Volume 2 Numero 2 2019

MONDO MATEMATICO E DINTORNI

Rivista per i Docenti del Primo Ciclo di Istruzione

Direttori Editoriali
Luciana Delli Rocili
Giuseppe Manuppella
Antonio Maturo

APAV

ISSN 2612 - 2596 [on line] ISSN 2612 - 1719 [testo stampato]

Volume 2 (2019) Numero 2

MONDO MATEMATICO E DINTORNI

Rivista per i Docenti del Primo Ciclo di Istruzione

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo

Editore: Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo (APAV)
Via del Concilio n.24, Pescara, Italy

Codice Fiscale: 92036140678 Partita IVA: 02184450688

Codice destinatario per fatturazione elettronica: M5 UXCRL

IBAN: IT 57 K 02008 15408 000104232062 BIC Swift LINCRITM1760
Banca UNICREDIT - Agenzia Pescara UMBERTO 00760

Periodicità: semestrale

Siti web: www.apav.it; www.eiris.it

Email: apavsegreteria@gmail.com, apavsegreteria@pec.it

ISSN: 2612 - 1719 (testo stampato)
ISSN: 2612 - 2596 (online)

Autorizzazione del Tribunale di Pescara del 9/4/20l9
N. 741/2019 V.G.
N. 03/2019 Reg. Stampa

Stampato a Pescara nel mese di giugno 2020

Indice

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo

ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola
(Decreto del 24/07/2009 e Direttiva 170/2016)

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 2, No 2 (2019), 5-22

Arte e matematica - Un percorso multidisciplinare alla scoperta di grandi artisti per dimostrare l'influenza reciproca tra matematica e arte nel curricolo verticale

Angela Chiefari[1], Mario Innocenzo Mandrone[2], Franca Rossetti[3]

[1]Convitto Nazionale "P. Giannone"-Benevento- e-mail: angelachiefari@gmail.com
[2]Dipartimento di Scienze e Tecnologie-Università degli Studi del Sannio-Benevento, e-mail: almavit@libero.it
[3]Inserita nella Banca Dati Esperti Valutazione e miglioramento, osservatori dei processi di insegnamento e apprendimento- e-mail: rossetti.franca@fastwebnet.it

Sunto
Scopo del presente articolo è quello di proporre attività didattiche sia per alunni della scuola primaria che per quelli della scuola secondaria di primo grado finalizzate alla individuazione di relazioni di connessione, interferenze, influenze reciproche ed elementi comuni presenti nella diade: matematica-arte. Ciò può essere affrontato da diversi punti di vista tra i quali menzioniamo: a) L'uso delle strutture, delle relazioni e delle varie tecniche di natura matematica nella realizzazione, nell'organizzazione e nella strutturazione dei capolavori artistici (in letteratura, in musica, in pittura, in scultura, in architettura…); b) L'individuazione dei riferimenti matematici nell'arte e il ruolo dell'arte nell'insegnamento della matematica. La realizzazione di molte opere d'arte evidenziano appunto come sia possibile coniugare matematica e arte. Le due discipline sembrano appartenere a mondi diversi e incomunicabili. In realtà, le divisioni fra le due culture sono solo apparenti, poiché è proprio attraverso tale binomio che è spesso possibile comprendere le più armoniose opere d'arte, dalla musica, alla pittura, all'architettura e alla scultura. Con questo intervento, in definitiva, ci si prefigge l'obiettivo di porre l'alunno di fronte ad un'opera d'arte fornendogli gli strumenti per esprimere un giudizio che vada oltre la valutazione puramente estetica dell'opera osservata, ma sia il frutto di un'analisi basata su molteplici livelli di lettura. L'atteggiamento tipico degli allievi nei confronti della Matematica è spesso di distacco e scarso interesse, motivato da una sempre costante dichiarazione di difficoltà nello studio della disciplina, vista come materia noiosa e poco stimolante. Per provare a "contrastare" questa visione diffusa, bisogna creare situazioni di apprendimento, favorire l'attivazione di esplorazioni cognitivamente significative, in situazioni consuete per l'alunno e creare inoltre campi di esperienze, esterne alla Matematica, ma fortemente matematizzate o matematizzabili. Si punta dunque ad una didattica attenta alla costruzione dei concetti matematici più che all'acquisizione di regole. Agganciare la teoria matematica al mondo reale, oltre a stimolare l'interesse, promuove un apprendimento attivo, aiuta ad affrontare lo studio come scoperta e favorisce la comprensione dei concetti matematici. Un uso intelligente delle nuove tecnologie, inoltre, permette di dedicare più tempo all'aspetto formativo proprio della matematica, di stimolare il ragionamento e lo sviluppo di

competenze, di allargare il campo delle applicazioni, come nel caso del percorso che noi proponiamo, cioè del rapporto fra la matematica e l'arte alla ricerca, appunto, della matematica che si trova nascosta tra le pieghe dell'arte. G. Harold Hardy, un grande matematico britannico affermava che una delle caratteristiche della matematica fosse la bellezza e che "Le forme create dal matematico, come quelle del pittore o del poeta, devono essere belle".

Parole chiave: sezione aurea, sacred cut, Stomachion, coding, tassellazioni, teorema di Pick, canone, modulor.

1. Matematica e arte: ordine, simmetria, regolarità

La matematica e l'arte possono essere considerate, dunque, una coppia indissolubile; esistono infatti numerosi intrecci, sfaccettature, convergenze e divergenze che possono mostrare questo legame. Le proporzioni, la sezione aurea e la prospettiva sono stati riferimenti fondamentali per artisti e matematici. Nell'analisi della storia dell'arte, dalle origini fino ai giorni nostri è sempre possibile individuare questo legame. L'influenza della sezione aurea e delle sue varie manifestazioni si possono già trovare nella Grecia classica, ma la storia dei suoi rapporti con l'arte comincia, in modo documentabile, con il Rinascimento e con l'inizio di una rigorosa teorizzazione dell'atto creativo. In questo modo la geometria, grazie alla proporzione aurea, univa tecnica e bellezza. E' facile trovare nei disegni che corredano i trattati d'architettura del Quattrocento e del Cinquecento l'applicazione del principio vitruviano delle proporzioni derivanti da quelle del corpo umano. Luca Pacioli e Leonardo da Vinci furono i principali artefici dell'ingresso del numero aureo nell'orbita della bellezza e dell'arte. Il frate francescano Luca Pacioli può considerarsi il divulgatore in lingua volgare dei trattati matematici precedenti e l'opera che esercitò maggiore influenza fu proprio il sopra citato De divina proporzione, illustrato da Leonardo da Vinci. Leonardo nei suoi disegni e manoscritti (riuniti in dieci codici conservati in vari musei europei) teorizza anche le proprie convinzioni riguardo all'arte della pittura, difendendo e sostenendo le fondamentali connessioni tra la pittura e la matematica. Nel suo trattato sulla pittura, scritto nel 1498 e pubblicato successivamente, è possibile leggere: "Nessuno che non sia un matematico legga le mie opere". Queste illustrazioni insieme all'uomo ideale sono oggi considerate autentiche icone di una forma mentis che unisce la sensibilità artistica a quella scientifica. Nel corso dei secoli sono stati compiuti molti tentativi per dare una spiegazione delle forme e delle dimensioni delle grandi costruzioni edificate a partire dall'epoca egizia: le grandi piramidi, i templi greci, le case romane, gli archi di trionfo ed altro. Questi tentativi hanno per fondamento uno schema geometrico e matematico precostituito caratterizzato da ordine, regolarità, simmetria, proporzione, canoni propri dell'arte classica. Sono stati utilizzati, in epoche diverse, il numero aureo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989$, il "sacred cut" (taglio sacro) $\sigma = \left(1+\sqrt{2}\right)$, la vescica piscis ed altri ancora. Ma qual è l'origine del numero aureo? Presi due segmenti a e b, basta considerare i seguenti rapporti $b/_a$ e $(a+b)/_b$. Se risulta valida la seguente uguaglianza

$$\frac{b}{a} = \frac{(a+b)}{b}$$

al rapporto $b/_a$ viene dato il nome di "numero aureo" o "sezione aurea". Esso viene indicato con la lettera ϕ in onore del grande scultore greco Fidia, il quale, secondo numerosi storici dell'arte, avrebbe spesso sfruttato tale rapporto nella progettazione delle sue opere. Avremo, pertanto:

$$\frac{b}{a} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033989$$

Una proprietà curiosa del numero ϕ è il fatto che le cifre dopo la virgola di ϕ^2 e di $1/_\phi$ sono uguali a quelle di ϕ. Difatti:

$$\phi^2 = \phi + 1 = 2{,}618033989 \ldots.$$

$$1/_\phi = \phi - 1 = 0{,}618033989$$

Il rapporto aureo rappresenta l'ideale di bellezza. Testimonianza dell'interesse dei greci per la rappresentazione come fondamento dell'arte pittorica, lo si evince da alcuni passi di Marco Vitruvio Pollione, vissuto probabilmente nel I secolo a.C. che si può considerare il più significativo trattatista di Architettura del mondo latino. Di Vitruvio si sa poco, addirittura si mette in dubbio l'originalità della sua opera " De Architectura" (27 a.C.) in cui egli descrive la Basilica di Fano, di cui sarebbe stato il costruttore. Il "De Architectura" di Vitruvio fu preso a modello da tutti i trattatisti del Rinascimento che vi attinsero nozioni e spesso ne adottarono schemi e criteri. E' però nel secolo XII, con l'architettura gotica, che si incomincia ad intravedere un principio di rappresentazione più rigorosamente razionale. Nella ricerca del principio ordinatore che entra nelle costruzioni dagli Egizi in poi, il Brunes, nella sua opera "The secrets of ancient geometry and its use", Copenaghen,1967, introduce per la prima volta il "sacred cut" (taglio sacro) in cui vengono utilizzati i componenti vitruviani cerchio e quadrato. Per ottenere il "sacred cut" basta procedere nel seguente modo:

a. Si disegna un quadrato e si tracciano le diagonali;
b. Con centro in un vertice del quadrato si traccia un arco di circonferenza di ampiezza $\pi/_2$ e di raggio pari a metà diagonale.

In tal modo, ogni lato di estremo il centro della circonferenza resta diviso in due parti. La parte di lunghezza maggiore è il "sacred cut" del lato del quadrato. Se si ripete la costruzione su ogni vertice del quadrato, si ottengono tutti i sacred cut dei lati del quadrato. Il Brunes chiama sacra questa costruzione perché "contiene" il quadrato e il cerchio, simboli che uniscono le cose terrene con il divino come nell'uomo vitruviano.

Indicando con ϕ la sezione aurea di un segmento di lunghezza unitaria e con σ il "sacred cut", risulta che ϕ, σ e π sono legati dalla relazione:

$$\pi = \sigma * (1 + 2\phi)$$

Il legame tra architettura e matematica è particolarmente evidente in Leon Battista Alberti (1404-1472) il quale usa una particolare tecnica per realizzare le sue opere architettoniche, tecnica che rappresenta un esempio evidente di come sia possibile coniugare matematica e arte. Difatti, egli pose le basi teoriche che divennero il punto di partenza dello sviluppo della geometria proiettiva con l'introduzione dei concetti di proiezione e di sezione. L'opera in cui l'Alberti formula i problemi di prospettiva è il trattato "Della Pittura" del 1453, stampato postumo nel 1511. Le teorie dell'Alberti furono approfondite da Piero della Francesca (1410-1492) con il "De Prospectiva pingendi", del 1478, in cui si affronta il problema più generale di rappresentare nel piano del dipinto oggetti tridimensionali. Una sistemazione definitiva dei problemi sollevati dall' Alberti si ebbe con Girard Desargues (1591-1661), ufficiale dell'esercito francese prima e poi ingegnere ed architetto. Un ulteriore approfondimento della geometria proiettiva si è ottenuta negli ultimi anni con lo studio delle geometrie di Galois in cui i concetti relativi alle proiezioni e alle sezioni sono stati generalizzati.
Difficile immaginare opera più simbolica e rappresentativa del gusto di un'epoca quale la "Flagellazione di Cristo" di Piero della Francesca. Tutto confluisce in questo quadro: influenze greche e latine, l'uomo al centro dell'universo rinascimentale e, soprattutto, tutta una serie di inserti geometrici e matematici che si sovrappongono. Raffaello Sanzio, uno degli artisti più noti del periodo, sia nel "Lo sposalizio della Vergine" (1504) sia nella "Trasfigurazione "(1518-1520), divide l'area del dipinto in due parti come quando si divide un rettangolo con sezione aurea. In un altro dipinto famosissimo "La nascita di Venere" del 1484 di Sandro Botticelli, l'artista applica più volte la sezione aurea: il rapporto tra l'altezza complessiva e l'altezza terra-ombelico di Venere risulta aureo. Facendo un salto di secoli e di eventi, arriviamo a "La stanza" di Van Gogh. Anche dove tutto sembra spontaneo ed immediato, scarno ed essenziale, le regole geometriche sono necessarie per definire spazi ed effetti. Possiamo poi citare Mondrian, che ha preso spunto dai rapporti matematici usati nell'architettura e, proprio per questo, ha spesso accostato quadrati a rettangoli in proporzione aurea, come è ben visibile in "La composizione in grigio e ocra" del 1918. Infine, ricordiamo Le Corbusier (1887-1965), celebre architetto, urbanista, pittore e designer svizzero naturalizzato francese. Con il suo "Modulor" ha presentato lo schema della figura umana suddivisa in parti proporzionali, ognuna sezione aurea dell'altra. Nel "Modulor" il rapporto tra l'altezza dell'uomo (183 cm) e la distanza dell'ombelico dal suolo (113 cm) equivale al numero aureo, come nell'opera di Leonardo; ma molti altri rapporti aurei sono calcolati in quest'opera. E' interessante sapere che Le Corbusier basava i suoi progetti architettonici sulla base di queste proporzioni per poter costruire oggetti ergonomici: dalle sedie ai tavoli, dalle maniglie delle porte alle finestre, dai palazzi all'urbanistica, tutto doveva rientrare nelle proporzioni armoniose di questo schema. Oltre al numero aureo esistono anche altri rapporti che hanno preso il nome di

numero d'argento, numero di bronzo o altri numeri "metallici". Per esempio il numero d'argento vale $1 + \sqrt{2}$. Si hanno casi di applicazione di questi numeri nell'arte e nell'architettura, anche se molto meno rispetto a quelle del numero aureo. Per esempio, il numero d'argento è collegato con il sistema usato dagli antichi Romani per le proporzioni architettoniche. Inoltre, in tre dimensioni, il rapporto aureo è legato a solidi particolari, i cosiddetti solidi platonici. In particolare, esso è legato all'icosaedro, solido composto da 20 triangoli equilateri che è il duale del dodecaedro, fatto con 12 pentagoni regolari. Ne "L'ultima cena" di Salvator Dalì (1955), l'ambiente che ospita la cena è un dodecaedro trasparente in cui la parte alta fa da soffitto. Sulla tavola ci sono solo pane spezzato e un bicchiere di vino. Le dodici facce del poliedro possono essere associate ai dodici apostoli. Si potrebbe dire che Dalì abbia, in qualche modo, copiato l'opera di Leonardo, ma il pittore non si cura affatto di ciò. Infatti afferma: "Quelli che non vogliono imitare qualcosa, non producono nulla". Il numero aureo è legato anche alla famosa successione di Fibonacci che è un elenco di numeri che inizia con le due cifre uguali 1e1. I successivi numeri sono creati semplicemente sommando i due termini precedenti, per cui otteniamo:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987 \ldots.$$

A Fibonacci si deve l'importante "Liber abaci", in cui si propone la notazione posizionale decimale e l'utilizzo delle cifre arabe che, nel corso del tempo, sostituì la numerazione romana. La proprietà che lega i numeri di Fibonacci al numero aureo è quella per cui, calcolando il rapporto tra un termine della sequenza e il precedente si ottengono risultati sempre più vicini a ϕ. Un artista che fece grande uso dei numeri di Fibonacci è Mario Merz; dal 1970 introdusse nelle sue opere la successione di Fibonacci come simbolo dell'energia nella materia o anche della crescita organica. Sicuramente l'opera più nota e conosciuta da tutti i torinesi è l'installazione permanente chiamata "Il volo dei numeri" (1984), posta sulla cupola della Mole Antonelliana, dove è possibile vedere la successione che, partendo dal basso, produce una luce rossa e ancora sul soffitto della stazione metropolitana Vanvitelli (metropolitana di Napoli) con forma a spirale. L'altro artista che propone molte volte la successione di Fibonacci è Tobia Ravà. Le sue opere sono spesso resine pigmentate su cui compare la serie numerica in vari colori e stili che richiamano la disposizione dei petali di un fiore, una delle possibili applicazioni della serie di Fibonacci se messa in forma di spirale. Uno degli effetti più diretti della serie di Fibonacci, messa a spirale, in natura, è il posizionamento dei semi di girasole, dipinti moltissime volte da Nicolas Robert, in modo molto preciso, e da Van Gogh nel suo stile. La successione di Fibonacci era stata notata in India addirittura nel VI secolo. Il merito fu del matematico Virahankae e la serie fu presentata come soluzione per …la poesia. Infatti, può essere usata per la metrica di componimenti aventi un numero costante di sillabe ma un numero arbitrario di lettere. Inoltre, ricerche ed esperimenti effettuati sul comportamento di diversi animali dall'antropologo I.E. Eibesfeldt, tra cui soprattutto scimmie, ma anche uccelli, mettono in evidenza la loro preferenza per una disposizione di oggetti improntata a regolarità e simmetria. L'idea di simmetria può avere diverse definizioni operative. In ogni caso, i concetti di simmetria sviluppati dalla matematica sono stati molto usati dalle varie forme d'arte. Difatti, la glissosimmetria compare spesso nei rosoni di moltissime opere, dall'antica Grecia all'antico Egitto, fino all'impero romano. Questo tipo di simmetria si nota soprattutto sui muri di molti edifici dell'antica Grecia e dell'antica Roma. L'arte, sebbene un po' inconsciamente, ha applicato i gruppi di simmetria delle figure geometriche nei rosoni, in cui non ci sono traslazioni possibili ma solo simmetrie centrali. La realizzazione dei rosoni è collegata principalmente alla costruzione delle chiese ed ebbe uno dei momenti di massimo splendore nel periodo in cui in tutta Europa si costruirono cattedrali con grandi vetrate, all'incirca tra il XII e il XV secolo. Qualche esempio: lo splendido rosone del Duomo di Orvieto (1538), realizzato dal fiorentino Andrea di Cione, e il grande rosone di Notre-Dame (1182), la cattedrale di Parigi. Anche nella musica possiamo notare un tipo particolare di simmetria: la simmetria temporale. Ci sono stati artisti, specie nell' ambito della musica classica, come Beethoven, Bach e Mozart, che hanno fatto corrispondere una simmetria a ciò che scrivevano sul pentagramma. Mozart, ad esempio, con il canone "Scherzetto-Duetto" per due violini: un unico spartito valido per entrambi i violini, che però va letto e suonato in due direzioni opposte. Ogni violinista suona quello che suona l'altro, ma nel verso opposto. A metà dello spartito i due violini si incontrano emettendo la stessa nota. Molti artisti, in epoche diverse, hanno subito il fascino della matematica traendo da essa ispirazione per le loro opere e i loro linguaggi. Ricordiamo, a tal proposito, un artista del nostro secolo: M.C.Escher. Di origine olandese, si era sempre interessato all'arte della grafica, della incisione e della tassellazione geometrica. Dai suoi numerosi viaggi in Italia e in Spagna nasce l'interesse per la matematica e per le configurazioni geometriche presenti in natura. In seguito approfondì gli studi sulle infinite possibilità offerte dalla matematica applicata all'arte. Varie forme di simmetria, la ripetizione modulare, la rotazione e il ribaltamento delle figure diventarono gli strumenti per dare ampio spazio alla sua fantasia ed alla sua immaginazione. Con le sue opere Escher ha saputo rappresentare in modo molto personale il legame tra conoscenze scientifiche ed immaginazione, dimostrando come regole matematiche possano diventare strumenti di creatività e la ricerca scientifica e tecnologica possano stimolare la fantasia e l'immaginazione.

2. Matematica e Arte nel Curricolo Verticale

Per quanto sembrino distanti e incompatibili, la matematica e l'arte sono strettamente correlate tra loro. Rafforzano entrambe le competenze cognitive e socio emozionali favorendo l'interazione fra l'alunno e il mondo esterno. Attraverso il processo artistico i bambini avviano un percorso di scoperta: sperimentano, analizzano varie possibilità e scoprono nuove soluzioni. L'arte contribuisce a migliorare le capacità espressive, a favorire l'apprendimento logico-matematico e linguistico e a liberare le potenzialità creative insite negli alunni. Attraverso l'arte i bambini imparano con entusiasmo a conoscere, osservare, esprimersi, scoprire il piacere di creare e sviluppare il senso del bello. Usare l’arte nei percorsi scolastici restituisce centralità al fare con le mani, al pensare a quello che si fa e ad arricchirlo con le proprie emozioni. Tutto questo sostiene l’organizzazione spaziale, l’organizzazione del corpo, l’organizzazione del tempo e favorisce l’aspetto percettivo e logico matematico. Il bambino impara ad esprimersi, a raccontarsi, ad imparare in modo divertente e significativo. La matematica analizza la realtà attraverso regole che permettono di ricomporla, interpretarla e riprodurla. Secondo le Indicazioni Nazionali 2012 "…dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nelle vita quotidiana; contribuisce a sviluppare le capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri". E ancora contribuisce…. "alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il "pensare" e il "fare" e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, eventi quotidiani, concetti e artefatti costruiti dall’uomo." Coniugare matematica e arte vuol dire invitare i bambini/ragazzi a dare sfogo alla loro creatività; una forma di intelligenza spesso latente ma che, con opportune attività, emerge facilmente. Nell’alunno si devono quindi sviluppare le capacità di osservare, descrivere, di leggere e comprendere criticamente le opere d’arte. "Lo sviluppo di queste capacità è una condizione necessaria per creare un atteggiamento di curiosità e di interazione positiva con il mondo artistico. È importante infatti che l’alunno apprenda, a partire dai primi anni, gli elementi di base del linguaggio delle immagini e allo stesso tempo sperimenti diversi metodi di approccio alle opere d’arte, anche attraverso esperienze dirette nel territorio e nei musei." (Indicazioni Nazionali 2012). Nelle attività scolastiche diventa peculiare un approccio che parta dall'osservazione e che metta al centro l’allievo per "suscitare, attraverso l'osservazione dei fatti riguardanti la tecnica, l'arte e la natura, l'interesse dell'alunno per le proprietà fondamentali delle figure geometriche e, con esso, il gusto e l'entusiasmo per la ricerca. Questo gusto non può nascere se non facendo partecipare l'alunno nel lavoro creativo. È necessario animare la naturale e istintiva curiosità che hanno i ragazzi … accompagnandoli nella scoperta delle verità matematiche, trasmettendo l'idea di averlo fatto per sé stessi e, dall'altra parte, far sentire progressivamente la necessità di un ragionamento logico". Emma Castelnuovo. Questo percorso nasce dal desiderio di aprire lo sguardo sulla matematica, una disciplina spesso considerata sterile, astratta, piena di regole, fine a sé stessa, per coglierla "in azione" all’interno dell’espressione artistica. Volendo parlare del rapporto tra la matematica e l’arte, abbiamo subito pensato anche alla geometria, che fa parte della scienza matematica e che si propone di studiare le figure nello spazio e nel piano. Abbiamo cercato così di coniugare l’aspetto artistico-creativo con quello matematico, osservando linee e forme nella realtà, giochi antichi e opere d’arte che potessero ispirare la fantasia dei bambini e allo stesso tempo li facessero riflettere sull’uso delle forme geometriche nelle opere d’arte. I collegamenti tra arte e matematica infatti si possono trovare anche in alcuni famosi giochi dell’antichità, come lo Stomachion di Archimede e nell’arte moderna. Pensiamo all’astrattismo dove, adottando numerose tecniche pittoriche, ci si allontana dall'arte figurativa come imitazione della realtà, sostituendola alla sua rappresentazione, come espressione astratta di sentimenti e idee attraverso forme, linee e colori.

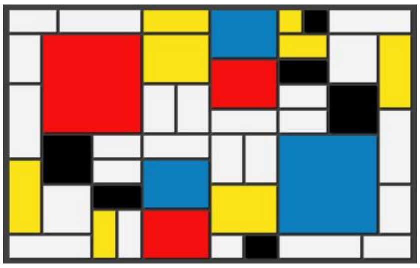
Scelte didattiche

"In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive. "(Indicazioni Nazionali 2012).
Le proposte sono state sviluppate secondo la metodologia didattica della flipped-classroom attraverso un'attività laboratoriale di ricerca delle informazioni relative agli artisti, alla corrente alla quale appartengono, al periodo storico, alla collocazione geografica, alla produzione artistica e ai legami tra la loro arte e la matematica. "L'incontro dei bambini con l'arte è occasione per guardare con occhi diversi il mondo che li circonda. I materiali esplorati con i sensi, le tecniche sperimentate e condivise nell'atelier della scuola, le osservazioni di luoghi (piazze, giardini, paesaggi) e di opere (quadri, musei, architetture) aiuteranno a migliorare le capacità percettive, coltivare il piacere della fruizione, della produzione e dell'invenzione e ad avvicinare alla cultura e al patrimonio artistico." (Indicazioni Nazionali 2012). La scelta ha riguardato opere d'arte di famosi pittori tra i quali per esempio Mondrian ed Escher. Occorre precisare l'importanza che questo percorso ha avuto nel favorire un maggiore raccordo tra i vari ambiti disciplinari e facilitare la realizzazione di una programmazione basata su una didattica per competenze e una valutazione degli apprendimenti effettuata in termini di conoscenze, abilità e competenze. "Fin dalla scuola dell'infanzia, nella scuola primaria e nella scuola secondaria di primo grado l'attività didattica è orientata alla qualità dell'apprendimento di ciascun alunno e non ad una sequenza lineare, e necessariamente incompleta, di contenuti disciplinari. I docenti, in stretta collaborazione, promuovono attività significative nelle quali gli strumenti e i metodi caratteristici delle discipline si confrontano e si intrecciano tra loro, evitando trattazioni di argomenti distanti dall'esperienza e frammentati in nozioni da memorizzare." (Indicazioni Nazionali 2012). Nelle attività proposte sono ben visibili possibili contributi di più discipline che permetteranno all'alunno di possedere maggiore consapevolezza degli aspetti umani, storico-sociali e culturali delle opere e degli artisti scelti. L'osservazione di un'opera d'arte permette infatti di pianificare una serie di momenti operativi: la rilevazione delle sensazioni e delle emozioni che produce; l'individuazione dei possibili contenuti, relativi alle caratteristiche tecniche dell'opera; la scoperta di raccordi interdisciplinari riconoscendo quelli tra arte, matematica e altre discipline; la scelta di attività collegate all'opera, scelte tra quelle già realizzate, trovate durante l'attività di ricerca o create dagli alunni; la ricerca e sperimentazione di giochi riconducibili alle caratteristiche del quadro, realizzati anche come attività di coding unplugged e non; le verifiche attraverso la

progettazione di attività finali che dimostrino il raggiungimento di nuove conoscenze, abilità e competenze.

Dall'osservazione alla realizzazione di alcuni percorsi operativi:

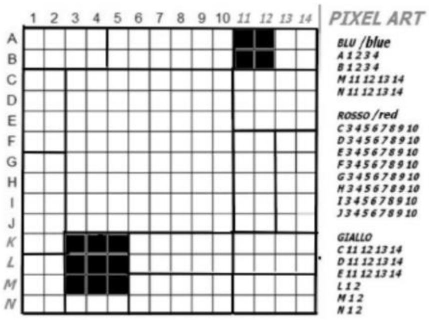
1.

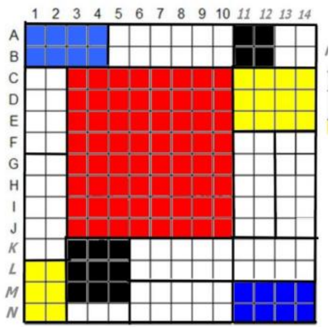


Grande composizione A con nero, rosso, grigio, giallo e blu"
Piet Mondrian

L'osservazione della semplicità delle linee e la scelta di alcuni colori ha ispirato:

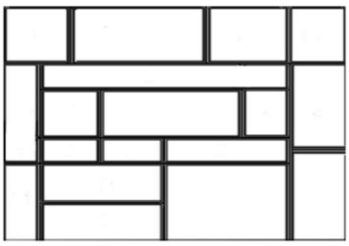
- ❖ la ricerca di possibili connessioni con la geometria attraverso la classificazione di linee e figure (linee verticali, orizzontali, parallele, perpendicolari, poligoni, quadrilateri…).
- ❖ La realizzazione sul piano cartesiano le cui coordinate permettano la costruzione delle figure geometriche rappresentate, secondo il rapporto di proporzionalità scelto dall'autore;
- ❖ La costruzione di un codice per colorare il quadro secondo il modello, come attività di Coding Unplugged

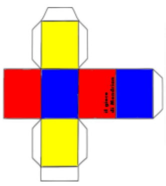




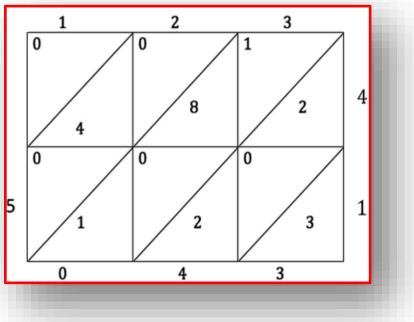
Nella scuola dell'Infanzia, o nel caso di alunni diversamente abili nella scuola Primaria o Secondaria di 1° Grado, si potrebbero realizzare giochi individuali, a coppie o per gruppi di bambini utilizzando un'immagine non colorata dell'opera.

- ❖ Dopo aver scelto la figura (discriminando tra quadrato e rettangolo) si dovrà tirare il dado e colorare secondo il colore indicato.
- ❖ Oppure, più entusiasmante a livello sfida, dopo aver tirato il dado, il bambino che riesce per primo ad usare tutti e 3 i colori vince.





L'osservazione dell'opera di Mondrian può rappresentare anche l'occasione per introdurre algoritmi alternativi con **le moltiplicazioni arabe** o **graticola** o **gelosia.** Questo metodo curioso per eseguire una moltiplicazione risale al XVI secolo. Proviamo adesso ad applicarlo al prodotto dei due fattori: **123** e **41**. Costruiamo un rettangolo con la base formata da tre parti (tante quante sono le cifre del primo fattore) e l'altezza di due parti (tante quante sono le cifre del secondo fattore). Costruiamo quindi la graticola seguente con le caselle divise a metà da una diagonale e scriviamo esternamente al rettangolo le cifre dei due fattori

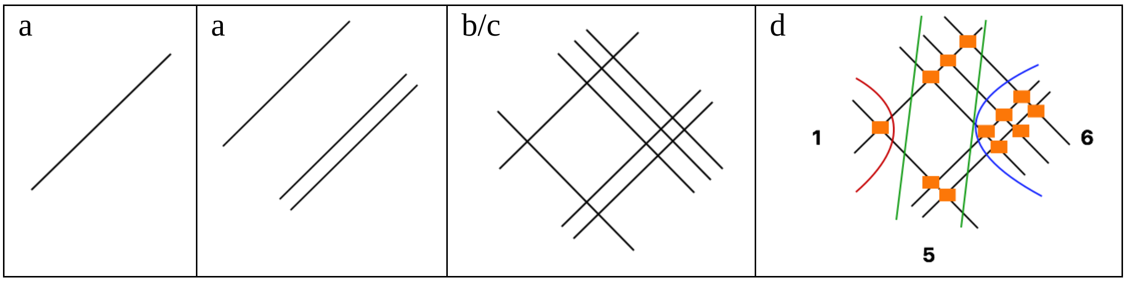


In ogni casella, separando le cifre delle decine da quelle delle unità, scriviamo il prodotto 4 per 1: metteremo la cifra 4 delle unità nella metà inferiore e lo 0 delle decine nella metà superiore. Ripetiamo la stessa procedura per tutte le celle, poi sommiamo le cifre che si trovano sulla stessa diagonale, a partire dall'angolo in basso a destra e riportando le eventuali decine alla diagonale successiva. Se ora leggiamo le cifre ottenute, accostandole una all'altra, partendo dalla cifra in alto a sinistra, otteniamo il prodotto cercato, cioè **5043**.

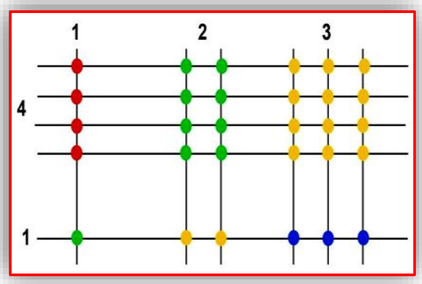
❖ Moltiplicazioni con **i bastoncini**

Sono stati osservati la prima volta da Marco Polo nei suoi viaggi in Katai tra il 1271 e il 1289. I bastoncini hanno rappresentato nel tempo un utile strumento didattico della matematica sia in Cina che in Giappone. Ancora oggi sono utilizzati, a livello di scuola Primaria, per diverse attività come quella del cambio nella base 10 o per eseguire moltiplicazioni. Proviamo ad effettuare la moltiplicazione 12 x 13. Prendiamo il primo fattore (12) e per ciascuna cifra tracciamo una linea, tante sono le unità che lo compongono.

a. Pertanto, per il numero 12, tracciamo una linea per l'1 e due linee per il 2.
b. Facciamo lo stesso per i caratteri del fattore 13; una linea per l'1 e 3 linee per il 3.
c. A questo punto abbiamo un insieme di linee che si intersecano ed evidenziamo i punti di intersezione.
d. Partendo da destra dividiamo il tracciato in 3 parti (evidenziate in figura con il blu, il verde e il rosso) poi effettuiamo la somma algebrica dei punti al loro interno.

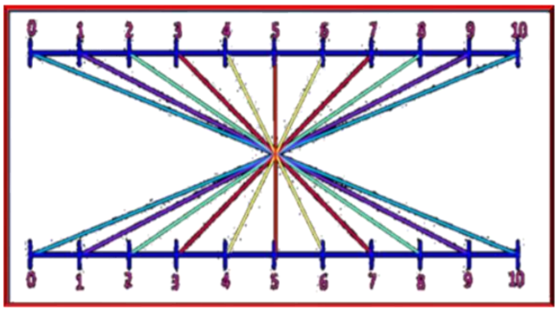


Si ottiene quindi, guardando la figura d nell' area delimitata dalla linea blu: 6 ; nell'area delimitata dalla linea verde: 5; nell'area delimitata dalla linea rossa: 1.
Leggendo nel grafico, da sinistra a destra, i vari risultati ottenuti, otteniamo appunto 156. Questo metodo può essere utilizzato anche per coppie di numeri molto più grandi di quelle utilizzate prima. Ad esempio123 x 41



Dopo aver costruito il "grafico", evidenziando le intersezioni dei bastoncini, si contano i pallini dello stesso colore iniziando in basso a destra, ottenendo il risultato 5043. Di seguito un utile video tutorial https://www.youtube.com/watch?v=0SqRPf300J0

❖ Gabo, l'artista russo che creava sculture tirando dei fili attraverso dei fori, ottenendo in questo modo splendide curve e disegni.



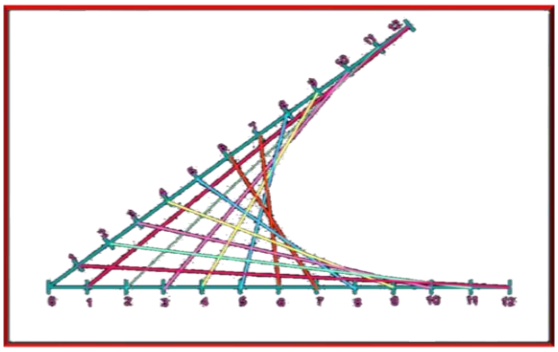
Tracciamo delle rette parallele , segniamo e numeriamo ogni centimetro. Poi colleghiamo tra loro i numeri che sommati danno 10

0 + 10 = 10

1 + 9 = 10

2 + 8 =10

……..



In questo caso colleghiamo i *numeri che sommati danno 13*

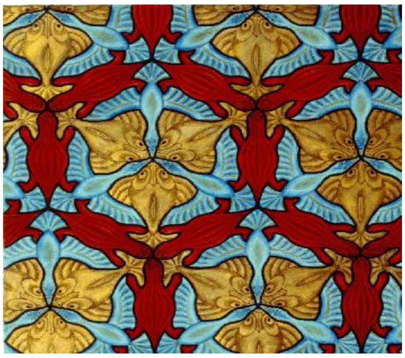
12 + 1 = 13

11 + 2 = 13

10 + 3 = 13

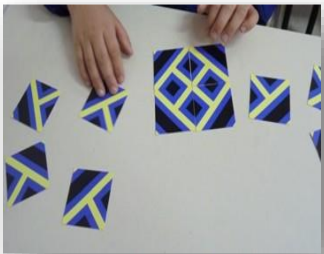
……..

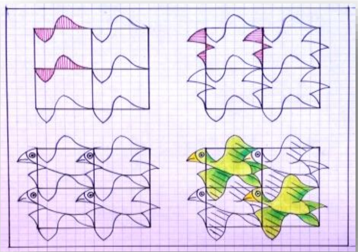
❖ È possibile anche proporre come attività di Coding, dalla Piattaforma di Programma il Futuro o Code.Org, il gioco "L'artista che permette di costruire linee di codice per disegnare un quadrato usando la programmazione visuale a blocchi. **https://studio.code.org/s/course2/stage/4/puzzle/10**



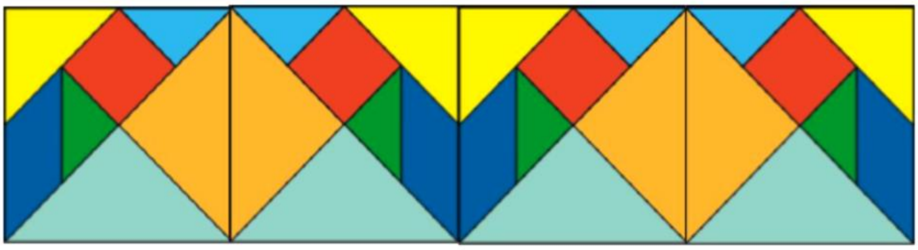
Tartarughe e pesci
Maurits Cornelis Escher

La figura di questo artista affascina i bambini e i ragazzi perché le sue opere suscitano stupore e meraviglia. I suoi disegni impossibili rappresentano delle vere e proprie illusioni ottiche in grado di incuriosire e far riflettere chi li osserva. La perfezione delle linee nella riproduzione di animali e forme, posizionati in modo diverso nello spazio grafico, trasmettono il senso del bello e del completo. In realtà, dietro i suoi lavori c'è un grande studio matematico. Un' osservazione più attenta delle sue opere rivela infatti un sapiente utilizzo della simmetria, della traslazione e della rotazione. I vari percorsi che Escher ha seguito per arrivare alla comprensione delle regole di costruzione dei suoi disegni, sono raccolti in una serie di quaderni fitti di appunti, i cui quadretti lo hanno aiutato a tracciare le griglie dei tasselli elementari delle sue figure. Questi appunti, ricuperati da Doris Schattschneider, matematica e grande ammiratrice dell'artista olandese, sono pubblicati nel suo libro "Visioni della Simmetria", Zanichelli, 1992. Un libro stupendo che finalmente svela i trucchi del mestiere di Escher e che raccoglie tutto il suo lavoro sulla divisione regolare del piano, quella che chiamò la "Teoria Profana". Sono 350 disegni periodici, 180 dei quali sono inediti. Già da ragazzino, come ricorderà una sua amica, si divertiva a sistemare fettine di formaggio sulla sua grande fetta di pane imburrato in modo da ricoprirla interamente, senza lasciare spazi vuoti. Più tardi Escher confesserà: "La divisione regolare del piano è diventata un'autentica "mania", a cui sono ormai assuefatto, e da cui talvolta mi è difficile allontanarmi". Nella scuola Primaria, partendo dall'osservazione delle opere di Escher, si possono realizzare vere e proprie tassellazioni del piano utilizzando gli oggetti o le loro rappresentazioni grafiche ripetendole all'infinito senza sovrapposizioni. Di seguito esempi di lavori realizzati dagli alunni di una quinta Primaria



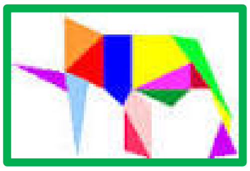


Con i bambini della scuola dell'Infanzia o dei primi anni della scuola Primaria è possibile proporre il Tangram che permette, utilizzando i sette pezzi che lo compongono, di realizzare un quadrato o oggetti diversi secondo la fantasia e la creatività dell'alunno. Tali rappresentazioni si possono ripetere con più pezzi realizzando alcune tassellature. Ad esempio, utilizzando diversi pezzi, si può realizzare quanto di seguito rappresentato attraverso attività di coding unplugged.

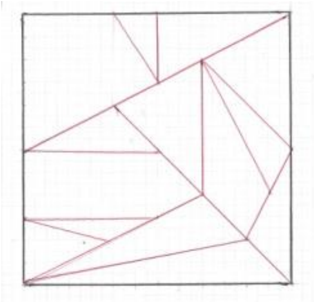
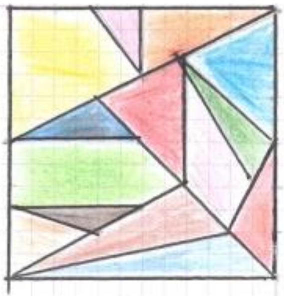


Per i più grandi invece si possono realizzare tassellature, con il programma Paint. Douglas R. Hofstadter, autore del celebre saggio sull'intelligenza artificiale" Gödel, Escher, Bach" accosta il nome di Escher a quello di un grande musicista e di un grande matematico. Riconosce all'artista la creazione di opere fra quelle concettualmente più stimolanti di tutti i tempi. Per lui "il genio di Escher consiste nella sua capacità di escogitare e allo stesso tempo realizzare dozzine di mondi semireali e semi-immaginari nei quali sembra invitare i suoi spettatori a entrare". Escher è un artista che non riesce a dimenticare la matematica; ma proprio questo lo rende il più amato dai matematici, per i quali i suoi disegni sono la dimostrazione che anche la matematica può essere arte. "L'attenzione che avete tanto cortesemente dedicato alle mie fantasie, osservava Escher nel suo intervento a un convegno scientifico, dimostra che la scienza e l'arte talvolta possono incontrarsi, come due pezzi di quel puzzle che è la vita umana e che può stabilirsi un contatto attraverso la frontiera che separa i nostri rispettivi campi d'indagine".

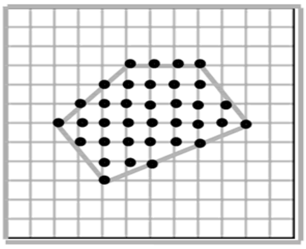
3. E ora giochiamo con lo Stomachion



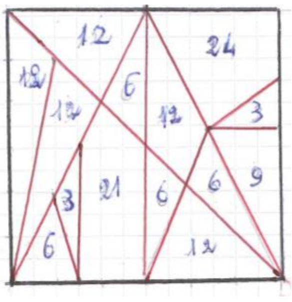
Un rompicapo di combinatoria dotato di significato geometrico che, letteralmente, fa pensare al mal di stomaco perché pare lo provocasse in chi lo praticava per lungo tempo. Insomma, comunque sia, un gioco matematico da sperimentare anche in classe, cominciando dalle vicende storiche! Nel 1229, a Gerusalemme, mentre Federico II di Svevia combatte i musulmani, un amanuense sta completando un libro di preghiere destinato al monastero di San Saba, nel deserto del Sinai; non immagina che su quelle vecchie pergamene riciclate si celino copie di antichi testi greci … Si tratta del codice " C", chiamato anche " Palinsesto di Costantinopoli", formato da un insieme di fogli di pergamena antichi, raschiati per essere utilizzati, tagliati, ruotati di 90°, rilegati in ordine diverso e sovrascritti come libro di preghiera che, al loro interno, nascondono due grandi novità a proposito di quello che il mondo già sapeva del grande genio siracusano: Il "Metodo" e lo Stomachion. Il manoscritto dedica alcune pagine alla presentazione del gioco, simile al più celebre Tangram cinese. La differenza sta nel fatto che, invece di 7 tessere, lo Stomachion ne utilizza il doppio: 11 triangoli, 2 quadrilateri e un pentagono. Le tessere, al tempo di Archimede, erano fatte di ossicini di avorio e si conservavano in una scatoletta detta “ locolus”;il gioco consisteva nel comporre, con le tessere, sagome di figure fantasiose ispirate alla natura come il famoso l’elefantino o figure geometriche composite. Il problema sottostante, frutto di un’elaborazione successiva del gioco era quello di interrogarsi sul numero dei modi possibili in cui le tessere potevano essere composte per riempire un quadrato, posto su una base quadrettata di 12 quadretti per lato; nel 2003 un gruppo di matematici di Stanford, provò che ciò poteva essere realizzato in almeno 17152 modi! Di seguito rappresentazioni effettuate nel corso del gioco con una classe:

Componendo le tessere si può ragionare geometricamente, per esempio si può discutere di come calcolare l’area di queste figure irregolari. Una proposta può essere quella di far ricorso al teorema di George Alexander Pick secondo il quale “L’area di una figura geometrica, i cui vertici siano punti di un reticolo, è uguale alla somma del numero dei punti interni e della metà dei punti toccati dal contorno della figura, meno un’unità”. Dalla figura sotto riportata, è facile dedurre che l’area, in termini di quadretti, è pari a 28,5 poiché i punti interni alla figura sono 24 mentre quelli toccati dal contorno sono 11.



Il teorema può essere applicato anche alle combinazioni realizzate dagli alunni che possono verificare come l’area del quadrato che contiene le tessere risulti dalla somma delle aree dei poligoni componenti. Il calcolo può essere riassunto come nella tabella seguente:



Poligoni	Numero pezzi	Area (quadretti)	Totale
Triangoli	2	3	6
Triangoli	4	6	24
Triangoli	1	9	9
4 triangoli e un quadrilatero	5	12	60
Pentagono	1	21	21
Quadrilatero	1	24	24
Totale	14		144 = 12x12

Sono molte le opportunità che il gioco offre in termini di attività didattiche: dalla scuola dell'infanzia alla scuola secondaria e non solo di primo grado! E' possibile, ad esempio, recuperare manualità favorendo gli alunni più deboli fornendo loro proposte di combinazioni, forbici, cartoncino, pennarelli, ecc per ricreare composizioni anche astratte, con creatività e fantasia, oppure discutere sulle proprietà delle tessere (figure geometriche non proprio usuali). Anche ragionare sui numeri contenuti nella tabella per cercare di scoprire una loro logica interna, o qualche possibile ricorrenza, può essere di stimolo per i più dotati.

4. Ulteriori proposte operative

Per continuare a scovare la matematica nelle pieghe dell'arte scegliamo di " giocare" anche con qualche quadrato magico; ad esempio con quello riportato nella celebre incisione di Albrecht Dürer del 1514 o con quello che si trova sulla facciata della Sagrada Familia a Barcellona. (inserire immagini). In entrambe le opere sono riportati quadrati magici molto particolari, da studiare non solo singolarmente, ma anche congiuntamente perché dal primo si può ottenere il secondo. E' importante partire da una pagina di Storia della matematica che introduca l'argomento. A tal proposito ricordiamo che un quadrato, di lato *n*, per chiamarsi "magico" deve essere suddiviso in $(n * n)$ celle contenenti numeri con caratteristiche particolari: a) Tutti i numeri devono essere interi positivi; b) I numeri devono essere diversi tra loro; c) La somma dei numeri di ciascuna riga, di ciascuna colonna e delle due diagonali deve essere sempre la stessa; tale somma viene detta "costante magica". La formula per calcolare tale costante magica è:

$$K = \frac{n * (n^2 + 1)}{2}$$

Storicamente, il più antico quadrato magico risale alla matematica cinese ed era chiamato *Lo Shu* , ovvero " scritto del fiume Lo", una denominazione di cui si trova traccia fin dal VI-V secolo a.C. Per vedere un quadrato magico in Europa dobbiamo aspettare il XV secolo. Una dei primi matematici ad occuparsene fu Cornelio Agrippa (1486-1535). In un quadrato magico di ordine n, la dimensione è $(n * n)$, per cui al suo interno appariranno tutti i numeri naturali da 1 $a\ n^2$. Ad esempio un quadrato magico di ordine 3 è il seguente:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

La sua struttura è espressa anche in versi: “2 e 4 son le spalle, 6 e 8 sono i piedi, vi è un 3 sulla sinistra, vi è un 7 sulla destra, è calzato con un 1, mentre un 5 sta nel mezzo”. Si può constatare che la costante magica è pari a 15, come si può facilmente calcolare applicando la formula sopra riportata. Facendo un salto nel tempo, lo studio dei quadrati magici fu coltivato a lungo dai matematici e dagli astronomi del mondo arabo e si diffuse in Occidente solo nel tardo Medioevo sebbene ci siano testimonianze in Europa di tali quadrati riferite anche a epoche precedenti. Persino il frate Luca Pacioli, nel suo “ De viribus quantitatis”, si occupa di quadrati magici a cui attribuisce, nomi ispirati all’Astronomia (marte, giove, …). Si tratta di quadrati di ordine 3, 4, 5, 6,7, 8, 9 non completi; quello del quarto ordine, di cui sono indicati solo i primi 9 elementi, chiamato “quadrato di Giove”, corrisponde a quello che sarà riportato da Dürer nella sua Melancholia. Si tratta di un quadrato magico di ordine 4, costruito in modo tale che i due numeri centrali dell’ultima riga venissero a costituire l’anno della pubblicazione dell’opera.

16	**3**	**2**	**13**
5	**10**	**11**	**8**
9	6	7	12
4	15	14	1

Questa celebre quadrato magico ha altre proprietà sorprendenti: la costante magica (34) può essere ottenuta anche addizionando i quattro numeri collocati nei vertici, i quattro numeri centrali, i numeri che costituiscono ciascuna delle quattro parti in cui lo schema viene diviso dagli assi dei lati del quadrato. Poiché i numeri in grassetto sono quelli inseriti dal frate, si può chiedere agli alunni di completarlo e di calcolarne la costante magica. Come si può controllare il quadrato è costruito con i numeri da 1 a 16 e la sua costante magica è pari a 34. Dal punto di vista didattico è interessante anche osservare che, mentre il quadrato magico di ordine 3 è essenzialmente unico, il quadrato magico di ordine 4 può essere ottenuto in vari modi. In un’opera del XVII secolo si legge che ve ne sono ben 880. Troviamo un altro quadrato quasi-magico costruito sulla facciata della Passione della Sagrada Familia, gigantesca cattedrale di Antonio Gaudì. Tale quadrato viene definito quasi-magico perché ci sono tutti i numeri da $1 \ a \ 16$, come dovrebbe essere; mancano il $12 \ e \ 16$, mentre il $10 \ e \ il \ 14$ sono ripetuti due volte.

1	**14**	**14**	4
11	7	6	9
8	**10**	**10**	5
13	2	3	15

Questo quadrato magico ha una particolarità: la somma di ogni riga, colonna o diagonale è pari a 33, ovvero l'età di Gesù quando morì. Un esercizio, didatticamente interessante, consiste nel cercare di ottenere tale quadrato da quello di Durer, operando due simmetrie, rispetto agli assi orizzontale e verticale dello schema numerico e diminuendo di una unità 4 elementi del quadrato: uno (e uno solo) per ogni riga, in modo tale che ne risulti diminuito uno (e uno solo) per ogni colonna e uno (e uno solo) per ogni diagonale. Si può, inoltre, invitare gli alunni a costruire altri quadrati particolari, ad esempio quelli doppiamente magici, diabolici, ecc….; la letteratura in materia è molto ampia.

5. Conclusioni

L'accostamento di matematica e arte potrebbe apparire, a prima vista, improbabile poiché la matematica è basata sulla razionalità, mentre l'arte sull'emotività. Le due discipline sembrano appartenere a mondi diversi e incomunicabili. In realtà le divisioni fra le due culture sono solo apparenti, poiché è proprio attraverso tale binomio che è, spesso, possibile comprendere le più armoniose opere d'arte, dalla musica alla pittura, all' architettura e alla scultura. Ma, può la bellezza parlare il linguaggio della matematica? Sebbene il rapporto fra la scienza dei numeri e la creazione artistica non appare evidente, gli intrecci e le convergenze fra queste due sfere della cultura umana sono stati nel corso della storia numerosi, profondi e fecondi. Molti artisti in epoche diverse hanno subito il fascino della matematica e delle sue idee e tratto ispirazione per le loro opere e i loro linguaggi. Difatti, un lavoro matematico, come uno artistico, rappresenta delle articolazioni del tipo scoperta-invenzione che hanno come comune caratteristica la fantasia e la creatività. Un altro denominatore comune tra matematica e arte è il concetto di simmetria che unisce, in modo evidente la matematica, (non solo questa ma anche le altre scienze) e le arti. Molti artisti e matematici nel corso dei secoli si sono espressi su questo felice connubio. A conferma di quanto detto, riportiamo il pensiero di Jules Henry Poincaré (Nancy 29 aprile 11854 – Parigi 17 Luglio 1912) , matematico e fisico teorico francese, che si è occupato anche di struttura e metodi della scienza, che esprimono quella parte dell'interferenza matematica-arte che emerge dalle opere dei più grandi artisti e matematici di ogni tempo. Poincarè così si esprime: "….the feeling of mathematical beauty, of harmony of numbers and forms, of geometric elegance. This is true aestetic feeling that all real mathematicians know. (H. Poincarè, Mathematical creation, American Scientist, 179, 54-57,1948). Ed ancora, Paul Richard Halmos (Budapest 03 marzo 1916- Los Gatos 02 Ottobre 2006), matematico e statistico ungherese, nato a Budapest da una famiglia di origini ebraiche che nel 1929 emigra negli Stati Uniti, in un articolo pubblicato da American Scientist, dal titolo " Mathematics is a creative art", a proposito del rapporto matematica e arte, afferma: " The origin of painting is physical reality, and so is the origin of mathematics …..but the painter is not a camera and the mathematician is not an engineer…..In painting and in Mathematics there are some objective standards of good-the painter speaks of structure, line, shape and texture, where the mathematician speaks of truth, validity , novelty, generality-but they are relatively the easiest to satisfy. ….. Mathematics is a creative art because mathematicians create beautiful new concepts: it is a creative art because mathematicians live, act and think like artists; and it is a creative art because mathematicians regard it so".

Bibliografia

- Ghersi Italo (1963), Matematica dilettevole e curiosa, Hoepli, Milano;
- Honsell Furio- Bagni Giorgio (2009), Curiosità e divertimenti con i numeri, Aboca
- Piergiorgio Odifreddi Piergiorgio (2011), Il museo dei numeri, Rizzoli;
- Sanna G. (2005), Hai mai visto Mondrian ?, Arte Bambini Edizioni, Bologna
- Sbaragli S. (2011) (a cura di), Buone pratiche d'aula in matematica, Pitagora Editrice, Bologna
- M. Dallari - C. Francucci, L'esperienza pedagogica dell'arte, La Nuova Italia Editore, Firenze 1998

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 2, No 2 (2019), 23-32

Un pacco devi scegliere

Diana Cipressi
Docente di matematica e scienze
Istituto Comprensivo n. 4 Chieti Scuola Sec. di 1° grado G. Mezzanotte
e-mail diana.cipressi@gmail.com

Sunto
In questo articolo presentiamo per la Scuola Sec. di 1° grado una proposta relativa al nucleo fondante "*Spazio e figure*". Il laboratorio didattico è indirizzato ad una classe terza, anche se in parte adatto ad una classe seconda.
Le figure solide prese in considerazione sono i parallelepipedi rettangoli, abbracciando una visione che accosta il più possibile lo spazio tridimensionale e quello bidimensionale; la trattazione è concentrata sugli elementi di uno sviluppo piano, sulla visualizzazione dei solidi equivalenti e sul processo decisionale di ottimizzazione.
Le questioni didattiche sono arricchite dagli elaborati degli alunni che danno visibilità ai processi di apprendimento. Il contesto scolastico infine è quello generato da un'emergenza sanitaria, che integra la didattica a distanza con una metodologia esplorativa.

Parole chiave: Parallelepipedo; sviluppo piano; superficie; volume; comunicazione.

1. Introduzione

Disciplina di riferimento: *Matematica*
Ordine di scuola: *Scuola sec. di 1° grado, classe terza.*

L'emergenza Coronavirus, che ha sospeso nelle scuole ogni attività in presenza, ha imposto una didattica a distanza implementata dalle tecnologie digitali e la riorganizzazione dell'insegnamento ha imposto una nuova forma di comunicazione.
Lo spazio educativo si è trasformato in un'aula virtuale che ha modificato il nostro modo di stare in classe: la comunicazione a distanza ha creato difficoltà nella comprensione, le interazioni tra docente e discente sono state meno immediate, il dialogo educativo ha perso un po' di reciproca spontaneità.

Così, da un giorno all'altro, per fare scuola a distanza, abbiamo sperimentato una modalità inedita, nel tentativo di raggiungere il più possibile i nostri alunni cercando di coltivare il senso di appartenenza alla comunità educante.
Abbiamo compreso che non possiamo prescindere da una lezione in presenza, ma si può dimostrare la capacità di riorganizzarsi di fronte ad una situazione critica.

La Didattica a Distanza pertanto può essere pensata dando spazio alla ricostruzione motivata del sapere, focalizzando i nuclei fondamentali e pianificando sia videolezioni e risorse multimediali che esperienze dirette. Lo sviluppo di percorsi di indagine (*Enquired Based Learning*) potrà favorire un apprendimento consapevole e sviluppare capacità di ragionamento.

Metodologie
Enquired Based Learning; Didattica metacognitiva.

Contenuti

Lo sviluppo piano; il parallelepipedo; i solidi equivalenti; la superficie totale.

Obiettivi:

- Padroneggiare un'unità di misura di superficie
- Riconoscere solidi equivalenti
- Variare la superficie mantenendo costante il volume
- Individuare i possibili sviluppi piani di un parallelepipedo
- Gestire la comunicazione.

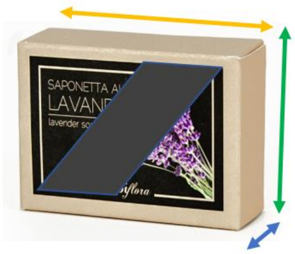
Competenze:

- Riconoscere le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e coglierne le relazioni tra gli elementi.
- Analizzare e interpretare rappresentazioni di dati, per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni.

2. Lo sviluppo piano

L'osservazione di scatole chiuse e smontate potranno favorire nell'alunno il riconoscimento di sviluppi piani e la costruzione di relazioni tra figura solida e figura piana.

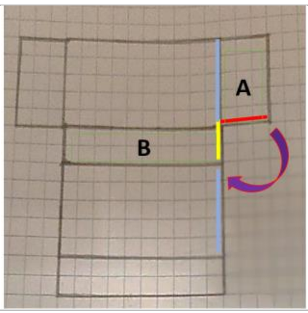
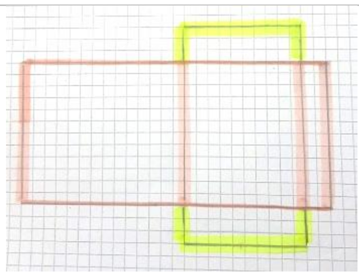
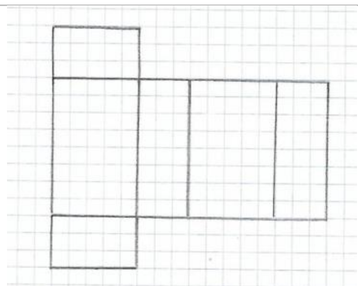
A) *Prendete una scatola, ad esempio quella di una saponetta e misurate le tre dimensioni della scatola.*
Staccate le parti incollate, senza strapparle e ritagliate le alette. Avete così ottenuto uno sviluppo piano del parallelepipedo. Osservate la figura ottenuta e rispondete.



- *Quali e quanti poligoni formano la figura?*
- *Quanti poligoni sono uguali?*
- *Disegnate su un foglio la figura.*

Gli alunni dovranno riconoscere la presenza di sei rettangoli, uguali a due a due, riprodurre correttamente i rettangoli uguali, e capire che lo sviluppo di un solido ammette più soluzioni.

Raccogliamo le foto dei disegni inviati dagli alunni alla piattaforma ed esaminiamo in videolezione le varie formulazioni degli alunni. Ad esempio:

		
I rettangoli sono uguali a due a due. *Ma la scatola non si chiude perché nessun lato del rettangolo A è uguale ad un lato del rettangolo B.*	*Manca una faccia della scatola e le facce disegnate non sono uguali a due a due.*	*Questo è lo sviluppo piano di un parallelepipedo rettangolo, con dimensioni 3 u, 5 u, 8u.*

Dalla discussione emergerà che lo sviluppo piano del parallelepipedo rettangolo è formato da sei rettangoli, uguali a due a due e che le tre dimensioni del parallelepipedo si conservano nello sviluppo piano.
Inviteremo gli alunni a misurare le varie parti della figura per comprendere meglio l'organizzazione dello sviluppo piano; metteremo in evidenza, come si evince dalla *Fig. 1*, che le misure dei rettangoli si ripetono con una certa regolarità: le misure 3,5 cm e 6 cm del rettangolo di base (di colore verde) si ritrovano lungo il segmento XY, che costituisce una delle dimensioni della *superficie laterale*.
Quest'analisi sarà ripresa successivamente per ricavare l'area della superficie laterale come prodotto del perimetro di base per l'altezza del parallelepipedo.

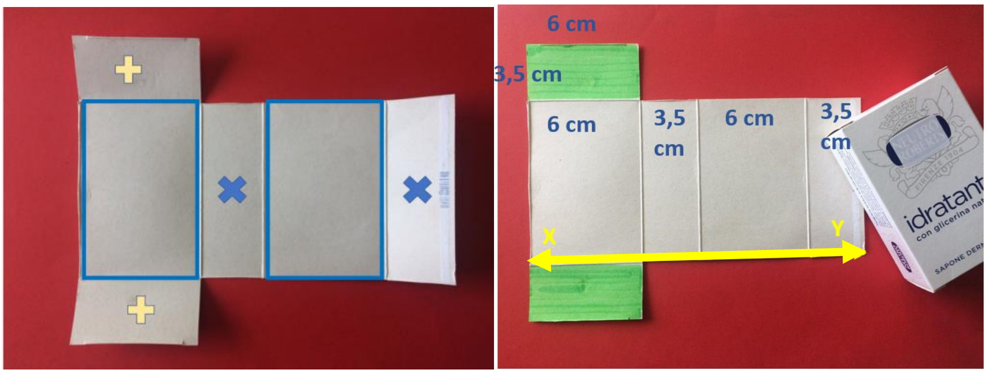
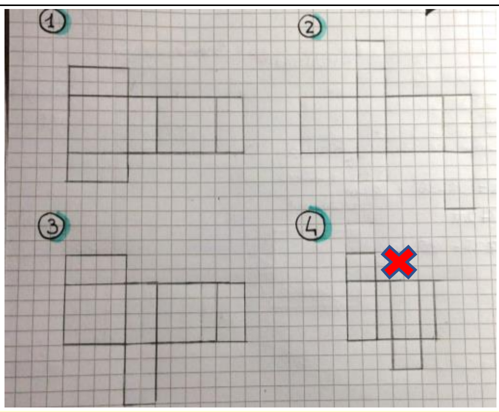


Fig.1 : Uno sviluppo piano della scatola

B) *Avete aperto la scatola di sapone, togliendo le alette e avete disegnato un suo sviluppo piano. Potete aprire la scatola in un altro modo, ritagliandola lungo gli spigoli? Provate ad immaginare quali figure avreste ottenuto e disegnatele sul quaderno. Disegnate infine una figura che non sia uno sviluppo piano e motivate la scelta.*

Su un Documento Google della piattaforma gli alunni allegano le foto dei lavori svolti. Gli elaborati saranno poi esaminati insieme:

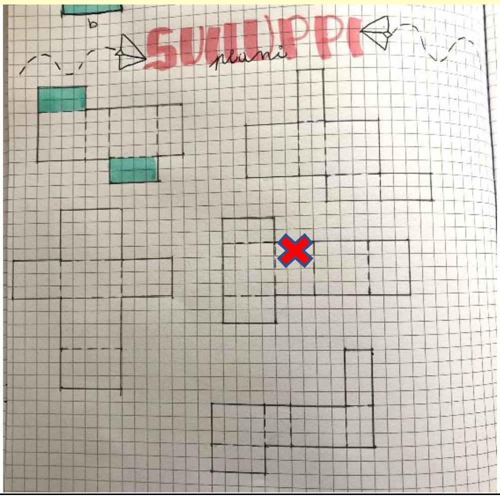


I rettangoli che comunemente chiamiamo basi sono disposti in più modi. Nelle prime tre figure, le due basi sono congruenti, di volta in volta *spostate o ruotate*.

L'ultima figura non è lo sviluppo piano di un parallelepipedo: il quadrato andrebbe sostituito con un rettangolo.

La creatività dà i suoi frutti.
Lo sviluppo piano è spesso disegnato con una parte centrale (che chiamiamo *superficie laterale*)
accostata da due basi l'una di fronte all'altra.

Il secondo disegno invece, che ha abbandonato le caratteristiche simmetriche presenti in altre rappresentazioni, evidenzia una visione spaziale inconsueta e originale.



Nella lezione sincrona daremo risalto alla presentazione delle figure, alle relazioni tra spigoli e facce del parallelepipedo, al riconoscimento delle figure equiestese, alla molteplicità degli sviluppi piani di un solido.
Sarà rilevata la capacità di mettere in relazione le figure passando dal punto di vista bidimensionale a quello tridimensionale e viceversa, la capacità di scoprire l'errore come un processo di controllo di apprendimento che va rimodulato, e la capacità di usare i linguaggi per descrivere gli sviluppi e ricostruire le strategie migliori.

3. La superficie minima

L'idea è quella di iniziare lo studio delle superfici senza formule; per misurare la *superficie totale* di un parallelepipedo, pertanto si suggerisce di eseguire un confronto tra la superficie del solido e quella di una superficie presa come unità di misura; si conterà quante volte la superficie campione è contenuta in quella da misurare.
Le formule potranno essere vagliate in seguito, ma all'inizio è auspicabile ragionare sulle forme e sulle proprietà delle figure, incoraggiando il più possibile l'intuizione e la creatività degli alunni.

Se si lavora in modalità a distanza, un video che presenti il contesto problematico può suscitare un ambiente di apprendimento meno formale e accrescere la motivazione negli alunni: https://www.youtube.com/watch?v=OoEo61f8LzY&t=324s

Il problema è il seguente:
Questo pacco è per voi. Lo apro e vediamo che cosa contiene.

Fig. 2: Il pacco sorpresa, con otto dadi.

La sorpresa consiste in 8 dadi uguali, di spigolo 2 cm. L'involucro di carta rappresenta lo sviluppo piano del pacco e, come si può notare, risulta "diviso" da quadratini (le facce del dado) di area 4 cm^2 (Fig. 3). Poiché sulla carta si contano 34 quadratini, possiamo stabilire che la superficie del solido - formato da una colonna di 8 dadi posti uno sull'altro - è data dal prodotto 34 x 4 cm^2, cioè 136 cm^2.

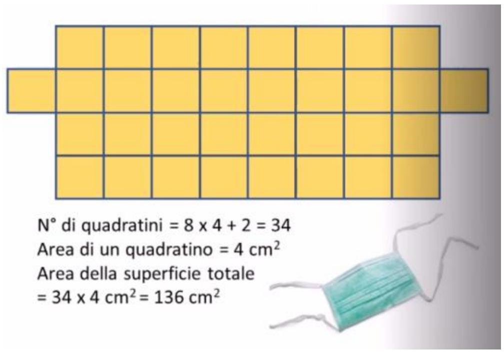
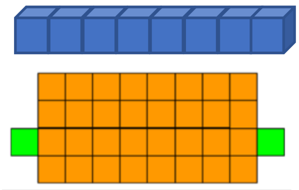


Fig. 3: Uno sviluppo piano

Con 8 dadi potete costruire altri parallelepipedi.
Ricoprite questi solidi con la carta, senza sovrapposizioni, cioè ritagliando la sagoma che li avvolge.

Quale sarà il pacco avvolto con minore carta?

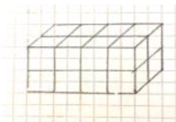
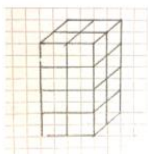
Inseriamo in piattaforma un file di lavoro per ogni alunno, con una tabella da compilare, dove poter elencare i casi possibili.

	Rappresentazione del parallelepipedo	Dimensioni parallelepipedo	N°quadratini	Area Sup. Totale
1.		**8 x 2cm = 16 cm** **1 x 2cm = 2 cm** **1 x 2cm = 2 cm**	34	34 x 4 cm^2 = 136 cm^2
2.	….			

Occorre stabilire quanti e quali altre situazioni si presenteranno e analizzare le varie rappresentazioni del pacco-solido; gli alunni dovranno riconoscere gli eventuali solidi uguali, usare un'unità di misura e selezionare il pacco con area minima.

Gli elaborati, raccolti dal docente che li condivide sulla piattaforma con tutta la classe, porteranno verso una rivisitazione delle idee.

- ***Un apprendimento con potenzialità da sviluppare***
  I due parallelepipedi sono uguali ma ruotati; l'alunno si è impegnato nella ricerca di più soluzioni, ma è evidente che dovrà migliorare la capacità di riconoscere figure congruenti e trasformate per isometrie.
  Le dimensioni sono uguali, ma non le superfici; bisognerà affinare la capacità di osservazione, e padroneggiare meglio l'unità di misura.

4 x 2cm = 8cm 2 x 2cm = 4cm 1 x 2cm = 2cm	24	96 cm²	
2 x 2cm = 4cm 4 x 2cm = 8 cm 1 x 2 cm = 2cm	28	112 cm²	

I due solidi disegnati pur essendo equivalenti, non contengono otto dadi; poiché si impara facendo, l'alunno dovrà mettersi alla prova con altre situazioni concrete che lo aiutino a gestire la simultaneità tra due grandezze, come la superficie variabile e il volume costante.

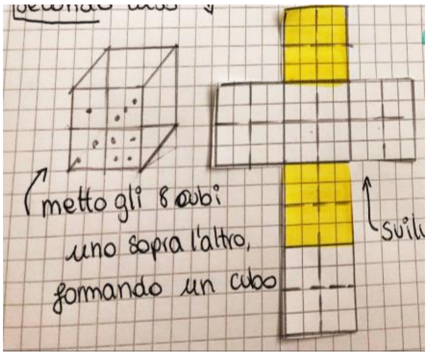
- ***Un apprendimento con abilità da potenziare***
  Il parallelepipedo - di dimensioni 2 cm, 4 cm, 8 cm - è ricoperto da 28 quadratini; l'area della superficie totale è di 112 cm^2.
  L'alunna ha saputo confrontare due parallelepipedi, scegliendo come risposta, quella che sembra più evidente, tralasciando però il quadro completo della situazione. Deve allora imparare a generare più idee possibili e cercare di collegare tra loro tutti gli elementi del problema.

Le verbalizzazioni aiutano la classe a capire ciò che sta studiando:

a) *Io per capirlo ho disegnato su un foglio vari sviluppi piani.*
b) *Non sapevo se potevo costruire dei parallelepipedi sovrapponendo i cubi così creando delle rappresentazioni in 3D che "assomigliano" a delle scale e perciò ho chiesto ai miei compagni.*
c) *Io capito abbastanza bene, senza costruire le scatole ma disegnandole.*

Il confronto di idee ci fa capire che non esiste un solo modo di apprendere e che i dubbi possono essere sciolti anche con l'aiuto dei compagni.

- ***Un apprendimento consapevole da valorizzare***
  La terza situazione è quella del cubo:



Gli spigoli misurano 4 cm;
i quadratini sono 24;
l'area della superficie totale è 96 cm^2.

Il cubo è quindi quel parallelepipedo,
contenente 8 dadi,
che fa guadagnare un risparmio della carta.

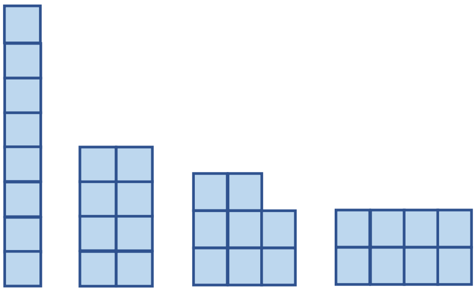
La discussione finale

Un ragazzo racconta di aver osservato le figure usando le costruzioni del fratello; maneggiando i cubetti è riuscito a mantenere costante il volume.

Alcuni ragazzi dicono di aver analizzato i parallelepipedi attraverso le rappresentazioni in 3D, altri invece hanno constato che gli sviluppi piani hanno facilitato il conteggio dell'unità di misura.

Dalla discussione collettiva, emergono i vari punti di vista degli alunni i quali sono riusciti gradualmente a trovare un legame tra ciò che è più familiare (*la geometria piana*) e ciò che è nuovo (*la geometria solida*).

Un alunno ricorda un esempio di geometria piana: "*Se l'area è di 8 cm^2, posso disegnare alcune figure piane equivalenti (ogni volta aumentando la base di un quadretto). Se servono i rettangoli, scarto la terza figura; e poiché 2x4=4x2, scarto anche il quarto rettangolo*"



È un approccio di tipo analitico che, organizzando i dati e i tentativi, può favorire il controllo della situazione in altri contesti.

Verifica e valutazione

La *verifica finale* prevede un'estensione del problema sui parallelepipedi equivalenti, un riscontro sui rettangoli equivalenti e una riflessione sulle costanti di equivalenza.

a) Tra i parallelepipedi rettangoli che contengono 12 cubetti (di spigolo 2 cm), qual è quello con la superficie minima?
b) In un insieme di rettangoli equivalenti, quale di questi ha il perimetro minimo?
c) Puoi stabilire una caratteristica della costante di equivalenza in funzione delle figure?

a) I casi possibili sono quattro: il parallelepipedo con superficie minima di 128 cm^2 è quello che ha dimensioni 6 cm, 4 cm, 4 cm.
b) Se la costante è 12, allora il rettangolo di perimetro minimo è quello che "si avvicina" di più al quadrato.
c) Nella geometria piana, il quadrato ha perimetro minimo se la costante di equivalenza è un quadrato perfetto; nella geometria solida, il cubo ha superficie minima se la costante di equivalenza è un cubo perfetto.

La *valutazione* delle competenze, focalizzata su una visione complessiva del percorso, avrà una valenza metacognitiva sui progressi che si vogliono valorizzare. Le competenze attese sono:

- Saper organizzare e rappresentare i dati raccolti;
- Saper argomentare le proprie scelte;
- Saper interpretare le informazioni raccolte;
- Saper utilizzare un linguaggio specifico e coerente.

4. Considerazioni finali

Le *Indicazioni Nazionali 2012* costituiscono il nostro riferimento per orientare le discipline e per modulare i saperi seguendo un costrutto epistemologico. Ricordiamo che "*La matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri*".

Da qui abbiamo pianificato alcune situazioni con la finalità di avere una prospettiva unificante tra la geometria piana e solida e di stimolare osservazioni intuitive per farle confluire verso una consapevolezza del sapere. Abbiamo accompagnato l'alunno nelle discussioni delle idee verso la scoperta di alcune proprietà delle figure; il concreto e l'astratto hanno trovato così una connessione, in cui le immagini visive si sono trasformate gradualmente in modelli matematici, grazie ad una comunicazione dei pensieri maturati, nonostante la distanza.

Bibliografia e sitografia

Emma Castelnuovo. *La Matematica. Figure solide.* La Nuova Italia

Ombretta Locatelli. *Torri, serpenti e … geometria*. Mimesis

Diana Cipressi. "*Un pacco devi scegliere*"
https://www.youtube.com/watch?v=OoEo61f8LzY&t=324s

Diana Cipressi. "*Un pacco devi scegliere in chat*"
https://www.youtube.com/watch?v=u4QbN8NQVDY&t=325s

Silvia Sbaragli. *Un "percorso" in verticale: lo spazio e le figure*, Bologna
http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/sbaragli/Geometria%20per%20tutti.pdf

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 2, No 2, (2019), 33- 48

Probabilità soggettiva nella scuola primaria

Luciana Delli Rocili[1] **Antonio Maturo**[2]

[1]Istituto Comprensivo Statale Pescara 5, Via Gioberti n. 15, 65100 Pescara
e-mail: lucianadr@live.it
[2]Mathesis Abruzzo, Via Pianacci 21, 65015, Montesilvano
e-mail: antomato75@gmail.com

Sunto
L'incertezza presente nelle conoscenze che si acquisiscono e nelle decisioni da prendere nel mondo reale molto spesso non può essere trattata con gli schemi classici del calcolo delle probabilità. In tal caso è necessario ricorrere a valutazioni soggettive di probabilità che permettono di prendere decisioni che siano coerenti con le opinioni di esperti (de Finetti 1970, Lindley 1990). D'altra parte, i principi fondamentali su cui si ispira la probabilità soggettiva coerente sono di tipo logico e intuitivo, formativi e non particolarmente legati a conoscenze o abilità complesse di calcolo. È invece necessario analizzare dal punto di vista grammaticale e sintattico le proposizioni per giudicare se esse posso essere assunte come eventi e ciò costituisce un utile esercizio e una opportunità per un insegnamento interdisciplinare fra Matematica e Italiano. Varie esperienze che abbiamo condotto hanno dimostrato che l'approccio alla probabilità soggettiva partendo dalle scommesse appare ai ragazzi come un gioco ed è ben accettato dagli studenti anche nelle prime classi della scuola primaria. In questo lavoro si presenta il percorso logico che abbiamo seguito per introdurre la probabilità soggettiva nella scuola primaria. Inoltre, si mostrano i risultati di alcune esperienze fatte in alcune classi.

Parole Chiave: Enunciati della logica binaria. Eventi. Probabilità soggettiva. Condizioni di coerenza. Decisioni.

1. Sul concetto di evento e operazioni sugli eventi

Il primo passo per definire il concetto di evento è illustrare il concetto di *enunciato* (o *proposizione*) della logica binaria. Essendo un concetto iniziale della Matematica, esso è intuitivo, ma difficile da definire. In (Behnke and alii, 1968) un *enunciato o proposizione* della logica bivalente è descritto come un "complesso linguistico o segnico per cui ha senso chiedersi se è *vero* o *falso*". In (Russell, 1962) un *enunciato o* *proposizione* della logica bivalente è descritto come "una disposizione di parole e/o simboli che esprime ciò che è o *vero* o *falso*".

Si può osservare che le precedenti descrizioni non sono definizioni, anche se sono di grande aiuto per la comprensione del concetto dal punto di vista intuitivo.

A nostro parere, confortati dalle esperienze condotte, sia in classe nel corso di tutto l'anno scolastico 2012-2013, sia in successivi convegni e scuole estive per insegnanti dal 2013 al 2019, tali descrizioni implicano una *valutazione soggettiva*. Ossia presuppongono l'esistenza di un individuo, *il decisore*, oppure di una *commissione*, che stabilisce che "un complesso linguistico o segnico" o "una disposizione di parole e/o simboli" è (a suo parere) un enunciato della logica bivalente. In altri termini, se si può interpretare come una domanda tipo "È vero che …?" che ammette come risposta solo un "Sì" o un "No". Vari esperimenti ci hanno convinto che molto spesso l'interpretazione cambia al cambiare del decisore.

Una proposizione si indica usualmente con una lettera maiuscola. Se P è una proposizione si usa scrivere P = 0 se essa è falsa e P = 1 se è vera.

In una classe il decisore può essere l'insegnante o una commissione di bambini coordinata dall'insegnante. La mancanza di completa oggettività nell'interpretare una frase come enunciato è veramente un inconveniente? Pensiamo di no, anzi è un'occasione per indurre i bambini a pensare, ad assumersi delle responsabilità, ad analizzare in maniera approfondita le frasi, a stabilire un colloquio scientifico con il docente.

Gli esperimenti che abbiamo condotto, in classe e nei convegni, hanno mostrato che spesso l'interpretazione di una frase ha dato luogo a vivaci discussioni che hanno portato ad inaspettati approfondimenti di varie questioni (Delli Rocili, Maturo, 2013A, 2013B, 2013C, 2013D, 2015).

Intanto è stata messa in luce la differenza fra un enunciato della logica binaria e un enunciato linguistico, che si riferisce ad una frase di senso compiuto (con soggetto, predicato verbale o nominale, complementi, etc.) per la quale si può esprimere un giudizio di verità che non si limita a *vero* o *falso*, ma può essere anche *forse vero, più vero che falso*, etc.

Per una trattazione matematica degli enunciati linguistici alcuni autori hanno generalizzato il concetto di enunciato della logica bivalente introducendo quello di *enunciato sfumato* o *fuzzy* (Zadeh, 1965, 1975; Fadini, 1979; Klir, Yuan, 1995; Delli Rocili, Maturo 2013A, 2015, 2020). Precisamente si ammette di avere un *insieme ordinato di giudizi* G, avente come massimo il giudizio "*vero*" e come minimo il giudizio "*falso*".

Generalizzando la descrizione di enunciato della logica bivalente data in (Behnke and alii, 1968) chiamiamo *enunciato sfumato* o *fuzzy o linguistico*, con insieme di valori di verità G, ogni complesso linguistico o segnico per cui ha senso attribuire un *valore di verità* appartenente a G. Nel caso particolare in cui G è l'insieme {*vero*, *falso*} ci si riduce al concetto di enunciato della logica bivalente.

Il caso più studiato è quello in cui G è l'intervallo chiuso [0, 1]. Se P è un enunciato fuzzy allora P = 0 significa che P è falso, P = 1 che P è vero, P = 0.4 vuol dire che P è più falso che vero, P = 0.8 che è più vero che falso, etc.

In alcuni dei nostri lavori abbiamo riportato esperienze in cui si è valutato fino a che punto i bambini, opportunamente guidati, riescono a riconoscere se una frase è un enunciato della logica bivalente, un enunciato linguistico, oppure non è un enunciato.

In qualche caso i ragionamenti e le osservazioni dei bambini sono stati molto acuti, facendo rilevare aspetti non presi in considerazione dai docenti in quanto ritenuti scontati o sottointesi.

Il secondo passo per definire il concetto di evento è l'analisi dello *stato di informazione* del soggetto che stabilisce che una data frase è una proposizione della logica binaria (o più in generale della logica linguistica). Infatti, può verificarsi che il soggetto non abbia un'informazione totale, necessaria per attribuire un valore di verità.

Un evento è una coppia formata da un enunciato e uno stato di informazione.

Un bambino, una volta *riconosciuto* (o semplicemente *accettato*) che una data frase è un enunciato della logica binaria, deve analizzare le informazioni di cui è in possesso: l'informazione è *totale* se egli è in grado di attribuire un valore di verità all'enunciato, è *parziale* se invece non può, nel suo stato di informazione, stabilire se l'enunciato è *vero* o *falso*. Si arriva così alla prima classificazione degli eventi. Un evento E si dice:

(a) *Certo*, se lo stato di informazioni permette di attribuire all'enunciato il valore "vero", ossia E = 1;

(b) *Impossibile*, se lo stato di informazioni permette di attribuire all'enunciato il valore "falso", ossia E = 0;

(c) *Aleatorio*, se lo stato di informazione è parziale, ossia non permette di attribuire il valore "vero" o il valore "falso", ossia E può essere 0 o può essere 1. Si saprà il valore che assume se e quando l'informazione sarà completa.

"*Un evento è una proposizione di cui può essere non conosciuto il valore di verità. Se tale valore è conosciuto ed è 1, l'evento si dice **certo**, se è 0, si dice **impossibile**, se non è conosciuto si dice **aleatorio**.*" (de Finetti, 1970, p.710)

Un evento si indica usualmente con una lettera maiuscola.

C'è da approfondire il concetto di uguaglianza. L'uguaglianza fra due eventi A e B, ossia scrivere A = B, non significa che le due proposizioni dicono la stessa cosa. L'uguaglianza vuol dire solo che le due proposizioni hanno lo stesso valore di verità, ossia o sono *entrambe vere* o *entrambe false*. Questo è un notevole processo di astrazione da evidenziare con numerosi esempi. Ad esempio, se Luciana ha scommesso sulla vittoria del Pescara, allora "Luciana ha guadagnato dalla scommessa" e il "Pescara ha vinto" sono eventi *uguali*.

Da questo punto di vista esiste un solo evento certo, indicato con Ω e un solo evento impossibile, indicato con ∅. Ad esempio "2+2 =4", "Un triangolo ha tre lati", "La terra gira attorno al sole" sono eventi uguali perché hanno tutti e tre sempre il valore di verità 1 e si identificano con l'evento certo Ω. Invece "Antonio ha le ali", "3:5 = 7" sono entrambi uguali all'evento impossibile.

La seguente tabella mostra quando due eventi aleatori A e B sono uguali:

A	0	1
B	0	1

Tabella 1.1

Altra relazione fra eventi è quella di "contrario". Due eventi A e B si dicono *contrari* (e si scrive A = -B) se quando è vero uno di essi, allora è falso l'altro e, viceversa, quando è falso uno di essi, allora è vero l'altro. Ovviamente la coppia ($\emptyset$, Ω) è costituita da eventi contrari e il fatto che A e B sono eventi aleatori contrari si esprime con la seguente tabella.

A	1	0
B	0	1

Tabella 1.2

Algebricamente il fatto che due eventi A e B sono contrari si esprime con la formula:

$$A + B = 1. \tag{1.1}$$

Se A e B sono due eventi aleatori contrari si dice anche che essi formano una "partizione" dell'evento certo Ω. Il concetto di partizione si estende anche al caso di tre o più eventi. Se A, B, C sono tre eventi aleatori si dice che essi formano una "partizione" dell'evento certo Ω se almeno uno di essi si verifica e due di essi non possono verificarsi insieme. In altre parole, vale la tabella:

A	1	0	0
B	0	1	0
C	0	0	1

Tabella 1.3

Algebricamente il fatto che tre eventi A, B, C sono una partizione di Ω si esprime con la formula:

$$A + B + C = 1. \tag{1.2}$$

Rappresentando l'evento certo con un rettangolo e gli eventi come sottoinsiemi del rettangolo, in Figura 1.1 si vede una partizione dell'evento certo in due eventi (fra loro opposti), mentre in Figura 1.2 c'è una partizione dell'evento certo in tre eventi.

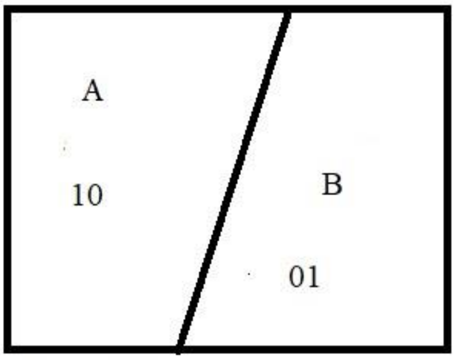


Figura 1.1

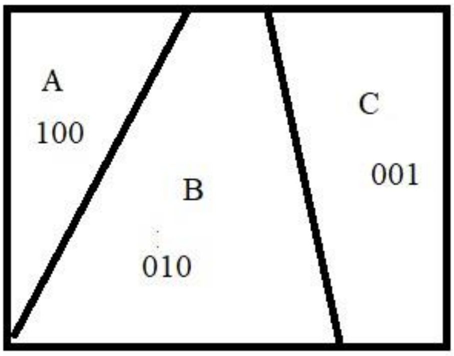


Figura 1.2

È anche opportuno definire subito i concetti logici di *eventi logicamente indipendenti, eventi incompatibili* e *inclusione fra eventi*.
Due eventi A e B si dicono *logicamente indipendenti* se possono verificarsi tutti i seguenti casi:

(1) A e B sono entrambi veri;
(2) A è vero e B è falso;
(3) A è falso e B è vero;
(4) A e B sono entrambi falsi.

In forma di tabella, rappresentando ogni caso possibile con una colonna, si ottiene:

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0

Tabella 1.4

Due eventi A e B si dicono *logicamente dipendenti* se almeno uno dei casi precedenti non si può verificare. Un caso particolare di dipendenza logica è costituito dagli *eventi incompatibili*. A e B si dicono *incompatibili* se quando è vero uno di essi è falso l'altro.
La rappresentazione tabellare di due eventi incompatibili è la seguente:

A	1	0	0
B	0	1	0

Tabella 1.5

Dal punto di vista algebrico la definizione di eventi incompatibili equivale a scrivere:

$$A + B \leq 1. \qquad (1.3)$$

In Figura 1.3 si ha la rappresentazione insiemistica di due eventi logicamente indipendenti, mentre in Figura 1.4 gli eventi A e B sono incompatibili.

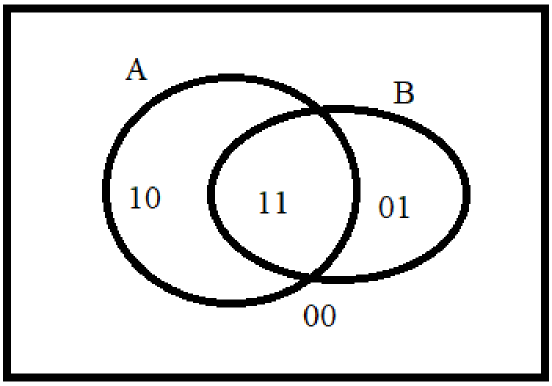


Figura 1.3

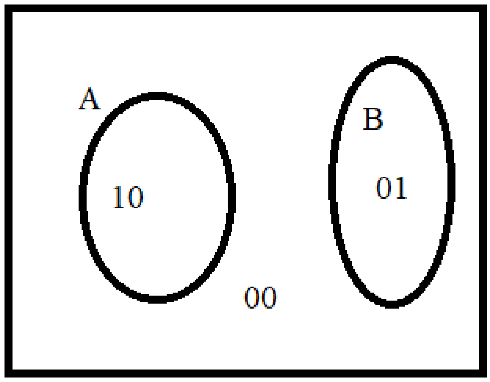


Figura 1.4

Un altro caso di dipendenza logica è *l'inclusione*. Si dice che un evento A è incluso o contenuto in B, si scrive $A \subseteq B$, se quando è vero A allora è vero anche B. Si può osservare che $A \subseteq B$ se e solo se A e -B sono eventi incompatibili. L'inclusione si dice "stretta" se $A \neq B$ e si scrive $A \subset B$.

La rappresentazione tabellare della relazione $A \subset B$ è la seguente:

A	1	0	0
B	1	0	1

Tabella 1.6

Dal punto di vista algebrico la definizione precedente equivale a scrivere:

$$A \leq B. \tag{1.4}$$

La Figura 1.5 mostra la rappresentazione insiemistica del caso $A \subset B$.

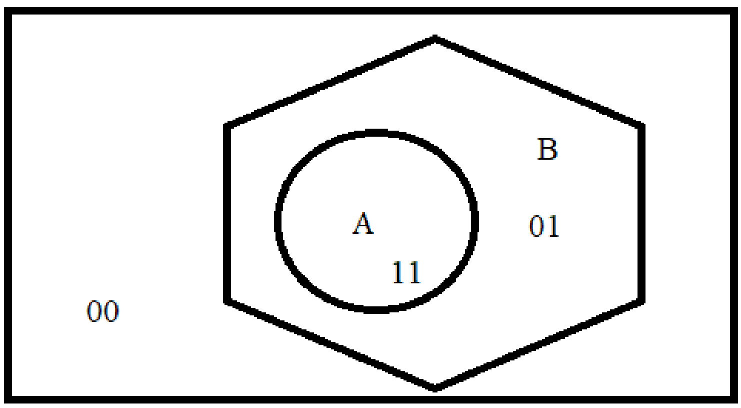


Figura 1.5

Nella Figura 1.3 si vede che l'evento certo è diviso in 4 parti, dette *costituenti* o *atomi*, indicate con 00, 10, 01, 11. Il primo numero indica se la parte è contenuta o no in A, il secondo se è contenuta o no in B. Ad esempio 10 indica la parte contenuta in A e non contenuta in B. Nella Figure 1.4 e 1.5 si vede che i costituenti sono solo 3. Ciò implica che A e B sono logicamente dipendenti,

Le situazioni di dipendenza e indipendenza possono essere rappresentate geometricamente introducendo gli assi cartesiani. Se A e B sono due eventi, i costituenti sono rappresentati da punti dell'insieme {(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)}. Riunendo i punti che individuano i costituenti si ottiene un rettangolo o un triangolo o un segmento o un singolo punto. La Figura 1.6 seguente si ottiene nel caso di eventi incompatibili in cui i costituenti sono 00, 10, 01.

Si può dimostrare che le coordinate dei punti del triangolo ottenuto congiungendo questi punti sono le possibili assegnazioni di probabilità soggettiva rispettivamente per A e B (de Finetti 1970, Maturo 2008).

Asse dell'evento B

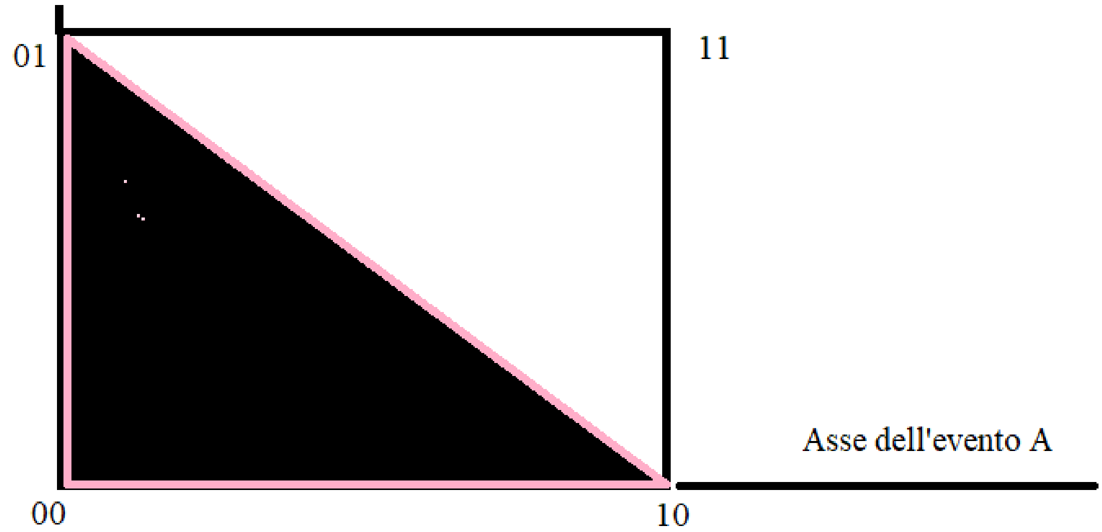


Figura 1.6

In generale, una famiglia di n eventi aleatori si dice *partizione dell'evento certo* se:

(1) ogni evento della famiglia può verificarsi;
(2) due eventi qualsiasi della famiglia sono incompatibili;
(3) almeno uno di essi si deve verificare.

Il fatto che un insieme $S = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ di eventi possibili è una partizione dell'evento certo Ω si può scrivere con la formula algebrica:

$$E_1 + E_2 + \ldots + E_n = 1. \tag{1.5}$$

Il concetto di partizione dell'evento certo permette, come vedremo, una rappresentazione insiemistica degli eventi.
Le sperimentazioni condotte sull'introduzione di tali concetti nelle classi 1A, 1B, 4A, 4B nell'anno scolastico 2012-2013 hanno mostrato che anche i bambini delle prime classi, se opportunamente guidati, possono arrivare a comprendere il loro significato.

Come ultima fase della presentazione dei concetti sugli eventi vanno introdotte, con figure ed esempi, le operazioni logiche binarie fra eventi e il concetto generale di "costituenti" o "atomi" di una famiglia di eventi.
Le operazioni logiche binarie associano ad ogni coppia ordinata di eventi un terzo evento. Le più importanti sono le operazioni di *unione* "$\cup$" e *intersezione* "$\cap$".
Dati due eventi A e B sono definiti gli eventi:

(1) $A \cup B$ (unione di A e B) come l'evento vero se è vero almeno uno fra A e B;

(2) $A \cap B$ (intersezione di A e B) come l'evento vero se sono veri entrambi A e B.

Le operazioni "$\cup$" e "$\cap$" sono commutative e associative (oltre ad avere altre importanti proprietà come ad es. l'idempotenza, ossia $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ per ogni evento A).
In generale, dato un insieme $S = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ di n eventi possibili si dicono *costituenti* o *atomi* associati a S tutte le intersezioni $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ diverse dall'evento impossibile, dove ogni A_i è uguale o a E_i o al suo contrario - E_i.
In altre parole, ogni costituente è rappresentato da n simboli binari e il simbolo i-esimo è 1 se A_i è uguale a E_i e 0 se A_i è uguale a $-E_i$.
È importante osservare che l'insieme dei costituenti è una partizione $\mathscr{P}$ dell'evento certo e ogni evento di S si può rappresentare con il sottoinsieme di $\mathscr{P}$ formato dai costituenti contenuti in A.
Inoltre, è rappresentabile come sottoinsieme di $\mathscr{P}$ ogni evento ottenuto dagli eventi di S facendo successive operazioni di passaggio al contrario, unione e intersezione.
I ragazzi sono stati stimolati a verificare questi risultati con esempi concreti.

2. Il gioco delle scommesse coerenti come prerequisito alla probabilità soggettiva

La probabilità classica parte dall'ipotesi particolare di avere a disposizione una partizione finita dell'evento certo formata da eventi equiprobabili. La probabilità statistica parte anch'essa da una partizione dell'evento certo e dall'idea di ottenere le probabilità degli eventi della partizione a partire da esperimenti (Scozzafava 1996, 2001; Delli Rocili, Maturo, 2013D, 2018A, 2018B, 2019). Le due impostazioni non necessitano di un approfondimento particolare dei concetti logici.
Al contrario la probabilità soggettiva richiede una certa precisione sui concetti logici e non parte da assunzioni probabilistiche a priori né da dati sperimentali. Neanche è richiesta una partizione a priori dell'evento certo, ma vengono costruite partizioni che si

aggiornano a mano a mano che si presentano nuovi eventi. Importante è invece il concetto di costituente di una famiglia di eventi.

Il fondamento della probabilità soggettiva è costituito da condizioni di coerenza, che appaiono molto intuitive e naturali. Infatti, abbiamo potuto sperimentare che, se presentate in maniera semplice, sono ben accette anche dagli studenti delle prime classi di una scuola primaria (Delli Rocili, Maturo, 2015, 2018A, 2018B, 2019).

Nel nostro percorso didattico, una volta preparati gli studenti alla comprensione dei concetti logici fondamentali, è apparso quindi naturale introdurre la probabilità dal punto di vista soggettivo, più vicina alle valutazioni che si fanno nella vita di tutti i giorni, in cui tutte le situazioni hanno un margine di incertezza e ognuno di noi deve fare delle scelte.

Inoltre, la probabilità soggettiva è meno dipendente dal calcolo rispetto ad altre impostazioni e può essere introdotta facilmente e efficacemente in maniera ludica, visto che è basata sul concetto di scommessa, familiare a tutti i bambini. Infatti, i bambini vedono la scommessa come un gioco, sono abituati a confrontare in qualche maniera l'abilità dei campioni sportivi e delle squadre preferite.

La probabilità soggettiva ha anche avuto il merito di esaltare il collegamento interdisciplinare in quanto lo sforzo di comprensione logica degli enunciati, del loro collocamento spaziale e temporale, ha portato ad uno spontaneo approfondimento dei concetti grammaticali, sintattici, storici, ottenendo in particolare un arricchimento del vocabolario e una velocizzazione nel processo di assimilazione dei concetti espressi in forma analitica, scritta o verbale.

Nel gioco delle scommesse un bambino, a turno, ha assunto il valore di banco e gli altri il ruolo di scommettitori. Come monete sono state usate le figurine dei calciatori.

Il criterio di scommessa seguito per ciascun evento E è stato il seguente: ogni scommettitore doveva decidere la quantità di figurine P (la puntata) da puntare sul verificarsi dell'evento E considerato; in cambio il banco doveva pagare 20 figurine se l'evento E si verificava.

Sono stati considerati due tipi di eventi:

(a) Eventi legati alle squadre di calcio;
(b) Eventi legati alla vita quotidiana.

Ad esempio, alcuni eventi legati alle squadre di calcio sono stati i seguenti:

A = "Il Pescara Calcio vincerà la prossima partita",
B = "La Juventus vincerà domenica prossima",
C = "Il Milan vincerà la prossima partita in casa".

Eventi legati alla vita quotidiana sono stati:

D = "Lunedì prossimo pioverà",
E = "Fra due lunedì a mensa si mangerà la carne",
F = "Il maestro Alberto fra 15 giorni avrà i capelli rasati",
G = "La maestra Luciana a giugno avrà i capelli corti".

Il lavoro è stato organizzato nelle seguenti fasi:

Fase 1. Gli scommettitori sono stati lasciati liberi di decidere la loro puntata sugli eventi considerati.

Fase 2. I bambini, sempre con la vincita fissa di 20 figurine, sono stati invitati a puntare anche sugli eventi contrari.

Fase 3. Si è aperta una discussione sul significato delle puntate sia sugli eventi e sia sui loro contrari. Ciò ci ha permesso di individuare per ogni bambino la *propensione*, l'*avversione* o l'*indifferenza* al rischio.

Fase 4. A partire dalle idee emerse nella fase precedente è stato introdotto il concetto di *coerenza* della scommessa, invitando i bambini a riflettere sulla opportunità di accettare i seguenti *principi di coerenza*:

(a) la puntata non può superare la vincita, in quanto altrimenti il bambino ha una perdita certa e neanche può essere negativa perché in questo caso il banco pagherebbe la puntata e la vincita;

(b) se un bambino punta contemporaneamente le somme P(H) e Q(H) rispettivamente sull'evento H e sul suo contrario -H, con la vincita uguale a 20 figurine, allora possono verificarsi 3 casi:

(I) $P(H) + Q(H) < 20$;
(II) $P(H) + Q(H) > 20$;
(III) $P(H) + Q(H) = 20$.

Nel primo caso il bambino ha un guadagno certo, nel secondo una perdita certa. Per evitare queste due circostanze inaccettabili, la prima dal banco, la seconda dal bambino, allora è necessario concordare che la somma delle due puntate deve essere uguale alla vincita. In questo caso le puntate su H e –H sono definite "coerenti".

Fase 5. Tenendo conto dei principi di coerenza i bambini sono stati invitati ad aggiornare gradualmente (aggiungendo nel caso (I) o togliendo nel caso (II) una figurina alla volta) le loro puntate fino ad arrivare ad un insieme di puntate coerenti.

In riferimento agli eventi A, B e C legati alle squadre di calcio i bambini si sono sentiti particolarmente coinvolti come tifosi e ciò ha influenzato negativamente la razionalità delle loro valutazioni, basate più sulle loro speranze, aspettative e delusioni.
Ad esempio, i bambini sono stati molto restii a puntare sull'evento A, avendo in quel periodo un bassissimo grado di fiducia sulla vittoria del Pescara, scoraggiati dalle informazioni che tutti possedevano sui recenti risultati negativi della squadra locale.
In riferimento all'evento B, i bambini hanno osservato che la domenica successiva la Juventus non avrebbe giocato in quanto giocava la Nazionale. Questo ha portato ad introdurre una discussione sul concetto di evento condizionato B|H, dove il condizionante H è l'evento "La Juventus domenica giocherà". Non verificandosi l'evento condizionante, la scommessa è annullata con restituzione della puntata, coerentemente con le teorie di de Finetti.

Per quanto riguarda l'evento C riferendoci ad una vincita di 20 figurine, le puntate dei ragazzi sono state, nella fase 1 di puntata libera, molto variabili, da un minimo di 1 figurina ad un massimo di 20 figurine.

Riportiamo in una tabella le puntate di 10 bambini nella fase di puntata libera, ossia senza il vincolo di coerenza, relativamente ad alcuni degli eventi considerati.

Scommettitori	Evento C	Evento -C	Evento F	Evento -F	Evento D	Evento -D
1 Alice	10	1	0	10	10	0
2 Nicolò	6	2	1	18	20	3
3 Filippo	3	1	0	10	10	20
4 Nadia	4	10	0	10	10	10
5 Francesco	10	9	10	0	20	3
6 Leonardo	8	2	20	1	19	0
7 Ludovica	9	1	0	10	10	8
8 Ilaria	1	20	0	20	20	1
9 Silvia	7	0	20	5	10	11
10 Alessio	20	0	0	12	30	19

Tabella 2.1 Puntate libere

I risultati della tabella sembrano contraddittori. Nella valutazione degli eventi C e F i bambini mostrano in generale un'avversione al rischio, mentre per l'evento D si ha in media una propensione al rischio.
Probabilmente il bambino 10 (Alessio) pensava che la vincita fosse di 30 figurine perché il primo approccio al gioco era avvenuto con la possibile vincita di 30 figurine. Alcuni bambini (Alice e Ilaria) hanno avuto un comportamento costante per i vari eventi, la prima con marcata avversione al rischio, la seconda praticamente indifferente al rischio.

Successivamente sono state proposte puntate sugli eventi:

G = "La maestra Luciana a giugno avrà i capelli corti",

E = "Fra due lunedì a mensa si mangerà la carne".

La maestra ha chiesto ai ragazzi il rispetto delle condizioni di coerenza invitandoli a diminuire o aumentare le puntate su un evento e sul contrario secondo le loro opinioni, ma in maniera tale che la somma delle due puntate fosse uguale a 20.

I risultati ottenuti sono riportati nella seguente tabella:

Scommettitori	Evento G	Evento -G	Evento E	Evento -E
1 Alice	0	20	10	10
2 Nicolò	12	8	4	16
3 Filippo	0	20	4	16
4 Nadia	0	20	18	2
5 Francesco	12	8	4	16
6 Leonardo	20	0	20	0
7 Ludovica	12	8	20	0
8 Ilaria	0	20	1	19
9 Silvia	10	10	17	3
10 Alessio	1	19	2	18

Tabella 2.2 Puntate coerenti

L'atteggiamento dei bambini appare molto variabile. Molti bambini, precisamente i numeri 1, 3, 4, 6, 8 per l'evento G e i numeri 6, 7 per l'evento E, tendono a rimanere nella logica del certo, ossia a ritenere un evento certo o impossibile.
Altri bambini, ossia i numeri 10 per l'evento G e 8, 10 per l'evento E si allontanano molto timidamente dalla logica del certo. I bambini 2, 5, 7, 9 applicano la logica dell'incerto per l'evento G con valutazioni molto vicine fra loro.
Essendo in una prima elementare ci si è riservato di definire la probabilità soggettiva coerente in una classe successiva, non essendo stato ancora dato il concetto di divisione con la virgola. Intanto, però, tutti i bambini hanno acquisito il concetto di scommessa coerente su un evento H (o, ciò che è equivalente, su una partizione dell'evento certo formata da un solo evento o due eventi) che si può esprimere con le formule seguenti, in cui P(H) è la puntata sull'evento H e V è la vincita se si verifica H.

$$P(\emptyset) = 0,\ P(\Omega) = V,\ P(H) \geq 0;\ P(H) + P(-H) = V \tag{2.1}$$

In un momento successivo, quando i bambini impareranno la divisione con la virgola, si definirà la probabilità soggettiva p(H) come rapporto fra la puntata P(H) e la vincita V. Dalle (2.1) si ottengono le condizioni di coerenza sulla probabilità assegnata ad un unico evento e al suo contrario:

$$p(\emptyset) = 0,\ p(\Omega) = 1,\ p(H) \geq 0;\ p(H) + p(-H) = 1 \tag{2.2}$$

3. Dal gioco della scommessa su tre eventi, che formano una partizione dell'evento certo, alla probabilità coerente

Un passo avanti si ha considerando la scommessa coerente su tre eventi che formano una partizione dell'evento certo. I bambini imparano a ragionare districandosi fra i diagrammi di Venn e i simboli binari. Iniziano ad assimilare bene il concetto di atomo o

costituente e quello di partizione dell'evento certo. Chiariscono definitivamente il significato delle relazioni logiche fra gli eventi e come gli eventi si rappresentano nel linguaggio del computer.
Consideriamo il caso di tre eventi A, B, C che formano una partizione dell'evento certo. Ad esempio, considerando la partita Milan-Juventus, sia A = "Il Milan vince", B = "Il risultato è un pareggio", C = "La Juventus vince".

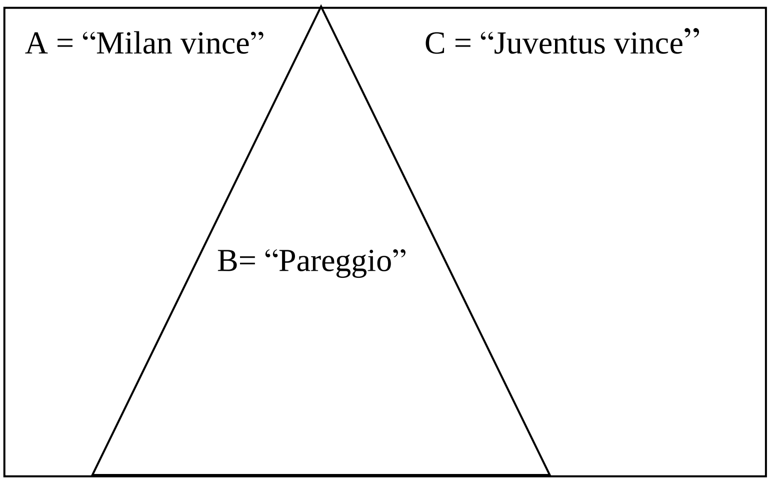


Figura 3.1

La procedura da seguire è simile a quella relativa al caso della partizione formata da due eventi, ossia un evento H ed il suo contrario -H. Ossia:

Fase 1. I bambini, sempre con una vincita fissa di V figurine, sono invitati a puntare liberamente delle somme (in figurine) P(A), P(B), P(C), rispettivamente sugli eventi A, B, C.

Fase 2. A partire dalle idee emerse nella fase precedente si introduce il concetto di *coerenza* della scommessa, invitando i bambini a riflettere sulla opportunità di accettare, oltre ai principi di coerenza del caso della partizione con due eventi, anche il *principio di coerenza* sulle puntate P(A), P(B), P(C), su tre eventi A, B, C, che formano una partizione dell'evento certo:

$$P(A) + P(B) + P(C) = V. \tag{3.1}$$

Fase 3. Si apre una discussione sul significato delle puntate e sulla individuazione, per ogni bambino, di *propensione*, *avversione* o *indifferenza* al rischio, a seconda che la somma P(A) + P(B) + P(C) sia superiore, inferiore o uguale a V.

Fase 4. Per poter arrivare a definire le probabilità soggettive degli eventi A, B, C, in base ai principi di coerenza, i bambini sono invitati ad aggiornare gradualmente le loro puntate (aggiungendo, nel caso di avversione al rischio, o togliendo, nel caso di propensione al rischio, una figurina alla volta) fino ad arrivare ad un insieme di puntate coerenti.

Una volta definita la probabilità p(E) di un evento E come rapporto fra puntata P(E) e vincita V, la (2.3) diventa la condizione di coerenza per le probabilità su tre eventi che formano una partizione dell'evento certo:

$$p(A) + p(B) + p(C) = 1. \tag{3.2}$$

A partire dalle formule (2.2) e (3.2), si ricavano le proprietà di base relative alla probabilità soggettiva e in generale alla probabilità finitamente additive. Infatti, per ottenere le formule più importanti della probabilità "non condizionata" dalle (2.2) e (3.2) è sufficiente qualche passaggio algebrico e osservare che l'unione e l'intersezione fra due eventi godono della proprietà associativa.

4. Conclusioni e prospettive di ricerca

Si può osservare che non è necessario estendere la procedura considerata nei paragrafi precedenti al caso di una partizione dell'evento certo formata da quattro o più eventi (in numero finito) in quanto tali condizioni di coerenza si deducono facilmente a partire dalle formule (2.2) e (3.2).
Alcune proprietà importanti che si deducono da tali formule sono:

(1) La *proprietà additiva*. Se A e B sono due eventi incompatibili, allora

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B). \tag{4.1}$$

(2) La *proprietà di monotonia*. Ossia:

$$A \subseteq B \Rightarrow p(A) \leq p(B). \tag{4.2}$$

(3) Le formule dell'unione di due o più eventi (*formule di Poincaré*)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B), \tag{4.3}$$

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C). \tag{4.4}$$

……

Per una trattazione esaustiva, e in particolare per l'applicazione pratica delle formule di Poincaré, è necessario introdurre il concetto di evento condizionato E|H e probabilità condizionata p(E|H), utilizzando la formula

$$p(E|H) = p(E \cap H)/p(H). \tag{4.5}$$

In vari testi di probabilità la (4.5) è assunta semplicemente come definizione, senza neanche presentare l'evento condizionato E|H come concetto logico. Ma, dal punto di vista della probabilità soggettiva, la (4.5) è un teorema che si dimostra a partire da concetti e procedimenti logici. Ci proponiamo di sperimentare in classe tale percorso, riportando i risultati ottenuti in un successivo lavoro.

Bibliografia

Behnke and alii, (1968), *Matematica 1 and 2*, Feltrinelli Editore Milano.

de Finetti B., (1970), *Teoria delle Probabilità*, Einaudi, Torino

Delli Rocili L., Maturo A., (2013A), Logica del certo e dell'incerto per la scuola primaria, *Science & Philosophy*, 1 (1), 37-58.

Delli Rocili L., Maturo A., (2013B), Teaching mathematics to children: social aspects, psychological problems and decision-making models, in Soitu D., Gavriluta C., & Maturo A. (Eds), *Interdisciplinary approaches in social sciences*, pp. 243-255, Editura Universitatii A.I. Cuza, Iasi, Romania.

Delli Rocili L., Maturo A., (2013C) Probabilità e Statistica nella Scuola Primaria: riflessioni sulle Indicazioni Nazionali, esperienze e proposte, *Periodico di Matematiche*, 5 (2) Serie XI, 5-12.

Delli Rocili L., Maturo A., (2013D), Probabilità e Statistica nella scuola primaria: esperienze didattiche e proposte, *Science & Philosophy*, 1 (2), 49-78, ISSN 2282-7765.

Delli Rocili L., Maturo A., (2015). Interdisciplinarietà, logica dell'incerto e logica sfumata nella scuola primaria (Interdisciplinarity, logic of uncertainty and fuzzy logic in primary school). *Science & Philosophy*, 3(2), 11-26, ISSN 2282-7765.

Delli Rocili L., Maturo A., (2018A), Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria, in Manuppella G., & Maturo A. (Eds.), *Insegnare Matematica: didattica, inclusione e cooperazione*, pp. 35-46, Serie: Quaderni APAV, no 3, Pescara.

Delli Rocili L., Maturo A., (2018B), La "Battaglia Gattale": uno strumento per l'apprendimento interdisciplinare di Geometria, Statistica e Probabilità, attraverso il gioco, *Mondo Matematico e Dintorni*, Vol 1, No 1-2 (2018), 53-68

Delli Rocili L., Maturo A., (2019), Un percorso didattico per introdurre il ragionamento probabilistico nella Scuola Primaria, in Manuppella G., & Maturo A. (Eds.). *Dall'intuizione ai concetti: metodologie per elaborare percorsi didattici e modelli matematici* pp. 35-46, Serie: Quaderni APAV, no 3, Pescara.

Delli Rocili L., Maturo A., (2020), Fuzzy Reasoning and Decisions in Primary School, in Flaut D. et al. (Eds), *Decision Making in Social Science Between Traditions and*

Innovations, Series: Studies in Systems, Decision and Control, Vol 247, pp 359- 371, Springer International Publishing Switzerland.

Fadini A., (1979), *Introduzione alla teoria degli insiemi sfocati*, Liguori Editore, Napoli.

Klir G.J., Yuan B., (1995), *Fuzzy sets and fuzzy logic,* Prentice Hall.

Lindley D. V., (1990), *La logica della decisione*, Il Saggiatore, Milano.

Maturo A., (2008), La moderna visione interdisciplinare di Geometria, Logica e Probabilità in Bruno de Finetti**,** *Ratio Sociologica,* 2, 2008, pp. 39-62.

Russell B., (1962), *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milano.

Scozzafava R., (1996), *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*, Zanichelli, Bologna.

Scozzafava R., (2001), *Incertezza e probabilità. Significato, valutazione, applicazioni della probabilità soggettiva*, Zanichelli, Bologna.

Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Inf. Control*, 8, 338-353.

Zadeh, L. (1975). The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning I. *Inf. Sciences,* 8, 199-249.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 2, No 2, (2019), 49 - 64

Guardiamoci intorno per orientarci

Federica Melchiorre

Docente ambito linguistico- scientifico - antropologico
Istituto Comprensivo n. 1 Chieti - Scuola Primaria Cesarii
federica0melchiorre@gmail.com
https://sites.google.com/view/teacherfedecom

Sunto
La capacità nel bambino di sapersi orientare nello spazio è legata a molte abilità che nelle prime classi della scuola primaria vengono implementate e sviluppate. Le stesse fungono da prerequisiti interdisciplinari necessari per l'acquisizione delle successive competenze.
La stessa didattica può a sua volta essere definita orientativa, dove per orientativo s'intende l'*andare verso* le specificità e i bisogni di ciascuno, avvalendosi dunque di varie metodologie e di varie forme di agito didattico, che permettano una costante inclusione su vari livelli e che promuovano un apprendimento di tipo caldo che attivi negli alunni operanti motivazionali atti a mantenere alti, i livelli di attenzione e concentrazione.
In questa unità di apprendimento le discipline coinvolte sono scienze, geografia, storia, inglese. Le attività sia individuali che in cooperative learning proposte, si caratterizzano per un approccio globale al curricolo che coinvolge a pieno l'alunno in una rete di saperi con l'obiettivo di ridurre la frammentazione delle discipline ripensandole in un'ottica di unitarietà in cui gli epistemi delle stesse e gli annessi nuclei fondanti, contribuiscono a creare un tutto organico ed esperenziale rispetto all'orientarsi nel tempo e nello spazio.

Parole chiave: punti di riferimento, territorio, piante e mappe, tempo storico, passato, presente, futuro, tempo ciclico, stagioni, classificazioni, compito di realtà.

1. Introduzione

Discipline di riferimento: Geografia, Storia, Scienze, Inglese
Ordine di scuola: Scuola primaria classe 2^
Obiettivi di apprendimento disciplinari e traguardi per lo sviluppo delle competenze come da nuove Indicazioni Nazionali per il curricolo

Sfondi metodologici e metodologie
Ascolto attivo - Problem Solving

Cooperative Learning
Didattica Digitale
Realtà aumentata (AR)
Coding

Tempi
1° Quadrimestre (Ottobre-Gennaio)

Spazi
Spazi fisici aula - palestra - interno ed esterno della scuola - parco della città, quartiere (vissuti come spazi didattici)
Spazi virtuali GOOGLE MAPS

Strumenti
Testi - documentazioni fotografiche - piante - mappe - iPad - pc - LIM - sito Teacher Fede - Video - Open source

Moduli
1. Fase Di Avvio
2. Fase di Implementazione e Realizzazione
3. Il compito di realtà
4. Fase Metacognitiva e di Autovalutazione

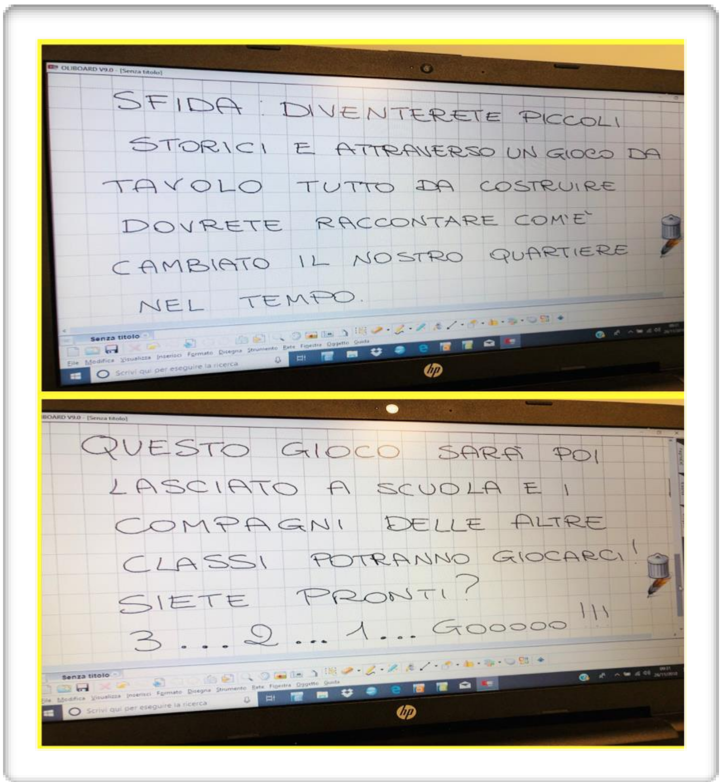
2. La Fase di Avvio

Nella fase di avvio viene presentato agli alunni il compito autentico ovvero il compito di realtà in una chiave di lettura sfidante e molto motivante per loro e come esperienza inedita nella sua complessità.
Come sappiamo, un compito di realtà per essere definito come tale, deve avere una serie di caratteristiche. Nella sua più ampia descrizione viene definito come risoluzione di una situazione problematica, complessa, nonché nuova, attraverso l'utilizzo di conoscenze e abilità già acquisite. Esso inoltre comprende la presentazione del prodotto finale con annessa narrazione dei processi legati alla realizzazione del compito, solitamente a persone esterne alla classe. Il compito di realtà andando a sintesi quindi prevede che gli alunni, a partire dall'utilizzo di competenze afferenti a più discipline, debbano:

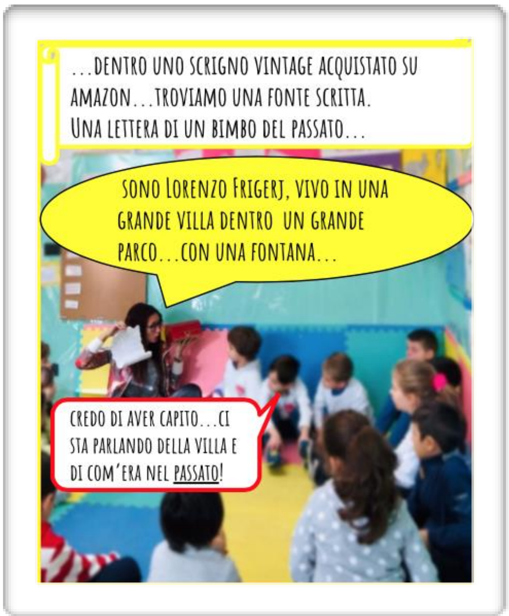
- Lavorare in gruppo, talvolta producendo contributi personali;
- Pianificare, progettare, costruire, eventualmente fare esperimenti;
- Valutare e autovalutarsi;
- Fare ricerche, selezionare e rielaborare informazioni;
- Risolvere problemi, spesso complessi proprio perché reali;
- Valutare opzioni e scelte e prendere decisioni;
- Riflettere sui processi da loro stessi attivati;

- Esporre ad altri, con diverse modalità, i processi e i risultati dell'apprendimento

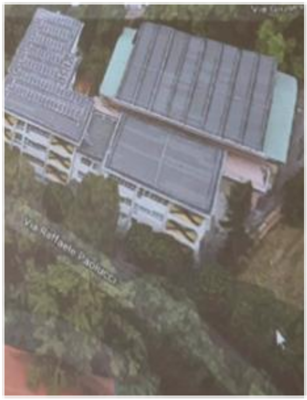
Nel nostro caso il compito ha come richiesta la costruzione di un gioco da tavolo che racconti i cambiamenti nel tempo e nello spazio del quartiere in cui è localizzata la nostra scuola. La scelta del quartiere della scuola correla ovviamente con un oggetto di studio che sia per tutti gli alunni il medesimo, al fine di facilitare anche l'aspetto di condivisione nelle fasi di implementazione e realizzazione.



Alla presentazione della sfida-compito, si abbina un momento emozionale che funge da motivazione al compito.
I bambini trovano una lettera (una ***fonte scritta***), che risale ad un bimbo del passato che scrive e descrive quei luoghi del quartiere che oggi per loro è il vissuto legato al presente.
L'insegnante avvia dunque una conversazione guidata con delle domande stimolo atte a far riflettere gli alunni sul contenuto della lettera trovata.

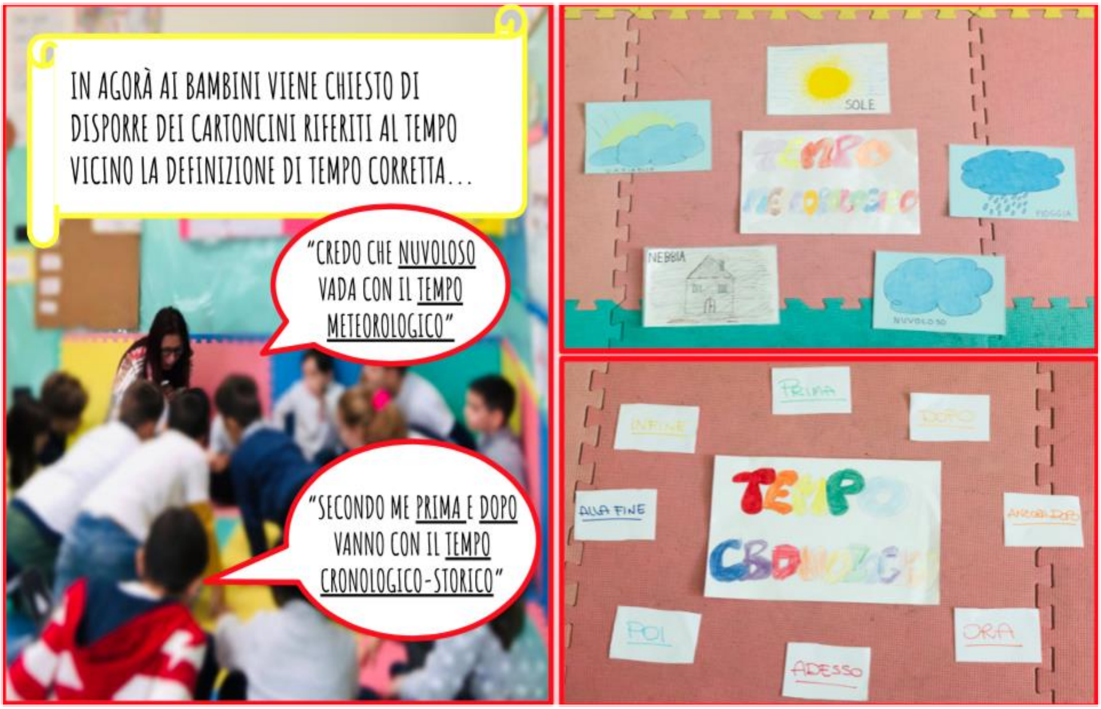


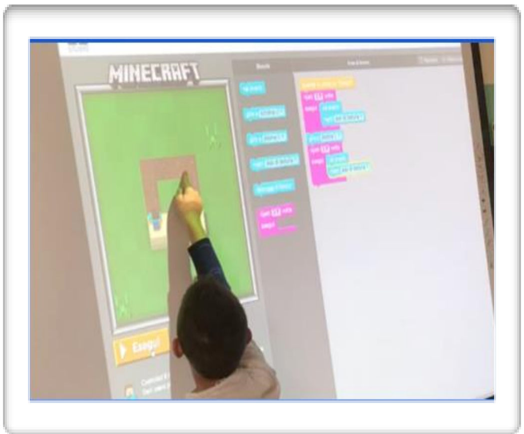
Sempre all'interno della Fase di Avvio del percorso l'insegnante procede con l'analisi dei prerequisiti. Nel nostro caso l'analisi dei prerequisiti dopo la lettura della lettera trovata è legata al concetto di ***tempo*** e quindi alla netta distinzione tra tempo cronologico e tempo meteorologico. In riferimento al tempo cronologico-storico si aprono tutte le definizioni legate alla successione temporale e quindi alle parole che segnano lo scorrere del tempo ad esempio all'interno di una storia, come prima, dopo, ancora dopo, poi, infine, anche in L2. Rispetto al tempo meteorologico la riflessione ovviamente è legata alle condizioni atmosferiche e alla rilevazione dati delle stesse.



Nell'attività proposta dopo la lettura di un racconto si chiede ai bambini di disporre dei cartoncini vicino la definizione di tempo corretta.

Successivamente, sempre come analisi delle conoscenze previe, si procede nella distinzione tra **tempo ciclico** e **tempo lineare** e nella distinzione tra **passato - presente** e **futuro** andando a collocare su una linea del tempo delle attività riferite al loro quotidiano rispetto ad una classificazione di cos'è accaduto **ieri,** cosa accade **oggi** e cosa accadrà **domani**.





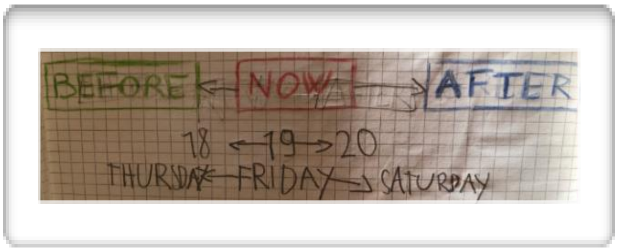
3.
4.
5.

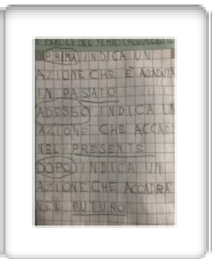
3. Fase di implementazione e di realizzazione

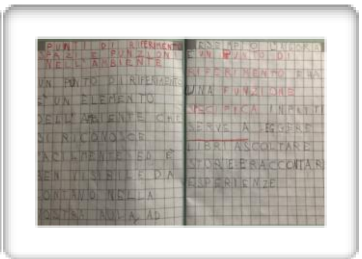
Nella fase di implementazione agli alunni viene proposta attraverso l’applicazione di Google Maps la visualizzazione alla LIM della mappa del nostro quartiere con riconoscimento dei luoghi che loro vivono nella quotidianità come la stessa scuola, il parco vicino (la Villa Comunale), bar e negozi.

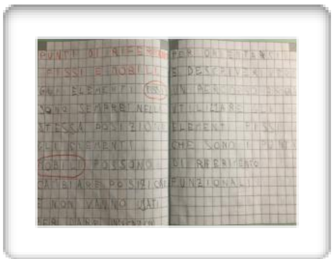
Attraverso questo riconoscimento dei luoghi importanti sulla mappa, l’insegnante introduce come nuovo contenuto geografico, il concetto di **punto di riferimento** come punto presente nello spazio indispensabile per l’orientamento negli ambienti.
Utilizzando una serie di attività come giochi direzionali in L2, percorsi Coding con RoboMind, paths con la versione open source di Mine Craft (contenuto disponibile online su www.programmailfuturo.it) e giochi di orientamento in palestra, gli alunni sperimentano l’importanza dei punti di riferimento e arrivano a delle loro individuali ri-definizioni.

Le rielaborazioni individuali degli alunni, infatti, diventano momento saliente in questa fase in cui i contenuti interdisciplinari si connettono tra loro e creano tra di essi uno spazio ulteriore di reti di significati.









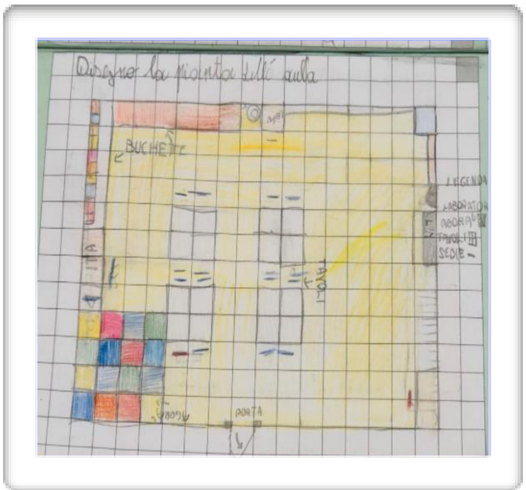
La generalizzazione degli apprendimenti viene anche ulteriormente implementata attraverso un’uscita didattica nel nostro quartiere, con l’obiettivo di far scoprire loro le caratteristiche dei luoghi e dei punti di riferimento nello spazio per imparare ad orientarsi nel quotidiano.

L’uscita didattica come vedremo si rivela essere ulteriore occasione di apprendimento anche rispetto alle classificazioni presenti in natura e al tempo ciclico che scorre, con

riferimento alle stagioni e al cambiamento che subisce l'ambiente con l'alternarsi delle stesse.
Dopo aver visto quindi, come la natura cambia nel susseguirsi delle stagioni, gli alunni vengono sollecitati attraverso la visualizzazione di una pianta vintage della città di Chieti, a riflettere su come lo spazio e il territorio possono cambiare nel tempo.

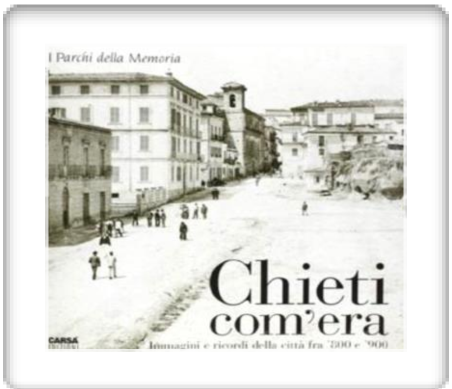
Viene quindi evidenziata la **legenda,** introducendo il concetto della stessa con le annesse funzioni all'interno di una mappa geografica che ne consentono l'interpretazione

Di seguito agli alunni viene chiesto di produrre in attività individuale, la pianta dell'aula vista dall'alto, con annessa legenda.
A questa rielaborazione grafica individuale segue un lavoro in cooperative learning in cui a ciascun gruppo viene data una pianta incompleta di ciascun piano/ala della scuola.
Ogni gruppo dopo una fase di osservazione diretta negli spazi dei singoli piani la completa inserendo le giuste posizioni delle classi con annessa legenda, evidenziando anche eventuali punti di riferimento presenti, sia fissi che mobili.



Successivamente a queste attività viene posta in essere una fase di problematizzazione attraverso la visualizzazione di alcune immagini di Chieti in cui gli alunni possono osservare come alcuni punti di riferimento c'erano ieri e ci sono ancora oggi.

Il nostro viaggio nel tempo quindi continua attraverso la lettura del libro “Chieti com’era" in cui gli alunni confrontano il territorio del passato con quello del presente tra differenze e analogie di ieri e di oggi.
La riflessione e la ricerca sulle fonti visive da parte degli alunni, porta ad ulteriori considerazioni, e quindi alla consapevolezza di come il tempo cambi i territori, gli usi e i costumi. La loro curiosità si sofferma soprattutto sull’aver scoperto che quelli che erano nel passato spazi privati, oggi sono diventati spazi pubblici

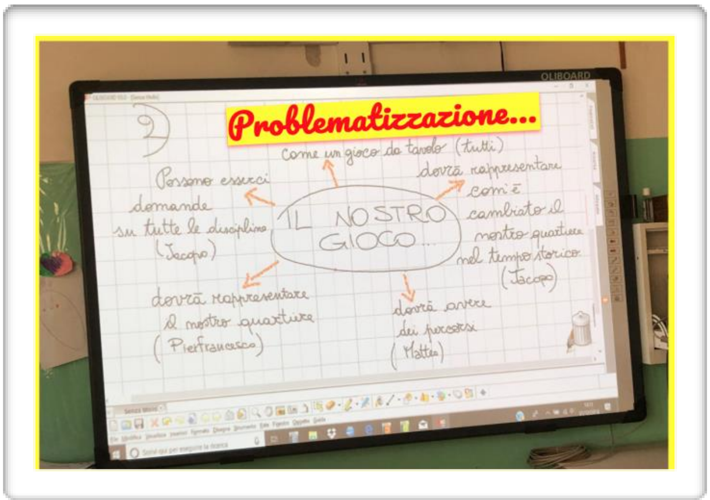


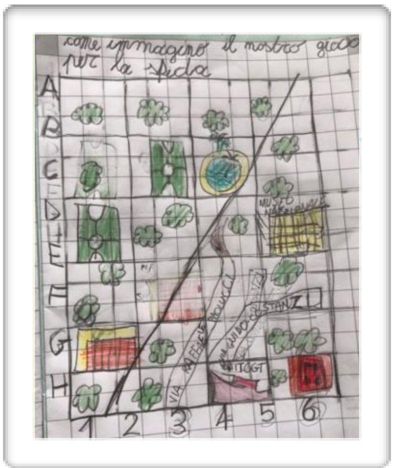
ed anche sulla presenza di molti negozi dell’epoca che oggi non ci sono più.
Quest’ultima considerazione apre ad un’altra problematizzazione legata all’e-commerce e alle nuove modalità di acquisto sul web e quindi alla possibilità nell’oggi di poter considerare anche gli spazi virtuali degli spazi di condivisione, che nella realtà vera non ci sono, ma esistono nella rete ed interconnettono le persone.

Sempre nella stessa fase il docente chiede agli alunni in che modo si potrebbero far conoscere le scoperte fatte tra analogie e differenze del nostro territorio, tra passato e presente.
Gli alunni individuano nella richiesta del compito di realtà iniziale, lo strumento per poter condividere quanto appreso.

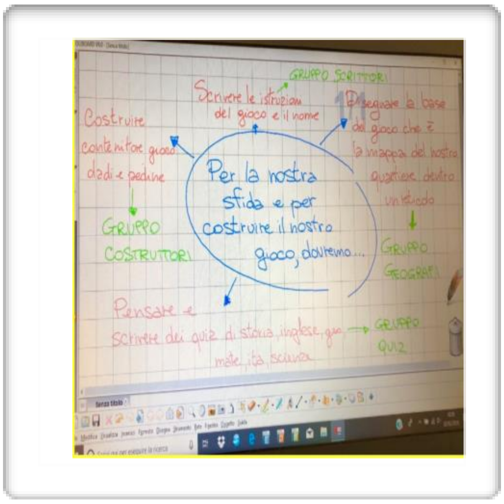
Modulo 3. Il compito di realtà
Nella fase di avvio, dopo l'esplicitazione del compito di realtà, agli alunni sempre in una chiave tesa alla problematizzazione della realtà, atta ad attivare processi di problemi solving nonché di decision making, viene anche richiesta la comprensione del compito e la ricondivisione degli obiettivi e dei destinatari a cui lo stesso è indirizzato.

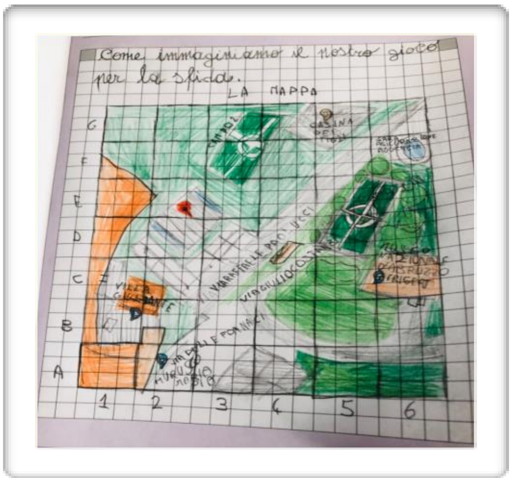
I





In questa fase dunque si riparte proprio dalla comprensione del compito e delle richieste ad esso correlate, al fine di dare avvio alla progettazione dello stesso, da parte degli alunni.
Nel nostro caso ad esempio, subito individuano all'interno dei nuovi strumenti acquisiti dei facilitatori da poter utilizzare all'interno del compito.
Tra i primi facilitatori che individuano per costruire il gioco, troviamo proprio lo strumento mappa, con anche il reticolo come base del gioco, tra punti di riferimento del passato e del presente.
A queste prime ipotesi di realizzazione del compito (da qui in poi "Gioco"), si procede con l'individuazione dei gruppi di lavoro e la scelta dei ruoli all'interno di ciascun gruppo.





I gruppi individuabili all'interno del gruppo classe sono:
Gruppo Costruttori
Gruppo Geografi
Gruppo Scrittori
Gruppo Quiz

Rispettivamente i compiti di ciascun gruppo sono così distribuiti:
Gruppo Scrittori: dare un titolo al Gioco e scrivere le istruzioni relative anche in L2.
Gruppo Costruttori: costruire la scatola del gioco con dadi e pedine.
Gruppo Geografi: costruire la mappa del quartiere evidenziando i punti di riferimento e i cambiamenti tra passato e presente, prevedendo 2 modalità di gioco (Lato 1- Lato 2 della Mappa).

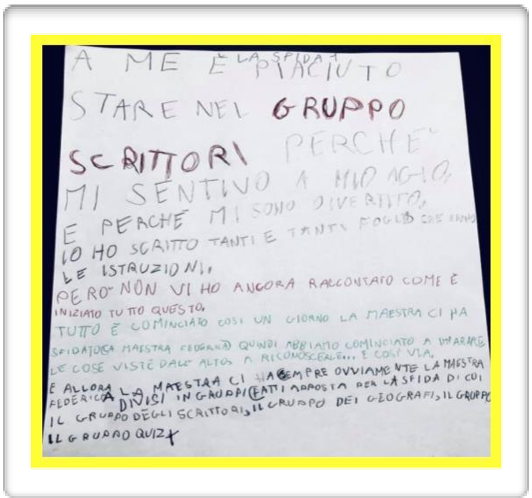
Gruppo Quiz: creare domande disciplinari in italiano, matematica, geografia, storia, inglese e scienze che saranno abbinate alle caselle presenti nel reticolo della mappa del gioco sotto la voce quiz.
Avviate le prime ipotesi di progettazione, da parte di ciascun gruppo, si rende necessaria una fase di intergruppo in cui gli alunni condividono le loro idee, tramite i loro stessi referenti. Preme sottolineare che i 4 gruppi pur avendo compiti nello specifico sono interconnessi tra loro per cui si crea un'interdipendenza che non può essere disattesa. Questo momento diventa quindi una fase di valutazione e autovalutazione per gli alunni, che si trovano anche a sperimentare la falsificazione delle ipotesi.

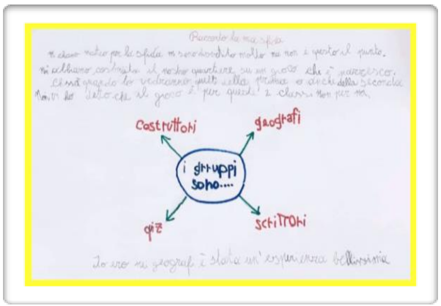
Il lavoro in cooperative learning riprende dunque, in funzione sia delle eventuali criticità rilevate rispetto alle iniziali ipotesi pensate e verificate come non possibili, sia in funzione delle condivisioni avute, con l'obiettivo di creare un prodotto che rispetti tutte le caratteristiche della sfida inizialmente proposta.

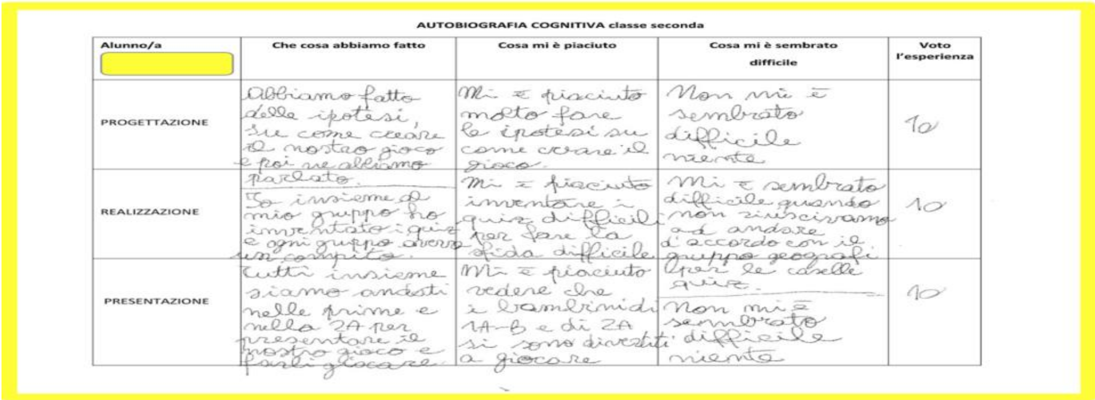
Tutti i gruppi convengono su una distinzione di utilizzo del gioco da parte degli alunni delle due classi prime e della classe 2^ parallela. Il gruppo quiz prevede domande disciplinari diverse per complessità, mentre il gruppo scrittori attiva un doppio canale rispetto alle istruzioni del gioco che vengono distinte in italiano per la classe 1^ e in L2 per la classe 2^ e denomina il Gioco dopo la fase di intergruppo il "Gioco del quartiere". Necessario prevedere, sino alla finale realizzazione dei prodotti dei singoli gruppi, momenti di condivisione, monitoraggio e confronto di quanto stabilito tra loro, al fine di incrementare quel processo valutativo e auto-valutativo che incentivi problematizzazioni reali.

Terminati i lavori nei singoli gruppi, il "Gioco del quartiere" è completo in tutte le sue parti ed è pronto per essere giocato dai destinatari. Il gruppo classe programma e pianifica la condivisione con le classi target previste in fase di progettazione.

Anche questa fase di socializzazione del percorso è per gli alunni un momento di verifica e valutazione del prodotto finale, in funzione di quanto in questo caso il loro prodotto risulti essere davvero giocabile dagli altri, e soddisfi la funzione per cui è stato creato, ovvero far conoscere come il nostro quartiere sia cambiato nel tempo e nello spazio e nei suoi punti di riferimento tra ieri e oggi.







AUTOBIOGRAFIA COGNITIVA classe seconda

Alunno/a	Che cosa abbiamo fatto	Cosa mi è piaciuto	Cosa mi è sembrato difficile	Voto l'esperienza
PROGETTAZIONE	Abbiamo fatto delle ipotesi, su come creare il nostro gioco e poi ne abbiamo parlato.	Mi è piaciuto molto fare le ipotesi su come creare il gioco.	Non mi è sembrato difficile niente	10
REALIZZAZIONE	Io insieme al mio gruppo ho inventato i quiz e ogni gruppo aveva un compito.	Mi è piaciuto inventare i quiz difficili per fare la sfida difficile.	Mi è sembrato difficile quando non riuscivamo ad andare d'accordo con il gruppo geografi per le caselle quiz.	10
PRESENTAZIONE	Tutti insieme siamo andati nelle prime e nella 2A per presentare il nostro gioco e farli giocare	Mi è piaciuto vedere che i bambini di 1A-B e di 2A si sono divertiti a giocare	Non mi è sembrato difficile niente	10

Modulo 4. Fase Metacognitiva e di Autovalutazione In questa fase gli alunni ricostruiscono collettivamente il percorso attraverso delle griglie strutturate proposte dal docente (autobiografia cognitiva), ma anche mediante loro rielaborazioni spontanee, operando confronti tra acquisizione di nuove conoscenze e quelle pregresse, valutando il proprio ruolo all'interno del gruppo e l'importanza del lavoro in intergruppo, con anche le eventuali criticità incontrate.

Questa fase diventa importante anche per il docente perché contribuisce a fornire ulteriori elementi di riflessione rispetto al percorso, alla sua strutturazione e ad evidenziare eventuali aspetti che possono essere rivisitati in una chiave di applicazione che ne garantisca una funzionale trasferibilità.

4. Considerazioni finali

L'aspetto riferito agli operanti motivazionali degli alunni in un percorso come questo è tra i più importanti, partendo dai loro interessi e dal loro quotidiano si costruiscono reti di significato più ampie e li si rende protagonisti all'interno di una co-costruzione dei saperi, dove il docente assume il ruolo di regista e non di mero trasmettitore di contenuti.

I diversi momenti in cooperative learning gettano le basi per creare situazioni di team working, atte ad implementare le competenze sociali e civiche, senza senza mai far venir meno la dimensione individuale. L'approccio globale al curricolo, richiamato in premessa, rimanda ad una visione olistica del processo di insegnamento - apprendimento, in cui gli alunni sono coinvolti all'interno di una dimensione in cui, non può esserci apprendimento senza emozione.

Bibliografia e sitografia

Daniela Lucangeli. *Cinque lezioni leggere sull'emozione di apprendere.* Erikson

Mario Martinelli. *Collaborare nelle diversità*. Mondadori

Mario Abate. *Didattica Metacognitiva. Strategie e metodi.* Feltrinelli

Luciano Mariani. *Saper apprendere.* Libreria universitaria

https://sites.google.com/view/teacherFedecom

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 2, No 2, (2019), 65- 76

Buone pratiche per scrivere ed impaginare correttamente un documento elettronico

Fabio Manuppella[1] **Giuseppe Manuppella**[2]

[1]Consulente Informatico, Formatore
fabiomanuppella@gmail.com

[2]Presidente dell'APAV, Formatore
giuseppemanuppella@gmail.com

Sunto

Queste brevi note vogliono dare alcuni suggerimenti utili per scrivere correttamente un articolo al computer, utilizzando un qualsiasi software di videoscrittura. Le regole suggerite non dipendono dal software usato, sia esso Microsoft Word o LibreOffice (software Open Source liberamente scaricabile dal sito) o qualsiasi altro. Si daranno anche semplici indicazioni per inserire nel testo le immagini o le formule matematiche. Le immagini esemplificative proposte, catturate da Microsoft Word e da LibreOffice Writer, sono valide per ogni altro software, salvo dover individuare i comandi suggeriti nelle interfacce del software usato.

Parole chiave: regole di scrittura; Microsoft Word, LibreOffice Writer, impaginazione, indici automatici.

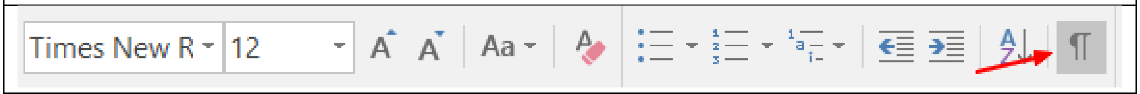
1. Considerazioni preliminari

La diffusione universale dell'Informatica e dell'uso generalizzato di PC, tablet, smartphone, ecc. è senz'altro positiva ed ha segnato un importante punto di svolta nel mondo della Scuola, ma presenta alcune criticità che sono dovute alla tumultuosa diffusione di tali mezzi, senza un'adeguata ed approfondita conoscenza degli stessi. Ad oggi è raro trovare docenti e studenti che dicono di non saper usare il mezzo informatico, ma bastano poche e semplici domande o l'esame di un qualsiasi documento prodotto da questi, per renderci conto di quanto siano superficiali le loro conoscenze. Se ci soffermiamo sulla realizzazione di un qualsiasi semplice documento realizzato con un software di videoscrittura, notiamo vari errori di impaginazione che vanificano e rendono problematica la realizzazione di lavori che possano andare in stampa in maniera corretta. Con questo articolo cercheremo di dare risposta a tali problematicità, senza perderci in inutili tecnicismi ma colmando, per quanto possibile, le lacune individualmente presenti nel normale uso. Premettiamo che le buone pratiche che descriveremo sono indipendenti dal software usato in quanto possono essere adottate in ogni software avanzato di videoscrittura, a parte le ovvie differenze nelle interfacce grafiche.

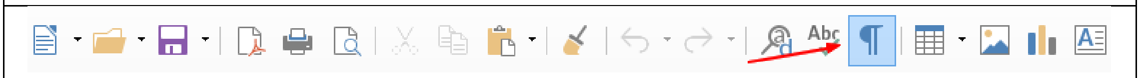
2. Come impostare correttamente il software di videoscrittura

Per ottenere il migliore controllo sull'impaginazione del documento che vogliamo realizzare, la prima cosa da fare è quella di attivare l'apposito pulsante che consente di visualizzare i caratteri di controllo non stampabili. Pubblichiamo due immagini che evidenziano il pulsante di cui parliamo.

In Microsoft Word



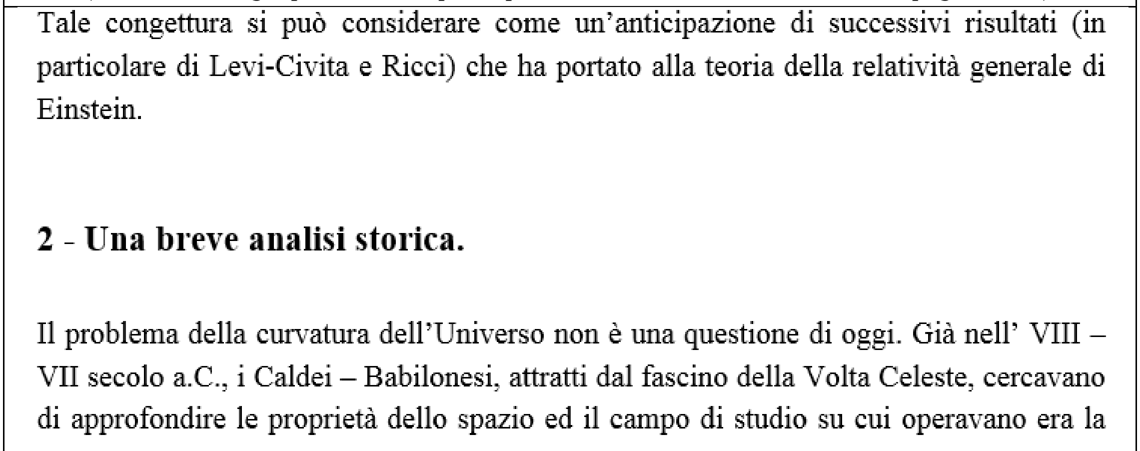
In Libre Office Writer



Attivando questo pulsante il documento in elaborazione "prende vita", si trasforma in qualcosa che possiamo controllare in tutti gli aspetti. Ecco un esempio di documento con e senza il "miracoloso" pulsante attivato:

Pulsante disattivato

(da un articolo già pubblicato dopo un pesante lavoro di correzione e di reimpaginazione)



Tale congettura si può considerare come un'anticipazione di successivi risultati (in particolare di Levi-Civita e Ricci) che ha portato alla teoria della relatività generale di Einstein.

2 - Una breve analisi storica.

Il problema della curvatura dell'Universo non è una questione di oggi. Già nell' VIII – VII secolo a.C., i Caldei – Babilonesi, attratti dal fascino della Volta Celeste, cercavano di approfondire le proprietà dello spazio ed il campo di studio su cui operavano era la

Inoltre è indispensabile, ove fosse attivata, disattivare la funzione di sillabazione, cioè quella funzione che consente di mandare a capo automaticamente le parole troppo lunghe per entrare nella riga, dividendole in sillabe utilizzando il carattere "-" (trattino) a fine riga.

Pulsante attivato

(da un articolo già pubblicato dopo un pesante lavoro di correzione e di reimpaginazione)

Tale· congettura· si· può· considerare· come· un'anticipazione· di· successivi· risultati· (in· particolare·di·Levi-Civita·e·Ricci)·che·ha·portato·alla·teoria·della·relatività·generale·di· Einstein.¶

¶

¶

2·-·Una·breve·analisi·storica.¶

¶

Il·problema·della·curvatura·dell'Universo·non·è·una·questione·di·oggi.·Già·nell'·VIII·–· VII·secolo·a.C.,·i·Caldei·–·Babilonesi,·attratti·dal·fascino·della·Volta·Celeste,·cercavano· di·approfondire·le·proprietà·dello·spazio·ed·il·campo·di·studio·su·cui·operavano·era·la·

Le due immagini riportate sono state catturate da un documento scritto in Word, ma se lo stesso documento fosse stato elaborato con Writer, avremmo avuto una situazione identica; cambia solo il colore dei caratteri non stampabili. Riportiamo sotto la stessa immagine catturata in LibreOffice Writer.

Pulsante attivato in LibreOffice Writer

(da un articolo già pubblicato dopo un pesante lavoro di correzione e di reimpaginazione)

Tale·congettura·si·può·considerare·come·un'anticipazione·di·successivi·risultati·(particolare·di·Levi-Civita·e·Ricci)·che·ha·portato·alla·teoria·della·relatività·generale· Einstein.¶

¶

¶

2·-·Una·breve·analisi·storica.¶

¶

Il·problema·della·curvatura·dell'Universo·non·è·una·questione·di·oggi.·Già·nell'·VIII VII·secolo·a.C.,·i·Caldei·–·Babilonesi,·attratti·dal·fascino·della·Volta·Celeste,·cercava di·approfondire·le·proprietà·dello·spazio·ed·il·campo·di·studio·su·cui·operavano·era

Cerchiamo di capire cosa è avvenuto attivando il pulsante di cui stiamo parlando: sono comparsi tutta una serie di piccoli punti in mezzo al rigo che ci segnalano gli spazi immessi con la barra spaziatrice (ogni puntino corrisponde ad uno spazio). Sono inoltre apparsi dei nuovi simboli uguali a quello rappresentato sul pulsante attivato: questi rappresentano le andate a capo immesse volontariamente dall'estensore del documento, premendo sul tasto Invio. La pressione del tasto **Invio** segnala al PC che il paragrafo è terminato ed occorre iniziarne un altro, andando a capo.

Esiste un'altra tecnica per andare a capo senza iniziare un nuovo paragrafo: è sufficiente premere contemporaneamente i due tasti **Shift** e **Invio**. Usando questa tecnica viene conservata la formattazione dell'intero paragrafo.
La visualizzazione di questi simboli può essere attivata o disattivata cliccando l'apposito pulsante.
Potranno, inoltre, apparire altri simboli che ci permetteranno di ottenere un totale controllo sull'impaginazione del documento. In questo modo sarà molto semplice individuare e correggere gli errori fatti.

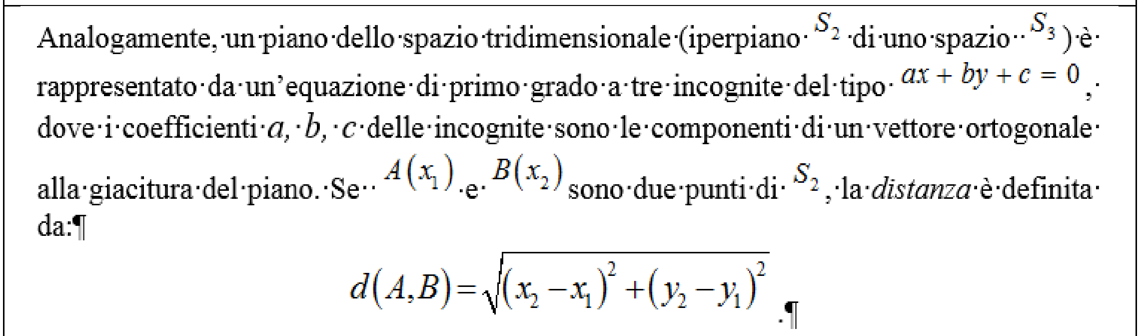
3. Inserimento di immagini e di formule matematiche nel documento

Prima di passare alle buone pratiche di scrittura, occorre parlare un attimo dell'inserimento di immagini all'interno del documento in elaborazione.
Per ottenere un totale controllo di questa situazione, occorre realizzare prima l'immagine da inserire, usando un qualsiasi programma di grafica come, ad esempio, Microsoft Paint, presente in tutte le versioni di Windows. Ovviamente l'immagine da inserire deve essere ridimensionata alle misure giuste per l'inserimento: è inutile e dannoso inserire un'immagine di oltre 1000 pixel e più in larghezza se il foglio A4 non può accoglierla tutta, se non al prezzo di un rimpicciolimento manuale (agendo sulle maniglie presenti sui bordi); così facendo aumentiamo enormemente il peso del documento e corriamo il rischio di deformare l'immagine.
Ora ci rivolgiamo espressamente ai colleghi che insegnano materie scientifiche che, dovendo inserire nel documento grafici ed altro, li realizzano componendo con pazienza certosina l'immagine con frecce, segmenti, lettere, punti, ecc. Questa è la peggiore tecnica che si possa immaginare, essendo legata alla particolare versione del software in uso. Ciò significa che, leggendo il documento con un altro PC, a meno che non sia stato già esportato nel formato PDF, tali componenti grafiche potrebbero assumere un diverso posizionamento, a seconda della versione del software utilizzata dagli altri computer del gruppo di lavoro. Ciò porta, naturalmente, a risultati imprevedibili. Ma allora; come si può risolvere il problema?
Abbiamo tre possibilità:

- Realizzare il grafico con un software di elaborazione grafica, ma riconosciamo che la cosa potrebbe essere non alla portata di tutti;
- Realizzare il grafico con un apposito software per costruire grafici, mappe concettuali o diagrammi (ad es. Geogebra, Dia o FreeMind, ecc.) ed esportarlo poi in formato immagine per il successivo inserimento nel documento in elaborazione;
- Continuare, come si è fatto finora, a comporre il grafico con gli elementi predefiniti del software in uso ed effettuare la cattura dell'immagine realizzata, premendo il tasto **Stamp** presente in tutte le tastiere ed elaborare successivamente l'immagine ottenuta.

Indipendentemente dalla soluzione adottata, l'immagine realizzata deve essere salvata formato JPG o, meglio, nel formato PNG se questa contiene del testo, per evitarne il deterioramento dovuto alla compressione che si avrebbe utilizzando il formato JPG.
Infine è fortemente consigliato, per inserire un'immagine nel documento in lavorazione, non usare la funzione **Inserisci immagine** ma semplicemente il buon vecchio "**Copia e Incolla**" di Windows (per chi non ricordasse come si fa, si usano le combinazioni di tasti "**Ctrl + c**" per copiare e "**Ctrl + v**" per incollare nel punto prescelto).
Ancora, per ottenere un totale controllo sul posizionamento delle immagini è opportuno inserire prima, nel testo, una tabella con il numero necessario di righe e di colonne e poi incollare immagini, scrivere testo o quant'altro necessiti ai posti giusti; si provvederà poi a nascondere i bordi della tabella.
In questo lavoro i bordi delle tabelle usate sono stati lasciati volutamente visibili.
Analogamente, non è consigliabile usare le caselle di testo, ma utilizzare la tecnica (già descritta) delle tabelle.
Sempre a beneficio dei colleghi di cui sopra, che hanno necessità di inserire formule, presentiamo un esempio di non corretta impaginazione

Da un articolo scritto con il PC dell'Autore senza applicare regole corrette di impaginazione e visualizzato sui nostri PC. Sono ben visibili i problemi che si presentano e che non sono facilmente risolvibili.)


Analogamente, un piano dello spazio tridimensionale (iperpiano S_2 di uno spazio S_3) è rappresentato da un'equazione di primo grado a tre incognite del tipo $ax + by + c = 0$, dove i coefficienti a, b, c delle incognite sono le componenti di un vettore ortogonale alla giacitura del piano. Se $A(x_1)$ e $B(x_2)$ sono due punti di S_2, la *distanza* è definita da:¶

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$.¶

Come si può notare, tutte le formule inserite all'interno del testo sono disallineate e, di solito, non si riesce a sistemarle.
Come risolvere?
È possibile usare i caratteri speciali del software in uso e, quando non servono simboli particolari, utilizzare i normali caratteri del software, usando il corsivo, gli apici, i pedici, ecc. Se, invece, devono essere inserite formule complesse, questo si può fare utilizzando l'Equation Editor del software in uso, ma avendo l'accortezza di posizionare la formula al centro del rigo, mai all'interno di altro testo.

4. Utilizzo della punteggiatura e degli spazi nei documenti

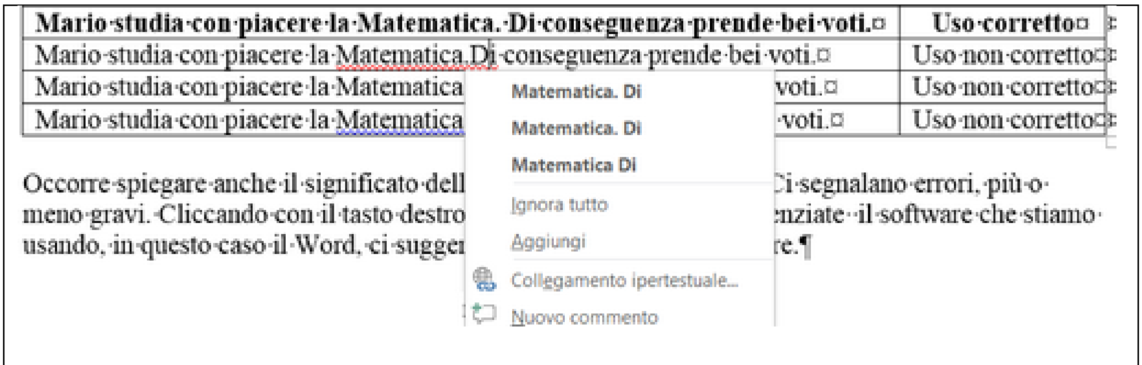
Quando si scrive a mano, inserire la punteggiatura risulta molto semplice e intuitivo, ma per la redazione di testi al PC esistono delle piccole regole che migliorano la visualizzazione e la fruibilità, garantendo una maggior comprensione da parte del lettore. Occorre ricordare che nella scrittura al PC l'andata a capo è automatica, salvo che non sia forzata con la pressione del tasto Invio (che termina un paragrafo e manda a capo il cursore con inizio di un nuovo paragrafo) o con la pressione contemporanea dei tasti Shift + Invio (che mandano a capo il cursore senza terminare il paragrafo). A causa dell'andata a capo automatica del testo, se non vengono usate correttamente le regole per la punteggiatura, potremmo ottenere risultati imprevedibili.
Vediamo nel dettaglio come usare le spaziature.

Quando lo spazio segue la punteggiatura?

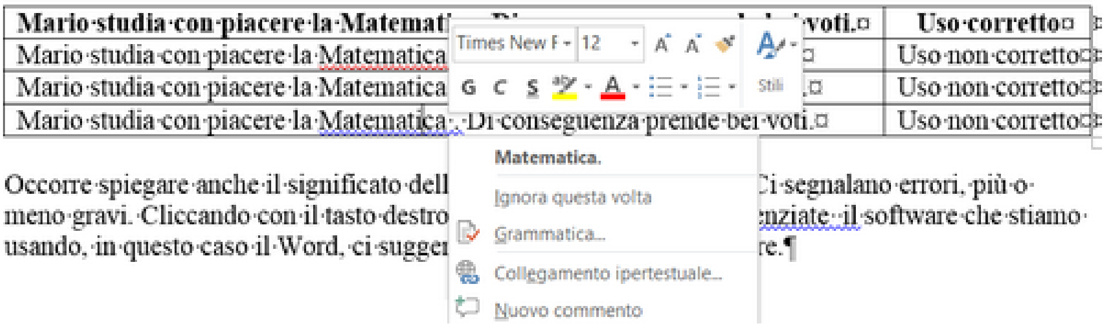
Partiamo dall'elemento più semplice: il punto.
Alla fine di una frase il punto deve essere sempre seguito da uno spazio vuoto, a meno che non si desideri andare a capo per creare un nuovo paragrafo. Così facendo, il punto rimarrà legato alla frase precedente e non a quella successiva.
Vediamo alcuni esempi di uso del punto. Ne evidenzieremo l'uso corretto e vari usi sbagliati.

Mario·studia·con·piacere·la·Matematica.·Di·conseguenza·prende·bei·voti.¤	**Uso·corretto¤**
Mario·studia·con·piacere·la·Matematica.Di·conseguenza·prende·bei·voti.¤	Uso·non·corretto¤
Mario·studia·con·piacere·la·Matematica·.Di·conseguenza·prende·bei·voti.¤	Uso·non·corretto¤
Mario·studia·con·piacere·la·Matematica·.·Di·conseguenza·prende·bei·voti.¤	Uso·non·corretto¤

Occorre spiegare anche il significato delle sottolineature rossa e blu. Ci segnalano errori, più o meno gravi. Cliccando con il tasto destro del mouse sulle parole evidenziate il software che stiamo usando, in questo caso Microsoft Word, ci suggerisce le correzioni da apportare.
Riportiamo due immagini esplicative.



Tasto destro su sottolineatura rossa: notare il suggerimento del software



Tasto destro su sottolineatura blu: notare il suggerimento del software

La stessa regola vale per i seguenti segni di punteggiatura:

- la virgola [,]
- il punto e virgola [;]
- i due punti [:]
- il punto interrogativo [?]
- il punto esclamativo [!]
- i puntini di sospensione [...]
- l’indicatore di numero ordinale [°]

I sei elementi che fanno eccezione

Esistono, però, sei segni di punteggiatura che, a differenza di quelli sopracitati, devono essere trattati in modo diverso per quanto riguarda il posizionamento dello spazio.
Essi sono le parentesi, i trattini, le virgolette, l’apostrofo, il trattino di unione, lo slash nelle date. Esaminiamo in dettaglio il comportamento di questi segni.

Le parentesi

Le parentesi si utilizzano principalmente per esprimere chiarimenti, sono quindi contenitori di testo che servono per inquadrare un concetto specifico.
Nella scrittura al computer, le parentesi esigono sempre uno spazio **all’esterno** di ciascuna di esse al fine di isolarne il contenuto. Al contrario, la frase **all’interno** delle parentesi non deve essere preceduta né seguita dallo spazio.

Mi·piace·andare·a·ballare·(specialmente·con·gli·amici).·	Uso corretto
Mi·piace·andare·a·ballare(specialmente·con·gli·amici).	Uso non corretto

I trattini

I trattini sono elementi isolati, che non hanno una particolare relazione con il testo. La loro funzione è semplicemente quella di isolare o separare una parte di testo. La loro regola d’uso è molto semplice: lo spazio va posto sia prima che dopo il trattino.

Sarà quindi:

Alla·salute·–·disse·Marcello·–·e·brindò¶	Uso corretto
Alla·salute·–disse·Marcello–·e·brindò¶	Uso non corretto

Le virgolette

Le virgolette di ogni tipo seguono le stesse regole delle parentesi. La loro funzione è infatti quella di evidenziare una parte di testo, rimanendo pertanto legate ad esso. Le spaziature si pongono pertanto **all'esterno**, mentre all'interno il contenuto deve essere unito alle virgolette senza utilizzare nessuno spazio.
Sarà quindi:

Carlo·disse·"Passo·a·prenderti·più·tardi"·e·andò·via¶	Uso corretto
Carlo·disse·"·Passo·a·prenderti·più·tardi·"·e·andò·via¶	Uso non corretto
Carlo·disse·"Passo·a·prenderti·più·tardi"e·andò·via¶	Uso non corretto

L'apostrofo

L'apostrofo non ha bisogno di alcuna spaziatura. Il suo utilizzo è infatti essenziale ai fini grammaticali per indicare un'elisione e non va mai separato dalle parole che lo precedono e seguono.
Sarà quindi:

L'apostrofo·non·ha·bisogno·di·spaziatura.¶	Uso corretto
L·'·apostrofo·non·ha·bisogno·di·spaziatura.¶	Uso non corretto

Il trattino di unione

Come l'apostrofo, **il trattino di unione**, ovvero quello inserito all'interno di una parola (ad esempio e-commerce) **non necessita di alcuna spaziatura, né prima né dopo**.
Sarà quindi:

Ho·appena·pubblicato·il·mio·primo·e-book.¶	Uso corretto
Ho·appena·pubblicato·il·mio·primo·e·-·book.¶	Uso non corretto

Lo slash nelle date

Le date, se specificate numericamente, vanno indicate utilizzando lo slash [/] e non il trattino o il punto. Esattamente come per l'apostrofo e il trattino di unione **non è necessario l'inserimento di alcuno spazio tra lo slash e le cifre.**

Sarà quindi:

13/08/2019¶	Uso corretto
13·/·08·/·2019¶	Uso non corretto

5. Scrivere un documento applicando un formato assegnato

Se il documento al quale stiamo lavorando deve essere inserito in una Rivista o in un libro, insieme ad altri documenti realizzati da altri Autori, è del tutto evidente che dobbiamo applicare le regole fissate dai curatori della Rivista. Questa operazione, di fondamentale importanza per la buona riuscita del lavoro, può essere fatta prima di iniziare a scrivere o al termine della stesura del lavoro. È fortemente consigliato, fin dall'inizio, rispettare le regole riportate nel modello di formato, al fine di evitare ritardi causati dalla rielaborazione del documento.
Tutte le pubblicazioni dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV), in genere, usano lo stesso formato, scaricabile anche dal sito www.eiris.it.
Ad esempio, i curatori della Rivista "Mondo Matematico e Dintorni" chiedono di formattare l'articolo rispettando le seguenti regole:

- L'articolo deve essere in lingua italiana
- Non sono ammessi titoli o altro, scritti esclusivamente in caratteri maiuscoli
- Il carattere da usare per tutto il lavoro è il Times New Roman - Giustificato
- La pagina deve essere impostata secondo i seguenti parametri (riportati anche nella Figura 1):
- Margini personalizzati:
  Superiore 3 cm
  Inferiore 3 cm
  Sinistro 3 cm
  Destro 3 cm
  Rilegatura 0 cm
  Posizione rilegatura Sinistro
  Orientamento Verticale

Questi valori possono essere facilmente inseriti accedendo alla schermata "Imposta pagina" dell'Editor in uso.

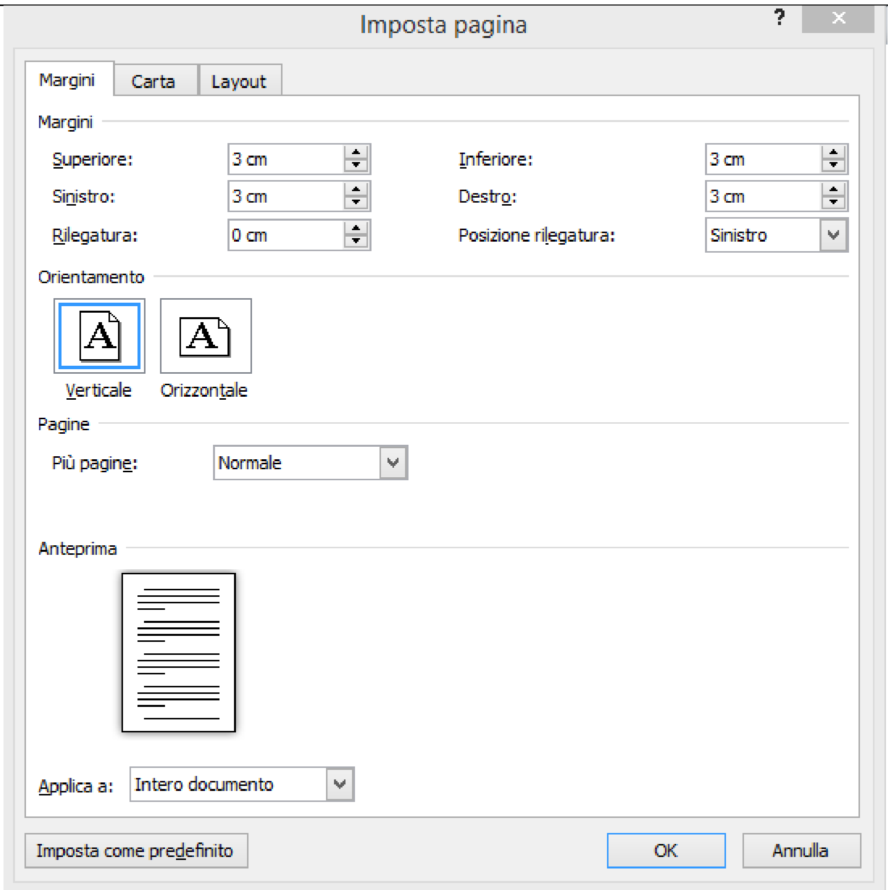


Fig. 1 – Microsoft Word

Altri settaggi da impostare sono riportati nella Figura 2

- Intestazioni e piè di pagina
    - Diversi per pari e dispari
    - Diversi per la prima pagina
    - Distanza dal bordo
        - Intestazione 1,27 cm
        - Piè di pagina 1,27 cm

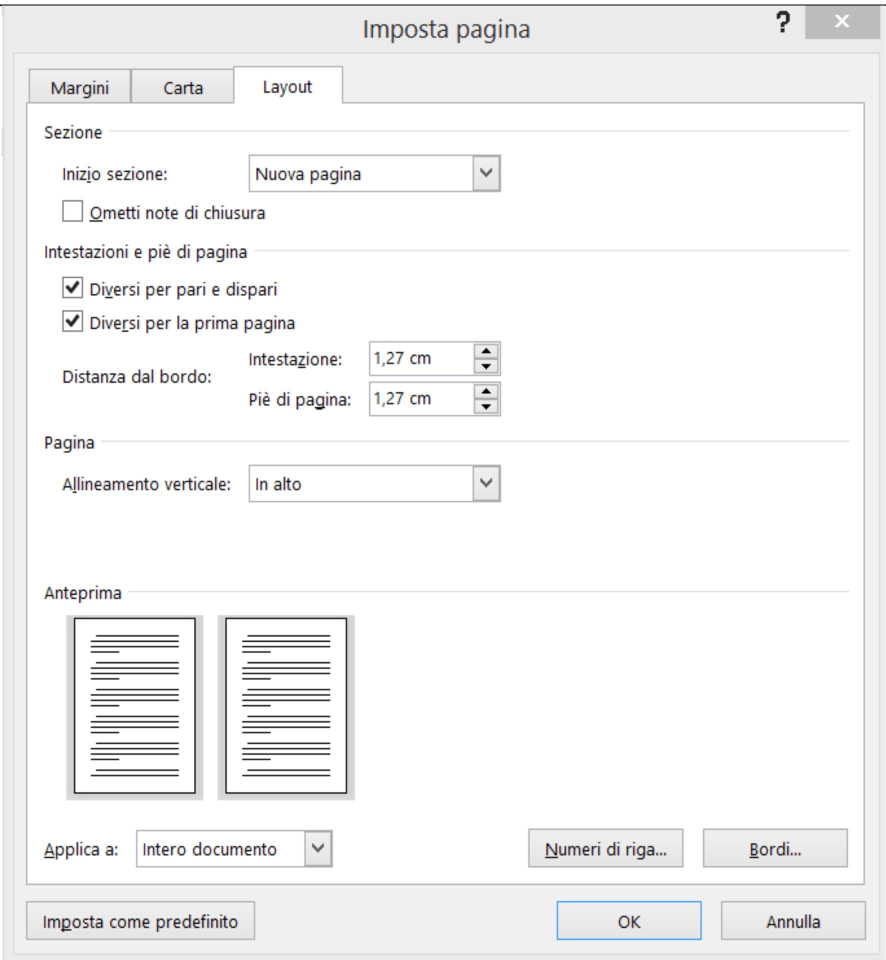


Fig. 2 – Microsoft Word

6. Conclusioni

Le buone pratiche suggerite nel presente articolo permetteranno agli Autori di ottenere una buona impaginazione e, quindi, di ridurre I tempi di pubblicazione degli articole nel volume finale.
In ogni caso è opportono che gli estensori dei vari documenti inviino ai curatori del volume complessivo sia la versione in Microsoft Word/LibreOffice Writer, sia la versione in PDF del documento prodotto, in modo da permettere un suo controllo più efficiente.
Esistono altre regole di scrittura molto più complesse ed esaustive ma, per i nostri scopi, è sufficiente che tutti si adeguino a quanto spiegato in questo lavoro.
Ci riserviamo, comunque, di proporre un corso di formazione "in presenza" a tutti i colleghi che volessero approfondire l'argomento.

Sitografia

Geogebra: https://www.geogebra.org/?lang=it

Dia: http://dia-installer.de/index.html.en

FreeMind: http://freemind.sourceforge.net/wiki/index.php/Download

LibreOffice: https://it.libreoffice.org/

Microsoft Word: https://products.office.com/it-it/word

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 2, No 2, (2019), 77- 88

Insegnamento della matematica in situazioni socio-psicologiche di differenti apprendimenti

Silvana D'Andrea

Psicologa nella AUSL Teramo, dove ha operato nei gruppi H e si è occupata di problematiche sui diversamente abili. Dottore di ricerca in "*Scienze Sociali Teorie,Applicazioni e Interventi*", titolo conseguito presso l'Università di Chieti..

Sunto
Uno dei grandi problemi della didattica attuale è proprio il portare gli allievi a capire la matematica. Per alcuni è facile e per altri è linguaggio naturale. Anche per i diversamente abili la suddivisione si ripresenta. La principale domanda è chiedersi se esista o no una sorta di abilità a priori, per la comprensione della Matematica o se una tale pretesa abilità è possibile costruirla? Si delineano aspetti vari del problema didattico fino a proporre in alcuni settori concreti interventi, ma anche a metodologie emergenti come quelle cooperative, che vengono inquadrate nei modernissimi sistemi sociali, che partono dagli studi sull'epistemologia dell'azione sociale.

Parole chiave: l'educazione matematica, l'abilità e la diversa abilità, i sistemi cooperativi, il dibattito informatico.

1. Esiste l'abilità matematica?

Scrive Bruner (cfr.[3], 1992, pg.161), riguardo il problema educativo:

Gli obiettivi iniziali erano semplici, nondimeno attraenti nelle loro aspirazioni: l'insegnamento delle Scienze (e delle altre discipline) doveva essere attuato in modo da spiegare ciò che la scienza stava facendo, così che l'uomo moderno potesse avere una qualche conoscenza migliore delle forze che regolano il suo mondo. La concezione di base era razionalistica: conoscendo la natura ed essendo esperto nei modi di pensar della scienza e della matematica, l'uomo ne apprezzerebbe non solo la natura, ma si sentirebbe meno impotente di fronte ad essa, e raggiungerebbe la dignità intellettuale inerente all'essere lo scienziato di se stesso. Questa precisa quanto ideale visione, utopica certamente, può essere assunta come limite al quale far tendere i nostri obiettivi in quello che è lo sviluppo cognitivo dell'individuo. Non vi è alcun dubbio sull'importanza della Matematica, come linguaggio chiave delle Scienze. Naturalmente ciò non implica che sia chiaro il come e i quando di tutti gli obiettivi parziali.

Far apprendere la Matematica a ragazzi che sono nel periodo iniziale di formazione o cercare di costruire una mentalità giusta - ovvero preparare un terreno adatto alla ricezione - in allievi diversamente abili, per impararne un po', è compito veramente ingrato. Questo

sia per la difficoltà intrinseca della disciplina sia per il rinnovamento che la disciplina ha subito dagli anni '30 in poi. Essa è passata da ben due grandi rivoluzioni (cfr. Eugeni [8], 1992); la Teoria degli Insiemi della Scuola di Bourbaki negli ultimi anni '50 e la rivoluzione informatica partita nei primi anni '90.
I più di noi nei loro ricordi scolastici, e parecchi nel loro corso di studi hanno manifestato, per la Matematica, sentimenti talvolta decisamente negativi. Altresì coloro che con la Matematica hanno mostrato, nella loro storia, una naturale dimestichezza, sono sempre stati indicati come coloro che sanno far di conto, sia pure con un antico rispetto, oggi purtroppo manifestato in forma di aggressioni bullistiche. Da parte di molti si attribuisce la colpa di questi sentimenti ai sistemi ed alle metodologie didattiche in uso nelle scuole, e principalmente alle difficoltà disciplinari. Certamente l'avversione degli studenti per la matematica può avere, oltre queste, altre non meno gravi motivazioni, anche più significative, quali:

- L'uso in fase di apprendimento di tecniche poco idonee quali il richiedere lo sviluppo di faticosi, quanto inutili e farraginosi esercizi da tavolino
- E' frequente la poca consapevolezza degli obiettivi che l'insegnamento della matematica si propone, allora che occorra operare nei differenti momenti educativi. Ciò implica una non chiara esplicitazione degli obiettivi parziali da raggiungere, assieme una non chiara conoscenza degli obiettivi secondari.
- Un secolare non rispondenza tra i modelli logici in uso nella vita quotidiana e i modelli di ragionamento di tipo logico-formale dei quali solo la matematica scolastica si serve.

Sembrerebbe che l'*allievo tipo*, che risponde maggiormente ai solleciti dell'insegnante di Matematica, sia colui che possieda alcune, non meglio identificate, caratteristiche, che in modo vago vengono dette abilità matematiche. Luoghi comuni, circolanti da sempre, ci dicono che il tale ragazzo non è portato, il talaltro invece lo è, e per questo lo si gratifica, come se fosse un attributo del corpo.
Se questa capacità esistesse, diverrebbe di notevole importanza <u>comprendere cosa tale abilità matematica veramente sia</u>, e quindi con quali meccanismi mentali essa si formi. Inoltre si dovrebbe, almeno tentare di stabilire nel rapporto docente-discente, le condizioni ottimali per lo favorire lo sviluppo di tali capacità. Noi pur ritenendo che gli individui siano fortemente differenziati nei confronti della cultura, riteniamo che non sia rilevante ai fini degli obiettivi di una cultura non specializzata, il possedere o meno una tale abilità. Se l'obiettivo principale di una educazione matematica di medio livello (ad esempio di scuola media inferiore) è pensata per un allievo medio-dotato (senza l'interesse di un proseguimento in studi scientifici) essa darà luogo a poche richieste e quindi a poche aspettative. La preparazione che ne deriverà ci porterà a richiedere il raggiungimento di una abilità applicativa e di problem solving, che sia in piena armonia con tutti i modelli che l'allievo incontrerà nella sua vita quotidiana. Cosi occorre che l'allievo riesca ad orientarsi sulla piccola economia della vita, capisca le piccole statistiche del quotidiano e si orienti davanti a piante di edifici e a itinerari di mostre o di metropolitane. Sappia usare

quel minimo di informatica che si incontra con il Bancomat e utile per i futuri impieghi elettronici. Se si vuole andare più a fondo occorre che l'allievo impari a confrontare pesi, capacità, misure, quantità e distanze fino ad avere una idea dell'infinitamente grande del cosmo e dell'infinitamente piccolo, presente nei fenomeni chimico- biologico. Da notare che tali obiettivi *più pratici* sono a volte ottenibili, con difficoltà, in personaggi con alto grado di abilità matematica, perché talvolta l'abilità suddetta si accompagna con sindrome di rifiuto del reale e con il rifugio nel dorato mondo dell'astratto. Ma in presenza di medio-alte capacità, nel corso ad esempio dì una scuola superiore, l'insegnamento matematico dovrebbe avere obiettivi più ambiziosi e condurre all'abilità matematica intesa come una capacità ad eseguire *manovre mentali* utilizzando e manipolando concetti, gruppi di concetti e catene deduttive, fino ad arrivare ad utilizzi ed esercizi atti ad impadronirsi dei concetti, anche applicati. Riferendoci ad un obiettivo del tipo "*impadronirsi dei concetti",* troviamo insiti in esso interessanti obiettivi secondari.
Gli obiettivi della Media inferiore e della Media superiore, sono a priori vanificati se non preceduti dal giusto e calibrato lavoro che si svolge nelle Scuole Primarie. Solo procedendo per gradi nelle superiori si potrà conquistare l'astratto, croce e delizia di tutta la didattica contemporanea. L'astratto viene definito in contrapposizione al *concreto, che è ciò che può essere acquisito con l'uso dei sensi.*
L'astratto di un qualsiasi oggetto concreto è nominalmente concepito come il *quid* che oggetti concreti, in qualche modo considerabili equivalenti, sottendono. Il comprendere l'astratto sarebbe il risultato di un'attività intellettuale che impadronendosi di molti concreti, dello stesso astratto, ne raggiunga un possesso vasto per esemplificazioni multiple (cfr, S. D'Andrea [4], 1994 e M. A. Brandimarte [2], 1988). A riguardo, negli attuali programmi per la Scuola Elementare si legge:
La vasta esperienza compiuta ha dimostrato che non è possibile giungere all'astrazione matematica senza percorrere un lungo itinerario che collega l'osservazione delta realtà, l'attività di matematizzazìone, la risoluzione di problemi e i primi livelli di formalizzazione.
La ricerca didattica sulle difficoltà dì apprendere la Matematica, allora che si sia d'accordo sugli obiettivi dell'obbligo e del l'approfondire, sembra allora essere legata al trovare una risposta a tutta una serie di domande che possiamo formulare nel modo seguente.
-. Scoprire le difficoltà insite nell'attuale modello di Matematica di utilizzo scolastico.
-. Individuare la differenza tra *abilità matematiche*, per l'applicazione della stessa a situazioni pratiche e tra le abilità per la comprensione dell'astratto.

Per merito dello psicologo inglese Martin Hughes (cfr.[11], 1983), sembra essere decisamente superato il punto di vista di Piaget, asserente una sorta di *mancanza dì capacità logica* nel bambino. Secondo Hughes i bambini avrebbero, in età prescolare, grandi capacità logiche, capacità che sarebbero frustrate allora che su questi supporti intuitivi e poco razionali, si sovrappone il difficile sistema linguistico, che costituisce il simbolismo della Matematica. Spunti per approfondimenti e ricerche successive sono i seguenti:

- Costruzioni di vocabolari logico-matematici meno ampi, con percorsi di ampliamento strettamente individualizzati.
- Minor uso di passaggi dal generale al particolare, da rimandare a momenti forse universitari.
- Costruzioni di vocabolari più vicini alle realtà degli allievi e comunque più vicine alle realtà della storia personale degli individui.
- Una attenzione particolare va posta nella gestione della formazione degli operatori scolastici ai fini di meglio equilibrare, in fase di formazione, il raccordo della cultura matematica sia con quella pedagogica che psicologica.
- Individuare percorsi didattici con periodi dì fissaggio dei concetti più articolati ed individualizzati.
- Maggior controllo sull'uso dei genitori come partners degli insegnanti, specialmente se la matematica usata e la metodologia è molto diversa da quella in uso al tempo in cui il genitore era uno studente.
- Accurata classificazione del materiale in uso per l'apprendimento creando una gerarchia di controllo dell'apprendimento, tipo istruzione programmata, naturalmente più flessibile e meno vincolante.
- Creazione di test adeguati per la verifica delle abilità possedute, di quelle conquistate e degli obiettivi via via raggiunti.
- Reperimento di giochi didattici per simulazioni di situazioni concrete, situazioni competitive e di coalizioni quali preparazione di elaborati per i quali sia indispensabile il lavoro di gruppo c quindi anche tendenti al recupero di studenti che tendano ad isolarsi.

Riteniamo che per ciascuno di questi punti si possa dedicare ampio spazio e ricerca anche sperimentale, in maniera da andare a costruire una banca dati operativa, anche individuale del docente, che sia di interesse per le applicazioni future. Quanto affermato è in chiaro contrasto con il punto di vista di Piaget. Il pensiero del Piaget ha subito profonde critiche negli ultimi anni. La critica si basa su considerazioni tipicamente pedagogiche; la suddivisione in periodi di apprendimento non sarebbe di alcuna utilità per comprendere i processi di apprendimento, anzi andrebbero maggiormente e più tecnicamente differenziati. In altre parole la teoria di Piaget si presenterebbe didatticamente irrilevante (cfr. Engelmann [7] 1983 e Hughes [11], 1986) in quanto essa non fornirebbe ad un docente alcuna indicazione su strategie da seguire. Ancora un aspetto sulle difficoltà della comprensione della Matematica è dato dal fatto che, oltre all'impadronirsi dei concetti, il bambino deve anche impadronirsi del simbolismo scritto e parlato dell'aritmetica e passo successivo deve imparare a capire come questa disciplina possa presentare un certo, ma non evidente, riscontro con fatti e realtà concrete.

2. Ricercare una logica nei percorsi didattici

L'aritmetica costituisce con il suo formalismo e le sue regole un codice complesso per il discente. Il bambino che in età prescolare ha imparato qualche piccola nozione, non le ritrova nel linguaggio scolastico, spesso lontano dal mondo reale. Salti di qualità si fanno solo a pezzi di sforzi immani, a volte anche contrastati da fenomeni di non disponibilità da parte sia di docenti sia di genitori. È vero che occorre portare il bambino non solo ad una abilità computazionale, ma addirittura ad una abilità applicativa per la soluzione, sia pure di semplici problemi (problem solving). Le difficoltà vengono anche da fattori di ordine linguistico e l'astrattezza della Matematica richiede a volte, una vera e propria opera di traduzione, da parte dei bambini stessi che da veri autodidatti devono cercare delle forme a loro comprensibili, magari scambiando l'esempio con la regola e il particolare con il generale.
Una ulteriore foresta di difficoltà si presenta allora che si pensi alla Matematica come disciplina, nella quale non sono ammessi salti logici. Tutto è strettamente concatenato e coerente. L'incoerenza è considerata un errore. Questo perché ai fini di arrivare al momento magico del Problem solving, occorre utilizzare tutta una serie di procedure precise, l'uso di algoritmi efficienti e la capacità di prendere le decisioni più plausibili nel caso di alternative.
Così non siamo autorizzati, nel caso di disabilità matematica, ad una politica di non intervento per le età pre-anni sette, alla luce del *tanto mancano le capacità logiche* di piaggettiana memoria. Oggi sappiamo che così non è, ed occorre dunque una politica di intervento e le strategie per operare in questa direzione. Insegnare la Matematica oggi nel periodo iniziale di formazione o costruire una mentalità giusta in allievi disabili, per impararne un pò, è compito veramente ingrato, sia per la difficoltà della stessa disciplina sia per il rinnovamento che essa ha subito dagli anni '30 in poi. (cfr AA.VV. [1], 2005, Pesc i[14] ,2018).
Oggi, specialmente in età di scuola materna, si sono diffusi numerosi giochi noti come *blocchi logici, seriazioni, classificazioni* che hanno lo scopo di affinare quelle sensibilità e quelle percezioni o stati percettivi che condurranno poi il bambino a percorrere sentieri divenuti di fatto quasi familiari, allora che inizi ad acquisire le sue conoscenze logico-matematiche, anche parziali o indotte da percorsi sia pure *di gioco.* I giochi naturalmente servono al docente esperto, per classificare in categorie le risposte degli allievi, in categorie costruite in funzione delle risposte,ma anche alla ricerca di nuovi paradigmi di socializzazione (cfr. Sciarra[18], 2007).
-. I bambini possono dare risposte simboliche per le quantità, con simbolismo del tutto personale. Se un bambino costruisce un codice occorre adoperare del tempo per decodificarlo e quindi colloquiare con lui.
-. I bambini possono dare risposte pittoriche, sia rappresentando la realtà che vedono, sia rappresentandone una più o meno vicina. Può non essere immediato il significato di quel disegno, ma sarebbe importante decodificare il messaggio sub comunicativo di cui esso

è il canale.
.-.I bambini possono dare una risposta a *mezza vìa,* cioè una risposta che ricorre solo parzialmente all'astratto. Esemplificando il bambino dice: *"Maestra ho 4 anni*" e mostra il 4 alzando 3 dita. La Maestra comprende che sta iniziando a capire un procedimento ancora non chiaro.
-. I bambini infine possono dare tutta una gamma di risposte negative nelle quali è di fatto molto difficile scoprire collegamenti di regolarità, con quanto si sta facendo. E' difficile, ma andrebbe approfondito il senso di questa irregolarità, tentando di capire se vi è ugualmente qualche positività. Infatti in quelle età è la ricerca del positivo che deve essere fatta e non quello del negativo; a nostro avviso fino a tutto il secondo ciclo elementare, ed in qualche caso fino all'intero periodo delle Medie.
In realtà, dai bambini in età prescolare ci dobbiamo aspettare risposte totalmente irregolari; anche se la realtà ci insegna che non è affatto così, perché una logica c'è, occorre scoprirla. L'utilizzo di giochi, ovvero di *materiale strutturato*, assolve a compiti fondamentali. Un compito, peraltro obiettivo secondario, è quello di rendere concrete e intellegibili le risposte sui concetti della matematica. L'obiettivo principale, anche se più riposto, è quello di facilitare le conquiste dei concetti e dell'astratto specialmente in presenza di allievi che mostrino carenze di adattamento in queste direzioni.
Per l'allievo normale è auspicabile, sia pure in modo ludico, presentare motivazioni reali in relazione ai problemi da trattare, in modo da creare una sorta di interesse affettivo o di curiosità sia per l'obiettivo apparente, magari nascondendo l'obiettivo principale ma sempre rimanendo nel cognitivo.
Per l'allievo diversamente abile, tali strategie si rivelano in generale piuttosto fallimentari. Conviene ricorrere ad aspetti motivazionali, che siano di stimolo a suscitare interesse, allora che si fa riferimento ad un bambino che sia attento osservatore del mondo e che abbia iniziato ad interagire con le dinamiche varie, che il mondo riversa su di lui. Ovviamente, tali metodiche sono del tutto perdenti allora che siano manifeste carenze proprio nella direzione di queste interazioni. Le pur interessanti e notevoli ricerche didattiche di questi ultimi anni poco ci dicono su come agire in queste direzioni e l'unico strumento che sembra ancora valido è quello del docente che, per vari intuiti personali e per sensibilità acquisite nell'esperienza, riesca a *fare breccia* al di là del muro del silenzio.
A volte può essere molto indicativo il problema del rapporto con il cibo, a parte casi gravi patologicamente conclamati di disturbi del comportamento alimentare come i fenomeni di anoressia, bulimia e obesità. Ma anche insorgenze minori ci indicano l'insorgere di patologie dell'apprendimento. Tali patologia minori vanno prese in alta considerazione, anche se gli stessi genitori tendono a nasconderle ed ignorarle. (cfr. S.D'Andrea [5], 2010).
Per l'allievo disabile è certamente il calcolatore uno strumento utilissimo, lo si può usare sia per calcolare, sia per scrivere, sia per archiviare. Sarebbe un grande successo, sia pure ottenere solo queste tre cose, dopo il ciclo elementare.
Sull'uso del computer sorgono oramai numerose problematiche, che andrebbero dibattute da molteplici punti di vista. Ci riferiamo a (R. Santarossa [15], 2019) che ha recentemente

acceso un interessante dibattito sul progetto "Lenovo" relativo al docente-macchina! La sua lettera ha suscitato interessanti commenti ed articoli di dibattito sulla validità dell'idea del docente-macchina.
Le ricerche in questi vari settori dovrebbero condurci ad avere risposte ai seguenti problemi, probabilmente tra i fondamentali del settore:
1.- Precise metodiche per l'insegnante ai fini dell'acquisizione di abilità matema-tiche da parte degli allievi, da classificare come irrinunciabili. Scelta ed adatta-mento delle stesse in presenza di differenti abilità.
2.-Utilizzo sempre maggiore dei materiali ludici standard, come *medicine* per interventi su particolari carenze, individuate e classificate mediante *diagnosi precise* ed *analisi ripetibili* e classificazioni sempre più accurate.
3.- Ai fini della valutazione scolastica viviamo oggi una sorta di ottica binaria che consiste nel dichiarare a priori l'allievo abile o diversamente abile. Ma sappiamo bene che l'atteggiamento binario è fallace, tra il bianco e nero vi è una infinità di grigi, ogni grigio con una sua specifica dignità. Il problema sarebbe l'individuare una serie di parametri di genere *fuzzy*, che permettano una classificazione e quindi una valutazione ben più articolata di queste differenze di abilità.

Concludendo il paragrafo l'intero istituto della valutazione andrebbe ristrutturato in maniera da poter tener conto, non solamente dello stato astratto di preparazione del-l'individuo, bensì con il considerare anche il gradiente tra preparazione iniziale e finale. In alcuni ambienti come nella valutazione della abilità informatiche, tale valutazione a gradiente è indispensabile, anche perché esiste una forma di auto apprendimento, che per sua natura ci si presenta molto variegata. Il problema si presenta pesantemente anche davanti ad allievi, provenienti da ambienti sociali e scolastici, estremamente differenziati. Tutto ciò, naturalmente, in relazione agli obiettivi posti e in funzione del suo *gradino di abilità sia pur differente.*

3. Verso nuovi paradigmi

Il mutamento fondamentale che oggi appare è quello che è indotto dal mondo dell'informatica (Tagliagambe [20], 2001, Eugeni [10],2008). Dal nome iniziale, contrazione di informazione-automatica, la disciplina pur non facendo parte di alcuna delle scienze sopradette, si connette oramai in modo indissolubile con ciascuna di esse. Da notare che l'avvento della sociologia come disciplina aggregante più discipline comprende l'idea della moltiplicazione dei paradigmi. Ne citiamo alcuni:
a.- il paradigma cosmologico, nacque l'indomani della rivoluzione copernicana, e fu una grande rivoluzione sulle credenze mistico-scientifiche dell'uomo.
b.- Il paradigma dei sistemi razionali, che pone alla base di una teoria scientifica un sistema di assiomi e una logica per dedurre, che elimina il carattere mistico dei fondamenti e ne individua i difetti e i limiti.

c. – Il paradigma indiziario che prende le mosse dalla patologia medica di fine settecento e si sposta in vari settori dello scibile quali storia dell'arte e la valutazione dei falsi d'autore, la criminologia, la microstoria e non ultima la valutazione in situazione di incertezza, usata in ogni sistema di valutazione ivi compresa la valutazione scolastica.
d.- Il paradigma cooperativo, la cui presenza in ambito scolastico si fa sempre maggiormente presente, se non addirittura indispensabile.
Per andare nei meandri del paradigma cooperativo, almeno nell'ottica del sociologo ci riferiamo al concetto di azione sociale, (cfr. Sciarra [16], 2004) come l'oggetto del campo fondazionale della ricerca sociale, concetto con il quale l'intera scienza dell'informazione si deve rapportare (cfr.Minsky[13], 1985).
L'azione sociale non è concetto facile da definire esplicitamente, per cui ci limiteremo a riportarne una serie di attributi caratterizzanti (o assiomi), non troppo restrittivi, in modo da lasciare uno spazio all'intervento su eventuali azioni sociali "non logicamente codificate", o se si vuole "di nuova generazione", ma nello stesso tempo non troppo larghe da trovarci davanti un oceano incontrollato di problematiche. Naturalmente all'idea di azione sociale, si connettono alcune parole chiave quali: gli attori, le relazioni, i condizionamenti, le preferenze, le incertezze. Circa questi "termini primitivi" il legame che si esprime tra loro, si può sintetizzare nelle seguenti richieste:
l'azione sociale è legata agli aspetti simbolico-mentali delle relazioni che si creano tra gli attori;
l'azione sociale è rilevante per il coinvolgimento di quelle credenze simboliche possedute dagli attori, cioè di coloro che assolvono un ruolo nel sistema relazionale che nasce tra gli attori. Sono importanti dunque: la credenza simbolica in valori e il costume riferito a ritualità e tradizioni, la presenza di passioni, emozioni ed anche atti irrazionali;
l'azione sociale, come sappiamo, non sempre accetta logiche di profitto; si dirige talvolta verso valutazioni che prediligono i valori posseduti, i criteri soggettivi, i condizionamenti, le motivazioni di preferenza anche irrazionali fino anche ad effettuare scelte in condizioni di incertezza dettate da una sorta di "soggettivismo emotivo";
l'azione sociale è irrilevante dal punto di vista logico-sperimentale.

Gli atteggiamenti che nascono davanti ad una scelta elettorale del singolo attore-cittadino, della scelta artistica di un attore-designer, le scelte culturali di un attore-architetto, le motivazioni di alcuni attori-religiosi, esprimono l'eterogeneità del fenomeno. Nel secolo scorso l'azione di un qualsiasi attore appariva molto indipendente, in quanto i condizionamenti erano dovuti quasi esclusivamente alla storia individuale dell'attore. Oggi la realtà è ben più complessa, per la presenza del fenomeno dei condizionamenti dovuti ai Mass Media! Siamo in una società dove l'apparire, molto spesso si sovrappone all'essere e magari tende a sopraffarlo. Ecco che l'informatica entra fatalmente nell'aumento della complessità dei condizionamenti e quindi delle modifiche delle valutazioni irrazionali del singolo attore che viene ad essere sottoposto ad un condizionamento che spesso deriva da azioni sociali guidate dal controllo dei mass media. Esse in realtà sono prodotte mediante strategie pianificate e perfettamente razionalizzate

da altrettante complesse analisi di mercato, queste a loro volta, prodotte da strutture informatiche, che sembrano agire nell'ombra come i segreti attori che costituivano il Grande Fratello nel "1984" di orwelliana memoria!
Seguendo appunto Somalvico ed anche Tagliagambei, conveniamo di condividere l'idea di trovarci in presenza di un vero e proprio mutamento antropologico, allora che riguardiamo le due polarità emergenti nelle nostre considerazioni come aspetti diversi dell'azione sociale che stiamo esaminando fenomeno dell'ambito dell'informatica e non solo dell'intelligenza artificiale. Si tratta delle polarità:
polo uomo-corpo,
polo uomo-macchina.
E' a partire dalla costruzione di artefatti di qualunque natura ma che simulino, producano, amplifichino, semplifichino l'attività dell'uomo, è da quel momento che la polarità uomo-macchina comincia a vivere la sua vita al di fuori dell'altra polarità uomo-corpo.
Noi non riteniamo assolutamente – per ora naturalmente – che la macchina possa sopraffare l'uomo. Nella storia del mondo ciò non è di fatto accaduto.
In misura più o meno varia, alcune attività che l'uomo non riesce a compiere con il corpo per limitazioni fisiche, chimiche, temporali o organizzative, possono essere compiute indirettamente, ma perfettamente, mediante delle macchine. Non pensiamo solo ai più moderni computer ma pensiamo alle tante macchine della storia dalla leva e la ruota fino alle sonde interplanetarie.
Così la polarità uomo-macchina si è costituita come parte essenziale della Società sempre in modo più esasperato dando luogo all'idea dell'uomo bipolare, concetto che, sempre seguendo Somalvico (cfr.[19], 1987), si può estendere all'intera società vista come aggregato di uomini bipolari. Ne nasce una Società a sua volta bipolare nelle polarità società-corpo e società-macchina.
Rimane aperto il problema di studiare dal punto di vista della psichiatria il fenomeno della polarità uomo-macchina individuandone i traumi e i drammi. Per ora si prescinde da questa analisi. Nasce in effetti un nuovo tipo di macchina dell'informazione, che prende il nome di macchina della cooperazione o agenzia. Le agenzie sono particolari tipi di sistemi multiagenti (multiagent systems), sistemi che possono essere definiti come segue.
I sistemi multiagenti (cfr. Weiss[23], 1999) sono sistemi che si sono sviluppati all'interno dell'Intelligenza Artificiale Distribuita (DAI, Distribuited Artificial Intelligence) composti da una serie di entità chiamate agenti umani (o attori) e agenti artificiali (processi software, elaboratori, macchine o robot con capacità inferenziali) anche spazialmente distanti, ma che interagiscono a vari livelli e secondo varie modalità (abbiamo preferito aggiungere gli appellativi umano ed artificiale ad agente per meglio indicare la natura della definizione). Naturalmente lo studio e la critica di tali concetti andrebbe approfondita, specie dal punto di vista epistemologico (cfr. Sciarra [17], 2006), i cui fondamenti tendono a chiarire la sostanza reale dell'impianto teorico, e dell'assiomatica caratterizzante, al momento non analizzata dal punto di vista della minimalità.
Un'agente artificiale è caratterizzato da varie proprietà quali:

l'autonomia, intesa come capacità di controllare le sue azioni e il suo stato interno.
la reattività, intesa come capacità di percepire, adattarsi e rispondere ai cambiamenti sia dell'ambiente interno sia nei rapporti con l'esterno
l'abilità cooperativa, intesa come capacità sociale di interagire con altri agenti
la proattività, intesa come capacità di adattare comportamenti, modalità, dinamiche interne umane e artificiali, dirette ad un fine progettuale.
Un agenzia è un sistema multiagenti (cfr. Somalvico [19], 1987, Eugeni [[9], 2008, Maturo [12], 2003) progettato per cooperare e per essere considerato a tutti gli effetti come una singola entità nonostante la molteplicità degli agenti umani ed artificiali che lo compongono i quali condividono sistemi collaborativi al fine del perseguire un obiettivo progettuale comune. Problematiche tipiche dell'agenzia sono le seguenti:
l'agenzia deve gestire una rete di comunicazione tra gli agenti che la compongono;
occorre una flessibilità dell'architettura del sistema che consiste nel poter, con facilità, aggiungere o rimuovere agenti del sistema;
capacità di operare in parallelo per agenti e/o per sottosistemi;
una struttura organizzativa chiara ed efficiente che può essere di tipo gerarchico o oligarchico, con tutti gli agenti considerati allo stesso livello di potere o mista! Le modalità di assegnazione e di controllo dei compiti, facile nel modello gerarchico è da negoziare in altri sistemi ad un opportuno livello di parità di potere;
le modalità di condividere e scambiare le conoscenze, che può essere quello di un grande magazzino di memoria comune con password di accesso per strati e categorie.
Il concetto di agenzia, come aggregato unitario di agenti umani e artificiali in cooperazione, è stato, di fatto, introdotto da Marvin Misky (cfr. [13], 1985) nel suo pionieristico The Society of Mind, nel quale precisa pure, in embrione, l'idea che ogni agente debba essere riguardato come governato da un suo specifico paradigma che lo descrive dal punto di vista fenomenologico.

Assieme quindi all'idea del pacchetto di paradigmi (cfr. Sciarra [18], 2007), . non va sottaciuto è una miglior definizione dell'idea cooperazionale, specialmente dal punto di vista delle applicazioni alla didattica (cfr. AA.VV. [1],2005, Pesci [14], 2018, Cohen [6], 1999).
Ogni distribuzione di risorse e di lavoro tra i membri di una organizzazione sociale provoca la formazione di coalizioni nel tentativo di risolvere i conflitti dettati in ragione di interessi particolari o collettivi non condivisi. Nasce così quello che fu chiamato, nel 1944, da Von Newman e Morgestern,(cfr.[21], 1944)un "gioco cooperativo" tra gli individui deputati a decidere e che si realizza appunto nell'esprimere la propria decisione, mirando all'obiettivo comune di migliorare la condizione globale di un determinato gruppo. La soluzione di un gioco è generalmente interpretata come la descrizione degli obiettivi decisi e dal punto di vista sociale come l'espressione della volontà della maggioranza di un'as-semblea. (cfr. Eugeni [9]2008, Maturo [12],2003, Weiss [23],1999).
Risolvere ed analizzare un gioco è di importanza fondamentale per valutare i conflitti di

interesse che si vadano a creare in campo economico, militare, sociale e quindi anche all'interno di una struttura consortile come un'agenzia. Definiamo, dal punto di vista della Matematica Discreta la struttura generale dei giochi semisemplici che generalizzano di poco quelli introdotti da Von Newman e Morgestern.
Sia S un insieme di elementi astratti da chiamare giocatori (players) che tuttavia potrebbero chiamarsi anche punti in una visione geometrica o agenti/attori sia umani che artificiali del modello dell'agenzia. Le parti o sottoinsiemi di S si dicono le coalizioni (possibili). Indichiamo con P(S) l'insieme delle parti X di S.
Supponiamo di assegnare una funzione a valori reali:
$v : P(S) \rightarrow R$
che ad ogni sottoinsieme X di S associa il numero reale v(X), detto il valore della parte X. Se X è un singleton, costituito dal solo elemento x scriveremo v(x) e chiameremo v(x) il valore del giocatore. Supporremo che per la funzione v valgano le seguenti due proprietà:

1) $v(\emptyset) = 0$, ($\emptyset$ denota l'insieme vuoto)
2) $v(X \cup Y) \geq v(X) + v(Y)$, $\forall X,Y \in \boldsymbol{P(S)}$, t.c. $X \cap Y =$ □ (*superaddittività*).

La coppia (S, v) si dice un gioco cooperativo.
Noi assumiamo l'ipotesi che un giocatore che partecipi ad una coalizione trasferisca alla coalizione il suo intero valore. Ne segue, per la 2), che due giocatori che partecipano ad una coalizione vi partecipano con un valore che è almeno pari alla somma dei valori di entrambi. Ma qui entriamo nei meandri di argomenti di carattere ben più elevato, per i quali rimandiamo a Eugeni [9], 2008, Maturo [12], 2003.

Bibliografia.

[1] BALDRIGHI A., BELLINZONA C. PESCI A., (2005), *L'evoluzione disciplinare e sociale di alcuni alunni in difficoltà durante le esperienze di apprendimento cooperativo*, atti del Convegno Nazionale n. 14 "Matematica & Difficoltà", A. Davoli, B. Piochi, P. Sandri (a cura di), Bologna Pitagora, pp.104-109.
[2] BRANDIMARTE M.A., (1988). *Lo sviluppo delle competenze matematiche*, Psicologia e scuola, 37, 15-29.
[3] BRUNER J. S., (1992), *Il significato dell'educazione*, Ed. Armando, Roma.
[4] D'ANDREA S., (1994), *Disabilità matematiche e strategie per l'apprendimento,* Atti del Convegno Nazionale Mathesis su: *L'impatto della modellistica nella divulgazione e nella didattica, Rovigo,* Pubblicato in Ratio Math.8 (1994),pp.83-89. (scaricabile in www.apav.it)
[5] D'ANDREA S., (2010) *Servizi istituzionali per le persone in difficoltà, con disturbi del comportamento alimentare,* Ziqqurat Edizioni, Teramo, 158 pp.
[6] COHEN E. G., (1999) *Organizzare i gruppi cooperativi*, Trento, Erickson.

[7] ENGELMANN S., (1983), *Piaget e la didattica: promessa o delusione*?, Psicologia e Scuola n.166-12.
[8] EUGENI F., (1992). *Le due rivoluzioni del secolo: da Bourbaki alla Matematica del discreto,* Periodico di Matematiche, 1 pp. 3-21.
[9] EUGENI F., (2008). *Epistemologia e fondamenti dell'informatica nella società delle comunicazioni*,(scaricabile in: www,afsu.it/settori/Informatica).
[10] EUGENI F., (2008*), La società e i fondamenti dell'Informatica, Zikkurat ed., Teramo.*
[11] HUGHES M., (1983).*What is difficuit ahout learning arithmetic?*, in Donaldson Editor; "Early Childhood Development and Educatimi. Basii Blackwell, Oxford
[12] MATURO A.,(2003). *Cooperative Games, Finite Geometries and Hyperstructures*, Ratio Math., 14 (2003), pp. 57-70.
[13] MISKY M., (1985), *The Society of Mind*, Simon & Schuster, NY.
[14] PESCI A., (2018). *Attività tra pari nell'ora di matematica: cosa imparano studenti ed insegnanti*, in Convegno Nazionale-Corso di formazione: *Nuove prospettive nella Didattica e nei fondamenti della Matematica*,20/21 Aprile, Rimini, APAV Editrice. (scaricabile in www.apav.it).
[15] SANTAROSSA R., (2019). *Lettera aperta sulla ricerca "Lenovo"*, Bollet-tino dell'AFSU, vol.II, pp.131-138, con commenti di F.Eugeni (*Per una risposta alla lettera di R.S.*) e L.Nicotra (*Computer si, computer no?*), (scaricabile in: www.afsu.it/riviste/Bollettini, oppure in www,afsu.it/riviste/P. di Matematica, anno 33°).
[16] SCIARRA E., (2004).*Raymond Boudon e l'epistemologia dell'azione sociale,* Libreria Universitaria Editrice, Pescara.
[17] SCIARRA E. (2006). *Motivi e sviluppi dell'epistemologia contemporanea,* Libreria Universitaria Editrice, Pescara.
[18] SCIARRA E. (2007).Paradigmi e metodi di ricerca sulla socializzazione autorganizzante., Libreria Universitaria Editrice, Pescara.
[19] SOMALVICO M., (1987). *Emula e non simula*, in Jacobelli J. (a cura di), *Aspettando Robot. Il futuro prossimo dell'intelligenza artificiale*, Laterza Bari.
[20] TAGLIAGAMBE S., (2001). *La didattica e la rete,* Pitagora ed., Bologna.
[21] VON NEWMAN J.- MORGESTERN O., (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University, N.J.(USA).
[22] WEBER M., (1958). *Il metodo delle scienze storico-sociali*, Einaudi, Torino.
[23] WEISS G., (1999). *Multiagent systems: A Modern approach to distribuited Artificial Intelligence*, MIT Press.

Istruzioni per gli autori

Chi desidera inviare un articolo per la Rivista Mondo Matematico e Dintorni deve seguire i seguenti criteri per il formato:

(1) L'articolo deve essere in word, carattere Times New Roman, 12 p; il titolo dell'articolo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 18 p.

(2) I margini sono di 3 cm sotto, sopra, a destra e a sinistra. L'interlinea è multipla 1,15 p

(3) L'articolo deve essere diviso in paragrafi numerati, di cui il primo è una introduzione e l'ultimo una conclusione. I paragrafi vanno separati da due interlinee. Il titolo di ogni paragrafo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 14 p.

(4) Ogni articolo deve avere una lunghezza minima di 6 pagine e non deve superare, di regola, le 14 pagine.

(5) Dopo l'ultimo paragrafo va inserita la bibliografia. Almeno 4 fra libri e articoli nel formato cognome, nome (anno), titolo dell'articolo, titolo del libro o rivista, editore, città.

(6) La bibliografia non va numerata. I riferimenti bibliografici nel testo devono avere la forma (cognome dell'autore, anno).

(7) Non mettere note bibliografiche a piè di pagina. Tutta la bibliografia va messa alla fine.

(8) I disegni vanno fatti con programmi di elaborazione grafica (non in Word!) e salvati in jpg o in png.

(9) L'articolo deve essere inviato in formato doc o docx ed in formato pdf per il controllo dell'impaginazione e deve avere un numero pari di pagine.

Tutti gli articoli ricevuti saranno esaminati da due revisori che invieranno il loro parere sulla pubblicazione ed eventuali proposte di correzioni ai direttori editoriali.

Gli articolo possono essere inviati ad uno dei seguenti indirizzi email:

antomato75@gmail.com

lucianadr@live.it

matematicaedintorni@libero.it

Accademia
Piceno - Aprutina
dei Velati in Teramo

ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola
(Decreto del 24/07/2009 e Direttiva 170/2016)

Finito di Stampare nel mese di Giugno 2020