ISSN 2612-2596 [online] ISSN 2612-1719 [testo stampato]

Volume 4 Numero 2 2021

MONDO MATEMATICO E DINTORNI

Rivista per i Docenti del Primo Ciclo di Istruzione

Direttori Editoriali
Luciana Delli Rocili
Antonio Maturo
Renata Santarossa

APAV

www.apav.it

ISSN 2612 - 2596 [on line] ISSN 2612 - 1719 [testo stampato]

Volume 4 (2021) **Numero 2**

MONDO MATEMATICO E DINTORNI

Rivista per i Docenti del Primo Ciclo di Istruzione

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo

Editore: Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo (APAV)
Via del Concilio n.24, Pescara, Italy

Codice Fiscale: 92036140678 Partita IVA: 02184450688

Codice destinatario per fatturazione elettronica: M5 UXCRL

IBAN: IT 57 K 02008 15408 000104232062 BIC Swift LINCRITM1760
Banca UNICREDIT - Agenzia Pescara UMBERTO 00760

Periodicità: semestrale

Siti web: www.apav.it; www.eiris.it

Email: apavsegreteria@gmail.com, apavsegreteria@pec.it

ISSN: 2612 - 1719 (testo stampato)
ISSN: 2612 - 2596 (online)

Autorizzazione del Tribunale di Pescara del 9/4/20l9
N. 741/2019 V.G.
N. 03/2019 Reg. Stampa

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 4, No 2 (2021), 3-16

La didattica della matematica nella scuola primaria. Dati e previsioni nell' insegnamento STEAM

Mario Innocenzo Mandrone[1]

Vice Presidente dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati

Vice Presidente Federazione Nazionale "Mathesis -Sannio-Irpinia" di Benevento

e- mail: almavit@libero.it

"Come espressione della mente umana la matematica riflette la volontà attiva, la ragione contemplativa e il desiderio di perfezione estetica. I suoi elementi fondamentali sono la logica e l'intuizione, l'analisi e la costruzione, la generalità e l'individualità. Tradizioni diverse potranno mettere in evidenza aspetti diversi, ma è soltanto la reazione di queste forze antitetiche e la lotta per la loro sintesi che costituiscono la vita, l'utilità e il valore supremo della scienza matematica." (R. Courant- H. Robbins – Che cos'è la matematica" Universale Bollati Boringhieri)

Abstract:

In questo lavoro viene presentato il corso di formazione per docenti delle scuole di ogni ordine e grado "Dati e previsioni nell'insegnamento STEAM", organizzato dall'APAV nell'ambito dell'VIII Simposio della Matematica "Bellezza e fascino della matematica", che si è tenuto a Roccaraso dal 07 al 10 Aprile 2022. Le attività di formazione hanno seguito il particolare approccio educativo alle materie scientifiche, denominato STEAM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics), che consiste nell'integrazione di queste discipline all'interno di una nuova filosofia educativa, basata su applicazioni reali ed autentiche. Questo nuovo approccio, finalizzato al "problem solving" e ad una "didattica laboratoriale", differenzia lo studio STEAM da quello delle materie scientifiche intese in senso tradizionale. L'attenzione è stata focalizzata sui nuclei fondanti degli argomenti trattati, sui nodi didatticamente problematici e sulle questioni ritenute essenziali che sono alla base del sapere matematico, nonché sulle linee direttrici dello sviluppo storico del pensiero matematico.

Parole Chiave: probabilità, statistica descrittiva, statistica inferenziale, approccio classico, approccio bayesiano, teoria delle decisioni, didattica STEAM, problem solving, cooperative learning, competenze chiave.

[1] Direttore del corso di formazione "Dati e Previsioni nell'insegnamento STEAM"

1. L'attivita' di formazione

"…….la mente non ha bisogno, come un vaso, di essere riempita, ma, come legna da ardere, ha bisogno solo di una scintilla che la accenda, che vi infonda l'impulso alla ricerca e il desiderio della verità" (Plutarco, Moralia, De Audiendo)

Nei giorni 7-10 aprile 2022 si è svolto nella cittadina di Roccaraso (AQ) il corso di formazione rivolto ai docenti delle scuole di ogni ordine e grado "Dati e Previsioni nell'insegnamento STEAM". L'attività, espletata nell'ambito dell'VIII Simposio "Bellezza e fascino della Matematica", è stata organizzata dall'Accademia Piceno Aprutina dei Velati in Teramo (APAV), ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola ai sensi della Direttiva 170/2016, in collaborazione con l'associazione Mat^Nat (AQ) e la Federazione Italiana Mathesis. Hanno contribuito all'iniziativa le associazioni 'Mathesis "A. Morelli" di Napoli', 'Mathesis Abruzzo' e 'Gli amici della matematica" Camerino (MC), con il patrocinio dell'Università del Sannio (Dip. DEMM) e del Comune di Roccaraso (AQ). I lavori sono stati coordinati dal Presidente dell'Accademia prof/ssa Renata Santarossa e dal Direttore del Corso prof. Mario Innocenzo Mandrone.
Il Corso di Formazione risponde ad un unico obiettivo formativo: far acquisire ai docenti una nuova dimensione culturale, quella delle discipline STEAM. Sono proposti nuovi strumenti metodologici, strumenti utili per aiutare i docenti a programmare e progettare. Ciò si identifica nell'acquisizione di una metodologia didattica che sia in grado di attraversare le discipline dell'area scientifico-tecnologica, tenendole insieme e quindi centrando la didattica sull'unità del sapere .
Le discipline Science, Technology, Engineering, and Mathematics, cosiddette STEAM, favoriscono l'acquisizione e lo sviluppo di competenze trasversali funzionali alla crescita personale degli studenti: il problem-solving, il pensiero divergente, la flessibilità, la capacità di lavorare in squadra, l' active learning, l' abilità in ambito digitale, nonché le competenze chiave per l'apprendimento di base.
Gli argomenti affrontati durante il corso sono stati suddivisi in quattro sessioni di lavoro con l'obiettivo di sviluppare, in modo il più possibile completo ed esaustivo i percorsi di insegnamento sul tema in oggetto, alla luce della normativa vigente.
I lavori sono stati, pertanto, strutturati nelle seguenti sessioni:

1. I contenuti essenziali del calcolo delle probabilità e la loro ricaduta didattica;
2. Cenni storici sul Calcolo della Probabilità;
3. Modelli matematici su analisi statistiche;
4. Giochi, paradossi e indagini statistiche

Negli interventi succedutisi durante la prima sessione sono stati illustrati i concetti base della Teoria della Probabilità, alcune tematiche di carattere elementare che sono

essenziali per lo studio della "Matematica dell'incerto", quali i concetti di media, indici di variabilità ed analisi combinatoria. Le medie classiche (aritmetica, aritmetica ponderata, geometrica, armonica), le medie di posizione (mediana, moda) e gli indici di variabilità (scarto semplice, varianza, scarto quadratico medio) sono gli elementi su cui costruire la matematica dell'incerto.
Sono state affrontate anche problematiche riguardanti concetti di logica e probabilità, in vista di un'introduzione efficace alla probabilità soggettiva, con numerosi esempi che dimostrano come l'impostazione soggettiva del Calcolo delle Probabilità è, rispetto ad altre impostazioni, meno dipendente dal calcolo, evidenziando, così, gli aspetti logici del ragionamento probabilistico.
Si è discusso anche dell'uso didattico della distribuzioni binomiale, geometrica e di Poisson con l'ausilio della calcolatrice grafica, ormai entrata a pieno titolo come strumento di lavoro nella scuola italiana. Ampio spazio è stato dedicato alle tecniche di analisi dei dati: vengono esaurientemente trattate l'interpolazione statistica, la correlazione, la regressione e, successivamente, allo studio delle variabili casuali (discrete e continue). Le relazioni presentate sono state corredate da esercitazioni di laboratorio con l'ausilio di strumenti informatici. Tali esercitazioni svolgono un duplice ruolo: da una parte permettono di acquisire la necessaria pratica senza doversi impegnare in calcoli spesso lunghi, dall'altra consentono di simulare situazioni reali senza dover svolgere indagini o esperimenti di notevole complessità.

La seconda sessione è stata dedicata al calcolo della probabilità da un punto di vista storico ed epistemologico, discutendo dell'interesse mostrato, tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento, dai matematici italiani, per le ricerche probabilistiche e per i problemi connessi con la casualità. Difatti, numerosi furono gli articoli pubblicati in quegli anni sul tema in oggetto e sulle esplicite connessioni esistenti tra gli studi di Cesaro e di Bruno de Finetti.
Si è argomentato anche sulle origini del Calcolo della Probabilità evidenziando come l'inizio della teoria della probabilità, chiamata all'epoca la "dottrina della sorte", avvenne nel XVII secolo in risposta a due classi di problemi legati ai giochi di azzardo e alle assicurazioni. La data di inizio ufficiale del Calcolo delle Probabilità, su cui concorda la maggioranza degli storici, è il 1654, anno in cui si svolse un interessante scambio epistolare tra Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1642) per risolvere due problemi, posti a Pascal da un famoso giocatore d'azzardo il Cavalier de Meré, che sono ormai entrati nella storia del calcolo della probabilità. Lo studio dei fondamenti storici del calcolo delle probabilità, oltre a mettere in evidenza la genesi della disciplina e la sua evoluzione nei secoli, offre l'opportunità di confrontare le diverse concezioni trasmettendo un importante messaggio: "la matematica è la più grande avventura dello spirito umano".

Molto interessante è risultata la terza sessione, dedicata ai modelli matematici su analisi statistiche. L'elaborazione di un modello matematico richiede, in generale, l'uso di metodi statistici (analisi dei dati) per mettere in evidenza le variabili significative. Oltre alle tecniche usuali, molto importante risulta la "cluster analysis", che permette di suddividere i soggetti in gruppi (clusters) omogenei in base a prefissati parametri.
Si tratta di modelli non deterministici. Pertanto, essi non possono fornire con certezza un risultato ma solo indicare con quale probabilità quel risultato può verificarsi. Tali modelli trovano applicazione in moltissimi settori delle attività umane: produzione aziendale, amministrazione pubblica e privata, agricoltura, medicina, scienze sociale, scienze sperimentali e, in generale, tutti i tipi di ricerche che hanno a che fare con la manipolazione di un'alta quantità di dati. In tutte queste situazioni non si può avere la certezza del risultato, per cui i modelli impiegati sono, per loro natura, affetti da un errore che le metodologie statistiche tendono a rendere il più piccolo possibile. L'obiettivo è stato quello di introdurre un approccio sperimentale alla Matematica e proporre un possibile itinerario didattico per una educazione alla modellizzazione rivolta a tutti gli studenti, indipendentemente dalle scelte future. L'intento è stato quello di delineare:

a) un insegnamento più aperto alla innovazione tecnologica, fornendo un ampio ventaglio di modelli (per il cui sviluppo è indispensabile il ricorso alle nuove tecnologie);

b) un insegnamento aperto all'innovazione didattica, proponendo un percorso di educazione alla modellizzazione.

Educare alla modellizzazione comporta un modo diverso di proporre lo studio della matematica, rivolto alla descrizione e comprensione del mondo reale. Punto centrale della proposta è una interazione dinamica tra mondo reale e mondo matematico al fine di evidenziare, anche, che il percorso matematico non si sviluppa nel vuoto, ma nell'interazione con le altre discipline scientifiche, con le altre esperienze culturali, con il contesto sociale, in un gioco di suggerimenti e condizionamenti reciproci.

La sessione dedicata al tema: "Giochi, paradossi e indagini statistiche ha visto la presentazione di alcuni quesiti e problemi legati alla nozione di probabilità condizionata quali: estrazioni da un'urna con o senza reintroduzione, lancio iterato del dado o della moneta e il problema di Monty Hall. Sono stati illustrati, anche, alcuni paradossi ed antinomie della teoria della probabilità tra i quali il paradosso di Simpson, il paradosso di Carlo V e il paradosso delle due bombe, soffermandosi, in modo particolare, sul significato dei termini "paradosso" e "antinomia e sul problema dei tre arcieri, un problema di calcolo delle probabilità basato sul teorema di Bayes con le sue varie interpretazioni, (più o meno lecite), che ne modificano significativamente lo svolgimento ed il risultato.

2. Qualche considerazione didattica

Non si può certamente tacere, però, che l'insegnamento della matematica nel nostro Paese ha privilegiato, nel passato, procedimenti di tipo logico-deduttivo mirando all'acquisizione di verità certe ed indiscutibili. Ma, accanto ad una matematica del "certo" esiste anche una matematica del "probabile". Esistono, infatti, problemi e fenomeni per i quali non si possono fornire soluzioni "sicure", ma si possono utilizzare delle metodologie che consentono, comunque, di fare delle previsioni e dare una accettabile valutazione dell'incertezza. Oggi che nella matematica si riconosce lo strumento idoneo non solo ad interpretare e risolvere questioni legate a fenomeni naturali, ma anche problemi del mondo economico e della vita sociale in genere, si tende a valorizzare ed a potenziare le metodologie di tipo induttivo accanto alle tradizionali metodologie deduttive. Il metodo induttivo comporta necessariamente "approssimazione e "provvisorietà" dei risultati conseguiti, oltre ad una certa dose di soggettivismo nell'interpretazione, concetti e attitudini questi non solo trascurati nell'insegnamento tradizionale ma, in qualche misura, assolutamente rifiutati.
La situazione descritta ha prodotto l'affermarsi di una metodologia di insegnamento anche nelle discipline scientifiche, in particolar modo della matematica, per schemi piuttosto che per problemi. Occorre, quindi, un capovolgimento del metodo tradizionale e un passaggio deciso all'approccio per problemi. Una strategia potenzialmente efficace per l'innovazione didattica dovrebbe essere basata sul fusionismo e sul lavoro per progetti interdisciplinari. Da un lavoro interdisciplinare è possibile trarre i problemi interessanti e significativi da affrontare, utilizzando anche le capacità offerte dai mezzi informatici (analisi di dati complessi, simulazione). La scelta di problemi significativi in un certo campo applicativo e interessanti per gli strumenti usati nella soluzione, facilita la sedimentazione delle nozioni sia di tipo metodologico che legate all'applicazione.

La Probabilità e la Statistica costituiscono lo strumento principe per affrontare problemi applicativi significativi secondo lo schema galileiano:

1) Osservazione;
2) Costruzione di un modello interpretativo;
3) Calcolo delle previsioni;
4) Rilevazione di nuovi dati adeguati;
5) Confronto con le previsioni.

L'approccio fusionista è particolarmente opportuno nell'ambito degli strumenti matematici mediante l'utilizzazione sinergica di diversi metodi (geometrici, analitici, grafici) che possano via via risultare utili nella soluzione di un determinato problema mediante l'integrazione di strumenti di tipo diverso.
È opportuno porsi, quindi, in un'ottica diversa e vedere la Probabilità e la Statistica non più come materie specialistiche, ma come modi di pensare che oggi, più che mai, hanno

assunto una grande importanza dal momento che il nostro quotidiano è pervaso dalle loro applicazioni, che ritroviamo in molte discipline ed anche all'interno della stessa matematica. Si tratta, pertanto, di superare quella tendenza all'isolamento che i temi di Probabilità e Statistica hanno rispetto agli altri temi della matematica sia perché temi relativamente nuovi, sia perché meno conosciuti dai docenti. È importante, d'altra parte, presentare i contenuti essenziali di Probabilità e Statistica con tutta la profondità concettuale che necessita loro, anche se non sembra opportuno, a questi livelli, scendere eccessivamente in dettagli tecnici, non disdegnando però, nello stesso tempo, di sottolinearne la portata storica. È altresì evidente che, attraverso un approccio storico, si riesce a diffondere una conoscenza scientifica critica e non tecnicistica e si rivaluta il sapere scientifico come un dato culturale e non solo strumentale.
Oltre a ragioni di carattere culturale, esistono anche ragioni di carattere didattico in quanto l'approccio storico indubbiamente contribuisce a superare ostacoli epistemologici connessi con l'apprendimento, ed a consolidare lo spirito critico e la flessibilità.
In quanto direttore del Corso di Formazione mi preme sottolineare anche che tutti i docenti formatori hanno adottato una modalità di presentazione delle tematiche scelte strettamente funzionale al carattere didattico del corso stesso, non solo relativamente ai contenuti secondo quanto previsto dalle Indicazioni Nazionali, quanto anche al carattere operativo e laboratoriale degli strumenti e delle tecniche didattiche che sono state presentate. Le modalità di presentazione degli argomenti trattati sono state corroborate da brevi esposizioni teoriche introduttive a cui sono seguite esercitazioni guidate e attività laboratoriali da cui si è preso spunto per considerazioni e discussioni sui contenuti proposti e sul loro insegnamento.

3. La complessità sociale e le competenze chiave

"*Trascurare la matematica è un'offesa al sapere, poiché chi la ignora non può conoscere le altre scienze o le cose del mondo".* (R. Bacon).

La società nella quale viviamo è in continua trasformazione. Le nuove scoperte e la tecnologia hanno cambiato le nostre abitudini e influenzato il mondo del lavoro, la scuola, il tempo libero, la politica e i rapporti sociali. Al cittadino di oggi sono richieste nuove competenze per poter affrontare la complessità e adattarsi ai futuri cambiamenti. Per effetto della nuova civiltà tecnologica, oggi, è quanto mai sentita l'esigenza di una scuola nuova rinnovata nella didattica, nei metodi, nei contenuti, nell'organizzazione. Siamo tutti consapevoli che occorre ripensare a fondo il modo di essere della scuola e garantire, in uno scenario mutato, anche dal punto di vista demografico, più solide competenze ai nostri giovani. Ciò a partire dalla padronanza della lingua italiana, dalle capacità di argomentare e di risolvere problemi, dall'incontro con il nostro patrimonio storico, artistico e ambientale, dalle sempre più indispensabili competenze digitali.

Il sistema scolastico italiano assume come orizzonte di riferimento verso cui tendere, il quadro delle competenze-chiave per l'apprendimento permanente definite dal Parlamento europeo e dal Consiglio dell'Unione europea. Il Parlamento europeo ha individuato otto competenze-chiave (22/05/2018) che rappresentano la cornice e lo sfondo per tutti i saperi.

Esse sono:

1. Competenza alfabetica funzionale
2. Competenza multi-linguistica
3. Competenza matematica e competenza in scienze, tecnologie e ingegneria
4. Competenza digitale
5. Competenza personale, sociale e capacità di imparare ad imparare
6. Competenza in materia di cittadinanza
7. Competenza imprenditoriale

Sono chiamate appunto "competenze-chiave" perché sono delle "meta-competenze", cioè delineano strumenti culturali, metodologici, relazionali che permettono alle persone di partecipare e incidere sulla realtà. Elementi quali il pensiero critico, la risoluzione di problemi, il lavoro di squadra, le abilità comunicative e negoziali, le abilità analitiche, la creatività e le abilità interculturali sottendono a tutte le competenze chiave. In tale scenario bisogna offrire agli studenti occasioni di apprendimento dei saperi e dei linguaggi culturali di base, promuovere la capacità di elaborare metodi e categorie che siano in grado di fare da guida negli itinerari personali, favorire l'autonomia di pensiero degli studenti, orientando la propria didattica alla costruzione di saperi a partire da concreti bisogni formativi. Nell'insegnamento per competenze, quindi, risulta essere di fondamentale importanza:

1. la centralità dell'alunno e del processo di apprendimento;
2. la flessibilità didattica: metodo induttivo, peer-tutoring, laboratorialità, approccio collaborativo;
3. la valorizzazione dell'esperienza;
4. l'attenzione ai processi metodologici e strategici e alla dimensione relazionale;
5. l'attenzione agli aspetti affettivo-emotivi dell'apprendimento;
6. l'attribuzione di autonomia e responsabilità all'allievo attraverso i compiti significativi.

In particolare, la competenza matematica "contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri. In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte. Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo." (Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione).

Imparare a pensare in modo scientifico e matematico significa coltivare specifiche abilità quali la curiosità, l'intuizione, il pensiero logico e spaziale, l'astrazione, il rigore nella ricerca delle cause di un fatto e nella spiegazione delle sue conseguenze, il ragionare in modo analitico e rigoroso, lo sviluppo di un'attitudine alla valutazione critica e una capacità ad elaborare decisioni sulla base di elementi verificati, la capacità di affrontare una qualsiasi situazione problematica valutando costi e benefici delle diverse soluzioni e scegliendo la strategia più adeguata.

In questa prospettiva, la problematizzazione svolge una funzione insostituibile: sollecita gli alunni a individuare problemi, a sollevare domande, a mettere in discussione le conoscenze già elaborate, a trovare appropriate piste d'indagine, a cercare soluzioni originali." Fondamentale si rivela a tale scopo la didattica cooperativa. L'apprendimento cooperativo, che rappresenta niente altro che l'evoluzione scientifica e pedagogica del classico lavoro di gruppo, permette una reale cooperazione attraverso l'interdipendenza positiva (nessuno studente può svolgere il compito da solo; il compito può essere svolto se tutti forniscono il loro contributo), una responsabilità individuale da parte di tutti i componenti attraverso attività diversificate, un clima piacevole e accogliente attraverso attività ripetute nel tempo su singole abilità sociali (l'accoglienza, l'empatia, l'aiuto reciproco, la responsabilità e la gestione delle divergenze…), l'apprendimento di competenze sociali.
La matematica ha, quindi, non solo una sua intrinseca valenza didattica, ma possiede anche una profonda valenza formativa in quanto induce a:

1) riflessione critica
2) acquisizione di metodo;
3) analisi per la ricerca di soluzioni a problemi;
4) sintesi e semplificazione delle conclusioni;
5) limpidezza di linguaggio;
6) facoltà di astrazione;
7) deduzione logica.

I contenuti dell'insegnamento sono il prodotto dello stato attuale delle conoscenze scientifiche e l'insieme delle conoscenze socialmente riconosciute. Il sapere trasmesso dall'insegnante è qualcosa che non può essere identificato né con il primo (Sapere =*La cultura*) né con il secondo (Sapere organizzato). Le concezioni che l'alunno ha costruito anche fuori dell'ambito educativo rappresentano un altro sapere (Sapere sociale) suscettibile di entrare in contraddizione con quello sviluppato dall'Insegnante (Sapere insegnato). Quello che è certo è che l'educazione matematica contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti: di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo e quindi di verifica o smentita.

4 . L'attività per problemi - la tecnica del problem solving

"*La matematica alberga nel cuore dell'uomo perché essa traduce quel bisogno di chiarezza, di certezza, di rigore e di coerenza che è tipico di ogni uomo che voglia conoscere*".(G. Melzi -Perché la matematica)

Nel linguaggio comune il termine "problema" viene adoperato spesso in luogo di parole come "difficoltà", "ostacolo", "dubbio", ecc. Per Duncker (1973) il problema sorge quando un essere umano ha una meta e non sa come raggiungerla. Per la psicologia della gestalt (Kanizsa,1973) un problema sorge quando un essere vivente, motivato a raggiungere una meta, non può farlo in forma automatica o meccanica, cioè mediante un'attività istintiva o attraverso un comportamento appreso. Per Polya (1979) "Avere un problema significa: cercare coscientemente un'azione appropriata per ottenere uno scopo chiaramente concepito ma non immediatamente ottenibile".

L'attività di risoluzione di problemi è di fondamentale importanza nella didattica della matematica. Ma la risoluzione di problemi è molto di più. È un processo che teoricamente non si conclude mai perché ogni soluzione, insieme ad altri elementi, può determinare una nuova situazione problematica. Dunque "il problem solving" è un atteggiamento mentale o un'attività del pensiero che un individuo mette in atto per raggiungere una condizione desiderata partendo da una condizione data. Più propriamente esso è l'insieme di tutti i metodi e le tecniche di soluzione dei problemi e delle relative strategie da mettere in atto per la loro trattazione. Il problem solving attiva una sequenza di azioni riflessive, orientate verso uno scopo che non è raggiungibile attraverso un procedimento di routine. Le peculiarità del problem solving sono:

1. Affrontare compiti reali e autentici;
2. Risolvere problemi non ordinari, affrontare situazioni non di routine;
3. Adottare strategie di soluzione originali;
4. Saper integrare diverse competenze/conoscenze;
5. Attivare processi cognitivi di livello superiore

I processi implicati nel Problem Solving secondo Polya riguardano tre ambiti:

1. Conoscenze: comprendere la natura del problema individuando le informazioni a disposizione;

2. Strategie:
   a) definire il problema identificandone gli aspetti critici e le interrelazioni;
   b) costruire o applicare rappresentazioni di supporto;
   c) elaborare strategie risolutive.

3. Metacognizione: valutare, giustificare e comunicare ad altri la soluzione

La tecnica del problem solving è spesso caratterizzata dalle seguenti fasi:

1. Analisi quantitativa e qualitativa del problema
2. Soluzione del problema posto
3. Applicazione della soluzione
4. Estensione della soluzione
5. Processo di controllo

Gli aspetti centrali del processo di *problem solving* nelle varie fasi che abbiamo indicato sono di fatto le seguenti:

1) acquisizione della capacità di visione d'insieme, per cogliere i collegamenti e le interdipendenze tra le parti o tra i componenti del fenomeno indagato;
2) predisposizione di un metodo di analisi, distinguendo tra aspetti e tecniche conosciute e non, ai fini di acquisire nuova conoscenza;
3) apprendimento, impiego e determinazione della metodologia di analisi;
4) raccolta di informazioni finalizzate alla suddetta metodologia;
5) sintesi delle informazioni;
6) confronto tra scenari di soluzione, impiegando tecniche creative ed intuitive;
7) sperimentazione e valutazione dei risultati.

Il problem solving, quindi, tende alla ricerca di una risposta da dare ad un problema che non è necessariamente di tipo numerico (problemi di determinazione): si può, infatti, cercare un oggetto geometrico (problemi di costruzione) o la dimostrazione di una certa proprietà (problemi di dimostrazione), oppure, semplicemente, risolvere problemi complessi che la vita reale ci pone. Gli approcci alla risoluzione di un problema possono essere di vario tipo (intuitivo, sistematico, algoritmico, parziale per tentativi, per esclusione, ecc.); un alunno può manifestare una propensione per alcune tipologie di approccio piuttosto che per altre e, in relazione alla specificità del problema, un approccio può rivelarsi più idoneo e fruttuoso di un altro. Questa visione multi-approccio a giochi e problemi si contrappone alla vecchia logica dell'algoritmo predefinito, del "come si fa", e favorisce l'attivazione di facoltà e di inclinazioni diverse e complementari tra loro: intuito, comprensione degli schemi, progettualità, analiticità, tendenza ad algoritmizzare, ecc.

A livello didattico, quindi, è importante da un lato valorizzare e potenziare gli stili e le propensioni individuali e dall'altro arricchire e diversificare il bagaglio di ciascuno, aiutando gli allievi a mettersi in gioco con le proprie competenze. Risolvere i problemi è una questione di abilità vera e propria e qualunque abilità può essere acquisita con l'imitazione e l'esercizio; si impara a risolvere i problemi soprattutto … risolvendoli. La capacità degli studenti di risolvere problemi che si presentano in contesti di vita reale rappresenta un obiettivo educativo strategico.

A tal proposito l'OCSE richiama l'attenzione sul fatto che, nelle applicazioni del Problem Solving, anche in contesti diversi, è necessario tener presente le seguenti tre indicazioni:

1. riconoscere e analizzare schemi ricorrenti, stabilire analogie fra situazioni note e situazioni nuove (affrontare la complessità);
2. percepire le situazioni, discernere fra aspetti rilevanti e non (dimensione percettiva);
3. scegliere i mezzi più appropriati per raggiungere un fine proposto, valutare le alternative offerte, formulare giudizi e agire di conseguenza (dimensione normativa).

Nella strategia risolutiva del "Problem Solving" fondamentale è, quindi, l'utilizzo del modello matematico, dove per modello matematico deve intendersi la rappresentazione formale di idee e conoscenze relative ad un fenomeno. Questa definizione contiene una descrizione completa delle caratteristiche che deve avere un modello matematico e che possono essere raccolte in tre punti fondamentali, non separabili l'uno dall' altro:

1. un modello matematico è la rappresentazione di un fenomeno;
2. tale rappresentazione non è descrittiva, discorsiva o a parole, ma formale, espressa cioè in linguaggio matematico;
3. non esiste una via diretta dalla realtà al modello matematico. In altri termini il fenomeno studiato non determina la sua rappresentazione matematica; ciò che invece si fa è di tradurre in formule, idee e conoscenze relative al fenomeno.

Detto in altri termini, non esiste una via diretta ed unica che porta dalla complessità della realtà alla sua descrizione matematica. Peraltro, tenendo presente che le finalità della scuola sono finalità essenzialmente formative, l'azione educativa e didattica deve mirare soprattutto alla formazione di competenze in termini di conoscenze, di capacità e di atteggiamenti. In tale prospettiva occorre quindi privilegiare una didattica formativa, una didattica che miri, non solo alla trasmissione dei saperi, ma anche e soprattutto ai processi della loro riscoperta, ricostruzione, reinvenzione attraverso i quali si realizza sia l'acquisizione delle conoscenze sia la formazione delle capacità e degli atteggiamenti.

Inoltre, l'utilizzo di nuove tecnologie e nuovi strumenti informatici consente la creazione di situazioni di apprendimento che sviluppano le abilità caratterizzanti i processi propri dell'indagine scientifica inducendo una metodologia di indagine e di scoperta guidata preliminarmente dal docente e successivamente sollecitata dagli alunni stessi. In questo modo, l'alunno, riflettendo su quello che fa, impara a lavorare in modo critico, a confrontarsi con i compagni e l'eventuale errore contribuisce a sviluppare capacità di inferenza, a riformulare ipotesi errate, a costruire nuova conoscenza da condividere con altri. **(**Riflessione e consapevolezza).

La dimensione sociale della conoscenza, nell'imparare dagli altri e con gli altri, valorizza, inoltre, i processi di apprendimento e la condivisione dei saperi. (Apprendimento collaborativo).

4. Conclusioni

"*L'incertezza è come una margherita che non si finisce mai di sfogliare*" (Mario Vargas Llosa)

Lo studio della probabilità e del calcolo delle probabilità è una conquista relativamente recente del pensiero matematico. Si pensi infatti che nell'antichità i matematici greci disconoscevano del tutto questo tipo di calcolo, che durante il medioevo non ci fu alcuna applicazione di rilievo. Solo nel seicento fu sviluppato questo tipo di calcolo, ma associato ad un contesto prevalentemente ludico (riuscita delle scommesse, aspettative di vincita). Nel settecento, il secolo dei lumi, abbiamo l'affermarsi di una mentalità in netto contrasto con le moderne idee sulla probabilità. A tal riguardo basta ricordare che, per i filosofi illuministi appunto, il corso degli eventi era rigidamente fissato, l'ordine della natura veniva considerato perfetto e nessuna azione umana poteva modificarlo. Infatti, il determinismo si affermò soprattutto con le teorie di Newton, che portarono ad una concezione del mondo imperniata sull'ordine e la regolarità.

Per gli illuministi, difatti, era scientifico ciò che si basava sulla certezza, scarsamente scientifico ciò che si basava sulla probabilità. Una prima rara eccezione a questi concetti si ha nella seconda metà del Seicento con i lavori dell'inglese J. Groust che fonda l' "aritmetica politica" la quale porterà agli sviluppi recenti della moderna statistica, uno dei più validi strumenti di conoscenza e di previsione dei fenomeni sociali ed economici. Non si possono dimenticare in questo contesto i "padri fondatori", ovvero Pascal e Fermat.

Il grande progresso di questa teoria si ha nella seconda metà del XIX secolo per l'uso crescente che ne viene fatto nelle scienze sperimentali ed in molte attività pratiche. Nella società attuale, ricca di profondi cambiamenti che investono tutte le sfere del tessuto sociale, la formazione matematica risulta essere di fondamentale importanza poiché contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti (di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo…).

Inoltre essa tende a sviluppare, in maniera particolare, concetti, metodi e atteggiamenti utili a produrre le capacità di ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà e a formare le abilità necessarie per interpretarla e per intervenire consapevolmente su di essa. La matematica, come è noto, è passata da un livello per così dire ingenuo a un livello rigoroso, che è stato chiamato dapprima ipotetico-deduttivo e poi assiomatico, indicando con questa espressione l'atteggiamento scientifico che conduce a chiarire con precisione i punti di partenza di ogni teoria, ad indicare chiaramente il significato dei termini che si impiegano, a dedurre rigorosamente. Il passaggio dal livello *ingenuo* al livello rigoroso costituisce sicuramente una delle più affascinanti avventure del pensiero umano. Pertanto, se uno degli obiettivi fondamentali della scuola è quello di educare al pensiero critico, oltre che istruire, è innegabile considerare importanti anche quei fenomeni di tipo probabilistico e statistico e ricordarsi che, accanto ad una matematica del "certo", esiste anche una matematica del "probabile". Esistono, infatti, problemi e fenomeni per i quali non si possono fornire soluzioni "sicure", ma è possibile, d'altra parte, utilizzare delle metodologie che consentono, comunque, di fare delle previsioni e dare un'accettabile valutazione dell'incertezza.

Sapere interpretare i dati statistici che vengono trasmessi quotidianamente attraverso i mass media è diventata una necessità culturale per comprendere fenomeni sociali ed economici a volte complessi che si presentano in tutti i rami delle scienze naturali, sociali, economiche e, in particolare, in quelle riguardanti l'istruzione, il commercio, l'industria, l'agricoltura, il turismo e così via.

Bibliografia

B. De Finetti - Il saper vedere in matematica, Loescher, 1967

G. Polya - Come risolvere i problemi di matematica, Feltrinelli, Milano, 1983

G.Polya - La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi, Feltrinelli, Milano (nuova edizione UTET Università di Torino, 2016)

Stabler E.- Il pensiero matematico, Universale scientifica Boringhieri, Torino, 1990

Devlin K- Dove va la matematica, Bollati Boringhieri, Torino, 2000

Eugeni F. La matematica discreta attraverso i problemi, pp. 84-102, in "Cento Anni di Matematica" Atti del Convegno "Mathesis Centenario 1895-1995", Palombi Editori, Roma, 1996.

Gagnè R.- Le condizioni dell'apprendimento, A. Armando, Roma, 1973.

Kleinmuntz B. - Problem solving. Ricerche, modelli, teoria, A. Armando, Roma, 1976.

Mialeret G.- L'apprendimento della matematica. Saggio di psicopedagogia, Roma, Armando, 1969.

Pellerey M. -Apprendere a pensare matematicamente: Resnick L.B. & Ford, W.W., Psicologia della matematica e apprendimento scolastico, Sei, Torino, 1991

Popper K.- Logica della scoperta scientifica, Einaudi editore, 1970

Scozzafava R.- Introduzione alla probabilità, Zanichelli, Bologna, 2010

Cerasoli M.- Elementi di Probabilità, Explora Edizioni, L'Aquila, 2022

Mandrone M.I.-Probabilità e Statistica per gli esami di Stato- V.S. Grafica, Pietrelcina, 2018

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 4, No 2 (2021), 17-28

I problemi dei tre arcieri

Giorgio Pietrocola
www.pietrocola.eu
giorgio.pietrocola@gmail.com

Sunto
Viene presentato, discusso e risolto in forma didattica "il problema dei tre Arcieri" un problema di calcolo delle probabilità basato sul teorema di Bayes con le sue varie interpretazioni più o meno lecite che ne modificano significativamente svolgimento e risultato.

Keywords: Teorema di Bayes, Interpretazione testo, Problemi calcolo probabilità

1.Enunciazione del problema

Tre frecce vengono lanciate contro un bersaglio da tre arcieri. Poiché i tre arcieri sono a distanza diversa dal bersaglio, si stima in 3/5 la probabilità dell'arciere A di colpire il bersaglio, in 1/2 quella dell'arciere B e in 4/5 quella dell'arciere C.
Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?

1.1. Critica del testo

Normalmente quando comunichiamo, mediante il linguaggio scritto o altro, non specifichiamo sempre ogni cosa.
Questo a rigore sarebbe spesso non solo impresa ardua, ma inutilmente noiosa. Una scena reale è sempre piena di dettagli irrilevanti che, comunicando, è più sensato trascurare che specificare.
Inoltre spesso, per semplificare ulteriormente il messaggio comunicativo, si sottintendono anche cose che non sarebbero irrilevanti, confidando sulla normale capacità immaginativa e ricostruttiva del cervello del ricevente.
Il processo di semplificazione del messaggio, spesso inconsapevole, è per sua natura imperfetto e può lasciare spazio a interpretazioni inaspettate. Diverso è il caso del linguaggio matematico nato proprio per evitare le ambiguità della lingua naturale. Quando si formula un problema però lo si fa, in generale come nel caso specifico, facendo largo uso della lingua naturale. Per questo motivo, se si vuole un solo risultato, e non una discussione per casi, si dovrebbe prestare particolare cura nell'evitare la possibilità di testi ambigui o che possano apparire tali, almeno quando, come nel

problema preso in esame, la risposta può variare significativamente in funzione dell'interpretazione scelta.

1.2. Questioni interpretative

Il testo del problema recita:
Tre frecce vengono lanciate contro un bersaglio da tre arcieri.
Quante frecce in tutto?
Tre o nove?
Sembrerebbe tre perché altrimenti si sarebbe dovuto specificare "da ciascuno dei tre arcieri".
Quanti bersagli? Uno o uno per uno?
Sembrerebbe uno perché si parla di un bersaglio. Sembrerebbe.
Ma se l'esperienza di chi legge, per esempio, risultasse tale da aver sempre constatato che in ogni gioco i lanci degli arcieri sono sempre di tre frecce per volta, non potrebbe credere, in base a una presunta condivisione delle esperienze vissute, che "ciascuno" è sottinteso e le frecce sono nove?
Per evitare equivoci meglio chiarire il più possibile usando qualche parola in più.\\
Nel caso le frecce in questione siano tre, e il bersaglio uno, le frecce vengono lanciate contemporaneamente? Forse no perché potrebbe risultare pericoloso dato che si può presumere che siano tutti e tre allineati sulla linea perpendicolare al bersaglio altrimenti anche l'angolazione oltre la distanza avrebbe influenzato le probabilità stimate. Se no , in quale ordine? Casuale? Dal più vicino al più lontano per motivi di sicurezza? In ordine alfabetico?
Nell'enunciato del problema si legge anche:
Se una freccia colpisce il bersaglio...
Una sola freccia? Cosa sappiamo delle altre?
Possiamo supporre che tutti gli arcieri abbiano terminato di tirare? Si sta parlando della prima freccia che colpirà il bersaglio non ancora colpito?
Le possibilità sono molte, tante che nel 2014 decisi di pubblicare in rete, insieme con Ivana Niccolai, sul sito didattico Maecla, un ipertesto intitolato "Iperproblema dei tre arcieri" nel quale il problema viene risolto in differenti modi a seconda delle risposte date ai chiarimenti richiesti. Qui mostrerò solo i casi che mi sono sembrati più significativi.
Credo che, a rigore, nei limiti del possibile, si dovrebbero prendere alla lettera le informazioni fornite dal problema senza supporre alcunché ma certo ciò non viene sempre spontaneo.
Per finire, un'osservazione sui dati del problema.
Nonostante sia una cosa innaturale per un ricercatore, nelle nostre scuole siamo abituati a vedere i problemi proposti forniti solo dei dati necessari senza nulla di superfluo.

Benché non sia una regola esplicita e neanche una buona regola, l'abitudine potrebbe condizionare comunque le aspettative e spingere a scegliere, tra due interpretazioni, quella il cui svolgimento utilizza tutti i dati forniti.
Vedremo, nel caso del problema in esame, che alcune varianti utilizzano l'informazione della diversa distanza tra arcieri e bersaglio, mentre altre la ignorano.

.

1.3 Costruzione di possibili scenari che portano a divergenze interpretative

Come la continua ricerca di significati porta il nostro cervello a costruirsi immagini familiari anche dove regna il puro caso come per il volto umanoide tradizionalmente associato alla luna piena, così mi sembra che la nostra mente tenda a elaborare scenari non richiesti esplicitamente allo scopo di intendere meglio il testo del problema proposto. Dopo il prossimo paragrafo verranno descritti alcuni scenari capaci di suggerire significati assai diversi da attribuire al testo del problema che è stato formulato.

2. Partizione dei possibili accadimenti in otto eventi

Questo paragrafo sarà utilizzato in tutte le varianti del problema che saranno presentate.
Indichiamo con A, B, C gli eventi in cui l'omonimo arciere colpisce il bersaglio e con A, B, C segnati gli eventi contrari.
Sarà quindi:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c} A \vee \overline{A} = U & A \wedge \overline{A} = \phi & P(A) = \frac{3}{5} & P(\overline{A}) = 1 - P(A) \\ B \vee \overline{B} = U & B \wedge \overline{B} = \phi & P(B) = \frac{1}{2} & P(\overline{B}) = 1 - P(B) \\ C \vee \overline{C} = U & C \wedge \overline{C} = \phi & P(C) = \frac{4}{5} & P(\overline{C}) = 1 - P(C) \end{array}\right|$$

Consideriamo preliminarmente lo spazio dei tre possibili esiti dei tiri che indichiamo con U. Risulta quindi P(U)=1
Creiamo una partizione di U secondo le otto diverse storie possibili.
Come si può osservare nella tabella sottostante, le disposizioni con ripetizione di classe 3 su due simboli, 1 per bersaglio colpito e 0 per bersaglio non colpito, indicano 8 possibilità corrispondenti ai numeri binari da 0 a 7.

000	$S_0 = \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$	nessuno colpisce il bersaglio	$P(S_0) = 4\%$
001	$S_1 = \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C$	solo C va a segno	$P(S_1) = 16\%$
010	$S_2 = \overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}$	solo B va a segno	$P(S_2) = 4\%$
011	$S_3 = \overline{A} \wedge B \wedge C$	solo A non va a segno	$P(S_3) = 16\%$
100	$S_4 = A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$	solo A va a segno	$P(S_4) = 6\%$
101	$S_5 = A \wedge \overline{B} \wedge C$	solo B non va a segno	$P(S_5) = 24\%$
110	$S_6 = A \wedge B \wedge \overline{C}$	solo C non va a segno	$P(S_6) = 6\%$
111	$S_7 = A \wedge B \wedge C$	tutti colpiscono il bersaglio	$P(S_7) = 24\%$

Nell'ultima colonna compaiono le probabilità di ognuno degli otto eventi alternativi S_0 S_1...S_7 calcolate, per la supposta indipendenza degli eventi, con il teorema della probabilità composta.

Si può notare che gli eventi relativi all'esito del lancio dei singoli arcieri si possono ottenere anche come unioni di alcune di queste otto storie (eventi) fondamentali

$A = S_4 \vee S_5 \vee S_6 \vee S_7$	$P(A) = P(S_4) + P(S_5) + P(S_6) + P(S_7)$	60%
$\overline{A} = S_0 \vee S_1 \vee S_2 \vee S_3$	$P(\overline{A}) = P(S_0) + P(S_1) + P(S_2) + P(S_3)$	40%
$B = S_2 \vee S_3 \vee S_6 \vee S_7$	$P(B) = P(S_2) + P(S_3) + P(S_6) + P(S_7)$	50%
$\overline{B} = S_0 \vee S_1 \vee S_4 \vee S_5$	$P(\overline{B}) = P(S_0) + P(S_1) + P(S_4) + P(S_5)$	50%
$C = S_1 \vee S_3 \vee S_5 \vee S_7$	$P(C) = P(S_1) + P(S_3) + P(S_5) + P(S_7)$	80%
$\overline{C} = S_0 \vee S_2 \vee S_4 \vee S_5$	$P(\overline{C}) = P(S_0) + P(S_2) + P(S_4) + P(S_5)$	20%

3. Scenario a lanci terminati

Appurato che ciascuno dei tre arcieri ha appena scagliato la propria freccia ci si sposta sul luogo dei lanci per osservare lo stato del bersaglio dopo i tre tiri. Evidentemente gli eventi possibili, tra loro incompatibili sono 0, 1, 2 ,3 frecce a segno. Si enuncia il problema: *Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?*

Il problema suppone il verificarsi della proposizione "una freccia colpisce il bersaglio" e quindi l'evento E=”Si verifica S_1 oppure S_2 oppure S_4”

la cui probabilità, per il teorema della probabilità totale, vista l'incompatibilità dei tre eventi componenti è

$$P(E) = P(S_1) + P(S_2) + P(S_4)$$

Nel nostro caso, per i dati ricavati nel precedente paragrafo, è il 26%

Dobbiamo rivalutare quindi, a causa delle informazioni acquisite, alla luce del teorema di Bayes, le tre probabilità di andare a segno:

$$\left| \begin{array}{l} P(A|E) = \dfrac{P(E|A)P(A)}{P(E)} \\ P(B|E) = \dfrac{P(E|B)P(B)}{P(E)} \\ P(C|E) = \dfrac{P(E|C)P(C)}{P(E)} \end{array} \right| \begin{array}{l} = \dfrac{\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{13}{50}} = \dfrac{3}{13} \\ = \dfrac{\frac{2}{25}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{13}{50}} = \dfrac{2}{13} \\ = \dfrac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{13}{50}} = \dfrac{8}{13} \end{array} \right|$$

Infatti risulta:
$P(E|A)=P(S_4)/P(A)=1/10$, $P(E|B)=P(S_2)/P(B)=2/25$, $P(E|C)=P(S_1)/P(C)=1/5$
Dunque la probabilità che la freccia sia di A è 3/13

3.1 Metodo alternativo

$$\left| \begin{array}{l} P(S_4|E) = \dfrac{P(E|S_4)P(S_4)}{P(E)} \\ P(S_2|E) = \dfrac{P(E|S_2)P(S_2)}{P(E)} \\ P(S_1|E) = \dfrac{P(E|S_1)P(S_1)}{P(E)} \end{array} \right| \begin{array}{l} = \dfrac{1\cdot\frac{3}{50}}{\frac{13}{50}} = \dfrac{3}{13} \\ = \dfrac{1\cdot\frac{1}{25}}{\frac{13}{50}} = \dfrac{2}{13} \\ = \dfrac{1\cdot\frac{4}{25}}{\frac{13}{50}} = \dfrac{8}{13} \end{array} \right|$$

Essendo S_4, S_2, S_1 sottoinsiemi di E il verificarsi di uno dei tre implica il verificarsi di E.
Dunque risulta $P(E|S_4)=P(E|S_2)=P(E|S_1)=1$
Dunque la probabilità che la freccia sia di A è 3/13

4. Scenario della prima freccia a segno

Si sta seguendo l'evento sul proprio telefonino, appare in diretta null'altro che il bersaglio inquadrato da una telecamera fissa senza né audio o né altre informazioni. Si sa che entro un'ora i lanci dovranno essere effettuati. Si sta aspettando pazientemente l'eventuale arrivo di una prima freccia a segno. Si enuncia il problema:
Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?
L'ipotesi presa in considerazione dal problema implica il verificarsi dell'evento "almeno una freccia va a segno" equivalente a “non si verifica S_0” per cui
$P(E)=1-P(S_0)$ la cui probabilità, visti i dati forniti dal problema è 96%
Per motivi di sicurezza possiamo escludere che il lancio delle frecce avvenga simultaneamente.

Infatti dai dati del problema i tre arcieri dovrebbero essere sulla stessa retta perpendicolare al centro del bersaglio il che mette a repentaglio la vita di C e di A più vicini al bersaglio.
Si suppone quindi che le frecce siano lanciate a intervalli di tempo da un arciere dopo l'altro.
I casi possibili sono tanti quanti le possibili permutazioni di tre elementi: ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA
I sei casi, pur dando risultati differenti, sono abbastanza simili per quanto riguarda la loro risoluzione. I casi più verosimili sembrano essere l'ordine alfabetico ABC e l'ordine dal più vicino al più lontano CAB.
Affronteremo il primo caso e poi daremo brevemente la soluzione degli altri cinque.

4.1 Ipotesi delle frecce lanciate in ordine ABC

Si suppone che le frecce siano lanciate da un arciere dopo l'altro in ordine alfabetico (ordine A,B,C)
In questo caso le possibilità totali si possono suddividere in quattro eventi tra loro incompatibili

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} A_1 & A \text{ è il primo a colpire} & A & S_4 \vee S_5 \vee S_6 \vee S_7 & 60\% \\ B_1 & B \text{ è il primo a colpire} & \overline{A} \wedge B & S_2 \vee S_3 & 20\% \\ C_1 & C \text{ è il primo a colpire} & \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C & S_1 & 16\% \\ & \text{nessuno colpisce} & \overline{C} \wedge \overline{A} \wedge \overline{B} & S_0 & 4\% \end{array}\right|$$

Dato che sia A_1 che B_1 che C_1 implicano E, negazione di S_0, risulta

$$P(E|A_1) = P(E|B_1) = P(E|C_1) = 1$$

per il teorema di Bayes

$$\left|\begin{array}{l|l} P(A_1|E) = \frac{P(E|A_1)P(A_1)}{P(E)} & = \frac{1\cdot\frac{3}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{5}{8} \\ P(B_1|E) = \frac{P(E|B_1)P(B_1)}{P(E)} & = \frac{1\cdot\frac{1}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{5}{24} \\ P(C_1|E) = \frac{P(E|C_1)P(C_1)}{P(E)} & = \frac{1\cdot\frac{4}{5}}{\frac{24}{25}} = \frac{1}{6} \end{array}\right|$$

4.2 Confronto tra le permutazioni

Ricordiamo che:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c} P(S_0) = 4\% & P(S_1) = 16\% & P(S_2) = 4\% & P(S_3) = 16\% \\ P(S_4) = 6\% & P(S_5) = 24\% & P(S_6) = 6\% & P(S_7) = 24\% \end{array}\right|$$

Ricordiamo anche che P(E)=96%
Risolviamo quindi brevemente tutti i casi analoghi a quello già mostrato in precedenza
Ecco dunque i casi relativi alle 3! permutazioni possibili nell'ordine dei tiri, compresi i due casi già visti:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} A_{1,acb} & A \text{ è il primo a colpire} & A & S_4 \vee S_5 \vee S_6 \vee S_7 & 60\% \\ C_{1,acb} & C \text{ è il primo a colpire} & \overline{A} \wedge C & S_1 \vee S_3 & 32\% \\ B_{1,acb} & B \text{ è il primo a colpire} & \overline{A} \wedge \overline{C} \wedge B & S_2 & 4\% \end{array}\right|$$

$$P(A_{1,acb}|E) = \frac{5}{8} \quad P(B_{1,acb}|E) = \frac{1}{24} \quad P(C_{1,acb}|E) = \frac{1}{3}$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} A_{1,acb} & A \text{ è il primo a colpire} & A & S_4 \vee S_5 \vee S_6 \vee S_7 & 60\% \\ C_{1,acb} & C \text{ è il primo a colpire} & \overline{A} \wedge C & S_1 \vee S_3 & 32\% \\ B_{1,acb} & B \text{ è il primo a colpire} & \overline{A} \wedge \overline{C} \wedge B & S_2 & 4\% \end{array}\right|$$

$$P(A_{1,acb}|E) = \frac{5}{8} \quad P(B_{1,acb}|E) = \frac{1}{24} \quad P(C_{1,acb}|E) = \frac{1}{3}$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} B_{1,bac} & B \text{ è il primo a colpire} & B & S_2 \vee S_3 \vee S_6 \vee S_7 & 50\% \\ A_{1,bac} & A \text{ è il primo a colpire} & \overline{B} \wedge A & S_4 \vee S_5 & 30\% \\ C_{1,bac} & C \text{ è il primo a colpire} & \overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C & S_1 & 16\% \end{array}\right|$$

$$P(A_{1,bac}|E) = \frac{5}{16} \quad P(B_{1,bac}|E) = \frac{25}{48} \quad P(C_{1,bac}|E) = \frac{1}{6}$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} B_{1,bca} & B \text{ è il primo a colpire} & B & S_2 \vee S_3 \vee S_6 \vee S_7 & 50\% \\ C_{1,bca} & C \text{ è il primo a colpire} & \overline{B} \wedge C & S_1 \vee S_5 & 40\% \\ A_{1,bca} & A \text{ è il primo a colpire} & \overline{B} \wedge \overline{C} \wedge A & S_4 & 6\% \end{array}\right|$$

$$P(A_{1,bca}|E) = \frac{1}{16} \quad P(B_{1,bca}|E) = \frac{25}{48} \quad P(C_{1,bca}|E) = \frac{5}{12}$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} C_{1,cab} & C \text{ è il primo a colpire} & C & S_1 \vee S_3 \vee S_5 \vee S_7 & 80\% \\ A_{1,cab} & A \text{ è il primo a colpire} & \overline{C} \wedge A & S_4 \vee S_6 & 12\% \\ B_{1,cab} & B \text{ è il primo a colpire} & \overline{C} \wedge \overline{A} \wedge B & S_2 & 4\% \end{array}\right|$$

$$P(A_{1,cab}|E) = \frac{1}{8} \quad P(B_{1,cab}|E) = \frac{1}{24} \quad P(C_{1,cab}|E) = \frac{5}{6}$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c} C_{1,cba} & C \text{ è il primo a colpire} & C & S_1 \vee S_3 \vee S_5 \vee S_7 & 80\% \\ B_{1,cba} & B \text{ è il primo a colpire} & \overline{C} \wedge B & S_2 \vee S_6 & 10\% \\ A_{1,cba} & A \text{ è il primo a colpire} & \overline{C} \wedge \overline{B} \wedge A & S_4 & 6\% \end{array}\right|$$

$$P(A_{1,cba}|E) = \frac{1}{16} \quad P(B_{1,cba}|E) = \frac{5}{48} \quad P(C_{1,cba}|E) = \frac{5}{6}$$

4.3 Caso dell'ordine di lancio ignoto

In questo caso si può supporre che ci sia stato un sorteggio a caso di una delle sei (3!) possibilità ritenute equiprobabili.
Indicando con A_1 l'evento "A è il primo a colpire il bersaglio" e sfruttando i risultati del precedente paragrafo abbiamo:

$$P(A_1|E) = \frac{1}{6}P(A_{1,abc}|E) + \frac{1}{6}P(A_{1,acb}|E) + \frac{1}{6}P(A_{1,bac}|E)+$$

$$+\frac{1}{6}P(A_{1,bca}|E) + \frac{1}{6}P(A_{1,cab}|E) + \frac{1}{6}P(A_{1,cba}|E)$$

Sostituendo in questa e nelle due analoghe si ottiene:

$$P(A_1|E) = 29/96 \quad P(B_1|E) = 23/96 \quad P(C_1|E) = 11/24$$

5. Scenario di una freccia a segno

Sappiamo che è stato deciso che i tre arcieri lancino contemporaneamente ma parallelamente ognuno verso un proprio bersaglio. I bersagli sono stati posti a distanza di sicurezza gli uni dagli altri, ma solo uno dei tre è inquadrato da una telecamera fissa senza audio. Sappiamo che il lancio è imminente, ma non sappiamo altro. Nell'attesa si enuncia il problema:
Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?
In questo caso si verifica l'evento E=”Almeno una freccia raggiunge il bersaglio”
$P(E)=1-P(S_0)$ Nel nostro caso corrisponde al 96%
Sia l'evento A*="la freccia a segno è di A", analogamente per B* e C*. Risulta:

$$P(A^*) = P(S_4) + \frac{1}{2}P(S_5) + \frac{1}{2}P(S_6) + \frac{1}{3}P(S_7) = 29\%$$

$$P(B^*) = P(S_2) + \frac{1}{2}P(S_3) + \frac{1}{2}P(S_6) + \frac{1}{3}P(S_7) = 23\%$$

$$P(C^*) = P(S_1) + \frac{1}{2}P(S_3) + \frac{1}{2}P(S_5) + \frac{1}{3}P(S_7) = 44\%$$

Essendo $P(E|A^*)=P(E|B^*)=P(E|C^*)=1$ per il teorema di Bayes:

$$\left| \begin{array}{l} P(A^*|E) = \dfrac{P(E|A^*)P(A^*)}{P(E)} \\ P(B^*|E) = \dfrac{P(E|B^*)P(B^*)}{P(E)} \\ P(C^*|E) = \dfrac{P(E|C^*)P(C^*)}{P(E)} \end{array} \right| \begin{array}{l} = \dfrac{29\%}{96\%} = \dfrac{29}{96} \\ = \dfrac{23\%}{96\%} = \dfrac{23}{96} \\ = \dfrac{44\%}{96\%} = \dfrac{11}{24} \end{array} \right|$$

6. Scenario del lancio di un arciere non identificato

Immaginiamo che si segua l'evento già iniziato da lontano con un binocolo.
Si vede un arciere che si sta scaldando per lanciare il proprio dardo.
Impossibile identificarlo. Certamente però è A oppure B oppure C con uguali possibilità.
Non sappiamo neppure se l'arciere osservato sia il primo, il secondo o l'ultimo a tirare.
Non possiamo vedere se la freccia che presto sarà scoccata andrà a segno, ma possiamo vedere chiaramente l'arbitro che, come sappiamo, sventolerà le sue bandierine se una freccia colpirà il bersaglio altrimenti allargherà le braccia per segnalare il contrario. Nell'attesa si formula il problema:
Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?
Indichiamo l'evento "uno dei tre arcieri tira e colpisce il bersaglio" con la lettera E.
Indicando con T_A T_B T_C l'evento in cui a tirare è l'arciere specificato in pedice si ha

$$P(T_A) = P(T_B) = P(T_C) = \frac{1}{3}$$

$$E = T_A \wedge A \vee T_B \wedge B \vee T_C \wedge C$$

e quindi per i teoremi della probabilità composta e totale abbiamo

$$P(E) = \frac{1}{3}P(A) + \frac{1}{3}P(B) + \frac{1}{3}P(C)$$

per cui sostituendo i dati si ottiene:

$$P(E) = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{4}{15} = \frac{19}{30}$$

$$\left| \begin{array}{l} P(T_A|E) = \dfrac{P(E|T_A)P(T_A)}{P(E)} \\ P(T_B|E) = \dfrac{P(E|T_B)P(T_B)}{P(E)} \\ P(T_C|E) = \dfrac{P(E|T_C)P(T_C)}{P(E)} \end{array} \right| \begin{array}{l} = \dfrac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{19}{30}} = \dfrac{6}{19} \\ = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{19}{30}} = \dfrac{5}{19} \\ = \dfrac{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{19}{30}} = \dfrac{8}{19} \end{array} \right|$$

7. Elementi di storia del problema

Non so né chi abbia ideato né quando sia stato ideato questo problema.
Io ne sono venuto a conoscenza grazie alla mia amica Ivana Niccolai, maestra elementare in pensione e appassionata di matematica.
Da lei ho saputo che il problema nel 2003 fu postato da un corsista nel forum nazionale di matematica dell'Indire moderato da un professore di calcolo delle probabilità
Quasi immediatamente, il moderatore postò la sua soluzione. Siccome nessuno dei docenti partecipanti, compreso chi aveva proposto tale quesito, aveva inviato alcuna soluzione alternativa, Ivana preferì scegliere il silenzio, aspettando di riuscire a capire, prima o poi, la risposta del moderatore. La sua risoluzione era diversa , ma avrebbe voluto comprendere quanto scritto dal moderatore prima di intervenire in merito. Alla fine decise di trascrivere negli appunti, da rivedere in seguito, testo e risoluzione pubblicati, in attesa di trovare, poi, il tempo necessario per una riflessione approfondita, tanto più che in tale periodo era mancata sua madre.
Molti anni dopo, nel 2014, Ivana incontrò lo stesso identico problema nel forum "Matematicamente". Qui trovò una risposta del tutto diversa rispetto a quella postata dal docente di calcolo delle probabilità, da lei trascritta più di dieci anni prima; era invece simile a quella a cui era giunta lei, ma di cui non era sicura. Constatata questa diversità nelle risposte, Ivana cercò in molti modi di dirimere la questione e infine si rivolse anche a me.
All'inizio la soluzione data nel forum Matematicamente mi sembrò essere l'unica corretta. La precisai meglio, chiarendo i passaggi e mettendo bene in evidenza il teorema di Bayes, ma confermandone in pieno il risultato. Poi però, pian piano, stimolato da quella risposta enigmatica, mi resi conto di quanto il testo proposto fosse ambiguo e si prestasse a interpretazioni diverse. Esplorai così un vasto spazio di possibilità cercando di esaminare ogni possibile caso. Mi accorsi quindi che in alcune varianti venivano sfruttati tutti i dati del problema, anche quelli che in prima lettura apparivano curiosamente inutili. Insomma, mi appassionai al problema e alle sue sfaccettature fino al punto di decidere, con la collaborazione di Ivana, di pubblicare, in un sito didattico, Maecla, le varie soluzioni escogitate.
Passati ancora diversi anni ho deciso di rivedere quel lavoro e presentare quel problema a questo simposio.

7.1 Effetto "Ipse dixit"

Tre frecce vengono lanciate contro un bersaglio da tre arcieri. Poiché i tre arcieri sono a distanza diversa dal bersaglio, si stima in 3/5 la probabilità dell' arciere A di colpire *il bersaglio, in 1/2 quella dell'arciere B e in 4/5 quella dell'arciere C. Se una freccia colpisce il bersaglio, qual è la probabilità che sia dell'arciere A?*

Unica risposta al problema, postato da una corsista nel 2003, fornita dal moderatore Giuseppe Anichini nel forum di matematica
del percorso A del FORTIC:
“Il problema non sembra esaurientemente enunciato.
Aggiungo pertanto una ipotesi ed una doppia casistica:
ipotesi: una SOLA freccia colpisce il bersaglio;
.casistica A): VEDIAMO i 3 amici tirare contemporaneamente.
.casistica B): VENIAMO INFORMATI che uno dei 3 ha tirato ed ha colpito il bersaglio.
- nel caso A e' ovvio che la risposta non puo' essere che 3/5 essendo indifferente la presenza di 2 (o piu') tiratori;
- nel caso B DOBBIAMO decidere con quale probabilita' il tiratore in oggetto e' A: e' il problema della necessita' di predisporre una valutazione di probabilita' a priori, essenziale nella impostazione bayesiana. In assenza di informazioni possiamo noi supporre probabilita' 1/3 per tale evento (e per gli analoghi eventi B e C). Tutto cio' precisato la risposta -- diretta applicazione della regola di Bayes -- e' 6/19”

Commento

L'intervento ha il merito di evidenziare deficienze nell'enunciato del problema.
Mentre il caso B corrisponde al nostro scenario del lancio di un arciere non identificato, per quanto riguarda il caso A la risposta data non solo non mi sembra ovvia, ma mi sembra chiaramente errata; quasi certamente inserita ad arte dal docente per stimolare interventi che poi, avendo probabilmente l’autorità del moderatore intimorito i frequentatori del forum, non ci sono stati.
La risposta non è ammissibile perché allora per lo stesso motivo le probabilità di B e di C di essere i lanciatori dell'unica freccia a segno sarebbero 50% e 80%. Ma così la probabilità totale sarebbe 190% invece di 100%!. Se poi vogliamo divertirci a cambiare i dati del problema possiamo assegnare a C il 100% (arciere infallibile data la sua estrema vicinanza al bersaglio) e capire senza difficoltà che in questo caso la probabilità che la sola freccia andata a segno sia di A è nulla.
Speriamo inoltre, per motivi umanitari, che A e B abbiano voluto risparmiare la vita di C che comunque, date contemporaneità e vicinanza, avrebbe avuto il tempo di andare a segno!

Siti

● Utente_V, https://www.matematicamente.it/forum/post163288.html, Forum Matematicamente, 2007
● Giorgio Pietrocola, http://www.pietrocola.eu/maecla/iperproblema/index.htm, Iperproblema dei tre arcieri, Maecla 2014
● Utente_Panurgo, https://www.base5forum.it/tre-arcieri-tre-freccie-una-freccia-t7760.html, Forum Base 5, 2014

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 4, No 2 (2021), 29-42

Le origini del Calcolo delle probabilità: Pierre de Fermat e Blaise Pascal

Nicla Palladino[1]

[1]Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia.
nicla.palladino@unipg.it

Sunto
Il tardivo costituirsi del "calcolo delle probabilità" è tanto più singolare in quanto alcuni concetti che poi entreranno a far parte di questa disciplina trovano dei precedenti già nell'antichità. La data di inizio ufficiale del Calcolo delle Probabilità su cui concorda la maggioranza degli storici è il 1654, anno in cui si svolge un interessante scambio epistolare tra Fermat e Pascal.

Keywords: Fermat, Pascal, lettere, origini probabilità

1. Le origini

Il tardivo costituirsi del calcolo delle probabilità è tanto più singolare in quanto alcuni concetti che poi entreranno a far parte di questa disciplina (media, teoria degli errori, ecc.) trovarono dei precedenti già nell'antichità, specialmente in campo artistico, giuridico, astronomico.
L'intuizione che negli eventi governati dal caso, come ad esempio nei giochi d'azzardo, fosse soggiacente una legge matematica sembra comparire per la prima volta in un commento del 1477 alla "Divina Commedia" relativo ad una terzina del Purgatorio:
"Quando si parte il gioco de la zara, colui che perde si riman dolente repetendo le volte, e tristo impara..." (Quando si conclude il gioco della zara [con i giocatori che abbandonano il tavolo da gioco], colui che perde resta amareggiato, ripetendo le giocate [i tiri dei dadi], e, deluso, impara [per poter vincere in futuro]). In Arabo, zar significa dado; il gioco consiste nel puntare sulla somma dei numeri ottenuti come risultato del lancio di tre dadi.

Il commentatore di Dante, Benvenuto d'Imola, analizza le possibili uscite della somma 3 e della somma 4 con tre dadi ed afferma che queste somme possono entrambe venire fuori in un solo modo. Pare infatti che non si potesse puntare sui risultati 3, 4, 17, 18 che nascevano in un unico modo (sarebbe stato troppo il tempo d'attesa): $3 = 1+1+1$; $4 = 1+1+2$; $17 = 5+6+6$; $18 = 6+6+6$ (anche se i casi favorevoli alle uscite sono diversi: uno per 3 e 18, 3 per 4 e 17).
Di fronte a diverse affermazioni si può parlare di alcune più probabili e di altre meno probabili, a seconda della loro plausibilità, o possibilità. Il termine probabilità viene quindi usato come misura del grado di plausibilità di una affermazione, ovvero del "verificarsi di un certo evento".
L'origine della parola probabilità, dal latino *probàbilis*, da *probàre* (provare), sta ad indicare ciò che è "degno di approvazione", "verosimile", "accettabile", "credibile", "ammissibile in base ad argomenti abbastanza sicuri". Essa contrasta con "probatus" (provato) riferito ad affermazioni per le quali è accertato il contenuto di verità (vero o falso). Nel mondo antico, il concetto di probabilità era essenzialmente conosciuto in termini filosofici, rimanendone del tutto ignoti i risvolti matematici. Il motivo per cui questi ultimi furono trascurati risiede presumibilmente nella forma assunta da uno dei primi strumenti di gioco d'azzardo, gli astragali, i quali avevano forme talmente diverse tra loro che l'elevata arbitrarietà dei risultati ottenibili con i lanci non permise di evidenziare alcun tipo di regolarità meritevole di considerazione da parte dei matematici.
L'inizio della teoria delle probabilità, chiamata all'epoca la "dottrina della sorte", avviene nel XVII secolo, come risposta a due classi di problemi legate ai giochi d'azzardo e alle assicurazioni. Nel primo caso si trattava di valutare la probabilità di vincere scommettendo sul verificarsi di un certo evento. Questi problemi possedevano

una caratteristica comune: si trattava di spiegare la discrepanza tra le previsioni teoriche, sostenute da semplici calcoli, e la frequenza con cui nella pratica si registrava un certo evento.
Nel secondo caso si rendeva necessaria per i banchieri la stima della probabilità di morte di un individuo di una certa età, ossia la probabilità che egli potesse sopravvivere un determinato numero di anni dalla stipula del contratto riguardante una qualche forma di assicurazione sulla vita, oppure che un certo carico di merce arrivasse indenne alla sua destinazione.
Questi due diversi contesti hanno dato luogo a due diversi metodi per valutare la probabilità, o, come si usa ancora dire, a due "definizioni" di probabilità viste talvolta in contrapposizione fra di loro: la "matematica" e la "sperimentale" (o "empirica"); ovvero, detto in altri termini: la "classica" e la "frequentista", quella "a priori" e quella "a posteriori".

2. Cardano e Galilei

I primissimi e documentati studi condotti nel campo della probabilità risalgono al XVI secolo e sono riportati nell'opera "Liber de ludo aleae", scritto da Gerolamo Cardano intorno al 1525 e pubblicato postumo nel 1663. Geniale fisico e matematico nonché illustre medico, Cardano fu anche un cultore di astrologia e, soprattutto, un accanito giocatore d'azzardo. Tale passione lo portò a dilapidare ingenti fortune; per questo, nonostante gli elevati guadagni ottenuti con intense e molteplici attività, condusse sempre una vita estremamente precaria. Il Liber de ludo aleae è dunque il frutto di questa passione e, sebbene sia solitamente citato soprattutto in rapporto allo sviluppo del calcolo delle probabilità, questo libro contiene anche riflessioni morali, storiche e tecniche sul gioco dei dadi. Cardano fornisce alcuni risultati sul gioco dei dadi: l'equiprobabilità dell'uscita di una faccia di un dado, calcola la probabilità dei risultati ottenuti lanciando dei dadi, si interessa del "problema dei punti" e formalizza, per certi versi, quella che è nota come "definizione" classica della probabilità (ripresa ed enunciata da Laplace qualche secolo dopo).
Nelle Corti e nei palazzi dell'aristocrazia il gioco assume talvolta aspetti maniacali. Tra i giocatori d'azzardo vi sono anche gentiluomini colti e dotati di spirito di osservazione: si chiedono su quale risultato convenga puntare avendo, nel contempo, cura di registrare tutte le "uscite" o risultati di una o più serate di gioco, calcolando così la frequenza delle varie "uscite". Alcuni gentiluomini fiorentini e probabilmente il Duca di Ferrara, appassionati giocatori della zara, chiedono a Galilei (attorno a 1630): «La lunga osservazione ha fatto da i giocatori stimarsi più vantaggioso 'l 10 e 'l 11 che 'l 9 e 'l 12 […] ancor che 'l 9 e 'l 12 in altrettante maniere si componghino in quante 'l 10 e 'l 11; perchè?».
Galilei si occupò di questo problema e spiegò come mai sia più "vantaggioso" il 10 del 9 nel lancio di tre dadi nel trattato "Sopra il giuoco dei Dadi": "…è noto che una lunga

osservazione del gioco ha portato i giocatori di dadi a ritenere che il 10 è più vantaggioso del 9.” Nella parte iniziale osserva che esistono degli eventi che sono più frequenti rispetto ad altri: “Il fatto che nel gioco dei dadi certi numeri sono più vantaggiosi di altri ha ragioni ovvie, ossia alcuni risultati sono più frequenti di altri…”. Galilei spiegò il fenomeno, per via teorica, enumerando le possibili “permutazioni” di tre numeri da comporre in somma. Ottenne che per il 10 esistono 27 terne di numeri interi che sommati tra loro danno il numero 10 (casi favorevoli), mentre per il 9 ne esistono 25; infatti le somme 9 e 10 possono essere ottenute con tre dadi secondo le seguenti somme a tre termini:

9 = 1 + 2 + 6 → ottenibili –“permutabili” – in 6 modi diversi
= 1 + 3 + 5 → ottenibili in 6 modi diversi
= 1 + 4 + 4 → ottenibili in 3 modi diversi
= 2 + 2 + 5 → ottenibili in 3 modi diversi
= 2 + 3 + 4 → ottenibili in 6 modi diversi
= 3 + 3 + 3 → ottenibile in 1 solo modo;
25 modi diversi

10 = 1 + 3 + 6 ottenibili –“permutabili”– in 6 modi diversi
= 1 + 4 + 5 → ottenibili in 6 modi diversi
= 2 + 2 + 6 → ottenibili in 3 modi diversi
= 2 + 3 + 5 → ottenibili in 6 modi diversi
= 2 + 4 + 4 → ottenibili in 3 modi diversi
= 3 + 3 + 4 → ottenibili in 3 modi diversi
27 modi diversi

Galilei fa il calcolo dei casi favorevoli a un avvenimento, definito “evento” (qui è un tiro di 3 dadi che dia come risultato 10), rispetto a tutti gli eventi possibili (sono 216 = 63, numero totale dei diversi tiri con 3 dadi; Principio fondamentale del calcolo combinatorio: si realizzino due esperimenti, si supponga che il primo esperimento abbia m esiti possibili, che per ognuno di questi il secondo abbia n esiti possibili. Allora i due esperimenti hanno in tutto mn esiti possibili). Galilei non calcola così il numero totale di “eventi”, bensì enumerando tutti le uscite ottenibili dal lancio di tre dadi.

3. Le lettere tra Fermat e Pascal

La data di inizio ufficiale del Calcolo delle Probabilità su cui concorda la maggioranza degli storici è il 1654, anno in cui si svolge un interessante “commercium epistolicum” tra Pierre de Fermat (1601 –1665) e Blaise Pascal (1623-1662). Fermat fu giurista, raggiunse la più alta carica presso la corte penale di Tolosa, dove si trasferì nel 1631, ma per tutta la vita coltivò la passione per la matematica, raggiungendo innovativi risultati in diversi campi. La maggior parte dei suoi risultati ci è pervenuta tramite il fitto carteggio che tenne con la comunità scientifica francese, (M. Mersenne, Cartesio, Pascal). L'opera di Fermat può considerarsi di tipo pionieristico: partì da problemi classici della matematica greca per affrontarli con le nuove tecniche rese disponibili da Viète e altri. In analisi sviluppò metodi per la determinazione dei massimi e dei minimi di una funzione che anticipavano Newton e Leibniz. In geometria sviluppò il metodo della geometria analitica prima e in modo indipendente da Cartesio, dove esplicitamente fa ricorso a equazioni per descrivere oggetti del piano.

Il padre di Pascal, magistrato e matematico, orientò Blaise, nell'ambiente scientifico. Pascal è da considerare un allievo di Desargues. Usando lo stesso procedimento estensivo con il quale Desargues, partendo da una proposizione di Pappo, aveva ricavato il suo teorema sul quadrilatero iscritto in una conica, il sedicenne P. pervenne al teorema sull'esagono iscritto in una conica ("hexagramme mystique"). Sul finire della sua vita pubblicò una lettera sulle proprietà della cicloide. Studiò le curve come enti a sé, precorrendo l'idea di funzione, poi studiata dai fondatori del calcolo infinitesimale Leibniz e Newton. Pascal ha dato un importante contributo anche all'aritmetica, sia teorica sia pratica con il primo modello di macchina calcolatrice (la Pascalina).

Antoine Gombaud, cavaliere de Méré (1607 – 1684), scrittore francese, era un nobile con la passione del gioco. Amico di Blaise Pascal, gli propose alcuni problemi inerenti al gioco d'azzardo. Pascal, per rispondere alle domande del Cavaliere de Meré, basò i suoi ragionamenti sull'esperimento e sulle frequenze. Comunicò i quesiti a Fermat e fu così che i due matematici francesi intrapresero una corrispondenza epistolare in cui si scambiarono le idee riguardo i problemi di gioco proposti.

Alcune domande del Cavaliere erano molto arzigogolate (da vero fanatico dei dadi): "Se voglio fare 6 con il lancio di un dado devo chiedere almeno 4 lanci per avere più probabilità di vincere che di perdere.

Se invece voglio fare un doppio 6 con il lancio di due dadi, non è più sufficiente che chieda 24 lanci, come sembrerebbe logico, ma ho verificato che devo farne di più per essere sicuro di vincere".

Le considerazioni di de Méré si basavano sulla sua grande esperienza di gioco. Il ragionamento, come questo da lui fatto, può trarre in inganno: un dado può cadere in 6 modi diversi e 4 lanci corrispondono ai 4/6, cioè ai 2/3, dei lanci possibili. Due dadi possono cadere in 36 modi diversi e 24 corrisponde proprio ai 2/3 di 36.

La risposta intuitivamente sembra quindi che debbano essere 4 e 24 il numero minimo di lanci necessari per essere sicuri di vincere.

In pratica però, con il lancio di due dadi accadeva che 24 lanci non fossero sufficienti per avere una probabilità di vincere superiore a quella di perdere.

Pascal lo invitò semplicemente a calcolare meglio le probabilità. Nel caso di un dado, i sei risultati possibili hanno la stessa probabilità di presentarsi. Al primo lancio abbiamo 6 casi possibili, uno solo favorevole e 5 sfavorevoli. La probabilità di vincere è $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}=0{,}1\overline{6}$. Al primo lancio è quindi maggiore la probabilità di perdere che quella di vincere. Al secondo lancio sempre di un solo dado accade che, se abbiamo perso al primo, abbiamo:

- 36 (6X6) casi possibili,
- 25 sfavorevoli,
- 36 – 25 = 11 casi favorevoli.

La probabilità di vincere è sempre inferiore a quella di perdere: $1-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{36}=0{,}30\overline{5}$.
Al terzo lancio, se non abbiamo ancora vinto, abbiamo

- 216 (6X6X6) casi possibili,
- 125 sfavorevoli,
- 216 – 125 = 91 casi favorevoli.

La probabilità di vincere è ancora inferiore a quella di perdere: $1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}=0{,}4212$.
Al quarto lancio, abbiamo

- 1 296 (6x6x6x6) casi possibili,
- 625 sfavorevoli,
- 1 296 – 625 = 671 casi favorevoli.

I casi favorevoli superano finalmente i casi sfavorevoli e la probabilità di vincere risulta maggiore di quella di perdere: $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{671}{1296}=0{,}517$.
In altri termini: la probabilità **p** dell'evento “in 4 lanci di un dado esce almeno una volta 6” equivale alla probabilità contraria dell'evento **q:** “in quattro lanci non esce nemmeno una volta 6”: **q**= $\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)^4$ e **p**=1-q=$\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{671}{1296}=0{,}517$.
Ripetiamo lo stesso ragionamento per il lancio dei due dadi. Al primo lancio abbiamo

- 36 casi possibili,
- 35 sfavorevoli
- 36 – 35 = 1 caso favorevole.

La probabilità di vincere è $1-\frac{35}{36}=0{,}02\overline{7}$.

Al secondo lancio, la probabilità di vincere è: $1-\left(\frac{35}{36}\right)^2\approx 0{,}056$. Proseguendo in questo modo, al ventiquattresimo lancio, si verifica che la probabilità di vincere è ancora inferiore a quella di perdere: $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}\approx 0{,}491$. Solo al venticinquesimo lancio (non al ventiquattresimo, come pensava de Merè) la probabilità di vincere diventa maggiore di quella di perdere: $1-\left(\frac{35}{36}\right)^{25}\approx 0{,}505$.
Detto in altri termini, la probabilità dell'evento p “in 24 lanci di due dadi esce almeno un doppio 6” equivale alla probabilità contraria dell'evento q=1-p “in 24 lanci di due dadi non esce nemmeno una volta un doppio 6”: *q*= $\left(\frac{35}{36}\right)\cdot\left(\frac{35}{36}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{35}{36}\right)=\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ e p=1-q=0,491 circa.

4. Il problema dei punti

Altro quesito del Cavaliere a Pascal era il "problema dei punti", ossia come dovesse essere "equamente" distribuita la posta in gioco tra due giocatori nel caso in cui questi decidessero di abbandonare il gioco prima che fosse terminato (si ritrova ancora nel carteggio tra i due matematici francesi). Il problema sintetizzato: "Due giocatori A e B scommettono ciascuno **32** monete su un gioco a tre punti. Quando A ha due punti e B uno, il gioco viene interrotto. Come deve essere divisa equamente la posta totale (64 monete) tra i due giocatori?".

Pascal divide il problema in parti proponendo un «procedimento ricorsivo» per illustrarne la soluzione.

I due giocatori si trovano a giocare una partita della quale la sorte è tale che

- se la vince il primo, egli guadagna tutto il denaro che è in gioco, cioè 64 monete;
- se la vince l'altro, essi sono due a due e di conseguenza, se essi si vogliono separare, è necessario che ciascuno ritiri la propria posta, cioè ciascuno 32 monete.

Dunque, se il primo vince, gli toccano 64 monete; se perde gli toccano 32 monete.

A questo punto Pascal arguisce che se i due giocatori non vogliono arrischiare questa partita e separarsi senza giocarla, il primo dirà: "Io sono sicuro di avere 32 monete, poiché la perdita stessa me le dà; ma per le altre 32, può essere che le avrò io, può essere che le avrete voi; il rischio è uguale; dividiamo dunque queste 32 monete a metà e datemi, oltre queste, le mie 32 che sono per me sicure". Egli avrà dunque 48 monete e l'altro 16.

Allargando le ipotesi: supponiamo che il primo abbia due punti e l'altro nessuno e che essi comincino a giocare un'altra partita. La sorte di questa partita è tale che

- se la vince il primo egli prende tutto il denaro;
- se la vince l'altro giocatore eccoci ricondotti al caso precedente, nel quale il primo avrà due partite e l'altro una.

Abbiamo già mostrato che in questo caso spettano, a quello che ha due partite 48 monete: dunque se essi non vogliono giocare questa partita, egli dirà: " Se io la vinco, guadagnerò tutto, che è 64; se la perdo, mi apparterrà legittimamente 48: datemi dunque le 48 che mi sono certamente dovute nel caso che io perda e dividiamo le altre 16 a metà, perché c'è lo stesso rischio che le vinciate voi come che le vinca io".

Cosi egli avrà 48 + 8, che sono 56 monete.

Supponiamo, infine, che il primo non abbia che una partita vinta (quindi un punto) e l'altro nessuna.

Se essi cominciano una nuova partita, la sorte è tale che, se il primo la vince, egli avrà appunto due partite e pertanto, per il caso precedente, gli apparterranno 56 monete; se egli la perde, essi sono a pari: dunque gli appartengono 32 monete.

Dunque egli dirà: "Se non la volete giocare, datemi 32 monete, che mi sono sicure, e dividiamo il resto da 56 a metà. Da 56 togliete 32, resta 24; dividete 24 a metà, prendetene 12 e io ne prendo 12, che con 32 fanno 44".

Ora, in questo modo, voi vedete mediante le semplici sottrazioni che per la prima partita gli appartengono 12 monete, per la seconda altre 12 e per l'ultima 8.
Pascal muta una situazione di incertezza in cui si trova il giocatore in una situazione di certezza, sia pur con una finzione matematica, introducendo il concetto di "speranza matematica".
(Lettera di Pascal a Fermat del 29 luglio 1654)
Nella Lettera di Pascal a Fermat del 24 agosto 1654, Pascal illustra il metodo di Fermat.
Partiamo da un esempio particolare: ad A mancano due partite per concludere il gioco e a B ne mancano tre.
Si procede con partite «finte» con quattro dadi a due facce (tipo Testa/Croce).
Fermat conclude che il gioco sarebbe stato deciso nel corso delle successive quattro partite. Dunque, è necessario vedere in quanti modi i quattro punti possono essere distribuiti tra i due giocatori e poi considerare tutti i casi favorevoli alla vittoria dell'uno e tutti quelli favorevoli alla vittoria dell'altro. Scrive esplicitamente tutte le combinazioni possibili per distribuire 4 punti tra i due giocatori:

aaaa, aaab, aaba, aabb; abaa, abab, abba, abbb; baaa, baab, baba, babb; bbaa, bbab, bbba, bbbb.

Esse sono 16; tra queste ogni combinazione in cui **a** occorre un numero di volte pari a 2 o maggiore rappresenta un caso favorevole alla vittoria di **A;** ogni combinazione in cui **b** occorre 3 volte o 4 rappresenta un caso favorevole alla vittoria di **B**. Contando le combinazioni favorevoli ad A e a B, si ritrova che esse sono 11 e 5; e poiché questi casi sono ugualmente possibili, Pascal conclude che la posta deve essere suddivisa nel rapporto 11:5.
La corrispondenza tra Pascal e Fermat non mette in evidenza il metodo generale utilizzato da Pascal per risolvere il problema della ripartizione della posta tra due giocatori che fu invece esposto nel Trait té du Triangle arithmètique et de son application, (pubblicato postumo nel 1665).
In realtà il «problema della divisione della posta» era già presente in un manoscritto anonimo del XIV secolo: Regole d'Alzibra. In generale la sua formulazione è:
Due giocatori A e B si accordano nel mettere in palio una certa posta da destinare a chi per primo raggiunga N punti in un gioco. Il gioco viene però interrotto quando A ha ottenuto n punti e B m punti, con n ed m entrambi inferiori ad N. Si domanda come occorra ripartire la posta in questo caso.
Si gioca su tre vittorie
La partita viene sospesa sul 2 a 0 per il giocatore A contro B.
Parte dal presupposto che, quando un giocatore vince una partita, egli conquisti parte del denaro dell'avversario. Così A guadagna c ducati a B vincendo la prima partita per cui, al termine di questa egli possiederà $1 + c$ ducati, mentre B ne possiederà solo $1 - c$.
L'incognita c rappresenta il valore della prima partita. Sul punteggio di 1 a 0 (per A), l'autore afferma che anche la seconda partita avrà valore $c' = c$.

Il ragionamento sembra basarsi su due considerazioni di simmetria. La prima è che il guadagno di un giocatore coincide con quanto l'altro perde. L'altra è che il guadagno di A deve essere lo stesso del guadagno che otterrebbe B, vincendo.

- Se A vincesse la seconda partita (2-0), il suo guadagno arriverebbe a $c + c'$
- Se B vincesse (1-1), il guadagno complessivo di B sarebbe $c' - c$, visto che ha perso la prima partita.

Tuttavia, sul punteggio di 1 a 1, il guadagno di B deve essere nullo e quindi $\mathbf{c' = c}$. Detto questo, dopo che A ha vinto la seconda partita (2-0), il suo capitale totale è $1 + 2c$, mentre quello di B è $1 - 2c$.
Per procedere, l'autore osserva che, se A vincesse ancora (3-0), B perderebbe l'intera somma residua $1 - 2c$ che rappresenta il valore di questo gioco.
Se invece B vincesse (2-1), A possederebbe $4c$, mentre B si troverebbe con $2-4c$ ducati che è anche il valore della partita successiva, in quanto se B la perdesse, perderebbe tutto.
Vincendo B, A avrebbe $8c - 2$ ducati, mentre B avrebbe $4 - 8c$ ducati e le due cifre debbono essere uguali perché il punteggio è di 2 a 2. Pertanto $4 - 8c = 8c - 2$ da cui $c = 3/8$.
Tornando al punteggio al quale si è effettivamente interrotta la partita, ad A spettano $1 + 2c = 7/4 = 1$ ducato e 3/4, mentre a B spetta il restante quarto di ducato.
L'anonimo autore ha avuto il merito di determinare la suddivisione della posta con un metodo che procede "in avanti", partendo cioè dal punteggio iniziale di 0-0.
Manca però la capacità di generalizzare il procedimento al caso di altri punteggi o al caso di più di due giocatori.

5. Il periodo successivo

Né Pascal né Fermat diedero una stesura sistematica ai risultati a cui erano pervenuti
Nel 1657, il matematico olandese Christian Huygens, venuto a conoscenza della corrispondenza, si occupò delle questioni contenute nel carteggio pubblicando un libro che per più di 50 anni fu considerato il libro di testo della Teoria della Probabilità, il "De ratiociniis in ludo aleae" (Calcoli nel gioco del dado), scritto in olandese e tradotto in latino.
Nella sua forma definitiva, il trattato presenta 14 problemi con le relative soluzioni e 5 problemi la cui soluzione viene lasciata al lettore. Huygens diede notevoli contributi nel campo della probabilità, dando anche il concetto di speranza matematica, o rendimento, o valor atteso, maggiore e più consapevole rilievo scientifico rispetto alle prime considerazioni fatte da Blaise Pascal:
Il concetto nasce senza il concetto di probabilità (come senza probabilità nasce quella di Pascal): «In un gioco d'azzardo, la speranza di un giocatore di ottenere qualcosa, è quella quantità tale che, se il giocatore la possedesse, allora di nuovo egli potrebbe

pervenire alla stessa speranza con un gioco equo, cioè con un gioco che miri a non danneggiare nessuno.
Ad esempio, se qualcuno, a mia insaputa, nasconde tre monete in una mano e 7 nell'altra e poi mi chiede di scegliere fra le due mani, io dico che questa offerta ha lo stesso valore che se mi regalassero cinque monete. Infatti, se possiedo cinque monete, posso nuovamente pormi nella situazione di avere la stessa possibilità di ottenere o 3 o 7 monete; e ciò con un gioco equo».
«Se con uguale facilità posso ottenere 3 oppure 7, allora la mia speranza è 5 ed è evidente che, possedendo 5, io riesco nuovamente a ricostruire la situazione iniziale. Se infatti, giocando con un altro, poniamo entrambi sul tavolo 5 monete, con la condizione che chi vince darà 3 monete all'avversario, questo gioco è equo ed io, con uguale facilità, posso ottenere 3 monete, se perdo, oppure 7 monete, se vinco: in questo ultimo caso, infatti, ritiro 10 monete ma 3 le do al mio avversario».
Tra le altre cose, Huygens dimostrò le seguenti tre proposizioni:
Proposizione I: « Se con eguale facilità io posso ottenere una somma **a** od una somma ***b***, allora la mia speranza è *(a + b)/2* nel senso che, in possesso di *(a+b)/2,* posso costruire con un avversario un gioco nel quale, versata che sia la somma *(a + b)/2* da parte di ognuno di noi, tutti e due ci troviamo in situazioni identiche cioè nelle due possibilità, che possono verificarsi con pari facilità, di ottenere *a* oppure *b*».
Proposizione I: Se mi aspetto di ottenere a o b con uguale probabilità, allora la mia speranza matematica è pari a $\frac{a+b}{2}$.
Egli chiama x il valore incognito dell'aspettazione e si pone nella condizione di avere x in un gioco equo:.
Due giocatori impegnano la stessa somma x con l'accordo che il vincitore donerà la somma a per chi perde (una sorta di premio di consolazione) se a < x, ed intascherà la somma restante 2x − a.
Se si richiede che 2x − a = b, si ottiene per x il valore indicato.
La seconda proposizione è una estensione della prima al caso di tre valori.
Proposizione II
Se mi aspetto di ottenere a, b o c con uguale probabilità, allora la mia speranza matematica è pari a $\frac{a+b+c}{3}$ e così via.

Proposizione III
Se p è la probabilità che io vinca una somma pari ad a e q quella di vincere una somma pari a b, allora, nell'ipotesi di uguali possibilità, la speranza matematica è $a\,p+b\,q$.
Con queste Proposizioni Huygens risolse molti problemi proposti da Pascal e Fermat.
Problema del dado
Quanti lanci sono necessari per ottenere un 6 con un solo dado?
Soluzione

Huygens arguì che nel caso più semplice, un solo lancio, c'è una sola possibilità di ottenere un 6 e ricevere la somma scommessa *a* e 5 possibilità di non ottenere nulla, dunque, in virtù della Proposizione III la speranza matematica vale $\frac{1 \cdot a + 5 \cdot 0}{6} = \frac{1}{6}a.$

Per calcolare il valor medio per un sei in due lanci, Huygens fa notare che se il 6 appare col primo dado allora la speranza matematica sarà ancora pari ad *a*, altrimenti, tornando nel caso precedente, sarà pari ad $\frac{1}{6}a.$ Dunque, applicando la Proposizione III c'è un solo modo di ricevere *a* e 5 modi di ricevere $\frac{1}{6}a$: $\frac{1 \cdot a + 5 \cdot \frac{1}{6}a}{6} = \frac{11}{36}a.$

Proposizione IV

«Si supponga che qualcuno giochi con me, a questa condizione: chi per primo vince tre volte, si aggiudicherà la cifra in palio, e supponiamo che io abbia già vinto due partite, l'altro una. Desidero sapere se, non volendo proseguire oltre nel gioco ma [volendo] dividere la cifra in palio, per la quale giochiamo, in maniera equa, quanto di questa cifra mi spetta».

Sia a la cifra in palio ed al giocatore G1 manchi un punto per conseguire la vittoria mentre ne manchino due all'altro, G2.

Huygens calcola quale porzione della cifra in palio spetterebbe a ciascuno, continuando il gioco.

Siccome G1 ha vinto due partite, in caso di una sua ulteriore vittoria alla quarta partita, l'intera posta **a** spetterebbe a lui.

Se al contrario la quarta partita venisse vinta da G2, vi sarebbe una situazione di parità e l'aspettazione di ciascuno per la somma **a** è pari ad a/2.

Ora, supponendo che G1 possa indifferentemente vincere o perdere la quarta partita, egli avrebbe la stessa aspettazione per a o per a/2 e dunque, per la Proposizione I, la sua aspettazione è 3a/4:

questa è la parte della posta che spetta ad G1 in caso di interruzione del gioco nelle condizioni dichiarate nell'enunciato.

A G2 spetta la quota a/4.

Il metodo di Huygens è sovrapponibile a quello seguito da Pascal nella corrispondenza con Fermat e, come aveva fatto Pascal in quella sede, egli illustrò nelle proposizioni V-VII altri casi particolari, dall'esame dei quali era possibile risalire al caso generale con un procedimento ricorsivo.

La probabilità di un evento viene considerata da Laplace e da tutti coloro che nel Settecento si occuparono di calcolo delle probabilità come il rapporto tra il numero di casi favorevoli all'evento ed il numero dei casi possibili.

I motivi di questa interpretazione sono immediatamente comprensibili: evolutisi gli strumenti del gioco d'azzardo rispetto ad oggetti primitivi come gli astragali, ne deriva che i casi possibili sono in genere individuabili in modo piuttosto semplice e se, per esempio, i dadi, le monete e le carte non sono truccati, hanno tutti la medesima possibilità di verificarsi. In questi casi, l'equipossibilità è intesa come riferentesi alla perfetta omogeneità del materiale e delle forme di cui sono composti i pezzi, ma poiché l'analisi fisica di qualsiasi materiale tende ad escludere questa perfezione, si deve riconoscere che una definizione empirica di equipossibilità è destinata al fallimento

Un metodo per evitare la circolarità della definizione classica era già noto fin dagli inizi del Settecento, formulato da Jacob Bernoulli col nome di principio di ragion sufficiente: in mancanza di ragioni che permettano di assegnare probabilità diverse a ciascuno di parecchi eventi alternativi ed esaustivi, questi devono essere considerati equiprobabili.

Intorno al XVII secolo lo studio della probabilità si staccò dai problemi di gioco per entrare nelle Scienze sociali grazie ad un commerciante di stoffe inglese, John Graunt.

Graunt, insieme a Malthus, può essere considerato il fondatore della Demografia, cioè la scienza che studia, da un punto di vista quantitativo, tutto ciò che riguarda i movimenti delle popolazioni.

Cominciò a consultare i cosiddetti Bills of mortality (Bollettini di mortalità) che fornivano la lista dei morti e delle nascite in alcuni quartieri di Londra, in cui erano indicate anche le cause di morte: questi bollettini erano spesso consultati dai ricchi londinesi per conoscere l'insorgere di eventuali epidemie di peste e, quindi, mettersi al sicuro lontano dalla città.

Per Graunt questi dati diventarono la base di un approfondito studio per compiere diverse analisi; per esempio, stimare la popolazione della capitale: egli scoprì che nel 1660 c'erano state circa 3 morti ogni 88 persone, per cui essendoci stati 19200 decessi, 19200 * = 387200 è la stima calcolata.

Inoltre egli studiò le cause biologiche, sociali ed economiche della mortalità, lo studio del rapporto tra i sessi, la differenza tra nascite e morti in città e campagna, i flussi migratori.

Lo sviluppo di una vera e propria teoria organica e non intuitiva della legge empirica del caso richiese ancora parecchi anni di studio. Determinante a questo proposito fu l'opera di Jacob Bernoulli (1654-1705), pubblicata postuma a Basilea nel 1713 con il titolo "Ars conjectandi", contenente le basi del calcolo combinatorio, in cui si trattano concetti fondamentali quali la legge dei grandi numeri e la probabilità a posteriori. In tale opera, il matematico svizzero fornì le soluzioni ai problemi proposti da Huygens e inoltre si interessò alla natura della probabilità. Secondo Bernoulli la probabilità è un grado di certezza e differisce dalla certezza assoluta come una parte differisce dal tutto. Nella sua opera magna formulò pure una legge matematica che costituisce la base teorica della distribuzione binomiale: $\boldsymbol{p(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}$ dove X è la variabile aleatoria che conta il numero di successi, p è la probabilità del singolo evento, costante in ogni prova, e q è la probabilità dell'evento complementare (q=1-p).

Nel XVIII secolo il calcolo delle probabilità viene introdotto, anche se lentamente e a stento, nelle Scienze esatte. All'Ars conjectandi si affianca, nel 1718, ancora un'opera dedicata ai giochi d'azzardo, "The doctrine of Chances", di de Moivre (1667-1754), nella quale troviamo anche applicazioni a questioni pratiche come leggi di mortalità, assicurazioni sulla vita, ecc.

Di questa progressiva estensione della probabilità fuori dell'ambito dei giochi d'azzardo è chiaro esempio la *Mémoire sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, dans lequel on examine les avantages de cette méthode par le calcul des probabilités, et on résout différentes problèmes relatifs à cette matière* del torinese Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Nella Memoria vengono studiati 10 problemi nei quali si rivela la ben nota propensione di questo scienziato ad operare servendosi delle tecniche più raffinate dell'algebra.

Fu soprattutto in seguito alle ricerche del fisico scozzese James Clerk Maxwell che questa teoria iniziò intorno alla metà dell'Ottocento a trovare solide applicazioni in altri campi della scienza, acquisendo spessore e rilevanza dal punto di vista scientifico.

La prima sistemazione matura, rigorosa, moderna della nuova scienza fu compiuta però solo nel 1812, con un monumentale trattato "Théorie analytique des probabilités", dal francese Pierre Simon de Laplace. Egli estende l'utilizzo della probabilità a vari campi, ad esempio quello della teoria degli errori, e fornisce una definizione di probabilità nota come definizione classica.

Bibliografia

Bernoulli J. (1713). Ars Conjectandi, opus posthumum, Basel.

Cardano G. (1663). Liber de ludo aleae. In Hieronymi Cardani Mediolanensis Opera Omnia, vol. I., Huguetan & Ravaud, Lugduni, 262-276.

Bottazzini U., Freguglia P., Toti Rigatelli L (1992). Fonti per la storia della matematica. Sansoni Editore.

de Fermat P. (1894). Œuvres de Fermat. Tome II. Gauthier-Villars, Paris.

Galilei G. (1832). Considerazione di Galileo Galilei sopra il giuoco dei dadi. In: Opere, vol. I, Bettoni, Milano.

de Laplace P.S. (1814). Théorie analytique des probabilités, II Edition. Courcier, Paris.

Pascal B. (1665). Traités du Triangle arithmétique et de son application. Desprez, Paris. In Oeuvres complétes, Tome III, Hachette, Paris, (1872), pp. 243–268.

Rosso R. https://mate.unipv.it/~rosso/

Tartaglia N (1556). General Trattato de' numeri et misure. Curtio Trojano dei Navo, Venezia.

https://www.treccani.it/enciclopedia/zara_%28Enciclopedia-Dantesca%29/

https://www.treccani.it/enciclopedia/girolamo-cardano_%28Il-Contributo-italiano-alla-storia-del-Pensiero:-Scienze%29/

https://www.treccani.it/enciclopedia/fermat_%28Enciclopedia-della-Matematica%29/

https://www.treccani.it/enciclopedia/pascal-blaise_%28Enciclopedia-della-Matematica%29/

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 4, No 2 (2021), 43-56

Logica degli eventi e probabilità soggettiva: considerazioni ed esperienze didattiche[1]

Luciana Delli Rocili[a] Antonio Maturo[b]

[a]Mathesis Abruzzo, lucianadr@live.it
[b]Mathesis Abruzzo, antomato75@gmail.com

Sunto Il lavoro si basa sul presupposto che un passo essenziale per lo studio della probabilità soggettiva è l'analisi approfondita delle proposizioni che rappresentano gli eventi. Infatti, molti paradossi della probabilità derivano proprio da errori di interpretazione del testo.
L'apprendimento dei fondamenti della logica del certo e dell'incerto è impostato come il risultato di un lavoro interdisciplinare. Vengono quindi presentate delle sperimentazioni didattiche in cui si cerca di capire come i bambini interpretano una frase con soggetto e predicato, ossia se essi ritengono che i valori di verità che possono essere attribuiti sono quelli della logica bivalente come *vero* o *falso*, oppure quelli di una logica plurivalente. Inoltre si evidenzia la differenza fra incertezza dovuta a *informazione incompleta*, che porta a valutazioni di probabilità, e *incertezza semantica* che conduce alla teoria dei fuzzy set. Particolare attenzione è posta anche nel capire se i bambini riescono ad individuare frasi non complete e che quindi non sono enunciati linguistici.

Parole Chiave: Enunciati della logica binaria. Enunciati linguistici. Logica del certo e dell'incerto. Logica fuzzy. Grado di informazione. Variabili linguistiche.

1. Introduzione

Il primo passo per lo studio della probabilità soggettiva è quello di un'analisi approfondita delle proposizioni che rappresentano gli eventi. Infatti, molti paradossi della probabilità derivano proprio da errori di interpretazione del testo.

In questo lavoro ci focalizziamo sull'analisi delle frasi.

L'apprendimento dei fondamenti della logica del certo e dell'incerto è presentato come il risultato di un lavoro interdisciplinare.

La sperimentazione riguarda essenzialmente due aspetti:

(1) verifica della *comprensione linguistica* di una proposizione;

[1] Ringraziamo i docenti Alberto Lavista, Mariella Centurione, Mauro Scorrano e Nadia Paciocco della Scuola Primaria di "Piano T" (Plesso scolastico dell'Istituto Comprensivo Pescara 5) per aver consentito le sperimentazioni nelle loro classi.

(2) *analisi dello stato di informazione*.

Per il primo aspetto si tratta di vedere come i bambini interpretano una frase con soggetto e predicato, ossia se essi ritengono che i valori di verità che possono essere attribuiti sono:

(a) quelli della logica bivalente come *vero* o *falso*,

(b) valori di verità di una logica plurivalente, ossia se c'è la possibilità/necessità di considerare anche valori di verità intermedi fra *vero* e *falso* come ad esempio: *più vero che falso, più falso che vero, a metà fra vero e falso*.
È anche richiesto ai bambini di individuare frasi non complete e che quindi non sono enunciati linguistici.

Per quanto riguarda il secondo aspetto si tratta di analizzare lo *stato di informazione* sul concetto espresso da una proposizione, ossia di vedere se è possibile attribuire subito ad essa un valore di verità, oppure se è necessario acquisire un'ulteriore informazione.

Mettiamo in evidenza la distinzione fra incertezza dovuta a *informazione incompleta*, che porta a valutazioni di probabilità, e *incertezza semantica* che conduce alla teoria dei fuzzy set.

2. **Primi passi di logica bivalente nella scuola primaria**

La logica bivalente si basa sul *concetto di enunciato o proposizione*.
Il primo passo è quindi saper riconoscere se una frase è un enunciato. Il problema è tutt'altro che banale e proprio il contatto con i bambini può chiarirne le difficoltà.

Alcuni tentativi di descrivere il concetto di enunciato sono i seguenti:
In (Behnke and alii, 1968) un *enunciato o proposizione* della logica bivalente è descritto come un "complesso linguistico o segnico per cui ha senso chiedersi se è *vero* o *falso*".
In (Russell, 1962) un *enunciato* della logica bivalente è descritto come "una disposizione di parole e/o simboli che esprime ciò che è o *vero* o *falso*".

Evidentemente le precedenti descrizioni non sono definizioni e, a nostro parere, *nascondono una valutazione soggettiva*. Ossia esiste un individuo, *il decisore*, forse un esperto di logica o di linguistica, forse la maestra o un bambino, che, per accettare una disposizione di parole e/o simboli come un *enunciato della logica bivalente*, la deve interpretare come una *domanda* a cui si può dare *una e una sola* delle due risposte: *vero* o *falso*.
Le proprietà caratteristiche di un enunciato della logica bivalente sono le seguenti:

(1) *Principio del terzo escluso*. Un enunciato è o *vero* o *falso* e non esiste una terza alternativa.

(2) *Principio di non contraddizione*. Un enunciato non può essere contemporaneamente *vero* e *falso*.

L'insieme dei due principi di terzo escluso e di non contraddizione viene anche chiamato *principio di bivalenza* (Russell, 1962).

Dal punto di vista *linguistico* il concetto di enunciato o proposizione è più ampio, in quanto si riferisce ad una frase di senso compiuto (con soggetto, predicato verbale o nominale, complementi, etc.) per la quale si può esprimere un giudizio di verità che non necessariamente si limita a *vero* o *falso*, ma può essere anche *più falso che vero*, *più vero che falso, a metà fra vero e falso*, etc.

Il primo passo della nostra sperimentazione consiste nel valutare fino a che punto i bambini, opportunamente guidati, riescono a riconoscere se una frase è un *enunciato della logica bivalente*, un *enunciato linguistico*, oppure *non è un enunciato*.

Data la soggettività del concetto, si tratta di vedere in che misura i bambini sono in accordo fra loro o con le opinioni di adulti o esperti.
In altre parole, si tratta di vedere come i bambini interpretano una frase con soggetto e predicato attribuendo semplicemente i valori di verità *vero* o *falso*, oppure attribuendo un giudizio come *più falso che vero, più vero che falso, a metà fra vero e falso*.
Nel caso in cui i bambini non riconoscano la frase come un enunciato linguistico, probabilmente esprimono un giudizio come: *frase non chiara*, *non si capisce* e simili.

Usualmente un enunciato è indicato con una lettera maiuscola.
Se E è un enunciato scriviamo E = 0 per indicare che E è *falso* e E = 1 per indicare che E è *vero*.
Nel caso di enunciati linguistici non bivalenti sono attribuiti a E anche valori numerici compresi fra 0 e 1 (Zadeh, 1965; 1975; Klir and Yuan 1995).

3. Logica del certo e dell'incerto nella scuola primaria

Una volta riconosciuto che una certa frase E è un enunciato della logica bivalente, il secondo passo è capire se le *informazioni* che si hanno a disposizione permettono di stabilire se esso è *vero* o *falso*. Se ciò avviene, E è un enunciato della *logica classica* o *del certo*, in caso contrario E si dice *evento aleatorio*.
La *logica dell'incerto* si occupa di tutti gli enunciati, sia di quelli della logica classica, sia degli eventi aleatori.

Una volta che un bambino ha valutato un'affermazione come *proposizione della logica bivalente*, il secondo passo consiste nel fargli analizzare le informazioni di cui egli è in possesso. L'informazione:

(1) è *totale* se egli è in grado di attribuire un valore di verità all'enunciato;
(2) è *parziale* se invece non può, nel suo stato di informazione, stabilire se l'enunciato è *vero* o *falso*.

Anche il secondo passo è soggettivo, perché due individui che valutano possono avere informazioni diverse.

Un enunciato della logica dell'incerto è usualmente chiamato *evento*. In particolare, un enunciato della logica del certo si dice *evento certo* se assume il valore *vero* e *evento impossibile* se assume il valore *falso*.

"Un *evento* è una proposizione di cui può essere *non conosciuto* il valore di verità. Se tale valore è conosciuto ed è 1, l'evento si dice *certo*, se è 0, si dice *impossibile*, se non è conosciuto si dice *aleatorio*." (de Finetti, 1970, p.710)

La logica dell'incerto, basata sul concetto di evento come proposizione logica, è a fondamento della *probabilità soggettiva* (de Finetti, 1970; Coletti and Scozzafava, 2002) e quindi della *teoria delle decisioni*, ossia dei criteri da seguire per fare scelte coerenti con i propri obiettivi (Lindley, 1990).

Per una verifica della comprensione dei concetti di logica bivalente, abbiamo proposto agli alunni della scuola elementare le seguenti attività:

(1) *lettura di frasi e loro riconoscimento come enunciati della logica bivalente*, verificando il grado di convinzione di ciascun alunno sul fatto che valgono i principi del *terzo escluso* e *non contraddizione*;
(2) *classificazione degli enunciati* accettati come proposizioni della logica bivalente come eventi: *certo*, *impossibile*, *aleatorio;*
(3) quando un enunciato è classificato nella logica del certo, *attivazione di procedure* per verificare se è *vero* o *falso* (*criterio di verificazione*, Fadini, 1979).

4. Enunciati linguistici e logica fuzzy nella scuola primaria

Un passo ulteriore verso la interdisciplinarità si ottiene interpretando gli enunciati che si trovano nella lingua italiana come *proposizioni della logica fuzzy,* che generalizza la logica bivalente (Zadeh, 1965; 1975).

D'altra parte, lo stesso de Finetti, nell'appendice critica del libro *Teoria delle Probabilità*, mette in luce la necessità di prendere in considerazione la logica a più di due valori. In particolare, cita in proposito le varianti proposte in (Reichenbach, 1942) per un *terzo valore di verità* diverso da *vero* e *falso*.

Generalizzando la descrizione di enunciato della logica bivalente data in (Behnke and alii, 1968) chiamiamo *enunciato sfumato* o *fuzzy o linguistico*, con insieme di valori di

verità G, ogni complesso linguistico o segnico per cui ha senso attribuire un *valore di verità* appartenente a G.
Nel caso particolare in cui G si riduce all'insieme {*vero*, *falso*} ci si riduce al concetto di enunciato della logica bivalente.

Riteniamo opportuno tener presente questa generalizzazione già nella scuola primaria per ridurre la distanza fra i concetti *logici* e *linguistici*, poiché nella comunicazione fra individui si usano abitualmente enunciati linguistici che non sono quelli della logica bivalente; ad un enunciato linguistico si possono attribuire giudizi diversi da quelli estremi: *vero* o *falso*.
In tale ordine d'idee ci è sembrato opportuno integrare le attività (1), (2), (3) sopra descritte con le seguenti:

(4) *generalizzazione del concetto di enunciato della logica bivalente*, facendo scoprire ai bambini stessi che in certi casi oltre a *vero* o *falso* ci possono essere altri valori di verità come: *più vero che falso, più falso che vero, a metà fra vero e falso,* invitandoli a dare *giudizi qualitativi,* appartenenti ad un insieme ordinato, compresi fra *vero* e *falso*;

(5) *riflessione sugli aspetti interdisciplinari dei concetti logici*, facendo scoprire che nel linguaggio parlato spesso si usano enunciati che non sono quelli della logica bivalente.

5. La sperimentazione precedente

In passato abbiamo somministrato a quattro classi (due prime e due quarte) di una scuola primaria un questionario con 16 affermazioni classificabili in 7 possibili risposte:

vero, *falso*, *vero o falso ma ora non so quale dei due, più vero che falso*, *più falso che vero, a metà fra vero e falso*, *non è un enunciato linguistico*.
Le prime tre fanno riferimento alla logica bivalente, dalla quarta alla sesta si intende verificare se il bambino intuisce una logica plurivalente.
L'ultima risposta prevede il riconoscimento del fatto che l'affermazione non è completa, e quindi non è un enunciato neanche nella accezione più generale.

I risultati sono apparsi molto interessanti e utilizzabili come spunti per nuove ricerche approfondite.

Nelle prime è stato necessario l'aiuto degli insegnanti sia per una piena comprensione del testo dell'affermazione e sia per l'allineamento per righe e colonne.

Per quanto riguarda le quarte, invece, è stato condotto un esperimento per valutare l'influenza e l'importanza dell'intervento dell'insegnante facendo compilare il questionario ad una classe con spiegazioni essenziali da parte dell'insegnante e a un'altra con spiegazioni dettagliate.

In questo lavoro riportiamo invece alcune sperimentazioni analoghe fatte quest'anno (e ancora in atto) in una classe 5^ della stessa scuola.

6. La sperimentazione attuale

6.1 Il questionario proposto

È stato somministrato un questionario, in una classe quinta di scuola primaria composta da 18 alunni, formato da due blocchi di 8 affermazioni con 8 risposte possibili.
Le possibili risposte alle frasi proposte sono state così formulate:

(1) Logica bivalente

A-*Vero*
B-*Falso*
C-*Vero o Falso, ma non so quale dei due* (evento aleatorio)

(2) Logica plurivalente

D-*Più Vero che Falso*
E- *Più Falso che Vero*
F- *A metà fra Vero e Falso*

(3) Individuazione della frase come "non enunciato"

G- *Non è un enunciato linguistico (non si capisce)*

(4) Ricerca di osservazioni personali, ma anche frase vista come *evento fuzzy*

H-*Altro (scrivi cosa pensi)*

Le prime tre risposte implicavano il riconoscimento, da parte dello studente, dell'affermazione come *proposizione* della logica binaria.

In particolare, le risposte A e B evidenziavano la conoscenza, da parte dello studente, del valore di verità della proposizione, mentre la risposta C significava che lo studente aveva interpretato la proposizione come *evento aleatorio*, non conoscendo il valore di verità.

Le risposte D, E, F implicavano il riconoscimento, da parte dello studente, della possibilità di avere valori di verità diversi da "*vero*" e "*falso*".
Ossia lo studente riconosceva le affermazioni come *enunciati linguistici*, ossia tali da poter individuare la frase come composta dalle sue parti indispensabili (soggetto e predicato), e tale da poter attribuire un valore di verità nell'ambito di una *logica plurivalente* (o *logica fuzzy*), in cui oltre ai valori di verità "*vero*" e "*falso*", sono presi in considerazione "*più vero che falso*", "*più falso che vero*", "*a metà fra vero e falso*".

La risposta G, “*non è un enunciato linguistico*” implicava il riconoscimento, da parte dello studente, del fatto che la frase mancava di parti fondamentali per cui non ha senso attribuire un valore di verità. Per semplificare tale riconoscimento è stato scritto fra parentesi che si tratta di “*frase che non si capisce*”.

La risposta H, “*altro*”, stimola lo studente a fare osservazioni personali, qualora per il bambino non fosse stato possibile inquadrare la risposta in nessuna delle opzioni precedenti. Un bambino molto attento potrebbe anche arrivare, intuitivamente, al concetto di *evento fuzzy*, osservando che, per una data domanda, non sa attribuire il valore di verità “più adeguato” fra quelli proposti, per *mancanza di informazioni*.

6.2 Itinerari didattici seguiti

Prima di sottoporre il questionario, l’insegnante ha ritenuto opportuno far ripercorrere ai bambini alcuni itinerari didattici riguardanti la logica bivalente, la composizione della frase, ha cercato di far intuire che le risposte dipendono anche dalle informazioni possedute ed è stato spiegato ai bambini il significato delle varie risposte.
Nella risposta “*non è un enunciato linguistico (non si capisce)”* la parte tra parentesi è stata aggiunta per facilitare i bambini con difficoltà di apprendimento (BES) presenti nella classe.
È stato rilevato, però, che tale precisazione ha disorientato alcuni altri alunni che hanno inteso di poter inserire in quella colonna le affermazioni che ritenevano incomprensibili perché, a loro giudizio, inaccettabili.

6.3 Il primo blocco di 8 affermazioni

Nella tabella che segue sono state riportate le risposte ottenute per il primo blocco di frasi nella classe 5^A di scuola primaria presa in considerazione.

Classe 5^A Campione di 18 studenti	A vero	B falso	C vero o falso, ma non so quale dei due	D più vero che falso	E più falso che vero	F A metà fra vero e falso	G non è un enunciato linguistico (non si capisce)	H altro (scrivi cosa pensi nel retro del foglio)	Totale risposte
1- Alisia è brava	8	1	7	1		1			18
2- Luigi un panino							18		18
3- Mattia è il più alto della sua classe	16		1	1					18
4- Leonardo è assente	1	13	2	2					18
5- il cane vola sull'albero		16			1		1		18
6- nel mese di settembre fa caldo	1	5	5		5	1			17
7- i cantanti sono famosi	5		5	3	1	2		1	17
8- la Juventus vincerà la prossima partita		1	13			3			17

Tabella riassuntiva dei dati raccolti per il primo blocco

Osservando la tabella, si può notare che la totalità (nell'affermazione n. 2, *Luigi un panino*) ha individuato il concetto di "*non enunciato linguistico*".

Per quanto riguarda l'affermazione n. 1 (*Alisia è brava*), bisogna osservare che si tratta di un enunciato fuzzy in quanto non ben definita. Infatti, si dovrebbe capire quale significato dare alla parola "brava" (in che cosa? quale senso dare all'aggettivo "brava"? brava per il suo comportamento? oppure si fa riferimento al profitto scolastico?). In ogni caso ci sono stati 16 bambini che l'hanno considerata come appartenente alla *logica bivalente*, mentre 2 hanno interpretato l'affermazione come *enunciato fuzz*y considerando valori di verità diversi da "*vero*" e "*falso*".

L'affermazione n. 3 (*Mattia è il più alto della sua classe*) è stata ritenuta da quasi tutti i bambini come *evento della logica bivalente* (in particolare da 17), solo uno l'ha considerata un *enunciato fuzzy*.

Per quanto riguarda l'affermazione n. 4 (*Leonardo è assente*) 13 bambini hanno ritenuto di dare la risposta corretta scegliendo la risposta "*falso"* in quanto era presente a scuola, ma è da precisare che si tratta di un bambino che ha una diagnosi BES (Bisogni Educativi Speciali) e spesso si sente fuori contesto, spaesato e a volte si addormenta sul banco.
Si presuppone che sia questo il motivo per cui 1 bambino ha risposto "*vero"*, 2 "*vero o falso, ma non so quale dei due"* e 2 "*più vero che falso"* (una delle due scelte è stata proprio la sua).

All'affermazione n. 5 (*Il cane vola sull'albero*) 16 alunni hanno risposto correttamente, 1 ha attribuito un valore *aleatorio* (forse influenzato dalla visione di qualche cartone animato), 1 lo ha considerato un *non enunciato linguistico*, ma si ritiene si sia lasciato confondere dalla parte tra parentesi *(non si capisce).*

L'affermazione n. 6 (*Nel mese di settembre fa caldo*) ha avuto interpretazioni diverse. Infatti, 11 bambini l'hanno valutata come appartenente alla *logica bivalente* e precisamente 5 l'hanno considerata come *evento aleatorio,* 5 come *evento impossibile* e 1 come *evento certo*. Altri 6 bambini hanno visto l'affermazione come *enunciato non bivalente* rispondendo "*più falso che vero"* (5) oppure "*a metà fra vero e falso"* (1). Uno non ha risposto, forse per distrazione.

L'enunciato n. 7 (*I cantanti sono famosi*) è sicuramente *fuzzy*, sia nel soggetto, sia nel predicato. Infatti chi sono i cantanti? Quali si possono definire tali? Qualcuno in particolare? E poi in che senso sono famosi? In quale ambiente? In ogni caso 10 bambini l'hanno valutata come appartenente alla *logica binaria*, 6 come *enunciato fuzzy*, 1 ha risposto "*altro"* specificando che non tutti sono famosi, ma solo alcuni, e 1 non ha risposto.

Rispetto al n. 8 (*La Juventus vincerà la prossima partita*) la maggioranza (13 alunni) ha classificato l'enunciato come appartenente alla *logica bivalente* rispondendo *"vero o* *falso, ma non so quale dei due"*; 1 lo ha classificato come *evento impossibile* (ma è da rilevare che è molto tifoso del Milan e quindi non può concepire vittorie di altre squadre al di fuori della sua squadra del cuore!). Ci sono stati 3 bambini che hanno interpretato l'affermazione come *enunciato fuzzy*, mentre 1 non ha risposto.

7. Il secondo blocco di 8 affermazioni

Classe 5^A Campione di 18 studenti	A vero	B falso	C vero o falso, ma non so quale dei due	D più vero che falso	E più falso che vero	F a metà fra vero e falso	G non è un enunciato linguistico (non si capisce)	H altro (scrivi cosa pensi) usa il retro del foglio per scrivere	Totale risposte
9- frequentiamo la scuola per 8 ore	13	2		2		1			18
10- Veronica e' bionda	15	1	1	1					18
11- Teresa con i pattini		1					17		18
12- tutti vedono i colori	2	8		2	2	1	1	2 (riferimento ai daltonici)	18
13- Giada ha preso 9 in matematica	4	1	8	1		3		1	18
14- Massimo e' un broccolo	1	8	2		1		6		18
15- i cavalli hanno cinque dita		15			1		2		18
16- Amadeus ha tre ville grandi			13	1		2		2	18

Tabella riassuntiva dei dati raccolti per il secondo blocco

Osservando la tabella, si può notare che quasi la totalità degli alunni (nella seconda affermazione n. 11 (*Teresa con i pattini*) ha individuato il concetto di *enunciato linguistico* (hanno risposto correttamente 17 bambini su 18); solo un bambino ha dato una valutazione errata alla seconda affermazione, non rendendosi conto che mancava il verbo e considerandolo un evento della logica del certo.

La maggioranza degli alunni (15) ha riconosciuto l'affermazione n.9 (*Frequentiamo la scuola per 8 ore*) come proposizione appartenente alla *logica del certo*. Invece 3 bambini l'hanno valutata come *enunciato fuzzy*, probabilmente perché hanno pensato che non tutti i giorni si recano a scuola, trattandosi di una scuola a tempo pieno che funziona dal lunedì al venerdì.

Quasi tutti gli alunni (15) hanno classificato l'affermazione n. 10 (*Veronica è bionda*) come *evento certo*; alcuni (3) si sono distaccati da questa valutazione esprimendo dei dubbi e uno di essi lo ha considerato come *enunciato fuzzy*.

L'affermazione n. 12 (*Tutti vedono i colori*) ha avuto valutazioni differenti. Infatti 10 bambini l'hanno data come una proposizione della *logica del certo*, 5 della *logica fuzzy*, 1 ha detto che "*non è un enunciato linguistico"* e 2 hanno risposto "*altro"* facendo riferimento alle persone daltoniche (anche se potevano operare la stessa scelta rispondendo "*falso*"). Il verbo *"vedono"* è stato utilizzato appositamente, in quanto anche i daltonici vedono i colori, anche se non li *"distinguono"* o hanno difetti nella percezione cromatica.

Per quanto riguarda l'affermazione n. 13 (*Giada ha preso 9 in matematica*) 13 alunni l'hanno ritenuta appartenente alla *logica binaria*, 4 come proposizione della *logica fuzzy*, 1 ha risposto *"altro"*, giustificando tale scelta perché non conosce alcuna bambina che porta come nome "Giada" (*evento fuzzy*).

L'affermazione n. 14 (*Massimo è un broccolo*) non è stata da tutti considerata alla lettera. In particolare, 8 bambini hanno risposto *"falso"*, 4 hanno interpretato la proposizione come una metafora pensando che da qualche parte ci sarà pure un tizio che si chiama Massimo e che si può considerare un "broccolo", cioè un po' goffo o sciocco. Uno di questi ultimi ha giudicato l'affermazione come *enunciato fuzzy*, rispondendo "*più falso che vero"*. Altri 6 bambini hanno detto che non è un enunciato linguistico, forse non sapendo se interpretare la frase "alla lettera" o come metafora.

Per quanto riguarda l'evento n. 15 (*I cavalli hanno cinque dita*) 15 bambini hanno risposto correttamente, 1 lo ha interpretato come un *enunciato fuzzy* e 2 hanno risposto che non è un enunciato linguistico (probabilmente fuorviati dal "*non si capisce"* che è stato messo tra parentesi).

L'ultima affermazione (*Amadeus ha tre ville grandi*) è stata considerata come un *evento aleatorio* dalla maggioranza (13 alunni), non avendo adeguate informazioni al riguardo. Altri 3 bambini l'hanno valutata come *enunciato fuzzy*, 2 hanno risposto "*altro"* spiegando: "non conosco Amadeus" o "non si può sapere".

Avrebbero potuto comunque scegliere la risposta "*vero o falso, ma non so quale dei due"*. La risposta "*altro*" può anche essere interpretata come "*evento fuzzy*", ritenendo possibili (ma non noti) tutti i 5 valori di verità.

8. Conclusioni e proposte

La sperimentazione ha messo in evidenza la necessità di approfondire il lavoro di comprensione linguistica di una frase, basandosi su un'ottica interdisciplinare.

- Da un punto di vista *sintattico* si tratta soprattutto di capire se la frase ha una struttura completa tale da potersi definire come *enunciato linguistico*;
- Dal punto di vista *semantico* si tratta di stimolare gli alunni a formarsi una opinione
    - sia sul fatto che un enunciato linguistico appartiene alla logica bivalente o non bivalente;
    - sia se il grado di informazione posseduto permette di attribuire un valore di verità.

Gli alunni hanno espresso per varie affermazioni opinioni molto differenti. Ciò, in generale, non significa che alcuni hanno dato valutazioni corrette e altri valutazioni sbagliate.
Significa soprattutto che gli alunni hanno gradi d'informazione differenti e inoltre spesso interpretano in maniera diversa i valori di verità.
Ad esempio, il valore di verità "*più vero che falso*" appartiene ad una logica non bivalente, ma un alunno che ragiona da un punto di vista bivalente potrebbe interpretarlo come "*è più facile che sia vero piuttosto che sia falso*".

Un'ampia discussione in classe è avvenuta sull'interpretazione della frase "Alisia è brava".
Alcuni studenti si riferivano forse al rendimento scolastico; per altri la parola 'brava' è stata interpretata come 'dotata di qualità personali e morali' ossia come persona gentile, educata, rispettosa, generosa, ubbidiente, etc. Forse alcuni hanno mediato entrambe le interpretazioni.

Inoltre, la stessa frase può essere interpretata in maniera differente secondo il *criterio di verificazione* seguito e il *tipo di logica adottato* (bivalente o plurivalente).
Ad esempio, il criterio di verificazione potrebbe essere il voto preso da Alisia in una materia oppure la media dei voti nelle varie materie.

In un'ottica plurivalente si può attribuire il valore "*vero*" se Alisia ha preso 10, il valore "*più vero che falso*" se ha preso 8 o 9, il valore "*a metà fra vero falso*" se Alisia ha preso 6 o 7, il valore "*più falso che vero*" se ha preso 5, "*falso*" se ha preso meno di 5.

In un'ottica bivalente il significato del voto 10 potrebbe essere: "è certo che Alisia è brava", quello dei voti 8 e 9: "*è più probabile che* Alisia *sia brava piuttosto che sia non brava*", i voti 6 e 7 si potrebbero interpretare "*è ugualmente probabile che Alisia sia brava e che sia non brava*", un voto inferiore a 6 potrebbe significare: "*è più probabile che Alisia sia non brava piuttosto che sia brava*".

Ad un'analisi accurata il punto di vista bivalente sembra piuttosto artificioso. Tuttavia, diversi bambini hanno considerato l'affermazione "Alisia è brava" come un *evento aleatorio.*

Enfatizziamo il fatto che avere opinioni e punti di vista differenti è da considerare una ricchezza, poiché proprio dal desiderio e dalla libertà di esprimere il proprio pensiero e dal confronto con gli altri nasce la comprensione approfondita e la condivisione del significato di ogni elemento di una frase e quindi la possibilità di esprimersi in maniera scientificamente corretta sia nella lingua italiana e sia nel linguaggio scientifico formale.

Da notare che alcuni bambini hanno fatto osservazioni molto acute, che hanno stimolato un approfondimento da parte dell'insegnante e hanno messo in luce la necessità di un'analisi di ciò che è esplicito in una affermazione e ciò che invece è sottointeso (e che quindi impedisce la comunicazione fra individui con culture diverse).
Qualcuno ha definito la filosofia come "l'estrinsecazione dell'ovvio" e la matematica come "l'arte di non fare i calcoli".

Le due affermazioni, provocatorie e apparentemente paradossali, nascondono due importanti necessità:

- la prima è quella di *esplicitare ciò che è sottointeso*, perché individui diversi possono sottintendere presupposti diversi, in dipendenza delle loro conoscenze, esperienze, principi morali e religiosi acquisiti in famiglia, carattere etc.
- la seconda necessità è quella di dare la *priorità al ragionamento logico* piuttosto che ad un addestramento meccanicistico che porta a seguire procedure e algoritmi senza capirne il significato e senza rendersi conto se sono adeguati al contesto in cui si opera.

Da tali punti di vista la risposta dei bambini è stata soddisfacente. Il dibattito svolto nelle classi, i dubbi, gli stessi errori d'interpretazione hanno avuto un esito molto costruttivo, facendo riflettere su aspetti spesso non presi in considerazione.

In conclusione, riteniamo che sia opportuno continuare il lavoro avviato, creare nuove occasioni di riflessione e di discussione critica sugli *enunciati* e *non enunciati* per favorire nei bambini lo sviluppo del pensiero logico e l'acquisizione di un linguaggio sicuro, corretto, da poter trasferire in altri contesti di studio e non (logica interdisciplinare, trasversalità delle competenze).

Bibliografia

[1] Behnke and alii, (1968), *Matematica 1 and 2*, Feltrinelli Editore Milano.

[2] Coletti G., Scozzafava R., (2002), *Probabilistic Logic in a Coherent Setting*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[3] De Finetti B., (1970), *Teoria delle Probabilità*, Einaudi, Torino,

[4] Fadini A., (1979), *Introduzione alla teoria degli insiemi sfocati*, Liguori Editore, Napoli.

[5] Klir G.J., Yuan B., (1995), *Fuzzy sets and fuzzy logic*, Prentice Hall.

[6] Lindley D. V., (1990), *La logica della decisione*, Il Saggiatore, Milano.

[7] Maturo A., (1993), Struttura algebrica degli eventi generalizzati, *Periodico di Matematiche*, 4, 1993, p. 18-26.

[8] Maturo A., (2008), La moderna visione interdisciplinare di Geometria, Logica e Probabilità in Bruno de Finetti**,** *Ratio Sociologica*, 2, 2008, pp. 39-62.

[9] Reichenbach H., (1942), *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica*, tr. it. Einaudi, Torino, 1952

[10] Russell B., (1962), *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milano.

[11] Scozzafava R., (1996), *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*, Zanichelli, Bologna.

[12] Scozzafava R., (2001), *Incertezza e probabilità. Significato, valutazione, applicazioni della probabilità soggettiva*, Zanichelli, Bologna.

[13] Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Inf. Control*, 8, 338-353.

[14] Zadeh, L. (1975). The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning I. *Inf. Sciences*, 8, 199-249.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 4, No 2 (2021), 57-66

Matematica e musica: un esempio di studio del concetto di rapporto

Silvia Cerasaro[1]

[1]Università Tor Vergata di Roma,
Scuola di dottorato
Dipartimento di Matematica
cerasaro@axp.mat.uniroma2.it

Sunto

In questo articolo sarà mostrato un percorso didattico presentato in una classe seconda della scuola secondaria di primo grado finalizzato alla distinzione tra i concetti di rapporto e frazione, spesso confusi sia negli insegnanti che negli alunni. Si mostreranno delle attività basate su procedimenti geometrici che permettono di comprendere significati aritmetici relativi al concetto di rapporto. I concetti matematici trattati, con l'utilizzo della fonte storica, sono finalizzati alla comprensione della costruzione fisica della scala musicale. Lo scopo di quanto si racconterà è quello di rendere consapevole ciascuno studente che il rapporto è un discorso che descrive la relazione tra due grandezze, mentre la frazione è il risultato di una divisione, un quoziente non risolto, un numero da posizionare sulla retta dei numeri.

Parole chiave: Rapporto, frazione, storia della matematica, scala musicale.

1. Introduzione

Secondo la classificazione di Kieran [2003], la frazione può assumere cinque differenti significati: essa può indicare la relazione del numero delle parti in cui resta suddiviso il tutto; può rappresentare un operatore, può esprimere un rapporto tra numeri o grandezze; può indicare una misura, cioè un numero; infine, esprime un numero come un quoziente non risolto. Vorrei focalizzare l'attenzione sulla relazione tra rapporto e frazione, con lo scopo di distinguere tra i loro significati matematici che spesso vengono confusi anche da insegnanti in formazione, come è emerso in uno studio di qualche anno fa [Clark, Berenson, Cavey, 2003]: da questo studio emersero le diverse opinioni dei docenti in formazione (sia iniziale che in servizio) sulla relazione tra i due concetti matematici in quanto influenzati, oltre che dalle loro conoscenze e apprendimenti pregressi, anche dalla lettura dei diversi libri di testo in adozione nelle scuole. I rapporti erano considerati alcuni tipi di frazioni, altri docenti, al contrario, definivano le frazioni come alcuni tipi di rapporti. Altri docenti affermavano che fossero la stessa cosa, altri che fossero due concetti distinti, e altri che avessero qualcosa in comune. Per superare le differenti opinioni, ritengo utile partire dal concetto di rapporto (*logos)* come comparso per la prima volta dal punto di vista storico, cioè come un confronto tra due grandezze (sia continue che discrete) aventi una misura in comune, come presentato negli *Elementi* di Euclide nel IV secolo a. C.; l'analogia tra rapporti (*analogos*) è, invece, una proporzione. Solo dopo aver considerato il concetto di proporzione, ed essersi posta la domanda sull'esistenza del quarto proporzionale negli Elementi di Euclide, si può arrivare a definire la frazione come un numero. Il quarto proporzionale, nella concezione euclidea del numero, inteso come un intero, non esiste sempre, esiste se e solo se, dati quattro numeri in proporzione $a:b=c:d$, a divide b o c[1]. Il quarto proporzionale oggi esiste sempre perché è un numero razionale, che possiamo chiamare *frazione*, con il significato di quoziente non risolto, e come misura da collocare sulla retta dei numeri: con questi significati, comparve nel mondo europeo per la prima volta nel *Liber Abbaci* di Leonardo Pisano Fibonacci nel 1202, con il nome di *numero rotto* o *minuto.*
Le attività didattiche descritte in seguito sono state ideate per distinguere il numero razionale dal concetto di rapporto e sono state presentate in una classe seconda della scuola secondaria di primo grado dopo aver trattato l'aritmetica delle frazioni, utilizzando il *Liber Abbaci* ed i *numeri rotti:* attraverso l'uso della fonte storica, integrata all'uso di materiale manipolativo e di un particolare tipo di linguaggio, concordato precedentemente con la classe [Cerasaro, 2020] gli studenti hanno appreso in maniera autonoma i procedimenti per operare con le frazioni, contrastando l'apprendimento mnemonico di regole. Gli alunni sapevano già utilizzare dalla scuola primaria sia in aritmetica che in geometria le strategie risolutive che prevedono l'uso della frazione come operatore e come rapporto. Nel momento in cui si chiedeva, ad esempio, di calcolare i $\frac{2}{3}$ di 18, essi sapevano usare due metodi: il primo consisteva prima nel dividere 18 per 3, trovando l'"unità", 6, moltiplicandola poi per 2, avendo quindi 12. Il secondo, successivo alla trattazione delle operazioni delle frazioni, consiste nel moltiplicare $\frac{2}{3} \times 18$ trovando 12. Quindi, gli alunni hanno imparato, e non necessariamente appreso, come constatato in seguito, che calcolare le parti di un numero ($n \times \frac{a}{m}$) significa moltiplicare a per la frazione $\frac{n}{m}$. Queste due

[1] Proposizioni IX.16-IX.19, Elementi di Euclide, in Acerbi, 2009

metodologie hanno, però, messo in difficoltà alcuni alunni, che, insicuri nel fare i conti, affermarono che, con le loro parole, *i $\frac{2}{3}$ qui non sono numero.*

Questa esperienza mi ha spinto ad organizzare delle attività che permettessero di prendere in considerazione gli apprendimenti pregressi, metterli in discussione e sistemarli anche attraverso l'uso della matematica nella storia [Barbin, 1997], ovvero l'uso della aritmetica che Euclide descrive nei libri aritmetici. Inoltre, il percorso ideato risponde agli Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della Scuola Secondaria di Primo grado, dove è riportato quanto segue:

Utilizzare il concetto di rapporto fra numeri o misure ed esprimerlo sia nella forma decimale, sia mediante frazione.

I laboratori ideati sono finalizzati al raggiungimento dei seguenti traguardi per lo sviluppo delle competenze:

(L'alunno) Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi. Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite. Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta.

Questa attività è stata svolta in classi di anni scolastici differenti, ma in questo articolo descriverò quella avuta in prossimità della prima chiusura per l'emergenza sanitaria da Covid-19, la quale ha rappresentato un momento importante di condivisione, anche emotiva, degli studenti coinvolti.

2. La matematica delle attività proposte

In questo paragrafo descriverò quali significati matematici sono coinvolti nelle attività presentate agli alunni, sottolineando che i contenuti in questione sono stati introdotti sempre in modalità laboratoriale, a favore della costruzione attiva della conoscenza. Le attività proposte sono relative alla geometria, mediante la quale si affrontano contenuti aritmetici, seguendo quanto è accaduto storicamente. Infatti, già Euclide cominciò a trattare i numeri come se fossero grandezze geometriche, come anche i matematici arabi utilizzavano diagrammi geometrici per la risoluzione di problemi aritmetici e algebrici [Corry, 2013]. Sia Euclide che i matematici arabi medievali, tra i cui massimi esponenti ci fu Al Khwarizmi, influenzarono il pensiero pedagogico e didattico di Leonardo Pisano Fibonacci, che nel prologo del Liber Abbaci giustifica l'uso della geometria a sostegno dell'apprendimento della scienza dei numeri:

… la scienza aritmetica e quella geometrica sono connesse e si sostengono a vicenda, non si può trasmettere una piena dottrina del numero se non intersecandola con alcuni concetti di geometria o spettanti alla geometria, che in questo caso pratica il giusto modo di operare sui numeri; modo che è assunto per molte argomentazioni e dimostrazioni che si fanno con le figure geometriche. [2]

Poiché ritengo che lo sviluppo del pensiero matematico vada di pari passo con quello

---

[2] traduzione di Boncompagni, 1857, p. 1 presente in www.progettofibonacci.it

dell'individuo, ho fatto mio il pensiero di Fibonacci, partendo anch'io dai contenuti geometrici a sostegno dell'aritmetica.

2.1.Il teorema di Talete

Nella proposizione VI.2 degli Elementi, Euclide descrive quello che ricordiamo come teorema di Talete.
Se si traccia una linea retta parallela a uno dei lati di un triangolo, allora taglia proporzionalmente i lati del triangolo; e, se i lati del triangolo sono tagliati proporzionalmente, allora la linea che congiunge i punti della sezione è parallela al restante lato del triangolo.

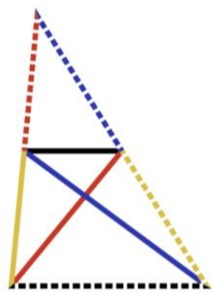

Figura 1: diagramma della prop. VI.2 tratta da *The first six books of the Elements of Euclid* di Oliver Byrne (1847), p. 236

Gli studenti si sono approcciati allo studio di questo teorema leggendo il testo dall'edizione degli Elementi di Euclide [Acerbi, 2009], scritti in linguaggio naturale, senza simbolismo algebrico, con a fronte il testo greco, che, seppur non comprensibile agli studenti, li rende consapevoli del fatto che la matematica è un processo attivo in divenire, insieme alla lingua che utilizza in un determinato periodo storico, e non un prodotto finito. Sono state svolte diverse attività, che non saranno spiegate dettagliatamente in questa circostanza, che prevedono la manipolazione di opportuni materiali, aventi la funzione di mediatore visivo [Sfard, 2008] e che permettono di impostare una proporzione tra i lati omologhi. Solo dopo la trattazione del teorema come riportata in Euclide è stata riportata la versione presente sui libri di testo, ovvero quella in cui sono presenti due rette trasversali su un fascio di rette parallele.

2.2. L'algoritmo euclideo.

Nella proposizione VII.1 degli Elementi. Euclide afferma:
Quando si espongono due numeri disuguali, e il minore viene continuamente sottratto al maggiore, se il numero che rimane non misura mai quello precedente finché non rimane un'unità, allora i numeri originari sono relativamente primi.
Mentre nella proposizione VII.2, afferma:
Trovare la massima misura comune di due numeri dati non primi tra loro. Quest'ultimo è ricordato come *antenaresi*, cioè come algoritmo euclideo per il calcolo del massimo comun divisore, evidenziando che oggi il termine *misura* viene "tradotto" con *divide.*

Gli studenti erano già in grado di trovare il massimo comun divisore tra due e più numeri usati attraverso tale algoritmo, senza però aver mai riflettuto su tale concetto in termini di rapporto. Per i nostri scopi, l'algoritmo sarà trasposto dall'aritmetica alla geometria.

3. Il rapporto tra segmenti.

Solo dopo aver rivisto i concetti matematici coinvolti nello svolgimento della attività laboratoriali progettate, è stato proposto il seguente compito:

Dato un segmento AB, di lunghezza a piacere, si disegni, con squadrette e compasso un segmento che sia i suoi $\frac{2}{3}$, *sfruttando il teorema di Talete.*

Per i miei alunni, il compasso è uno strumento di misura con il quale in passato sono stati svolti esercizi di confronto di segmenti. Più di qualcuno ha mostrato perplessità alla mia richiesta, in quanto affermava che per poter soddisfare la richiesta si poteva usare semplicemente un righello, tracciando, ad esempio, un segmento lungo 6 ed uno lungo 4, cioè 6 diviso 3 moltiplicato per 2. Dopo aver puntualizzato che veniva richiesta una metodologia che non considera numeri specifici, gli studenti suddivisi in gruppi hanno cominciato a discutere su cosa fare, avanzando ipotesi e controllando se fossero utili al loro scopo. Sicuramente avevano chiaro che avrebbero dovuto sfruttare il teorema di Talete e questo li ha portati a fare disegni con rette parallele e trasversali. Solo dopo aver riletto attentamente il testo, hanno tracciato un segmento di lunghezza variabile e cercavano di capire come dividere in tre parti il segmento dato per considerare solo 2 di esse. Diversi alunni hanno intuito che il teorema di Talete servisse proprio per la suddivisione in tre parti, convincendo gli altri. Dopo una serie di domande-stimolo e discussioni matematiche fatte su ipotesi confutate, è arrivata l'ipotesi in seguito confermata, che li ha portati a tracciare una semiretta avente origine nell'estremo A del segmento. E' stato aperto il compasso a caso puntando in A per tracciare un arco sulla semiretta, individuando il punto d'intersezione con essa; è stato puntato nuovamente il compasso in questo nuovo punto, lasciando la stessa apertura, tracciando un altro arco, continuando con la stessa operazione per l'ultima volta. Al termine di queste operazioni, era stato ottenuto un segmento costituito dalla somma di 3 segmenti adiacenti [Catastini, 2015]. Con l'uso delle squadrette, sono state tracciate delle rette parallele al segmento congiungente B con l'ultimo arco tracciato e passanti per i due archetti tracciati precedentemente, dividendo AB in 3 parti uguali, come mostrato nelle figure 2a e 2b.

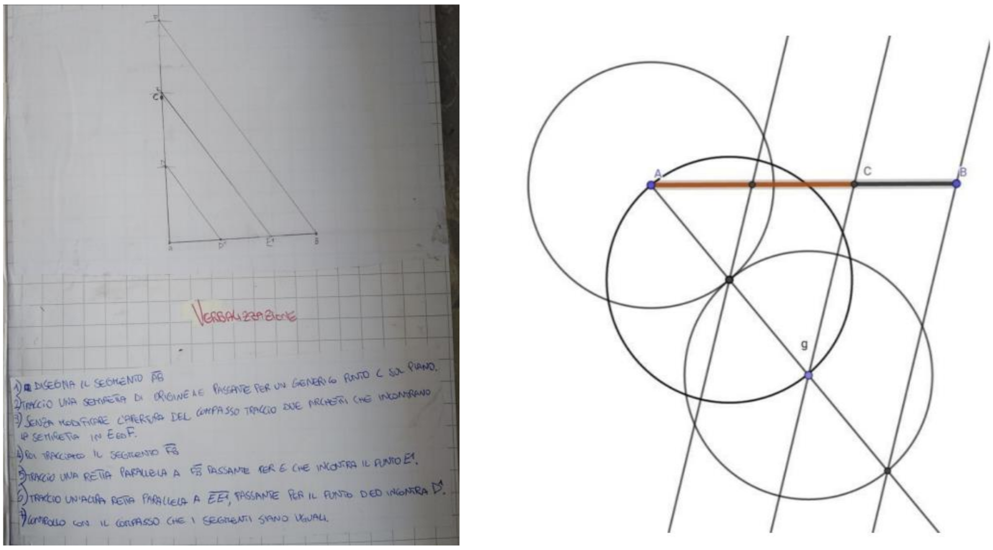

Figure 2a e 2b: costruzione e verbalizzazione di un alunna, realizzazione della costruzione con Geogebra.

Per cui, i $\frac{2}{3}$ del segmento dato consiste nella somma dei primi due segmenti, ovvero AC. Gli alunni erano consapevoli che tutti i loro segmenti avevano lunghezze differenti, ignorate durante la costruzione. Essi hanno ben compreso che il rapporto tra due grandezze dello stesso tipo, che definiamo omogenee, è lo stesso per tutti e che, benché lo scrivano allo stesso modo di una frazione, non ha lo stesso significato, perché, detto con le parole degli alunni, *il rapporto è tutto il procedimento per avere il disegno giusto*, mentre la frazione come numero ha un posto fisso sulla retta dei numeri.

Un'altra attività proposta è stata iniziata dando agli studenti un foglio con rappresentati due diversi segmenti AB e CD[3] ed è stato chiesto loro:

Come capire in che rapporto sono due segmenti?

Gli alunni in maniera del tutto spontanea hanno utilizzato il compasso come strumento di misura per vedere quante volte il segmento CD fosse dentro ad AB, iterando il procedimento per contare quante volte il resto di ogni misurazione entrasse nel segmento precedente, seguendo lo stesso procedimento utilizzato per i numeri dell'algoritmo euclideo. E' stato notato che l'ultimo resto non nullo misurava entrambi i segmenti e permetteva di vedere quante volte entrasse rispettivamente nel maggiore e nel minore (nella figura 3, cinque volte nel minore, otto volte nel maggiore)

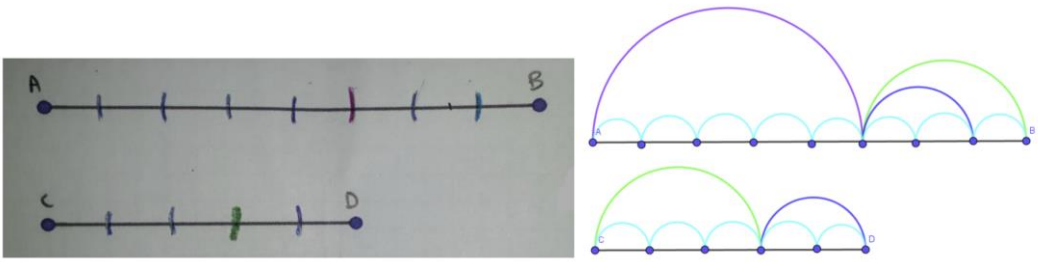

Figure 3a e 3b. Costruzione geometrica per comprendere il rapporto tra due segmenti, da un quaderno degli alunni e da Geogebra.

[3] I segmenti sono stati scelti commensurabili, permettendo così di terminare l'algoritmo euclideo.

4. La costruzione della scala musicale

La teoria dei rapporti è stata applicata sin dagli albori alla musica: Pitagora, i seguaci di Eudosso, Archita sicuramente li utilizzavano nei loro studi, continuati nel periodo medievale da studiosi come Nicomaco di Gerasa, Tolomeo, Boezio.
Mi sono prefissata di far costruire dagli studenti in maniera elementare uno strumento per renderli consapevoli che la scala musicale è legata a suoni riprodotti da corde, aste o tubi cavi le cui lunghezze stanno tra loro in determinati rapporti. L'attività proposta agli studenti era proprio la costruzione fisica di segmenti che stiano tra loro in rapporto come il materiale considerato per la costruzione dello strumento musicale prescelto, tenendo in considerazione dei rapporti di frequenza della tabella 1 , avendo già studiato in musica le ottave, ed il suono in scienze.

NOTA	RAPPORTO DI FREQUENZA
DO	1
RE	$\frac{9}{8}$
MI	$\frac{5}{4}$
FA	$\frac{4}{3}$
SOL	$\frac{3}{2}$
LA	$\frac{5}{3}$
SI	$\frac{15}{8}$
DO	2

Tabella 1: rapporti di frequenza usati nell'esperienza

Gli alunni, riuniti in gruppi, si sono suddivisi i compiti da svolgere e in ciascun gruppo è stata scelta una differente unità di misura dell'intero considerato. Ogni studente era incaricato di disegnare il segmento relativo ad una singola nota, utilizzando la costruzione vista con il teorema di Talete. E' emersa una difficoltà dovuta dalla presenza di rapporti maggiori di uno: abbiamo concordato di prolungare, dopo la suddivisione, il segmento iniziale e di aggiungere le parti mancanti grazie alla misurazione fatta con il compasso.
Qualche alunno che non era organizzato con il compasso e le squadrette, ed ha proposto una soluzione alternativa da svolgere sulla carta millimetrata con un righello ed un foglio di carta su cui fare delle operazioni. Ha provato a costruire ipotetiche corde partendo dall'unità, scelta di 8 quadretti poiché aveva notato che l'8 è divisibile per la maggior parte dei denominatori, tranne

per il 3 del Fa e del La. Allora, attraverso diverse proporzioni, l'alunno trova che il Re ha 9 quadretti, il Mi 10, il Sol 12, il Si 15 ed il Do 16. Per il Fa ed il La, decide di farla approssimativa, come lo sono i numeri decimali che prendono in considerazione, 10,6 quadratini per il Fa e 13,3 quadratini per il La. Ho accettato anche questa soluzione poiché pratica e proposta dopo una corretta forma di ragionamento matematico.

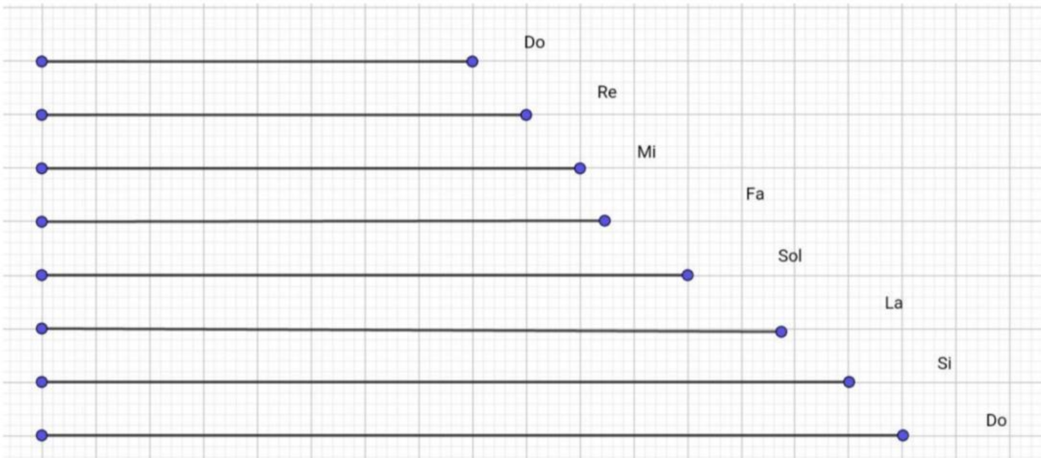

Figura 4. Realizzazione su Geogebra delle lunghezze dei segmenti in rapporto come le note musicali

La parte successiva sarebbe stata la costruzione fisica dello strumento, che non è stata possibile a causa della chiusura imminente per l'emergenza sanitaria a causa del Covid-19. Durante la didattica a distanza, ho chiesto agli alunni se avessero la possibilità di costruire uno strumento, rispettando la lunghezza delle componenti tanto da avere le lunghezze dei segmenti legate ai rapporti discussi; sono stati entusiasti benché non sapessero se sarebbero riusciti a recuperare i materiali giusti in questo periodo di chiusura delle attività commerciali. Ma la fantasia non ha limiti, per fortuna, e sono stati realizzati flauti di Pan con le cannucce per le bibite: alcuni studenti mi hanno inviato anche dei video per mostrare che, benché il suono fosse una sorta di soffio, seguiva la scala musicale.

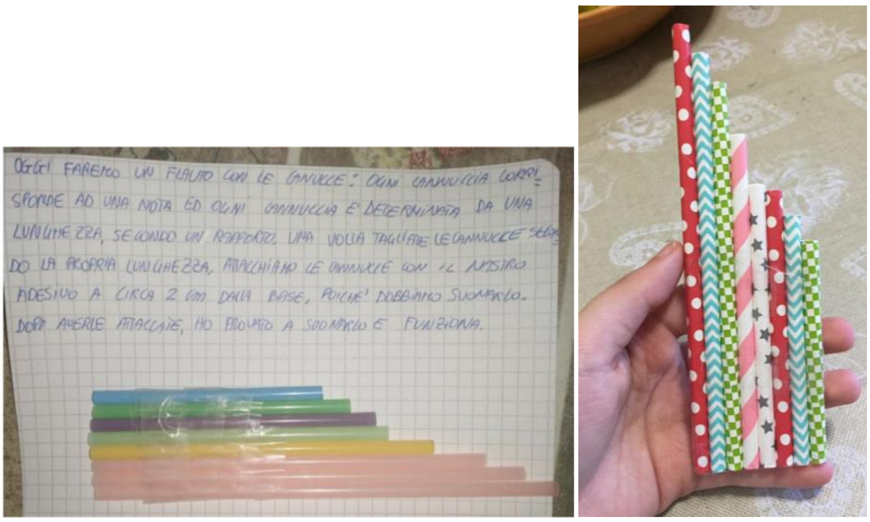

Figure 5a e 5b: Immagini inviate dagli studenti sulla costruzione del flauto di Pan

Conclusioni

Le attività mostrate in questo articolo sono un esempio di come poter distinguere il concetto di rapporto da quello di frazione, mostrando che a volte la frazione può essere usata simbolicamente per esprimere un rapporto e che, generalmente, come usata nella scuola secondaria di primo grado, indica un numero razionale da posizionare sulla retta dei numeri, equivalente ai numeri decimali, che gli alunni conoscono dalla scuola primaria. Il percorso seguito mostra anche come la geometria e l'aritmetica siano in relazione reciproca per arrivare a spiegare un concetto matematico a favore dell'apprendimento, come avvenuto nel corso della storia fino all'introduzione del simbolismo algebrico. Storicamente, la geometria e l'aritmetica erano correlate anche con la musica, oltre che con l'astronomia, come nel quadrivio di Boezio, per cui resta evidente la spiegazione dei rapporti musicali di frequenza sfruttando entrambe, a favore dell'interdisciplinarietà. Le costruzioni geometriche coinvolte permettono di rinforzare il pensiero computazionale e le verbalizzazioni degli studenti mirano a cercare di utilizzare deduzioni logiche e linguaggio specifico. Di fondamentale importanza è accettare le diverse proposte degli studenti in merito allo svolgimento dell'esperienza svolta poiché permette di stimolare il pensiero critico e di ricerca individuali, oltre al confronto tra pari e con l'insegnante, utili alla riflessione. Solo in questo modo si raggiungerà l'apprendimento di ciascuno attraverso la costruzione collaborativa della conoscenza matematica coinvolta.

Bibliografia

Acerbi, (2009), Euclide, tutte le opere, Bompiani

Barbin, E. (1997). Histoire et enseignement des mathématiques: Pourquoi? Comment?. Bulletin AMQ, 37(1), 20-25

Catastini L. (2015), Tra parole, matematica e musica, in *Quale scuola?* a cura di F. Clementi e L. Serianni, Carocci, Roma, pp. 103-127

Cerasaro S., (2020), *L'aritmetica con il Liber Abaci di Fibonacci,* in Periodico di matematiche (Mathesis), Numero 3, Volume 12 serie XIV anno CXXX, pag. 175

Clark, M. R., Berenson, S. B., & Cavey, L. O. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning, *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(3), 297-317.

Corry, L. (2013). Geometry and arithmetic in the medieval traditions of Euclid's Elements: a view from Book II. *Archive for History of Exact Sciences*, 67, 637-705.

Fibonacci L., (1228), Liber Abbaci, Boncompagni B., (Ed.). (1857). Liber abbaci (Vol. 1). Tipogr. delle Scienze Matematiche e Fisiche.

Kieren, T. E. (2012). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In Rational numbers (pp. 49-84). Routledge

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge university press.

Indice

Istruzioni per gli autori

Chi desidera inviare un articolo per la Rivista Mondo Matematico e Dintorni deve seguire i seguenti criteri per il formato:

(1) L'articolo deve essere in word, carattere Times New Roman, 12 p; il titolo dell'articolo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 18 p.

(2) I margini sono di 3 cm sotto, sopra, a destra e a sinistra. L'interlinea è multipla 1,15 p

(3) L'articolo deve essere diviso in paragrafi numerati, di cui il primo è una introduzione e l'ultimo una conclusione. I paragrafi vanno separati da due interlinee. Il titolo di ogni paragrafo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 14 p.

(4) Ogni articolo deve avere una lunghezza minima di 6 pagine e non deve superare, di regola, le 14 pagine.

(5) Dopo l'ultimo paragrafo va inserita la bibliografia. Almeno 4 fra libri e articoli nel formato cognome, nome (anno), titolo dell'articolo, titolo del libro o rivista, editore, città.

(6) La bibliografia non va numerata. I riferimenti bibliografici nel testo devono avere la forma (cognome dell'autore, anno).

(7) Non mettere note bibliografiche a piè di pagina. Tutta la bibliografia va messa alla fine.

(8) I disegni vanno fatti con programmi di elaborazione grafica (non in Word!) e salvati in jpg o in png.

(9) L'articolo deve essere inviato in formato doc o docx ed in formato pdf per il controllo dell'impaginazione e deve avere un numero pari di pagine.

Tutti gli articoli ricevuti saranno esaminati da due revisori che invieranno il loro parere sulla pubblicazione ed eventuali proposte di correzioni ai direttori editoriali.

Gli articolo possono essere inviati ad uno dei seguenti indirizzi email:

antomato75@gmail.com

lucianadr@live.it

santarossa.renata@gmail.com

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo www.apav.it