Series in System, Decision and Control, Springer.

Klir G, Yuan B. (1995). *Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and applications*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Moreno J.L., (1953). *Who Shall Survive*? New York: Beacon Press.

Moreno J.L., (1951). *Sociometry. Experimental Methods and the Science of Society*, New York: Beacon Press, 1951.

Ragin C.C. (2000). Fuzzy-Set Social Science, University Chicago Press, Chicago, USA.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 5, No 1 (2022), 55-64

Problemi divertenti

Enzo Barone

enzo.barone@libero.it

Sunto

Su Internet vengono proposti molti problemi di matematica, alcuni semplici, altri impegnativi. Mi sono cimentato e, a parte il divertimento che si prova, credo che sia un utile test per la preparazione degli insegnanti ed uno stimolo a proporre nuovi esercizi.
Elencherò alcuni di questi problemi e poi ne darò la soluzione.
Gli enunciati dei problemi sono estremamente sintetici.

1. Introduzione

Molti dei problemi che proporrò sono tratti dal sito internet X, altri si possono trovare sul libro [2]; tutti hanno la caratteristica di essere non tradizionali e fantasiosi.
In generale quando si deve proporre e risolvere un problema, il docente deve scegliere gli strumenti matematici che si possono usare in base alle conoscenze acquisite dagli studenti. Molto spesso è inutile utilizzare strumenti sofisticati, se con un po' di impegno si può arrivare alla soluzione con mezzi più semplici. Nei problemi che seguiranno darò qualche esempio.
Sicuramente alcuni dei problemi che proporrò possono essere risolti in altro modo e questo dipende dalla fantasia del risolutore.
Nel leggere i problemi su X, ho notato una prevalenza di autori indiani, storici cultori della matematica. Io stesso, in passato, ho avuto la fortuna di collaborare con qualcuno di essi.
Sicuramente la cosa più difficile è proporre nuovi problemi e anche questo dipende dalla fantasia individuale.

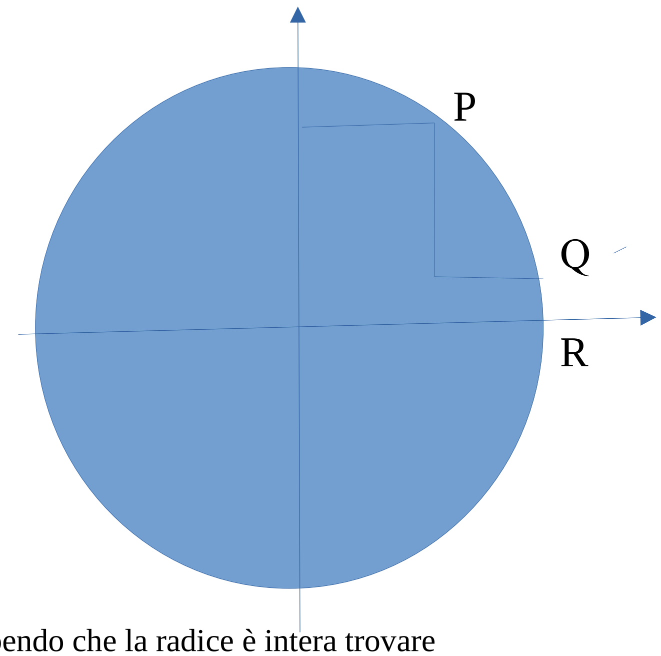
2. Problemi

1) $x - \sqrt{x} = 13 \rightarrow x - (13 / \sqrt{x}) = ?$

2) $x + y + z = 7$; $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $x y z = 5 \rightarrow 1/x + 1/y + 1/z = ?$

3) $x_1 + 1/ x_2 = 4$; $x_2 + 1/ x_3 = 1$; $x_3 + 1/x_4 = 4$; …; $x_{99} + 1/ x_{100} = 4$;
$x_{100} + 1/x_1 =1 \rightarrow x_n = ?$

4)



$P_x = 9 \quad Q_x = 21$

$P_y - Q_y = 16$

$\longrightarrow R = ?$

5) Sapendo che la radice è intera trovare

$x = (506\ 623\ 120\ 463)^{1/7}$

6) Trovare le soluzioni intere positive di

$x + y + z = x\, y\, z$

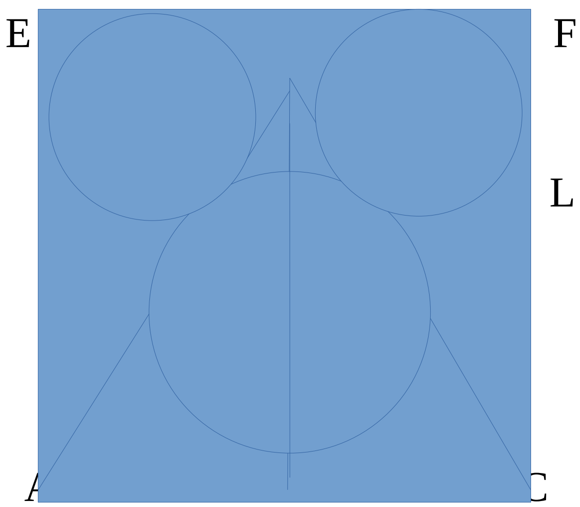
e provare che x, y e z sono distinti e la soluzione è unica

7) L' affermazione " Esistono infinite coppie (a, b) con $a \neq b$ tale che

$a^b = b^a$

è vera o è falsa?

8)

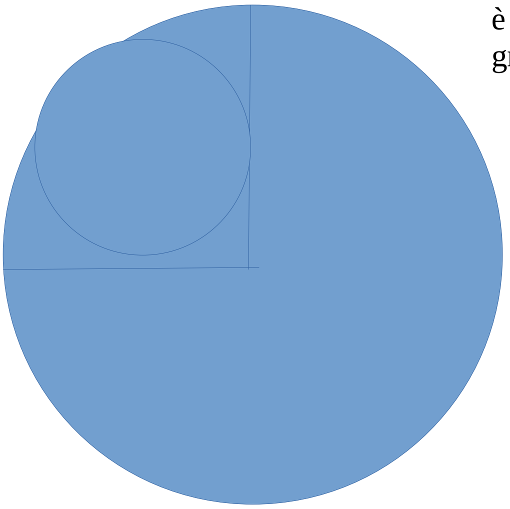


Il triangolo è equilatero, il quadrato ha lato L, le circonferenze sono tangenti; la grande ha raggio R e le piccole hanno raggio r.

$R/r = ?$

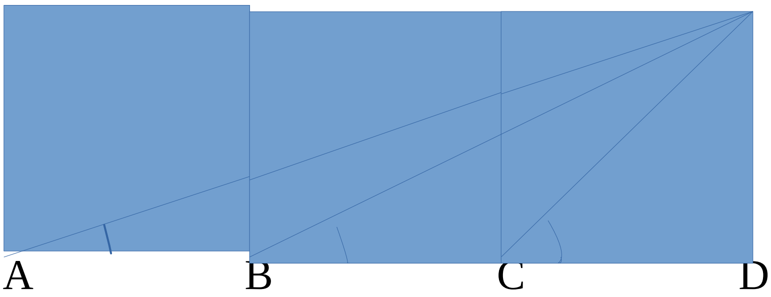
9) La circonferenza piccola di raggio r è tangente al quarto di circonferenza grande, di raggio R.

R/r = ?



10) Gli angoli in A, B e C sono a, b e c e i tre quadrati sono uguali;

a + b+ c = ?



11) Costruire un quadrato magico di ordine 6 , tale che scegliendo a caso sei dei suoi numeri, in righe e colonne diverse mi dia come risultato 90. I numeri 6 e 90 possono cambiare.

3. Soluzioni

Premettiamo che il modo di risolvere i precedenti problemi non è unico e soluzioni diverse e più rapide, sono possibili. Anzi suggeriamo di cercare di guardare la soluzione solo dopo aver fatto qualche tentativo.

1) Posto
$y = \sqrt{x}$
segue $y^2 - y - 13 = 0$ e poi $y = (1 + \sqrt{53}) / 2$
$\rightarrow x = (1 + \sqrt{53}) / 2 + 13 = (27 + \sqrt{53}) / 2$

$\rightarrow x - (13 / \sqrt{x}) = 14.$

2) $49 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2 (x y + x z + y z)$

$\rightarrow x y + x z + y z = 20$

$\rightarrow (x y + x z + y z) / (x y z) = 4$

$\rightarrow 1/x + 1/y + 1/z = 4$.

3) Si esprimono le x_n in funzione di x_1 :

$x_2 = 1/(4 - x_1) \quad x_3 = (4 - x_1) / (3 - x_1) \ldots..$

$x_{2n} = (2 n - 1 - (n - 1) x_1) / (4 n - (2 n - 1) x_1) \quad n = 1\ldots.50$

$x_{2n+1} = (4 n - (2 n - 1) x_1) / (2 n + 1 - n x_1) \quad n = 1\ldots.49$

In particolare
$x_{100} = (99 - 49 x_1) / (200 - 99 x_1)$

e dovendo essere

$x_{100} + 1/x_1 =1$

si ha

$(x_1 - 2)^2 = 0 \rightarrow x_1 = 2$

$\rightarrow x_{2n} = ½ \quad x_{2n+1} = 2$

4) Poniamo $z = Q_y$ risulta $P = (9 ; 16 + z)$ $Q = (21 ; z)$

$\rightarrow R^2 = 9^2 + (16 + z)^2$ e $R^2 = 21^2 + z^2$

$\rightarrow 9^2 + (16 + z)^2 = 21^2 + z^2$

$\rightarrow z = 13 / 4 = 3, 25$

$\rightarrow R = 21, 25.$

5) Sia y = 506 623 120 4,,63; essendo y formato da 12 cifre risulta

$5 * 10^{11} < y < 6 * 10^{11}$

$(5 * 10^{11})^{1/7} < y^{1/7} < (6 * 10^{11})^{1/7}$

$50\,662 * 10^7 < y \quad \rightarrow \quad (50\,662)^{1/7} * 10 < x$

$2^7 = 128 \quad 3^7 = 2187 \quad 4^7 = 16\,384 \quad 5^7 = 78\,125$

Si deduce che x è formato da due cifre e la prima è 4.

Per trovare la seconda cifra, basta osservare che :
41^7 finisce con 1,
45^7 finisce con 5,
la seconda cifra non può essere pari, perché y non lo è.
Rimangono i casi 3, 7 e 9.
Per valutare come finiscono le potenze 3^7, 7^7, 9^7 ci si può aiutare con le classi dei resti modulo 10. Si trova facilmente

$[3^7] = [9] * [9] * [9] * [3] = [7]$
$[7^7] = [49] * [49] * [49] * [7] = [3]$
$[9^7] = \dots = [9]$

Quindi x = 47.

6) Questo quesito è tratto da un esame di ammissione alla scuola Normale di Pisa nel 1974.

Sicuramente una soluzione è la terna (1, 2, 3).
Supponiamo che esista una soluzione formata da due interi positivi uguali x = y ed un terzo z, allora

$2x + z = x^2 z \leftrightarrow x^2 z - 2x - z = 0 \rightarrow \Delta/4 = 1 + z^2$
Trattandosi di numeri interi, dovrà essere $\Delta/4$ un quadrato perfetto e quindi deve esistere un n tale che
$n^2 = 1 + z^2 \leftrightarrow n^2 - z^2 = 1 \leftrightarrow$ può accadere solo se $z = 0$ ed $n = 1$ e ciò porterebbe che la soluzione non è formata da una terna di interi positivi.
Proviamo ora che la soluzione (1, 2, 3) è unica.
Sia (x, y, z) un'altra soluzione e sia $x < y < z$; allora $x + y + z < 3z$ ed essendo $x + y + z = xyz$, risulta $xyz < 3z$ e quindi $xy < 3$.
Trattandosi di naturali questo può essere vero solo se x = 1 ed y = 2.

7) Intanto $2^4 = 4^2$ è una soluzione.

Il 29/6/1728 D. Bernoulli in una lettera a C. Goldback afferma: non ci sono altre soluzioni con a, b numeri naturali, ma ne esistono infinite nell'insieme dei razionali e precisamente basta porre

$a = (1 + 1/n)^n \qquad b = (1 + 1/n)^{n+1}$

Si verifica facilmente.

Per n =1 si ottiene a = 2 e b = 4.
Per n = 2 si ottiene a = 9 / 4 e b = 27 / 8

C. Goldback il 31/1/1729 risponde “ ne ho trovate altre non razionali”
Poniamo b = v a con v ≠ 1.

$$a^{va} = (v\,a)^{a} \;\leftrightarrow\; a^{v} = v\,a \;\leftrightarrow\; a^{v-1} = v \;\leftrightarrow\; a = v^{1/(v-1)} \rightarrow b = v^{v/(v-1)}$$

Per esempio per v = 3 si ha

$a = \sqrt{3} \quad b = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

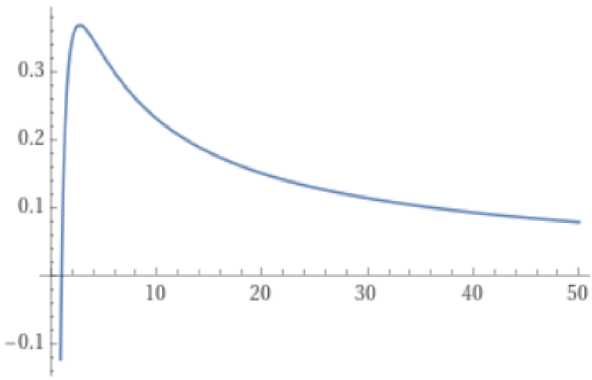
Un altro modo di affrontare il problema è usando i logaritmi:

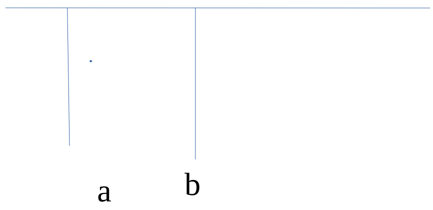
$b \ln a = a \ln b \;\leftrightarrow\; \ln a / a = \ln b / b$.

Considerando la funzione $f(x) = \ln x / x$

basta trovare a, b > 0 tali che f(a) = f(b).

Dal grafico si vede che esistono infinite soluzioni.





8) Sia L il lato del quadrato ed h l’altezza del triangolo equilatero, risulta

$h = L \operatorname{sen} 60° = L\sqrt{3}/2 \qquad R/(L/2) = \operatorname{tg} 30° = 1/\sqrt{3} \;\rightarrow R = (L\sqrt{3})/6$

Sia B il vertice superiore del triangolo. Prolungando C B sia M l’intersezione con il lato superiore E F del quadrato; risulta

$MC \cos 30° = L \rightarrow MC = 2\sqrt{3}\,L/3$; $MF = MC \operatorname{sen} 30° = \sqrt{3}\,L/3$
L’area del triangolo MFC è

$\phi = MF * L/2 = \sqrt{3}\,L^2/6$
da cui posto $p = MF + FC + CM = L(1+\sqrt{3})$ si ricava

$r = 2\,\phi / p = (3 - \sqrt{3})\, L / 6$ ed infine $R / r = (1 + \sqrt{3}) / 2$.

9) Se O è il raggio del cerchio grande ed O' quello del cerchio piccolo, allora

$(O\,O')^2 = 2\, r^2$

$R = r + O\,O' = r\,(1 + \sqrt{2})$

$R/r = 1 + \sqrt{2}$.

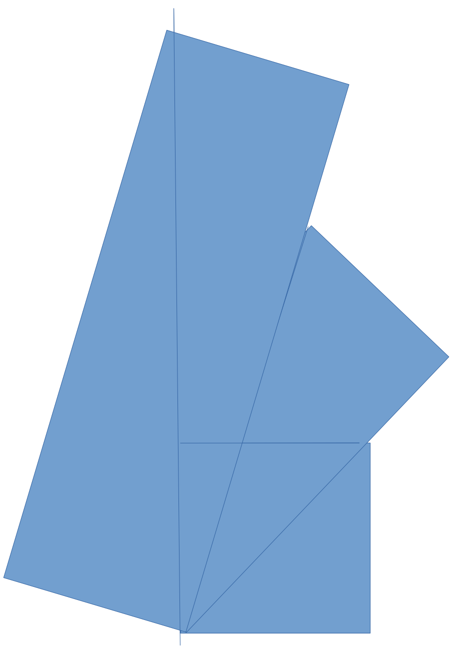
10) Possiamo supporre che i quadrati abbiano lato L = 1. Si ha:

$\text{tg } c = 1$, $\text{tg } b = 1/2$, $\text{tg } a = 1/3 \rightarrow$

$a + b + c = \text{arctg } 1/3 + \text{arctg } ½ + \text{arctg } 1 = 90°$.

Un altro modo di risolvere il problema, senza l'uso delle funzioni trigonometriche, è il seguente.

Si disegna prima un quadrato di lato 1, poi un rettangolo di lati 1 e 2, sulla diagonale del primo quadrato e poi un rettangolo di lati 1 e 3, sulla diagonale del rettangolo precedente (vedi figura)



Con tale costruzione si sommano

i tre angoli a b e c, ottenendo 90°.

11) Il quadrato magico è una matrice quadrata di numeri naturali, di solito con la caratteristica che la somma dei numeri sulle righe, colonne e

diagonali principali è costante. In questo esercizio si chiede di costruire un quadrato magico di ordine 6 tale che scegliendo a caso i numeri su righe e colonne diverse, il risultato sia 90. Come già detto il metodo descritto è del tutto generale, quindi 6 e 90 possono cambiare.

Si prendono 6 numeri X_i la cui somma sia X e 6 numeri Y_j la cui somma sia Y , in modo che X + Y = 90, e si costruisce la griglia

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Y_1	A_{11}					
Y_2			A_{23}			
Y_3						
Y_4						
Y_5				A_{54}		
Y_6						A_{66}

Si pone

(1) $A_{ji} = Y_j + X_i$

Esempio

Siano X_i = 4, 6, 8, 9, 13, 10 $\rightarrow$ X = 50

Y_j = 1, 8, 7, 6, 5, 13 $\rightarrow$ Y = 40

	4	6	8	9	13	10
1	5	7	9	10	14	11
8	12	14	16	17	21	18
7	11	13	15	16	20	17
6	10	12	14	15	19	16
5	9	11	13	14	18	15
13	17	19	21	22	26	23

Ovviamente il quadrato magico che si mostra non è il precedente, ma il seguente:

5	7	9	10	14	11
12	14	16	17	21	18
11	13	15	16	20	17
10	12	14	15	19	16
9	11	13	14	18	15
17	19	21	22	26	23

altrimenti si scopre il metodo di costruzione.

Scegliendo ad esempio, nella prima riga 14, nella seconda riga 16, nella terza riga 11, nella quarta riga 15, nella quinta riga 11 e nella sesta riga 23, si ha

$14 + 16 + 11 + 15 + 11 + 23 = 90$

La spiegazione del metodo è molto semplice, basta tener presente la (1), infatti i numeri precedenti corrispondono a:

$$A_{15} + A_{23} + A_{11} + A_{44} + A_{52} + A_{66} = Y_1 + X_5 + Y_2 + X_3 + \ldots + Y_6 + X_6 =$$

$$= Y + X = 90.$$

4. Conclusioni

Nell'epoca attuale il computer è un ausilio che quasi tutti usiamo. In molti casi è indispensabile per risolvere alcuni problemi di calcolo. Un esempio è il calcolo delle cifre decimali di π o di e. Attualmente di π si conoscono almeno 63 trilioni di cifre decimali. Su Gravità Zero.it , ne sono riportate centomila. Ovviamente tali calcoli sono possibili solo con super computer.
Un altro esempio di problemi, in cui il computer è estremamente utile, se non indispensabile, è la ricerca di potenze "sorprendenti", come le seguenti:

$(1713 + 2377 + 1464)^3 = 1713\ 2377\ 14\ 64$
$(1212 + 1388 + 2349)^3 = 1212\ 1388\ 2349$
$(1287 + 1113 + 2649)^3 = 1287\ 1113\ 2649$
$(1623 + 2457 + 1375)^3 = 1623\ 2457\ 1375$
$(3689 + 1035 + 2448)^3 = 3689\ 1035\ 2448$
$(1713 + 2377 + 1464)^3 = 1713\ 2377\ 1464$
…….
$(70233194 + 05212622 + 13443072)^3 = 70233194\ 05212622\ 13443072$

Avere un' idea di come fare per trovare altre uguaglianze di questo tipo è una proposta che faccio a chi ha avuto la pazienza di leggere questa nota .
Termino ricordando che esistono problemi tuttora irrisolti, nonostante la semplice formulazione; uno fra tutti è la congettura di Collatz, nota anche come "Problema 3n +1". La sua formulazione è semplice:
a) si parte con un intero positivo n
b) se n è pari, si divide per 2,
c) se n è dispari, si moltiplica per 3 e si aggiunge 1,
d) ripetendo i passi b) e c) col risultato, il processo termina con 1.
Esempio :
7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20,10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.
Questa congettura, enunciata da Lothar Collatz nel 1937 è tuttora irrisolta, pur essendo state scritte numerose pubblicazioni sull'argomento. Io stesso ho dato un piccolo contributo [4] .

Bibliografia

[1] **G. Bisconcini** . Geometria elementare. Angelo Signorelli – Roma

[2] **M. Gardner .** Enigmi e giochi matematici. Bur Varia 2021

[3] **L. Santoboni.** Trigonometria piana. Petrini . Torino

[4] **E. Barone.** Una argomentazione euristica probabilistica sulla successione di Collatz, Italian J. of pure and applied Mathematics **4**, (1998), 151-153.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 5, No 1 (2022), 65-76

Le costruzioni geometriche e lo sviluppo del pensiero computazionale: proposta per la scuola primaria con l'aiuto dalla storia della matematica

Silvia Cerasaro

Università Tor Vergata di Roma, Scuola di dottorato, Dipartimento di Matematica
cerasaro@axp.mat.uniroma2.it

Sunto

Lo sviluppo del pensiero computazionale è uno dei traguardi previsti per la scuola primaria. La geometria euclidea offre, attraverso le costruzioni geometriche, un valido strumento per poterlo fare. In questo articolo si mostrerà un esempio di come leggere e trasformare in azione una procedura da un testo storico attraverso riflessioni fatte con i compagni e con l'insegnante, e come rinforzare l'algoritmo utilizzato con riga e compasso attraverso la verbalizzazione. Il lavoro effettuato con il disegno è affiancato all'uso di un software di geometria dinamica e alla piegatura della carta a favore dell'apprendimento personalizzato e all'integrazione delle diverse risorse, fondamentale per la promozione di una forma di didattica sia procedurale che esplorativa.

Parole chiave: Costruzione geometrica, Elementi di Euclide. riga, compasso, Geogebra, carta.

1. Introduzione

La mia esperienza nel mondo della scuola mi porta a pensare che il grande insieme dei docenti del liceo si divida in due grandi gruppi: quelli che dedicano del tempo allo studio della geometria euclidea nel biennio delle scuole superiori e quelli che preferiscono soffermarsi maggiormente su aspetti algebrici e procedurali affinché ci sia una preparazione consolidata prima dello studio dell'analisi più avanti. Ammettendo di far parte del primo gruppo, ritengo che lo studio della geometria euclidea è fondamentale in quanto permette di comprendere meglio cosa siano l'assiomatica ed il ragionamento ipotetico-deduttivo ed allena lo studente al concetto di dimostrazione di un risultato. Durante i miei anni di insegnamento, alla prima lezione in una classe seconda di un liceo ho voluto indagare sul modo di intendere la geometria proponendo di dimostrare che *la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°*. La reazione degli studenti è stata inizialmente silenzio, e poi tanti sguardi interrogativi tra loro e tra me e loro. Dalle loro risposte alle mie domande capì che per loro fare geometria

significava calcolare lunghezze, aree e applicare formule e non dimostrare, tanto da affermare che *non serve farlo perché si vede,* ed ebbi implicitamente anche l'opinione sulla geometria euclidea del collega che mi aveva preceduta. Gli studenti ignoravano la vera essenza della geometria euclidea, la loro idea era quella di una geometria legata alle forme e alle formule, che Laura Catastini chiama "formicidio"[1], ovvero una sorta di omicidio della bellezza della geometria stessa. Da questa esperienza ho maturato l'idea che fare la geometria "senza calcoli e formule" sia necessario per comunicare allo studente la sua vera natura, che può essere considerata, invece, un discorso sulle forme, una metodologia di esplorazione basata sul ragionamento a partire da ipotesi da verificare e confutare, alla base del metodo scientifico. Quando cominciai ad insegnare alla scuola secondaria di primo grado mi proposi di usare le costruzioni euclidee "elementari" ancor più perché mi resi conto che gli studenti non erano in grado di descrivere, ad esempio, un percorso per partire da un luogo fino ad arrivare in un altro, non riuscivano neanche a descrivere il procedimento per preparare un dolce, mostrando poco allenamento con il pensiero computazionale. Nelle riunioni di dipartimento con i colleghi della scuola primaria è emerso che anche gli alunni più piccoli avevano la stessa problematica, alla quale cercavano di porre rimedio decidendo di portare in classe attività di coding tramite opportuni siti (www.code.org) o software (scratch). La mia proposta per lo sviluppo del pensiero computazionale è presentare le costruzioni geometriche descritte negli *Elementi* di Euclide anche negli ultimi anni della scuola primaria, considerando la versione di Federigo Commandino (1575), una delle prime edizioni scritte in volgare italiano. Esse possono essere realizzate con diversi strumenti e metodologie, partendo dalla manipolazione per arrivare alla loro verbalizzazione, per poi inventarne altre, anche da condividere con i compagni. Le attività ideate sono previste dalle Indicazioni Nazionali per il curricolo. Nei traguardi per lo sviluppo delle competenze per la scuola primaria si legge:
(L'alunno):

- descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina figure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo.
- costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista degli altri;
- sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, attraverso esperienze significative, che gli hanno fatto intuire come gli strumenti matematici che ha imparato ad utilizzare siano utili per operare nella realtà.

Invece, nella sezione "Spazio e figure" degli Obiettivi Specifici di Apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria, si legge:

- Descrivere, denominare e classificare figure geometriche, identificando elementi significativi e simmetrie, anche al fine di farle riprodurre da altri;
- Costruire e utilizzare modelli materiali nello spazio e nel piano come supporto a una prima capacità di visualizzazione;

[1] Catastini, 2017, p. 87

- Confrontare e misurare angoli utilizzando proprietà e strumenti;
- Utilizzare e distinguere fra loro i concetti di perpendicolarità, parallelismo, orizzontalità, verticalità.

L'utilizzo delle costruzioni geometriche è giustificato dalle attuali teorie neuroscientifiche secondo le quali il movimento è il nostro modo originario di conoscere il mondo, per cui risulta essere il principio dell'apprendimento [Fogassi, 2022]. L'importanza della realizzazione delle costruzioni con riga e compasso a scuola, in particolare nel Liceo, viene sottolineata anche all'Unione Matematica Italiana, che di recente ha anche pubblicato un volume per gli insegnanti delle scuole superiori in merito[2]. Introdurle attraverso l'uso della storia della matematica permette sia agli insegnanti che agli alunni di avanzare riflessioni epistemologiche grazie al dépaysement historique [Barbin, 1997], favorendo l'apprendimento discorsivo (discursive learning) negli alunni [Sfard, 2015].
Le attività descritte in seguito sono state svolte in una classe prima della scuola secondaria di primo grado ma ritengo, in base a quanto detto, che possano essere proposte anche in una classe quinta della scuola primaria.

2. Prima attività: la costruzione del triangolo equilatero

Ho avuto la possibilità di portare in classe la versione cartacea degli Elementi di Commandino, suscitando interesse e stupore negli alunni della secondaria di primo grado. In altri casi, invece, ho fatto in modo di portare agli studenti delle immagini tratte dai codici presenti nelle biblioteche digitali sul web che fossero presentate in modo da sembrare il più possibile vicine ad un vecchio libro del 1500, affinché ciascuno studente avesse avuto il suo "piccolo tesoro": avere a disposizione un proprio supporto, quaderno o taccuino per gli appunti, relativo all'attività da svolgere, anche "bello" esteticamente, cattura l'attenzione dell'alunno e, quindi, lo motiva all'apprendimento, come suggerisce, per altri contesti, Maria Montessori [1934][3]. Gli alunni potrebbero avere a disposizione un quaderno "speciale" fatto di fogli bianchi, senza righe e quadretti che ha come copertina un'immagine tratta dal testo storico preso in considerazione, su cui formalizzare quanto svolgono nelle attività proposte, utilizzato come un diario.
I prerequisiti allo svolgimento di una lezione come quella che mi appresto a descrivere sono:

- conoscenza degli enti fondamentali della geometria;
- conoscenza delle figure geometriche;
- conoscenza delle proprietà del triangolo equilatero e del cerchio;
- utilizzo del compasso.

[2] Stumbo, (2023), Costruzioni con riga e compasso, UMI
[3] rivisitato da Scoppola, 2012, p.43

Un eventuale altro prerequisito potrebbe essere il saper scomporre un triangolo equilatero, un rombo ed un esagono in altre figure, come in Montessori [1934][4]: nel caso in cui non siano state proposte attività di questo tipo in passato, questa potrebbe essere l'occasione per poterle realizzare, a favore dell'apprendimento visivo.

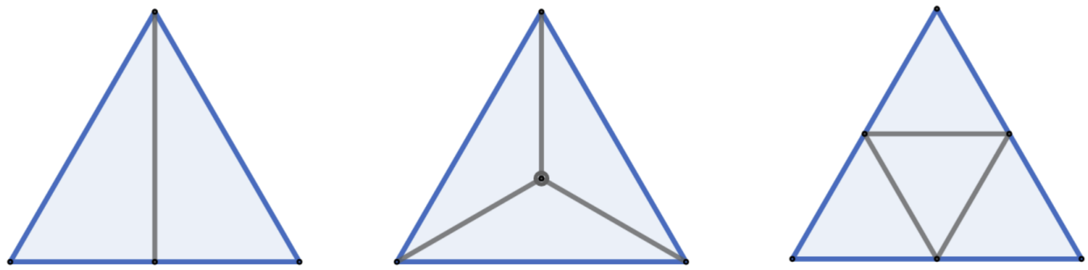
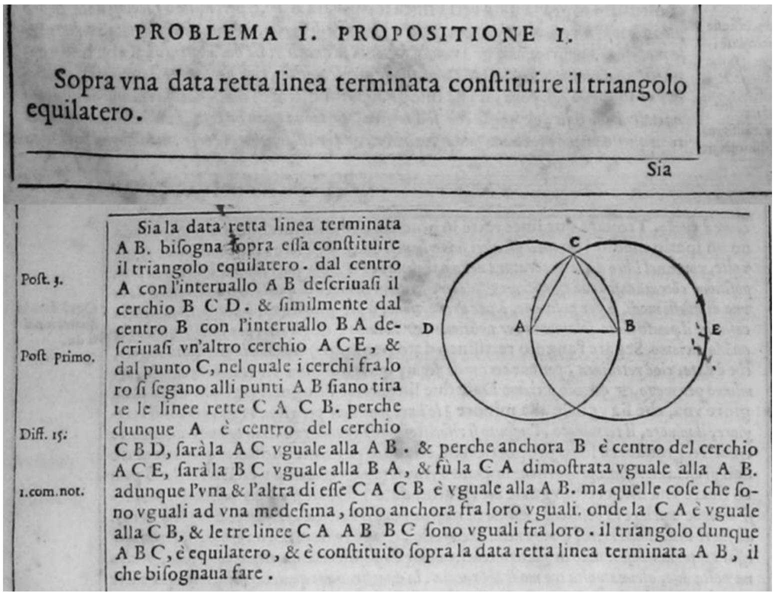


Figura 1: La scomposizione di un triangolo equilatero.

2.1. Riflessioni sulla lingua dalla lettura di un testo storico di matematica

La lezione ha inizio annunciando agli alunni che potrebbero vedere com'è un libro antico e con quale grafia e lingua sia stato scritto. Si comincia con il mostrare l'immagine della proposizione I.1 degli Elementi della versione di Commandino [Figura 2] chiedendo a ciascuno di provare a leggere in maniera autonoma. Nel farlo, i miei alunni mi chiedevano di leggere le parole "propositione", "vna", "interuallo", "coʃtituire", "biʃogna", "eʃʃa", "anchora", ed altri vocaboli, fin quando qualcuno affermò che le parole usate avevano gli stessi significati di oggi, con alcuni cambiamenti nell'ortografia, ovvero, usando le loro parole, la *u è invertita con la v, la f senza trattino è la s, e alcune volte la t si legge z, la parola ancora è formata da anche+ora.* Questa attività di esplorazione e scoperta ha reso consapevoli gli alunni dell'evoluzione della nostra lingua e dell'esistenza di un tempo passato che condivide alcuni elementi con quello presente. Hanno aggiunto al loro "bagaglio" conoscenze non specificatamente matematiche ma che arricchiscono la conoscenza matematica [Radford, Santi, 2022].

[4] Montessori, 1934, in Scoppola 2012, p. 79



PROBLEMA I. PROPOSITIONE I.

Sopra vna data retta linea terminata conſtituire il triangolo equilatero.

Sia

Poſt. 3. Poſt primo. Diff. 15. 1.com.not.

Sia la data retta linea terminata A B. biſogna ſopra eſſa conſtituire il triangolo equilatero. dal centro A con l'interuallo A B deſcriuaſi il cerchio B C D. & ſimilmente dal centro B con l'interuallo B A deſcriuaſi vn'altro cerchio A C E, & dal punto C, nel quale i cerchi fra loro ſi ſegano alli punti A B ſiano tirate le linee rette C A C B. perche dunque A è centro del cerchio C B D, ſarà la A C vguale alla A B. & perche anchora B è centro del cerchio A C E, ſarà la B C vguale alla B A, & fù la C A dimoſtrata vguale alla A B. adunque l'vna & l'altra di eſſe C A C B è vguale alla A B. ma quelle coſe che ſono vguali ad vna medeſima, ſono anchora fra loro vguali. onde la C A è vguale alla C B, & le tre linee C A A B B C ſono vguali fra loro. il triangolo dunque A B C, è equilatero, & è conſtituito ſopra la data retta linea terminata A B, il che biſognaua fare.

Figura 2: Proposizione I.1 della versione degli Elementi di Euclide di Federigo Commandino del (1575)

Dopo la familiarizzazione con questo linguaggio ed aver annotato sul loro quaderno "speciale" quanto appreso in merito all'italiano del Sedicesimo secolo, si passa alla comprensione geometrica di quanto scritto.

2.2. Imparare costruendo

Durante la lettura della proposizione I.1, gli alunni notano una continua corrispondenza con il diagramma adiacente al testo. Secondo le neuroscienze, il nostro cervello percepisce separatamente il testo dall'immagine adiacente ma è in grado di unire i significati che ne emergono, costruendo un apprendimento duraturo [Fogassi, 2022]. Di questa modalità di apprendere forse ne erano consapevoli anche gli antichi Greci, sicuramente lo era Leonardo Pisano Fibonacci, che lo specifica nel prologo del Liber Abbaci [Fibonacci, 1228, in Boncompagni, 1857].

Dopo la lettura, si chiede di cosa si tratta, se ne discute fino a chiedere agli alunni di fare autonomamente la costruzione, ognuno sul proprio foglio bianco, come consiglio per lo studio proposto della geometria. Qualcuno riesce a ripeterla, altri trovano difficoltà nell'uso del compasso, altri invece si mostrano disorientati. In questa situazione il peer tutoring è fondamentale per constatare l'avvenuto apprendimento, sistemarlo o generarlo, laddove non sia avvenuto. La costruzione è riportata sul loro quaderno "speciale" non appena riescono a realizzarla e viene verbalizzato il procedimento per iscritto, passaggio dopo passaggio, solo dopo averla raccontata verbalmente con precisione. Per verificare la correttezza della loro descrizione, si può chiedere, come feci io, di pronunciare il rispettivo comando di modo che io avessi potuto eseguirlo fedelmente alla lavagna: sarei stata bloccata se avessero constatato una eventuale dimenticanza, per poi proseguire dopo la loro correzione. Il procedimento inverso, ovvero partire dal testo e arrivare alla costruzione, è fondamentale per la verifica della correttezza della verbalizzazione stessa. Nel caso di alunni con difficoltà nella verbalizzazione, si possono consegnare i comandi schematizzati come in figura 3 chiedendo se permettono di arrivare alla stessa costruzione.

Traccia un segmento AB;
Disegna una circonferenza C_1 di centro A e raggio AB;
Traccia una circonferenza C_2 di centro B e raggio BA;
Chiama C uno dei punti d'intersezione tra le due circonferenze;
Unisci C con A e B;
Verifica che ABC è un triangolo equilatero misurando i suoi lati (meglio usare un compasso che un righello!) e misurando l'ampiezza dei suoi angoli.

Figura 3: procedura schematica per realizzare la costruzione geometrica di un triangolo equilatero.

In seguito, viene richiesto agli alunni di lavorare a coppie: ciascuno di loro, a turno, inventa una costruzione geometrica, la verbalizza, senza mostrarla al proprio compagno: legge i propri comandi al compagno, che dovrà realizzarla. Al termine, si confrontano le costruzioni geometriche che dovrebbero essere collegate ad una sola verbalizzazione, per controllare se siano simili o se c'è qualche elemento differente e, se si, capire perché è stato tracciato in quel modo e non in quello richiesto. Si procede in maniera analoga per la costruzione dell'altro alunno della coppia. Questa attività permette di sviluppare lo spirito critico e imprenditoriale, incita ad imparare ad imparare, oltre a raffinare delle competenze sociali, come previsto dalle competenze chiave di cittadinanza. Solo dopo aver lavorato attraverso il cooperative learning si può passare al lavoro individuale, realizzando la stessa costruzione su geogebra.

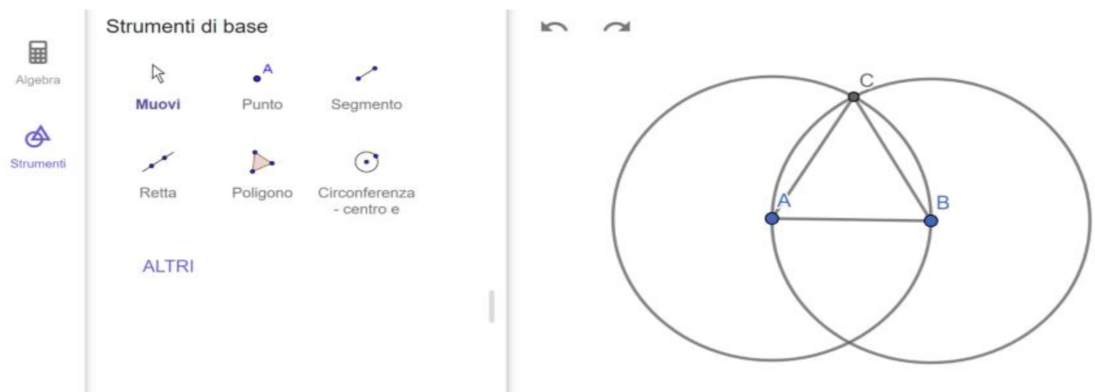


Figura 4: Schermata del software Geogebra per la realizzazione del triangolo equilatero

Si utilizzano gli strumenti di base: "circonferenza centro e punto", la prima volta con centro A e passante per B, la seconda con centro B e passante per A, che si incontrano in due punti. Attraverso il comando "punto" si indicherà una delle due intersezioni, ottenendo C: con il comando "segmento" di tracceranno, uno alla volta AB, BC e CA, ottenendo un triangolo. Per verificare che è equilatero si può procedere in due modi: la prima consiste nel cercare il menù "misure" per utilizzare il comando "distanza o lunghezza", per misurare la lunghezza dei lati, sottolineando che si tratta di raggi due a due uguali della stessa circonferenza e che quindi risulteranno tutti e tre uguali perché *cose uguali a cose uguali sono uguali tra loro*, una delle nozioni comuni che corrisponde all'attuale proprietà transitiva. La seconda, invece, sfrutta dal menù "poligoni" il comando "poligono regolare", che chiederà di selezionare gli estremi del poligono e il numero dei lati da avere: facendo attenzione all'ordine di selezione dei punti (da sinistra verso destra per ottenere il poligono nel semipiano superiore, se si considera il triangolo equilatero con terzo vertice quello della figura 4), si noterà che il triangolo equilatero disegnato è perfettamente sovrapposto a quello realizzato con la nostra costruzione geometrica. Questa piccola programmazione è una forma di avvicinamento al software di geometria dinamica che risulterà uno strumento di conoscenza per attività future.

3. Seconda attività: la costruzione dell'esagono

Si prende di nuovo in considerazione la costruzione del triangolo equilatero, ponendo agli alunni la seguente domanda: *Se chiamo E il secondo punto d'intersezione tra le due circonferenze, cosa posso dire del quadrilatero ACBE?* Le figure geometriche sono state già prese in considerazione negli anni precedenti, per cui gli studenti saranno in grado di riconoscere un rombo, ottenuto dalla composizione di due triangoli equilateri. Per cui si può chiedere di verbalizzare anche la costruzione del rombo, come fatto prima, e svolgere la stessa cosa su geogebra, facendo notare che il rombo in questione è un caso particolare poiché generalmente quei triangoli considerati sono isosceli.

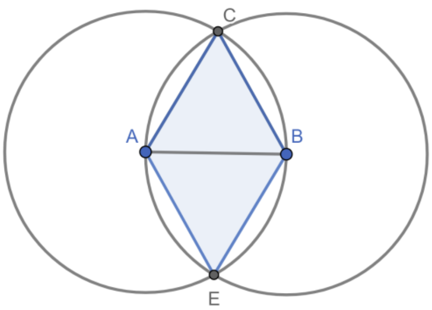


Figura 5: Costruzione geometrica del rombo a partire da quella del triangolo equilatero.

Si continua la ricerca di altre figure geometriche partendo sempre dalla costruzione del triangolo equilatero, consegnando agli alunni i comandi riportati nella figura 6.

Prolunga il raggio BA dalla parte di A e chiama D l'intersezione con la circonferenza C_1;
Disegna la circonferenza C_3 di centro D e raggio DA;
Chiama F e G i punti d'intersezione di C_3 con C_1;
Unisci i punti trovati presenti sulla circonferenza C_1: verifica che si tratta di un esagono con compasso e goniometro;
Quali sono le figure geometriche intervenute nella costruzione geometrica dell'esagono?____
____
____
____
____
Scomponi l'esagono nelle figure elencate, mostrando come ottenerlo con tutte le composizioni possibili.

Figura 6: Procedura schematica per proseguire la costruzione già svolta per arrivare alla costruzione dell'esagono regolare.

Le domande poste nel compito presentato prevedono uno studio sulla composizione dell'esagono ottenuto: in altre parole si chiede come poter tassellare l'esagono con i triangoli equilateri ed i rombi visti precedentemente e di considerare tutte le combinazioni possibili, come suggerisce anche la Montessori [1934]. Per cui, come mostrato in figura 7, un esagono potrà essere visto come la somma di 6 triangoli equilateri, 3 rombi, due rombi+2 triangoli equilateri, un rombo+4 triangoli equilateri.

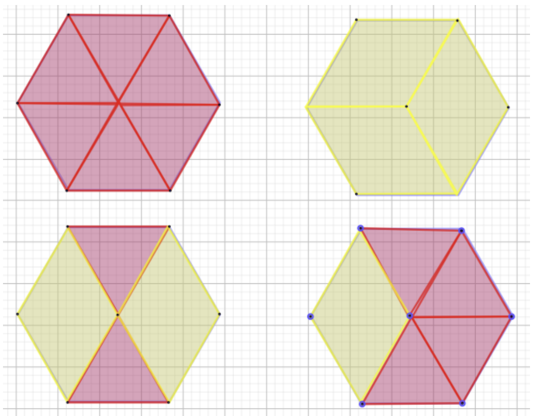
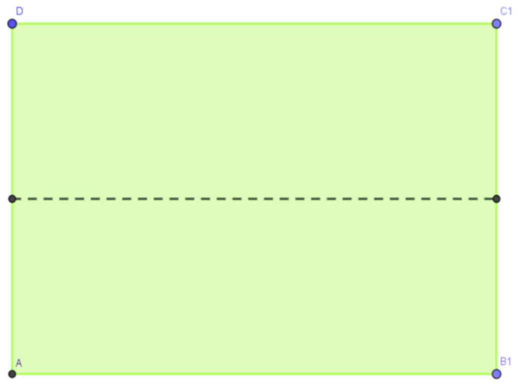
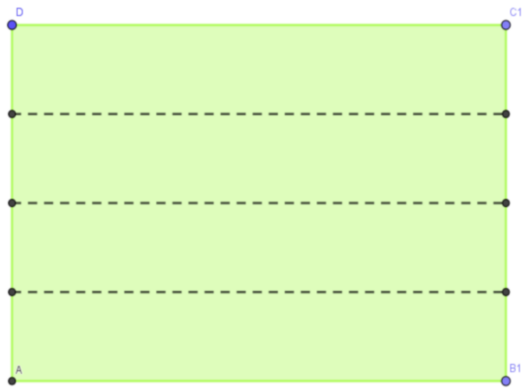
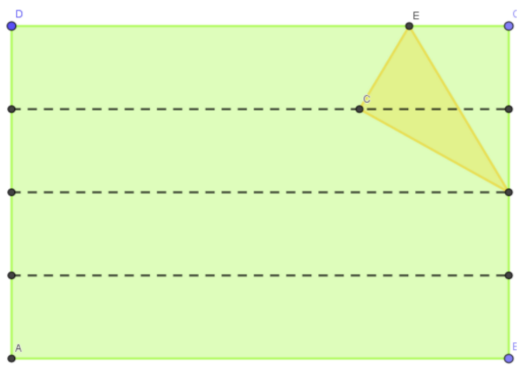


Figura 7: Scomposizione dell'esagono.

Anche la costruzione geometrica dell'esagono sarà annotata sul quaderno "speciale", corredata anche da opportuni disegni, dopo averla realizzata con Geogebra, utilizzando un ulteriore comando, "semiretta" e ripetendo l'uso degli altri.

3.1. La costruzione dell'esagono con la piegatura della carta

Un'ultima attività sull'esagono che potrebbe essere proposta agli alunni è la realizzazione di un esagono regolare attraverso la piegatura di un foglio rettangolare A4 del colore preferito dell'alunno tra quelli presentati. Viene richiesto di porre il foglio consegnato di modo che il lato più lungo sia disposto in orizzontale. Di seguito è riportata una tabella con i comandi corrispondenti all'azione di piegatura della carta, accompagnata da domande relative alla riflessione sui significati matematici coinvolti.

Sovrapponi, rispettivamente, i lati AB_1 e DC_1, piega il foglio e riaprilo. Cosa si ottiene?	
Sovrapponi gli stessi lati sulla piega appena ottenuta, piega di nuovo e apri ancora il foglio. Cosa trovi?	
Porta il vertice C_1 sulla prima piega in alto e fai una piega che termina all'estremità destra della piega centrale, senza riaprire il foglio. Cosa ottieni?	

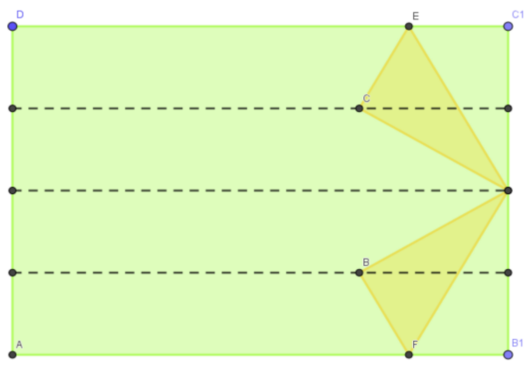
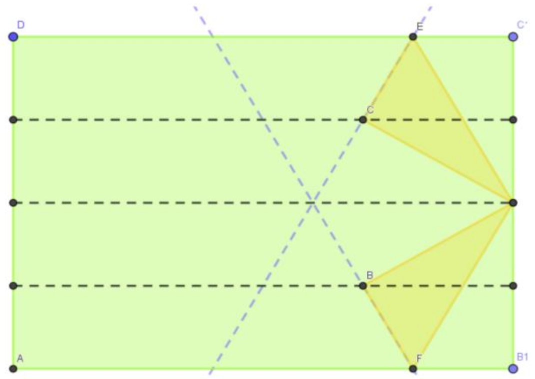
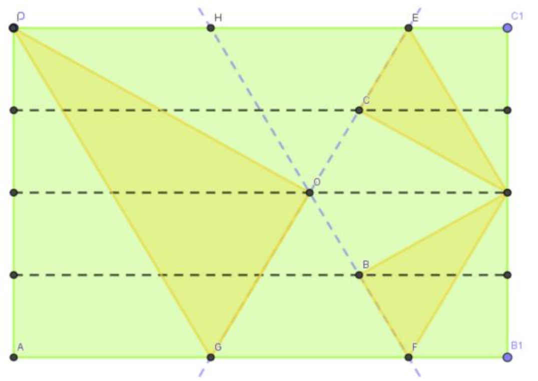
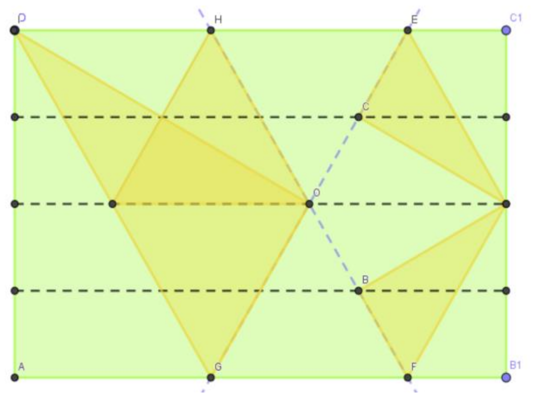
Fa la stessa cosa del passaggio precedente con il vertice B_1. Cosa puoi dire su ciò che hai ottenuto? Calcola l'ampiezza dell'angolo ottenuto a destra del foglio.	
Piega il foglio lungo CE, riapri e fa la stessa cosa lungo FB. Aprendo il foglio, cosa noti?	
Porta il vertice A su O in modo da sovrapporre AG su GO e piega. Cosa puoi dire sul triangolo ottenuto?	
Porta il vertice D su O in modo DH sia sovrapposto ad HO. Cosa ottieni?	

Tabella 1: Passaggi per la realizzazione di un esagono da un foglio di carte rettangolare

In questa attività intervengono diversi contenuti riguardo la geometria: si ottengono delle rette parallele, si sfrutta la sovrapposizione di figure per dimostrare la loro congruenza, si arriva a calcolare l'ampiezza degli angoli sfruttando che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°. Si può notare anche la presenza delle diverse tipologie di scomposizione dell'esagono grazie alla presenza delle pieghe. Questa costruzione è basata sul movimento delle mani per arrivare alla conoscenza che si raggiunge nella mente.

Conclusioni

In questo articolo ho cercato di illustrare la mia proposta per fare attività di coding utilizzando la geometria euclidea che ha la potenzialità di sviluppare il pensiero computazionale e pone le basi per lo studio di altre aree della matematica. L'uso della storia della matematica permette, attraverso il dialogo tra pari e con l'insegnante, di riflettere sugli apprendimenti pregressi per poterli sistemare e renderli duraturi. In particolare, le costruzioni geometriche permettono a ciascuno studente di esplorare la matematica attraverso procedimenti ritualistici, che favoriscono la trasposizione di alcuni atteggiamenti anche in altri contesti, a favore dello sviluppo cognitivo della persona. Sarebbe interessante il confronto con gli insegnanti che si apprestano a sperimentare la mia proposta nella scuola primaria, oppure dopo averla svolta, per conoscere eventuali modifiche apportate, criticità emerse, punti di forza rilevati, per riflettere insieme sulla risposta motivazionale e cognitiva degli alunni.

Bibliografia

Barbin, E. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques: Pourquoi? Comment?. Bulletin AMQ, 37(1), 20-25

Boncompagni, B. (Ed.). (1857). Liber abbaci (Vol. 1). Tipogr. delle Scienze Matematiche e Fisiche

Catastini L. (2017), Noi e la matematica, Società editrice Il Mulino

Commandino M. F., (1575) Degli elementi di Euclide libri quindici, Urbino Domenico Frisolino

Fogassi L., (2022), Tocca, corri, impara, in "Il Mondo Montessori", Opera Montessori & La Repubblica

Montessori M., (1934), Psicogeometria, Scoppola B. (a cura di), 2012, Opera Nazionale Montessori

Radford, L., Santi, G. (2022), Learning as a critical encounter with the other: prospective teachers conversing with the history of mathematics. ZDM–Mathematics Education, 54(7), 1479-1492.

Sfard, A. (2015). Learning, commognition and mathematics. The Sage handbook of learning, 129-138.

Stumbo F., (2023), Costruzioni con riga e compasso, UMI

Breve presentazione degli autori

Enzo Barone Ha lavorato presso il Laboratorio di ricerche elettroniche dell'Olivetti in Lombardia dal 1961 al 1964. Si è laureato in matematica a Bari nel 1969 ed ha svolto attività di ricerca nella stessa università per 6 anni con la qualifica di assistente ordinario di Analisi matematica. Trasferitosi all'università di Lecce, ha continuato la sua attività di ricerca anche nel campo della probabilità e statistica, della teoria della misura e della fisica matematica con la qualifica di professore associato. Visiting ad Oxford, Grecia, Calcutta, Brasile e Sud Africa. Ha partecipato a numerosi congressi internazionali ed è autore di oltre 50 pubblicazioni. In pensione, ufficialmente, dal 2009.

Silvia Cerasaro Laureata in Matematica presso l'Università degli studi di Roma "Tor Vergata". Abilitata all'insegnamento alla scuola dell'Infanzia, alla scuola Primaria, alla classe di concorso A028 (Matematica e Scienze) per la scuola di primo grado, alle classi di concorso A026 (Matematica) e A027 (Matematica e Fisica) nella scuola di secondo grado. Insegna presso il Liceo Pietrobono di Alatri (FR), ora in esonero dal servizio per la frequenza al Dottorato di Ricerca in Didattica della Matematica. Collabora con Progetto Fibonacci ed alcune associazioni sulla didattica della matematica, tiene corsi di formazione per insegnanti ed è stata relatrice a vari convegni e seminari. Ha pubblicato diversi articoli sull'uso della storia delle matematiche nella didattica.

Luciana Delli Rocili Dal 1982 al 2021 docente di ruolo di Scuola Primaria, vincitrice di concorso. Ha fatto parte dei gruppi di Ricerca diretti dal Prof. Antonio Maturo per circa dieci anni. Ha collaborato con le attività di Ricerca Internazionali dello stesso Docente, assistendo, per tirocini e per ricerche, nei vari anni, studenti provenienti dall'estero in Progetti Erasmus, in particolare provenienti dall'Austria, dalla Romania, dalla Spagna. Autore di 14 articoli scientifici sulla didattica della Probabilità nella Scuola del Primo Ciclo. Ha partecipato, in qualità di relatore, a vari Convegni in Italia e all'estero. Attualmente è vicepresidente di Mathesis Abruzzo. Fa parte dei chief editor della rivista "Mondo Matematico e Dintorni".

Bruno Iannamorelli Insegnante di Matematica e Fisica nei licei per oltre trent'anni, dal 2010 al 2021. È stato docente a contratto di Didattica della Matematica presso il corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria dell'Università Dell'Aquila. È autore di diverse pubblicazioni riguardanti la didattica e la divulgazione della Matematica: l'ultima è *La misteriosa prova del nove*, edita da Dedalo ed. Si occupa in particolare di argomenti di storia della Matematica che possano facilitare o motivare l'apprendimento della Matematica. Gestisce il sito webb: www.lumacamens.it

Mario Innocenzo Mandrone Laureato in Fisica presso l'Università degli Studi di Napoli Federico II. Già Docente di ruolo di Matematica e Fisica negli Istituti di Istruzione Superiore. Docente a contratto di Fisica-Corso OFA- presso il Dipartimento di Scienze e Tecnologie e di Esercitazioni di Analisi Matematica -Dipartimento di Ingegneria presso l'Università del Sannio. Ha collaborato con l'Università "G.

D’Annunzio” di Chieti- Pescara- Facoltà di Architettura. Relatore su tematiche di fisica moderna e contemporanea, di didattica, di storia della matematica e di teoria delle decisioni in diversi convegni nazionali ed internazionali. Ha pubblicato numerosi articoli scientifici su riviste nazionali e internazionali (Ratio Matematica; Science and Philosophy). E’ stato Presidente della sezione Mathesis di Benevento. E’ componente del comitato scientifico del Periodico di Matematica- edizioni AFSU e consulente scientifico/editoriale della rivista “Mondo matematico e dintorni”. Attualmente è V. Presidente dell’Accademia Piceno Aprutina in Teramo (APAV).

Antonio Maturo Già professore di prima fascia di Metodi Matematici dell’Economia, presso l’Università degli Studi di Chieti-Pescara, in pensione dal 1/11/2015. Ha organizzato vari Convegni Internazionali, in Italia e all’Estero. In particolare a Iasi, Resita, Siviglia, Brno. Autore di numerose pubblicazioni scientifiche su Probabilità Soggettiva, Probabilità Finitamente Additiva, Fuzzy Set, Geometrie Finite e Decisioni in condizioni di Incertezza. Si occupa anche di Didattica e Divulgazione della Matematica, soprattutto a partire dalle sue applicazioni in ambito sociale. Presidente della Mathesis di Pescara dal 1987 e attualmente presidente di Mathesis Abruzzo.

Maria Grazia Pietrantonio Docente di matematica nella scuola primaria dal 2003, laureata in lingue e letteratura straniere presso l’Università di Chieti, ha pubblicato con l’Università di Pisa un articolo scientifico sulle deprivazioni fonologiche e l’apprendimento della L2 e ha collaborato con il Prof. Azzaro, ex docente di Linguistica inglese, alla trascrizione in codice ASCI di conversazioni utili alla ricerca. Ha collaborato per quattro anni con l’Indire, con la Dott. Laura Parigi, per un progetto di nuovi ambienti digitali per l’infanzia, pubblicato sulla piattaforma delle buone pratiche di Indire. Si è occupata di LongLifeLearning come formatrice presso centri per anziani. È formatrice in progetti Pon che prevedono il recupero delle competenze di base.

Renata Santarossa Laureata in matematica e specializzata in “Teorie e tecniche per l’impiego dei calcolatori elettronici” (Politecnico di Napoli). È stata docente di matematica e fisica; dal 2001 è stata supervisore alla SISS per l’abilitazione all’insegnamento della matematica e fisica all’Università di Napoli. Ha fatto parte della Commissione MIUR per le Indicazioni Nazionali (2000) ed è coautrice del testo “La matematica per il cittadino”. Dal 2009 dirigente scolastico in Lombardia e nello stesso ruolo ha tenuto corsi di formazione per il MIUR. Docente a contratto presso le università della Calabria e Napoli. Docente a contratto presso le università della Calabria e Napoli. Ha pubblicato su riviste scientifiche nazionali e internazionali su tematiche di didattica della matematica. Attualmente è Presidente dell’Accademia Piceno Aprutina in Teramo (APAV) Ente accreditato dal Ministero per la formazione del personale Docente della Scuola. Fa parte dei chief editor della rivista “Mondo Matematico e Dintorni” e componente del comitato scientifico del Periodico di Matematica.

INDICE

Istruzioni per gli autori

Chi desidera inviare un articolo per la Rivista Mondo Matematico e Dintorni deve seguire i seguenti criteri per il formato:

1. L'articolo deve essere in word, carattere Times New Roman, 12 p; il titolo dell'articolo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 18 p.
2. I margini sono di 3 cm sotto, sopra, a destra e a sinistra. L'interlinea è multipla 1,15 p.
3. L'articolo deve essere diviso in paragrafi numerati, di cui il primo è una introduzione e l'ultimo una conclusione. I paragrafi vanno separati da due interlinee. Il titolo di ogni paragrafo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 14 p.
4. Ogni articolo deve avere una lunghezza minima di 6 pagine e non deve superare, di regola, le 14 pagine.
5. Dopo l'ultimo paragrafo va inserita la bibliografia. Almeno 4 fra libri e articoli nel formato cognome, nome (anno), titolo dell'articolo, titolo del libro o rivista, editore, città.
6. La bibliografia non va numerata. I riferimenti bibliografici nel testo devono avere la forma (cognome dell'autore, anno).
7. Non mettere note bibliografiche a piè di pagina. Tutta la bibliografia va messa alla fine.
8. I disegni vanno fatti con programmi di elaborazione grafica (non in Word!) e salvati in jpg o in png.
9. L'articolo deve essere inviato in formato doc o docx ed in formato pdf per il controllo dell'impaginazione e deve avere un numero pari di pagine.

Tutti gli articoli ricevuti saranno esaminati da due revisori che invieranno il loro parere sulla pubblicazione ed eventuali proposte di correzioni ai direttori editoriali.
Gli articoli possono essere inviati ad uno dei seguenti indirizzi email:

antomato75@gmail.com

_ lucianadr@live.it

santarossa.renata@gmail.com

_marioinnocenzomandrone@gmail.com

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo

ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA

Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola

(Decreto del 24/07/2009 e Direttiva 170/2016)