



ACCADEMIA PICENO APRUTINA DEI VELATI

2^a CONGRESSO DELLA FEDERAZIONE ITALIANA MATHESIS

**Formazione, didattica e ricerca
matematica. Per gli insegnanti
del futuro.**

APAV

Serie Quaderni dell'Apav n. 6

ISBN 9788894350159



**Accademia
Piceno - Aprutina
dei Velati in Teramo**
ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Fatto accreditare dal MIUR il 10 per la formazione del personale della scuola
(Decreto del 14/9/2009 e Decreto 1/9/2010)



2° Congresso della Federazione Italiana Mathesis

***Formazione, didattica e ricerca matematica.
Per gli insegnanti del futuro***

Presidente dell'Apav: *Fabio Manuppella*

Presidente della Federazione Italiana Mathesis

Luciano Corso

Curatori del volume

Antonio Maturo, Renata Santarossa

Copertina e impaginazione: *Fabio Manuppella*

COPYRIGHT © 2021 TUTTI I DIRITTI RISERVATI

Accademia Piceno Aprutina dei Velati in Teramo
Via del Concilio n.24, Pescara, Italia

Codice Fiscale 92036140678 - P. iva 02184450688
Codice destinatario per fatturazione elettronica: M5UXCR1

Banca Unicredit - Agenzia Pescara Umberto 00760
Codice IBAN: IT 57 K 02008 15408 000104232062
BIC Swift UNCRITM1760

Siti web: www.apav.it - www.eiris.it
Email: apavsegreteria@gmail.com , apavsegreteria@pec.it
Stampato nel mese di luglio 2021 in Pescara

Copertina: Fabio Manuppella
Sito web: www.fabiomanuppella.it, email: fabiomanuppella@gmail.com

Il quaderno è pubblicato sotto la Licenza Creative Commons Attribuzione 3.0 Italia



Prefazione

Questo volume, numero 6 della serie dei “Quaderni dell’Apav”, è dedicato alla memoria di Giuseppe Manuppella, il nostro collega e soprattutto amico che ha fortemente voluto questi quaderni come strumento di ausilio per il lavoro dei docenti.



Ricordiamo che, se è vero che la Federazione Italiana Mathesis è nata ufficialmente verso la fine del 2019, in concomitanza con il suo primo Congresso a Diamante, in provincia di Cosenza, il gruppo di sezioni che poi ha dato luogo alla Federazione ha fatto il suo primo Convegno Nazionale a Rimini, dal 20 al 22 aprile 2018, dal titolo *“L’attualità degli insegnamenti dei grandi maestri della Mathesis nella seconda metà del secolo XX. Nuove prospettive nella didattica e nei fondamenti della Matematica”*.

Proprio per documentare i risultati scientifici e organizzativi ottenuti in quel Convegno, Peppe Manuppella ha deciso di iniziare la preparazione e la stampa della Collana dei *“Quaderni dell’Apav”*, dedicando il primo dei volumi al Convegno di Rimini.

Sono stati anche stampati, nel 2018, il secondo volume dei “Quaderni dell’Apav” su “La Matematica dell’incerto” (Scuola Estiva di Castellammare di Stabia, per i Docenti del Secondo Ciclo di Istruzione) e il terzo volume su “Insegnare Matematica: didattica, inclusione e cooperazione” (Scuola Estiva di Pizzoferrato, in provincia di Chieti, per i docenti del Primo Ciclo di Istruzione). Entrambe le scuole estive sono state portate avanti dai docenti che, nell’anno successivo, avrebbero fondato la Federazione Italiana Mathesis e documentano l’intensa attività che poi avrebbe avuto come logica conseguenza la fondazione della Federazione nell’anno successivo.

Il Congresso di Diamante è stato preceduto, nel 2019, da due importanti iniziative: un corso di formazione in Fisica a Napoli e una scuola estiva a Pescasseroli (Aq), le cui tematiche sono state trattate, rispettivamente, nei quaderni Apav n. 4 e n.5.

All'inizio del 2020 l'attività del gruppo di lavoro dei docenti appartenenti alla Federazione Italiana Mathesis è stata interrotta a causa dei tristi eventi del periodo: la pandemia e la scomparsa di Peppe Manuppella.

Alla fine del 2020 abbiamo ripreso la nostra attività, è stato svolto un riuscito Congresso online con belle relazioni e il contenuto di almeno gran parte delle relazioni è contenuto in questo volume. Il libro presenta anche alcuni articoli che, preparati per il Congresso, non hanno potuto essere presentati per mancanza di tempo.

Di rilievo anche l'attività editoriale dell'Apav. Sin dalla fondazione è stata pubblicata la rivista Ratio Mathematica; la rivista Science&Philosophy ha iniziato le sue pubblicazioni nel 2013. Le due riviste hanno subito avuto ampi riconoscimenti scientifici in ambito internazionale, ma Giuseppe voleva anche una rivista più orientata al mondo della scuola del primo ciclo, rigorosamente in italiano, con argomenti e metodologie trattati in maniera lineare e immediatamente fruibili per la didattica. Così è nata "Mondo Matematico e Dintorni" nel 2018. Nel 2020, venuto meno Giuseppe, abbiamo vissuto un anno travagliato, anche a causa dell'epidemia.

Con questo volume, in onore di Giuseppe, riprendiamo le pubblicazioni con un numero unico per il 2020.

Ringraziamo Rosalia Pedone, Eula Grilli e Anna Vaccarella per il paziente e competente lavoro di organizzazione del Congresso.

Antonio Maturò e Renata Santarossa

Formazione, didattica e ricerca matematica. Per gli insegnanti del futuro.
Pescara, 2-4 dicembre 2020. Quaderno APAV n. 6, (2021), 3-6



Presentazione del Congresso

Luciano Corso

Presidente della Federazione Italiana Mathesis
lcorso@iol.it – info@mathesis.verona.it

1. Premessa

La Federazione Italiana Mathesis, è nata l'anno scorso (2019) e ora sono federate otto associazioni che si interessano di Matematica e di argomenti scientifici e che sono dislocate in nove città italiane: Castellammare di Stabia, Benevento, Bergamo, Camerino, Firenze, Napoli, Chieti, Pescara, Verona. L'impegno di questa Federazione è di promuovere la cultura e la didattica della Matematica e delle discipline affini (Fisica primariamente) nelle scuole e nella società attraverso molteplici azioni. L'associazione è senza fine di lucro. Il logo della Federazione è l'*arbelos* di Archimede (Figura sotto).



La Federazione collabora con le scuole, con le Università (in questo caso con l'Università degli Studi G. D'Annunzio di Chieti e Pescara), con enti culturali vari (in questo convegno è importante il sostegno dell'APAV – Accademia Piceno-Aprutina dei Velati in Teramo) tutti mossi dagli stessi scopi nelle diverse parti d'Italia. Spesso da questa

collaborazione nascono reciproci vantaggi che vanno finalizzati al miglioramento dell'efficacia del nostro operare.

Questo è il secondo congresso nazionale che facciamo; il primo fu fatto l'anno scorso a Diamante in provincia di Cosenza. La volontà di fare il congresso di Pescara nasce in maggio; si era pensato di farlo in presenza, ma poi, purtroppo a causa della pandemia, l'organigramma operativo dei tre giorni del convegno è cambiato ed è stato necessario orientarsi verso la preparazione e l'esecuzione di un congresso *on line* secondo quanto stabilito nel programma che voi tutti possedete.

I congressi sono strumenti di formazione per gli insegnanti e costituiscono una base culturale per lo sviluppo della conoscenza delle matematiche, per l'approfondimento dei metodi didattici e per il loro confronto interattivo tra docenti. Insieme alle scuole di formazione e ai corsi di aggiornamento e di approfondimento, i congressi e i convegni rappresentano gli organi elettivi per il miglioramento delle conoscenze dei docenti.

Durante questi tre giorni congressuali verranno onorate le figure di due colleghi che tanto hanno dato per la Mathesis, per l'APAV e per la ricerca nella didattica della Matematica nel corso della loro vita. Essi sono i professori Giuseppe Manuppella di Pescara e Aldo Morelli di Napoli. Con il ricordo del primo apriamo il congresso e con quello di Morelli lo chiuderemo.

2. La formazione dei docenti e la ricerca

Ogni corso di aggiornamento nell'ambito delle matematiche si fonda su tre basi strutturali della funzione docente:

- 2.1) la formazione dei docenti,
- 2.2) la didattica (intesa come ricerca didattica),
- 2.3) la ricerca matematica.

Lo sviluppo di tutti i corsi di aggiornamento e dei congressi che riguardano la Matematica e le scienze affini è orientato alla trattazione più o meno accentuata di queste fasi strutturali e in particolare questo congresso, questo corso di aggiornamento, affronta più o meno implicitamente questi tre temi generali.

2.1) La formazione dei docenti

Sappiamo che la Matematica è una materia ostica da insegnare e da apprendere; la sua conoscenza richiede applicazione, studio. Sappiamo quanto sia frequente trovare uomini di cultura che quasi per vanto riferiscono che di matematica non hanno mai capito niente. Si dice, per esempio, che Benedetto Croce, noto filosofo italiano, si vantasse di non aver capito perché $2 + 2 = 4$ e facesse battute piuttosto pesanti sulla Matematica e sul suo valore formativo. Sono stati forse i loro docenti a orientare questi uomini colti verso giudizi così negativi nei confronti della nostra disciplina? Sicuramente non tutti hanno attitudini per gli studi matematici; ma il ruolo dei docenti non è irrilevante.

Presentazione del Congresso

Chi insegna sa quanto sia difficile presentare gli argomenti di matematica agli studenti e quanto sia necessario riflettere sul come esporre nel miglior modo possibile certi temi sottili di logica o di analisi o di geometria analitica. Ecco la ragione per cui tutti i docenti devono essere ben formati, preparati a svolgere lezioni efficaci e a dare risposte anche alle domande più impertinenti degli studenti.

In questo convegno ci sono relazioni anche dal titolo accattivante che potranno destare curiosità tra i docenti.

2.2) La ricerca didattica

La ricerca didattica afferisce a tutti gli studi che riguardano i metodi di insegnamento delle varie parti della disciplina tenendo conto delle basi raggiunte, dell'età degli studenti e dei tempi disponibili.

A parità di condizioni sappiamo che un metodo non vale l'altro. Ci sono processi di apprendimento che favoriscono la comprensione di un argomento più di altri. Va inoltre considerato che l'aver male digerito in passato certi argomenti ha conseguenze sul presente. Errori e concetti precari generano negli studenti difficoltà di attenzione e sono fonte di disagio nel quotidiano lavoro scolastico. La ricerca didattica ha lo scopo di selezionare le procedure più efficaci a far comprendere meglio ciò che si sta insegnando. Per esempio, il concetto di funzione può essere compreso sia se lo si introduce come applicazione da insiemi finiti a insiemi finiti, sia come applicazione nel continuo e quindi con l'uso di rappresentazioni in diagramma cartesiano. Il confronto dei risultati che si ottengono dall'applicazione di questi due approcci ci aiuta a capire quale dei due è meglio scegliere. Per mia esperienza di docente ritengo che l'approccio nel primo caso sia più efficace.

Quando si insegna, di norma, ci sono delle preferenze nella scelta degli argomenti da trattare (le linee guida del MIUR permettono questo); poi con l'andar del tempo subentra l'inerzia al cambiamento. Sicché i docenti sono refrattari al nuovo che avanza. Così molti docenti trovano difficoltà a presentare agli studenti punti di vista diversi nell'affrontare certi argomenti di matematica, anche per paura che poi gli studenti siano svantaggiati nella loro preparazione alle prove d'esame. È il caso, per esempio, dei metodi standard e non standard in analisi matematica.

Anche la matematica applicata è importante. In questo tempo di pandemia, abbiamo sentito parlare di modelli di equazioni differenziali atti a descrivere l'andamento dei contagi al variare del tempo, con apporti importanti del calcolo delle probabilità, della statistica e della ricerca operativa.

2.3) La ricerca matematica

La ricerca matematica dovrebbe essere l'essenza della funzione docente. Di che cosa si sente bisogno, in particolare? Tutti noi abbiamo bisogno di un legame stretto tra ciò che

Luciano Corso

insegniamo e ciò che la ricerca matematica ha raggiunto. Questo legame corrisponde al famoso motto “Volgere i progressi della Scienza a beneficio della Scuola” (di Alberto Conti, Bollettino di Matematica, 1902). La ricerca deve comunicare ai docenti i risultati ottenuti e utili per il miglioramento dell’insegnamento, ma anche indicare il quadro complessivo delle conoscenze di base che devono avere gli studenti per permettere loro di aprire un testo scientifico di divulgazione e di decodificare il supporto matematico allo sviluppo degli argomenti scientifici che lì si trovano riportati. Insomma, appare in tutta la sua evidenza l’importanza di capire *che cosa si deve insegnare agli studenti, quale matematica è indispensabile* per poter stare al passo con i tempi. Sono i nostri ragazzi sufficientemente preparati per comprendere gli strumenti matematici che accompagnano le comunicazioni degli esperti in questi giorni di pandemia (Tabelle, grafici, equazioni differenziali, dinamica parametrica (Rt), crescita esponenziale, andamenti ondulatori con componente casuale)? Siamo sicuri che la nostra impronta, il segno che lasciamo ai nostri studenti, i programmi che svolgiamo, le linee guida ministeriali siano per loro un utile bagaglio culturale in questa direzione?

Non può esserci modernità d’insegnamento della Matematica se chi insegna non ha un occhio anche verso la ricerca matematica. È lì, infatti, che si sviluppa dinamicamente lo stato dell’arte con le inevitabili ricadute nell’insegnamento della disciplina.

Per queste ragioni ci ostiniamo ancora a preparare corsi di aggiornamento, convegni e congressi di Matematica come questo di Pescara, consapevoli che questa disciplina ha un alto valore formativo per tutti.

Luciano Corso

Platone matematico

Carlo Toffalori

Università di Camerino
email carlo.toffalori@unicam.it

Sunto

Nell'ottica di un laboratorio didattico per studenti della scuola secondaria di secondo grado, si trattano il ruolo della matematica nel pensiero di Platone e alcuni temi matematici presenti nella sua opera, in particolare la commensurabilità dei segmenti e i poliedri regolari.

Parole Chiave

Educazione matematica; numero irrazionale; solido platonico; platonismo matematico.

1. Introduzione

Proclo, commentatore del V secolo d. C., nel suo *Riassunto* – una breve storia della geometria pre-euclidea – ricorda come Platone favorì il massimo incremento delle scienze matematiche “*per il suo grande amore verso di esse*”, “*riempì i suoi scritti di considerazioni matematiche e dovunque destò ammirazione per questa scienza in coloro che studiano filosofia*”.

Aristotele nella sua *Metafisica* conferma, anche se sembra disapprovare; lamenta infatti che “*per i filosofi di oggi la filosofia è diventata matematica*”.

Come che sia, Platone, pur non essendo un matematico, fornì tuttavia contributi importanti alla “*via regia*” che da Pitagora conduce a Euclide e Archimede. Un quadro completo della matematica nella sua opera si trova nel bel libro di A. Frajese [Fr]. Qui proponiamo una sorta di itinerario didattico su Platone matematico per le scuole secondarie di secondo grado, con collegamenti a filosofia, musica, astronomia, fisica, chimica, storia dell'arte

A motivarlo basta forse solo il celebre complimento che a Platone rivolse Alfred North Whitehead (1861-1947), matematico e filosofo inglese: “*la caratterizzazione più certa della tradizione filosofica europea è che essa non è altro che una serie di note a margine su Platone*”.

Per cominciare, possiamo proporre alcune brevi note biografiche su Platone

- Nasce ad Atene e vive dal 427 al 347 a. C.
- Allievo di Socrate e maestro di Aristotele.
- Ad Atene fondò nel 387 a. C. l'*Accademia*.
- Viaggia a lungo e soggiorna anche in Italia, principalmente a Siracusa.
- Arricchisce così i suoi contatti con gli esponenti della scuola pitagorica di Taranto.

Quanto al laboratorio, una possibile traccia per i suoi argomenti, con riferimenti ai dialoghi platonici che li considerano [Pl], può essere la seguente.

1. L'importanza della matematica nel pensiero di Platone (*Repubblica* e *Leggi*).
2. Le concezioni didattiche di Platone (ancora *Repubblica* e *Leggi*).
3. I numeri irrazionali (*álogoi*) (*Menone*, *Teeteto*, *Epinomide*, *Leggi* e altri dialoghi).
4. Solidi platonici (*Timeo*).
5. Intermezzo: la scienza musicale nella scuola pitagorica (la scala del *Timeo*).
6. Platone anticipa e ispira Cantor e la matematica transfinita (*Filebo* e *Carmide*).
7. La matematica nella società (*Repubblica*, *Gorgia* e *Menone*).
8. Conclusione: l'attualità del messaggio matematico di Platone.
9. Un'appendice: Ippia di Elide e la sua curva quadratrice (*Apologia di Socrate*, *Ippia minore*, *Ippia maggiore*).

Qui ci limitiamo ad alcuni spunti da 1, 2, 3, 4 e 8. Una trattazione estesa e completa si può trovare in [FTT1, 2], cui dunque rimandiamo per approfondimenti

2. L'importanza della matematica in Platone

Nella *Repubblica* troviamo la descrizione della *kallípolis*, la *bella città* vagheggiata da Platone. A guidarla è chiamata

- un'*aristocrazia*, cioè una cerchia ristretta degli uomini migliori,
- o addirittura un monarca illuminato, il filosofo re.

Il contributo della matematica (in particolare di aritmetica e geometria) alla formazione della classe governante e di ogni cittadino è rilevante. Per apprezzarlo pienamente conviene anzitutto ricordare la *teoria della conoscenza* in Platone: come la conoscenza si raggiunge, raffina e sublima (*Repubblica*, libro VI).

Platone distingue due livelli diversi di conoscenza

- il *dominio del sole*, cioè il regno del visibile,
- il *dominio del Bene*, che è la dimensione dell'intelligibile.

Ci sono poi due gradi successivi nel dominio del sole

- la dipendenza dall'*immagine* (*eikasía*), che però è solo l'ombra degli oggetti sensibili;
- la comprensione delle cose naturali: l'*opinione affidabile* (*pístis*).

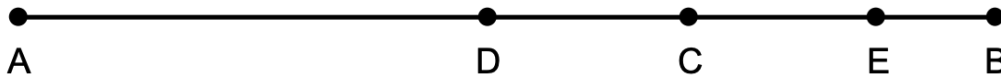
Allo stesso modo si distinguono due gradi successivi nel dominio del Bene:

Platone matematico

- il *pensiero discorsivo (diánoia)*, tipico della *matematica*, che muove da ipotesi e realtà sensibile e ne astrae concetti e modelli, svolgendo le sue dimostrazioni;
- l'*intelligenza pura (nóesis)*, fondata sulla *dialettica*: la comprensione piena di sé e dell'universo, il dominio delle cose, il Principio che sussiste senza più ipotesi.

Per spiegare la loro funzione e la loro progressione Platone si affida alla *metafora geometrica della linea*. Si traccia un segmento AB, che poi si suddivide in parti diseguali AC e CB in modo tale che

- la più lunga AC denoti gli oggetti visibili,
- l'altra più corta CB quelli intellegibili.



A seguire si opera un'ulteriore ripartizione attraverso due altri punti D ed E, appartenenti rispettivamente ad AC e CB, in modo che i quattro segmenti più piccoli così ottenuti rappresentino i livelli sopra individuati,

- AD il mondo delle immagini,
- DC quello degli oggetti sensibili,
- CE il livello del pensiero discorsivo (e matematico),
- EB il regno delle idee e della vera intelligenza.

I quattro segmenti, rappresentando il progressivo distacco dal mondo sensibile, si accorciano in lunghezza. Anzi, la linea AB si dovrebbe figurare come tracciata in verticale, salendo dall'oscurità alla chiarezza. Si stabilisce la proporzione

$$AC : CB = AD : DC = CE : EB$$

da cui si deduce senza troppa difficoltà che deve essere $DC = CE$ – a sottolineare il legame tra comprensione della realtà e riflessione matematica, tra figure e geometria.

Ancora la *Repubblica* descrive, nel libro VII, le scienze che educano al pensiero discorsivo e quindi introducono all'intelligenza pura: sono cinque, tutte legate alla matematica.

- 1) L'*aritmetica* (“*scienze del calcolo e del numero*”): “*capace di portare l'uomo alla verità*”, di condurlo dai puri conteggi al ragionamento puro sul numero.
- 2) La *geometria* (piana), che manifesta “*l'idea del bene*” e collabora ugualmente a condurre l'anima alla verità, dai calcoli spiccioli di agraria e architettura a ciò che è immutabile ed eterno.
- 3) La *stereometria*, cioè la *geometria solida*, che accede alla terza dimensione, ai cubi e agli “*oggetti che hanno profondità*”.
- 4) L'*astronomia*, cioè lo studio dei solidi in movimento, l'analisi dei corpi celesti, dei loro rapporti numerici e delle loro figurazioni: guidata non dalla vista ma dalla ragione, procede verso la ricerca dei modelli invisibili dell'universo.

- 5) L'*armonia*, cioè lo studio della musica: non mero esercizio dell'udito, ma ricerca dei numeri armonici, "*del bello e del bene*".

Al di sopra di queste discipline sorelle sta nella *Repubblica*, come già si diceva, la *dialettica*: musica puramente intellegibile e coronamento di ogni scienza.

È da sottolineare in Platone l'aurea di aristocraticità che accompagna la matematica (*Leggi*, *Repubblica*, *Filebo*, *Gorgia*): si distinguono anzi due matematiche, cioè due maniere differenti di accostarla,

- una per i molti (l'aritmetica grossolana dei commercianti, o anche di architetti e muratori, eccetera),
- una per i migliori, cioè i filosofi (la contemplazione dei numeri cosmici e delle proporzioni dell'universo).

Sulla questa matematica più elevata "*non devono affaticarsi i molti, ma solo certi pochi*"; resta però assodato che chiunque ignora la matematica "*è molto lontano dal divenire divino*" (*Leggi*, Libro VII).

3. L'educazione alla matematica in Platone

L'educazione per Platone

- non si riduce al semplice trasferimento di conoscenza,
- ma deve destare la capacità di apprendere che ciascuno ha dentro di sé.

Leggiamo nel *Simposio* che la sapienza non dovrebbe fluire "*così come nei calici scorre l'acqua dal più colmo al più vuoto*".

Si ribadisce poi il ruolo preminente della matematica (*Repubblica*): aritmetica e geometria, così come le altre scienze che educano al pensiero discorsivo, "*devono essere apprese fin dalla fanciullezza*".

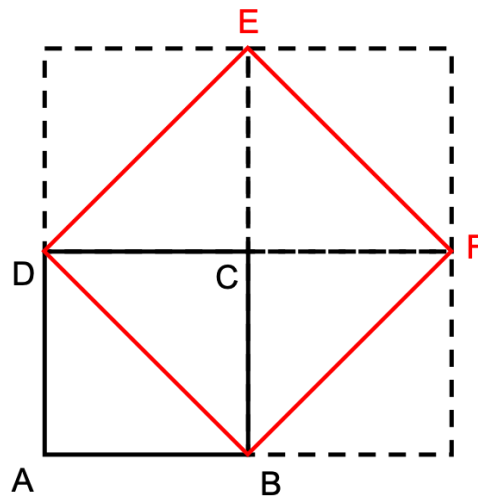
Ma l'istruzione non si impone come una schiavitù, perché "*nessun insegnamento impartito a forza attecchisce e resta stabilmente acquisito*". Al contrario, tutto ha da avvenire con "*tutta la spontaneità di un gioco*", "*unitamente al gioco e con diletto*" (l'esempio dell'Egitto proposto nelle *Leggi*).

Un esempio illuminante si trova all'interno del *Menone*, nel dialogo tra Socrate e un giovane schiavo privo di istruzione. La convinzione che Socrate esprime nell'occasione è che

- non c'è conoscenza che l'anima umana non abbia già appreso, innata, per natura,
- dunque, l'approccio dialogico che lui persegue per educare, fondato più su nuovi interrogativi che su risposte preconfezionate, è utile proprio per risvegliare la reminiscenza e la scienza.

L'interlocutore di Socrate, Menone, dissente e critica. Per dimostrare allora la bontà del suo assunto, Socrate lo invita a portargli un giovane schiavo, assolutamente digiuno di geometria. Al ragazzo Socrate propone il problema seguente.

Platone matematico



- È dato un quadrato ABCD di lato AB lungo 2 piedi, dunque di area 4.
- Si chiede il lato del quadrato di area doppia, cioè 8.

Oggi risponderemmo che il lato ha lunghezza $2\sqrt{2}$. Ma così facendo useremmo la conoscenza dei numeri irrazionali, che gli antichi greci non possedevano. La loro sensibilità privilegiava l'approccio geometrico. E geometrica è la via che Socrate insieme al ragazzo persegue. Ecco le tappe successive della loro discussione.

- *La prima risposta dello schiavo*: 4 (se raddoppia l'area, raddoppia il lato; ma il quadrato di 4 è 16).
- *La seconda*: 3 (se 4 è troppo, diminuiamo; ma il quadrato di 3 è 9).
- Segue un attimo di scoramento: *“Per Zeus, Socrate, non lo so davvero!”*.

Ma Socrate interpreta questa esclamazione scoraggiata in modo positivo: pur intorpidito, lo schiavo è più consapevole, *“non sapendo, neppure crede di sapere”*.

La ricerca riparte. Socrate invita il ragazzo a

- considerare un quadrato più grande, costituito da 4 quadrati adiacenti, tutti uguali a quello di partenza (quello esterno nella figura precedente);
- tracciare le diagonali di ciascuno di questi quadrati;
- riconoscere nel poligono che esse delimitano un nuovo quadrato (quello con i lati in rosso), che è metà di quello più grande e quindi doppio di quello originario.

Quindi il lato cercato si rivela proprio come la diagonale DB del primo quadrato. Qui si ferma l'esperimento di Socrate. Il giovane schiavo è arrivato da solo alla conclusione, senza che nessuno gliela abbia imposta: anche Menone lo ammette.

È tuttavia da ribadire che Socrate e lo schiavo si fermano all'aspetto geometrico, non affrontano la parte aritmetica e specificamente la natura del nuovo “numero”, dunque sostanzialmente della radice quadrata di 2. A proposito di questi numeri, cioè delle radici quadrate, Platone scriverà anzi nell'*Epinomide*: *“Dio, e non gli uomini, ha prodotto tale meraviglia”*.

Non però che l'incommensurabilità tra lato e diagonale di un quadrato (o tra cateto e ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele) fosse sconosciuta agli antichi greci. Anzi lo studio della questione costituisce un capitolo emozionante della storia della loro scienza:

la teoria delle grandezze incommensurabili, dallo stesso Platone (*Menone*, *Teeteto*) ad Aristotele, Euclide e oltre.

4. I solidi platonici

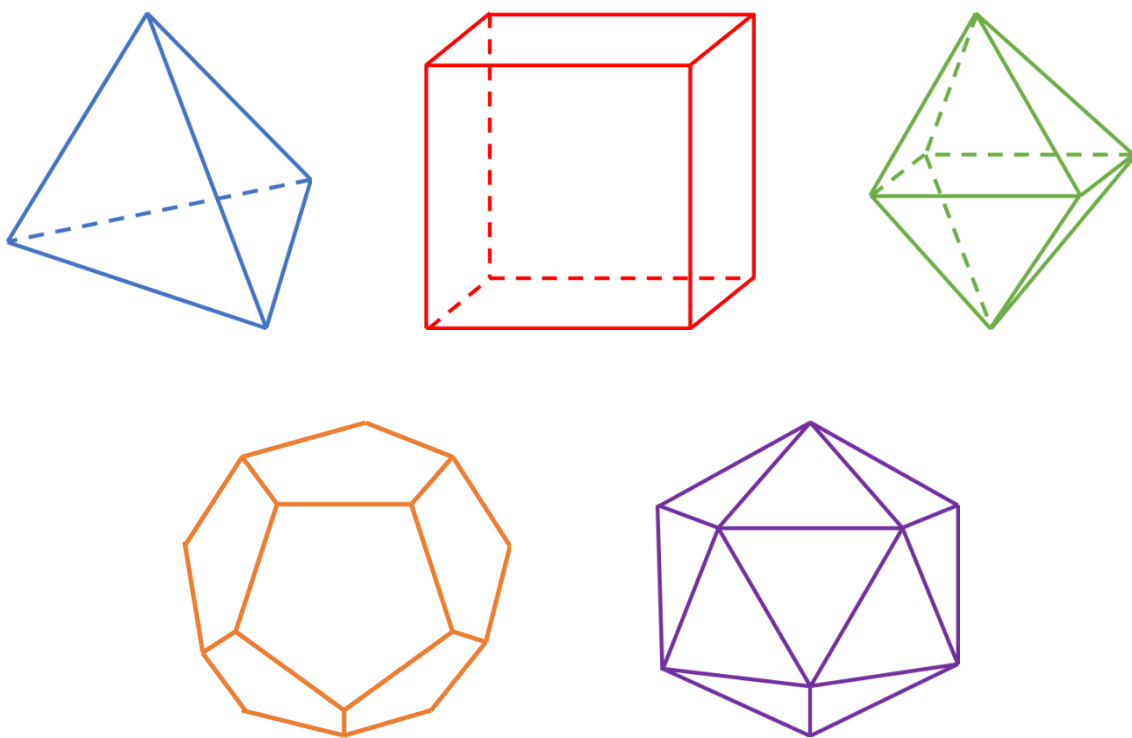
I solidi così detti *platonici* sono i poliedri regolari, cioè i poliedri convessi le cui facce

- sono poligoni regolari convessi tutti uguali tra loro,
- se distinte, si intersecano al più negli spigoli,
- concorrono in numero al più finito in ogni vertice.

Rappresentano quindi l'equivalente tridimensionale dei poligoni regolari... con una differenza sostanziale:

- dei poligoni regolari (a meno di similitudini) ne esiste uno per ogni possibile numero $N \geq 3$ di vertici e lati – un triangolo equilatero, un quadrato, un pentagono regolare, eccetera;
- di poliedri regolari, invece, ne esistono solamente 5 modelli – sono “*pochi in modo irritante*” avrebbe commentato Lewis Carroll.

A scoprirli furono gli egizi, la scuola pitagorica, Teeteto. Ecco la loro raffigurazione:



Platone matematico

Nell'ordine abbiamo:

- il *tetraedro* (4 triangoli equilateri per facce, 4 vertici e 6 spigoli),
- il *cubo* (6 quadrati per facce, 8 vertici e 12 spigoli),
- l'*ottaedro* (8 triangoli equilateri per facce, 6 vertici e 12 spigoli),
- il *dodecaedro* (12 pentagoni regolari per facce, 20 vertici e 30 spigoli),
- l'*icosaedro* (20 triangoli equilateri per facce, 30 spigoli e 12 vertici).

La più antica descrizione che dei solidi platonici ci è rimasta è dovuta appunto a Platone (da qui il loro nome) e si trova nel *Timeo*. In quel dialogo il filosofo presenta i 5 poliedri all'interno del racconto della cosmogonia, cioè della creazione del mondo da parte del Demiurgo, ricco peraltro di tantissimi altri riferimenti aritmetici e geometrici. Timeo, e Platone dietro di lui, narrano che è stato un modello ideale ed eterno a ispirare il Demiurgo a comporre il nostro universo come “*la più bella delle creature*”, tuttavia *visibile e tangibile*. A costituirlo intervengono dunque due elementi

- il *fuoco*, cioè l'energia, la luce, senza cui nulla di *visibile* esiste,
- la *terra*, cioè la materia, senza cui nulla di *tangibile* può esserci.

Ma, aggiunge Platone, questi due elementi da soli non bastano. Occorre chi li bilanci, e il “*legame più bello*” si realizza con l'armonia delle proporzioni, inserendo tra fuoco e terra termini intermedi – almeno due, perché l'universo è tridimensionale – dunque *aria* e *acqua*, in modo che si stabiliscano rapporti uguali

$$\text{fuoco} : \text{aria} = \text{aria} : \text{acqua} = \text{acqua} : \text{terra}.$$

Costituiti i 4 elementi, il Demiurgo poi “*li adorna di forme e numeri*”, “*sottraendoli alla loro condizione di disordine*” e associandoli ai poliedri regolari. Il dio infatti è “*un perpetuo geometra*”, “*geometrizza sempre*” – la frase attribuita a Platone da Plutarco. In questo modo vengono a corrispondere

- il *tetraedro* al *fuoco*,
- l'*ottaedro* all'*aria*,
- l'*icosaedro* all'*acqua*,
- il *cubo* alla *terra*.

Finalmente il *dodecaedro* viene considerato figura dell'interno *cosmo*.

Può essere notevole ricordare qui i numerosi e profondi collegamenti che esistono tra la geometria dei poliedri regolari e la storia dell'arte. Si possono citare in proposito:

- Piero della Francesca (1416/1417-1492), che dedicò ai solidi platonici un trattato *De quinque corporibus regularibus*,
- Luca Pacioli (1447-1517), che ne parlò nel *De divina proportione*, affidandosi addirittura a Leonardo da Vinci (1452-1519) per disegnarli

Nei secoli successivi, si potranno ancora rammentare Keplero e la sua *musica delle sfere*.

In tempi moderni sono da menzionare:

- Maurits Cornelis Escher (1898-1972), che nella litografia *Cascata* raffigura intrecci di poliedri alla sommità delle due torri da cui sale e scende il flusso dell'acqua (a sinistra, la composizione di 3 cubi, a destra la stella ricavata da 3 ottaedri non regolari, conosciuta proprio come *solido di Escher*)
- Salvador Dalì (1904-1989), che ambienta in un dodecaedro il suo dipinto della *Ultima cena*
- Lucio Saffaro (1929-1998), che ha dedicato ai poliedri regolari una gran varietà di opere pittoriche e grafiche

5. Platone oggi

Un interrogativo inevitabile sorge su Platone, e in particolare su Platone matematico: quale dialogo si può instaurare tra le ragazze e i ragazzi di oggi e l'antico filosofo? Quale interesse può ancora suscitare quest'ultimo?

È infatti sotto gli occhi di tutti che mondo e scuola sono cambiati. Diversi sono la sensibilità, gli orientamenti, gli strumenti di comunicazione e quindi anche l'approccio didattico. Oggi:

- prevale il linguaggio delle immagini,
- c'è minore attitudine a leggere e pensare,
- la geometria è ormai in disgrazia,
- gli argomenti di studio e dibattito non sono più la virtù (come in generale nel *Menone*) o la natura della scienza, e neppure, più modestamente, poligoni e poliedri.

Al contrario in Platone:

- l'immagine è la forma più bassa di conoscenza, solo un'ombra visibile delle cose,
- il pensiero è la suprema via di accesso alla pienezza dell'intelligibile,
- la geometria è *“la conoscenza di ciò che immutabilmente ed eternamente è, non di ciò che è soggetto di divenire e perisce”*.

Resta tuttavia la piena attualità del metodo didattico perseguito da Platone (e Socrate), basato sul colloquio piuttosto che sul dogma. Allo stesso modo mantengono il loro vigore certi capisaldi del loro pensiero platonico, come la *nóesis*, la supremazia dell'esercizio della saggezza e l'educazione al pensiero critico.

Concludiamo ricordando che oggi ancora resiste una visione della matematica ispirata dal pensiero platonico, e chiamata appunto *platonismo matematico*. A rappresentarla e descriverla è Godfrey Hardy nella sua *Apologia di un matematico* [Ha]: *“la realtà matematica giace fuori di noi e la nostra funzione è quella di scoprirla e osservarla”*; *“i teoremi che noi dimostriamo, e che in modo magniloquente descriviamo come nostre «creazioni», sono semplicemente i resoconti delle nostre osservazioni”*.

Platone matematico

Per certi versi, è questa l'immagine della matematica che compare nel celebre passo di Galileo nel *Saggiatore*, capitolo 6 [Ga], quando si afferma che essa è la lingua in cui è scritta la filosofia nel “*grandissimo libro*” dell'universo. I suoi caratteri sono “*triangoli, cerchi ed altre figure geometriche*”. Senza di essi “*è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto*”.

Bibliografia

[FTT1] A. Fontana – A. I. Telsoni – C. Toffalori, *Platone e la matematica*, Parte I, *ArteScienza* 14 (2020), pp. 161-192

[FTT2] A. Fontana – A. I. Telsoni – C. Toffalori, *Platone e la matematica*, Parte II, *ArteScienza* in corso di stampa

[Fr] A. Frajese, *Platone e la matematica del mondo antico*, Studium Roma, 1963

[Ga] G. Galilei, *Il saggiaiore*, Feltrinelli, Milano, 2015

[Ha] G. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti, Milano, 2002

[Pl] Platone, *Tutti gli scritti* (a cura di G. Reale), Bompiani, Milano, 2000

Scommettere su un Casinò

Laura Ferracuti¹ Giovanna Guidone²

¹ISC “Da Vinci-Ungaretti”, Fermo
email laura.ferracuti@comprensivoleonardo.edu.it

²Liceo Scientifico “T.C. Onesti”, Fermo)
email gioguidone@tiscali.it

Sunto

I ragazzi che si accostano per la prima volta alle idee basilari del calcolo combinatorio e delle probabilità non hanno bisogno di troppe formalizzazioni. L'apprendimento per problemi è quanto mai significativo in un contesto come questo. Si può allora partire alla scoperta di come funzionano alcuni giochi popolari: dal superenalotto, al gratta e vinci, al black jack. Ragazzi di scuola secondaria di primo e secondo grado hanno allestito un Casinò, nel quale è necessario conoscere bene il funzionamento matematico dei giochi per ... non finire spennati! Giocando è stato naturale fare pratica di concetti come quello di disposizione e permutazione, probabilità di un prodotto, probabilità condizionata e sviluppare modelli di pensiero flessibili e durevoli.

Parole Chiave

Probabilità, calcolo combinatorio, competenze di cittadinanza, gioco d'azzardo, laboratorio, liceo matematico.

1. Introduzione

Per uno studente, l'acquisizione di elementi del calcolo combinatorio e del calcolo delle probabilità è certamente un'istanza fondamentale: non è solo necessaria alla sua formazione matematica ma anche indispensabile per leggere con relativa consapevolezza il mondo che ci circonda. La matematica dei conteggi e delle previsioni è presente ovunque nella nostra vita e spesso ne siamo “vittime” inconsapevoli.

Come è fondamentale insegnare alcuni rudimenti di statistica, così è necessario anche condurre gli studenti a confrontarsi con l'idea della *matematica dell'incerto*. Come scrive C.F. Manara in (Manara, 1989): “[...] molte scienze devono lavorare in questo modo, [ossia] prendere decisioni in condizioni di incertezza, cioè senza essere certi delle conseguenze. E ciò perché i punti di partenza non sono certi, o perché mancano

informazioni complete, oppure perché le leggi che reggono la realtà su cui si vuole operare sono troppo complicate e non completamente conosciute.”

Tutte i programmi nazionali prima, e le indicazioni ministeriali poi, sollecitano gli insegnanti a occuparsi di questi temi sin dalla scuola secondaria di primo grado.

Sappiamo bene, tuttavia, che si tratta di argomenti negletti, che spesso vengono ridotti a formulari sterili, destinati ad essere dimenticati dopo qualche tempo. Coefficienti binomiali, formula di Bayes e argomenti simili passano come meteore nella testa dei nostri studenti e vi rimangono troppo spesso solo il tempo necessario di un compito in classe.

Sono questi i motivi che ci hanno spinte a cercare una strada diversa per insegnare alcune idee legate al calcolo combinatorio e delle probabilità. Il percorso che presentiamo è frutto di un lavoro svolto verticalmente tra l'ultimo anno della scuola secondaria di primo grado, il primo e il secondo anno di un liceo scientifico. In queste ultime classi una di noi (GG) ha potuto godere del tempo dedicato al laboratorio di Matematica all'interno dell'esperienza del Liceo Matematico. Il *prodotto finale* di questo lavoro è stato presentato al III seminario nazionale dei Licei Matematici di Fisciano (SA) nel settembre del 2019 e, nell'ottobre seguente, al festival FermHamente della città di Fermo.

2. Un possibile percorso: l'inizio

Nel percorso che ci accingiamo a descrivere abbiamo utilizzato due leve didattiche: il gioco e il contesto narrativo. Parleremo in questo paragrafo della prima di queste, lasciando la descrizione della seconda al prossimo paragrafo.

Se cerchiamo in rete, troviamo facilmente la spiegazione del neologismo anglosassone *gamification* che si riferisce all'uso del gioco come *strumento estremamente efficace in grado di veicolare messaggi di vario tipo, a seconda delle esigenze, e di indurre a comportamenti attivi da parte dell'utenza, permettendo di raggiungere specifici obiettivi, personali o d'impresa. Al centro di questo approccio va sempre collocato l'utente ed il suo coinvolgimento attivo* [<https://www.gamification.it/>].

Ma la leva didattica del gioco non è certamente nuova: dal “De ludo globi” di Cusano ai ricchissimi spunti di Martin Gardner; da *life*, che, oltre ad essere diventato una specie di culto per alcuni, ha costituito il modello di interessantissime applicazioni nel campo della biologia e dell'informatica fino alle recenti attività proposte (Delucchi, 2012). Nel campo della probabilità molti stimoli interessanti vengono dal lavoro di (Canova 2016).

Il percorso che abbiamo proposto è partito da attività di carattere ludico abbastanza elementari da proporre: abbiamo proposto ai ragazzi, venuti in classe muniti di dadi e carte a gioco, di decidere a riguardo di alcune scommesse del tipo:

Scommettere su un Casinò



Pietro dice che la somma ottenuta dal lancio di due dadi sarà 7 e Laura sostiene invece che sarà 5. Voi su chi scommettereste?

Dopo un certo periodo di prove e naturale gioco, emerge chiaramente il concetto di spazio degli eventi (anche se evidentemente i ragazzi non lo chiamano così!), ma viene anche alla luce la prima questione fondamentale. Che cosa significa l'affermazione: “la probabilità che, nell'esempio precedente, vinca Pietro è $1/6$ ”? Infatti, se lanciamo due volte i dadi non è sempre vero che Pietro vince una volta!

I ragazzi suddivisi in gruppi fanno tanti lanci e prendono nota degli esiti. A questo punto mettiamo in campo un aiuto: raccoglieremo i dati in un foglio elettronico che ci consentirà di leggerli (si pongono qui -in modo naturale- questioni di rappresentazioni e concetti elementari sul piano statistico). Il foglio elettronico *sa* però *fare* anche un'altra cosa: può generare per noi numeri a caso e quindi **simulare** 1000, 10000, 100000 lanci di due dadi. Non possiamo entrare qui nell' (interessante) questione di come funziona un simulatore, ma diciamo solo che per gli studenti è stato di grande ispirazione riflettere sul fatto che il calcolatore non può fare nulla... a caso!

La situazione che abbiamo appena descritto, così come altre che è semplice immaginare, porta in modo naturale a confrontare tra loro le visioni classica e frequentista di probabilità e a riflettere su come la seconda delle due sia quella coinvolta in molte decisioni che prendiamo o che vengono prese per noi.

Dopo questa fase preliminare, abbiamo proposto l'analisi del gioco della roulette per introdurre il concetto di “quota”. Conoscere che cosa significhi giocare con una data quota rappresenta -ahinoi- una *competenza di cittadinanza*, in quanto la vita dei nostri giovani spesso ha a che fare con scommesse e conseguenti quote: basta guardare la pubblicità durante una partita di Champions League.

Con l'aiuto del simulatore abbiamo compreso qual è il problema nascosto nel fatto che l'uscita di un numero alla roulette viene pagata 36 volte la posta (e quindi comporta un guadagno di 35 volte la posta). La probabilità che un dato numero esca è $1/37$ e pertanto, alla lunga, giocare vuol dire rovinarsi con le proprie mani. Per gli studenti questo meccanismo non è ovvio all'inizio, ma i grafici che vengono fuori dai dati simulati consentono una buona intuizione della “rovina del giocatore”.

3. **Proseguendo: i ragazzi inventano i “loro giochi”**

Il nostro laboratorio aveva ora necessità di fare un passo avanti: gli studenti dovevano far propri i concetti intuiti in qualche modo passivamente. Ed ecco, allora, che abbiamo pensato di ... inventarci un Casinò. Abbiamo pensato, cioè, di metter in piedi una serie di situazioni in cui il pubblico potesse scommettere e fosse portato a riflettere sul prevedibile destino cui sarebbe andato incontro perseverando nel gioco.

Dopo un confronto comune, abbiamo pensato di creare quattro tavoli: dal più noto gioco del testa-o-croce, al lancio dei dadi, alla roulette, fino a una sofisticata versione del black jack di cui diremo nel prossimo paragrafo.

Il contesto narrativo costituito dal casinò anni '20 ha consentito ad ogni ragazzo di trovare il suo ruolo e di mettere in campo emozioni positive che facilitano l'apprendimento: sappiamo infatti che emozioni e azioni cognitive interagiscono profondamente.



Nel Casinò studenti e insegnanti interpretano i loro ruoli in maschera. Per rendere il tutto più realistico, abbiamo anche “battuto moneta”, nel senso che abbiamo stampato banconote di molti tagli che riportavano la faccia degli studenti e venivano distribuite all'ingresso per consentire le puntate in danaro. I ragazzi hanno battezzato la nuova

Scommettere su un Casinò

valuta EulEuro. Il simbolo sulle banconote è anch'esso una loro creazione: come si vede in figura è costruito utilizzando una gaussiana rovesciata.

Il nostro Casinò ha mostrato un valore aggiunto: non solo ha svolto il ruolo di cornice narrativa efficace, ma è stato anche il luogo in cui agli studenti è stato affidato il compito di svolgere da mediatori dei concetti appresi nei confronti di un pubblico che andava educato a un corretto approccio matematico. Sappiamo bene che la necessità di spiegare ad altri -e per di più in un contesto pubblico- genera una motivazione forte e fa emergere la necessità di rendere chiari a se stessi tutti i passaggi dei ragionamenti da esporre.

Non potendo soffermarci su tutti i giochi, illustreremo qui di seguito quello dei dadi.

4. L'esempio dei dadi

Quattro studenti gestiscono il tavolo da gioco interpretando vari ruoli: ad uno spetta quello di croupier, ad un altro di gestore del simulatore (che viene utilizzato attraverso un computer e uno schermo collocati precedentemente in postazione), altri si occupano di fare i tutor dei giocatori e di fornire le necessarie spiegazioni matematiche alla fine.

Al tavolo arriva un gruppo di giocatori: vengono divisi in due squadre (A e B) che si sfideranno.

Il gioco è questo:

Il croupier propone 4 eventi con 4 relative quote:

- a. Lanciando due dadi la somma è 7 (quota 8)
- b. Lanciando due dadi la somma è 3 (quota 16)
- c. Lanciando due dadi, il primo è dispari e il prodotto è pari (quota 4)
- d. Lanciando due dadi, almeno uno dei due è pari (quota 8)

Fase 1. Il croupier dice:

<<Ciascuna squadra può scegliere di puntare su un evento con la relativa quota. La squadra deve selezionare la scommessa che le sembra più conveniente. Nel caso in cui le due squadre vogliano puntare sulla stessa scommessa, allora questa scommessa viene aggiudicata a chi è disposto a ribassare la quota (si fa un'asta al ribasso).

In ogni momento dell'asta, la squadra può decidere di giocare con un'altra scommessa (diversa cioè da quella per la quale si sta facendo l'asta), ma quando lo fa, la licitazione si ferma e l'asta si chiude come segue: se la squadra A -ad esempio- ha cambiato scommessa, la squadra B è costretta a tenere l'ultima quota della scommessa su cui si stava facendo l'asta in precedenza>>.

Il croupier fa quindi giocare una mano a titolo di esempio. Ciascuna squadra si aggiudica una scommessa, il croupier gioca con ognuna delle due squadre e, se questa vince, paga la quota.

Questa procedura viene ripetuta un paio di volte così le squadre entrano nel meccanismo.

Fase 2. Si simulano 100000 giocate.

Il croupier dice:

<<Ora si giocherà una partita molto importante. Si farà una nuova aggiudicazione di scommesse e poi ogni squadra giocherà 100000 volte con la sua scommessa (e la sua quota). Vincerà il gruppo che alla fine avrà il bilancio migliore (purché in attivo). Il premio in palio è di 500 EulEuro>>.

Fase 3. Lo studente responsabile del simulatore avvia le giocate e le squadre costatano qual è il loro bilancio finale, ricevendo eventualmente il premio in palio.

Fase 4. I ragazzi che hanno assistito le squadre spiegano come si calcolano le probabilità nei vari casi di questo gioco e qual è il concetto di quote per un gioco in pareggio.

Riportiamo qui -per brevità- solo il ragionamento matematico che viene illustrato dai ragazzi nel caso della prima scommessa proposta.

Lo spazio degli eventi nel lancio di due dadi è costituito da 36 elementi che possiamo rappresentare nella tabella qui sotto:

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Se i dadi non sono truccati (e i nostri non lo erano!) ogni evento ha una probabilità a priori di $1/36$.

Scommettere su un Casinò

	1	2	3	4	5	6
1						x
2					x	
3				x		
4			x			
5		x				
6	x					

L'evento "La somma dei due dadi è 7" è rappresentato in tabella: si tratta di 6 casi su 36, quindi la sua probabilità è $1/6$. Come calcoliamo quindi il *bilancio* di una persona che punti su quest'evento?

Chiamiamo con Q l'incasso (che corrisponde alla quota per puntata) per una puntata di 1 EulEuro.

<u>evento</u>	<u>probabilità</u>	<u>puntata</u>	<u>incasso</u>	<u>vincita</u>
Esce "somma 7"	$1/6$	1	Q	$Q-1$
Non esce "somma 7"	$5/6$	1	0	-1

La *speranza di vincita* è quindi $\frac{1}{6} (Q - 1) - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} Q - \frac{6}{6}$

e la *quota di pareggio* si ottiene risolvendo

$$\frac{1}{6} (Q - 1) - \frac{5}{6} = 0 \Rightarrow Q = 6.$$

5. Calcolare combinazioni: sarà utile per il gratta-e-vinci?

Un'altra parte fondamentale del laboratorio è consistita nello studio del regolamento di LottoMatica per il gioco "Gratta-e-vinci" in una delle sue molteplici formulazioni.

I ragazzi hanno, con una certa loro sorpresa, acquisito consapevolezza dei termini del gioco e l'hanno voluto riproporre alla riflessione del pubblico.

Abbiamo pertanto stampato i nostri gratta e vinci (con numeri coperti da una vernice argentata che si poteva grattare via con una moneta). Nel gioco, i partecipanti sceglievano 10 numeri più un "numerone". I ragazzi avevano preparato cartelloni in cui si dichiaravano le quote di vincita, a prima vista assai allettanti. Queste quote erano in linea

con le quote ufficiali di Lottomatica e, pertanto, ben lontane dal rendere il gioco equo, come gli stessi ragazzi spiegavano dopo l'estrazione dei numeri.



Ecco le considerazioni scritte dai ragazzi su come calcolare la probabilità di vincita nei vari casi

Chiamiamo $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ i numeri scelti da un giocatore e n il numerone.

Calcoliamo ora la probabilità che ha il giocatore di indovinare tutti e dieci i numeri più il numerone o nessuno di questi, solo il numerone. Naturalmente indovinare 10+1 numeri e indovinarne 0+1 sono eventi equiprobabili, dal momento che i numeri tra cui scegliere sono 20.

Calcoliamo prima di tutto la probabilità che i numeri vengano estratti nello stesso ordine in cui sono stati scelti. Se la probabilità che esca a_1 è di 1 su 20, la probabilità che esca a_2 è di 1 su 19 e così via... moltiplicando le varie probabilità otterremo quindi:

$$p_{10} = \frac{1}{20} * \frac{1}{19} * \dots * \frac{1}{11} = \frac{1}{6704442572800}.$$

Calcoliamo adesso le possibili **permutazioni** di uscita dei 10 numeri:

$$c_{10} = 10 * 9 * \dots * 2 = 3628800.$$

La probabilità di indovinare il “numerone” è di 1 su 20.

A questo punto moltiplichiamo le probabilità di indovinare i 10 numeri con il numero di permutazioni e con la probabilità di indovinare il “numerone”:

$$p_{\text{tot}} = p_{10} * c_{10} * \frac{1}{20} = \frac{1}{3695120}.$$

Calcoliamo adesso invece la probabilità di indovinare 9 numeri o 1 solo più il “numerone”.

Calcoliamo anche qui prima di tutto la probabilità che i numeri vengano estratti nell'ordine in cui sono stati scelti. Bisogna però prestare attenzione al decimo numero, che non deve essere uno di quelli scelti. Quindi la probabilità che a_{10} non sia un numero scelto è di 10 su 11.

$$p_9 = \frac{1}{20} * \frac{1}{19} * \dots * \frac{1}{12} * \frac{10}{11} = \frac{10}{6704442572800}$$

Scommettere su un Casinò

- Le permutazioni sono ora $c_9 = 9 * 8 * \dots 2$, che dobbiamo moltiplicare per 10, ovvero i posti che a_{10} può occupare. Possiamo vedere questo anche come la disposizione senza ripetizione di 9 elementi su 10 posti.
- Dobbiamo anche considerare che ci sono 10 modi di scegliere i 9 numeri.
- La probabilità di indovinare il numerone è sempre di 1 su 20.
- La probabilità totale è quindi

$$p_{\text{tot}} = p_9 * c_9 * 10 * \frac{1}{20} \sim \frac{1}{36951}$$

Possiamo notare come la probabilità che si verifichi questo secondo caso sia maggiore rispetto a quella che si verifichi il primo. Man mano che la quantità di numeri da indovinare si avvicina al 5, la probabilità che questo avvenga aumenta. Naturalmente, con l'aumentare delle probabilità di vincita i premi diminuiscono, tanto che per gli eventi più probabili, ovvero indovinare 4, 5 o 6 numeri, non è nemmeno previsto un premio.

6. Conclusioni: verso una scuola che educa (oltre che istruire)

La nostra esperienza didattica prova a coniugare istruzione ed educazione: nell'attuale panorama scolastico questi due sostantivi (sono più verbi in realtà, viste le tante azioni che richiedono!) sembrano molte volte aver difficoltà a coesistere ed interagire. Il percorso descritto ci ha permesso di affrontare argomenti e competenze necessari per un curriculum didattico e disciplinare. Sicuramente l'organizzazione ed il lavoro del docente in questo tipo di approccio sono molto dispendiosi: non ci sono lezioni frontali da tenere, non ci sono spunte da mettere sul vecchio programma, ma si deve essere disposti -entro certi limiti- a farsi guidare dal flusso della classe. Si deve dare agli alunni la sensazione che siano loro i timonieri, mentre il professore scruta le onde dall'albero maestro e cerca di studiare il vento. Il docente si insinua nella prima virata, per condurre tutti i suoi alunni verso orizzonti di conoscenza e di consapevolezza. I ragazzi si sentono maggiormente coinvolti con questa tipologia di attività rispetto ad una didattica tradizionale e ciò agevola un apprendimento consapevole e contribuisce alla formazione di competenze matematiche e civili.

Concludiamo prendendo in prestito le parole di Simone Weil, che molta parte della sua vita ha dedicato alla riflessione sull'insegnamento. Per la filosofa francese, un obiettivo fondamentale nell'insegnamento è quello di suscitare motivazioni ad apprendere, perché la condizione fondamentale di ogni processo educativo è rappresentata dalla volontà del discente, dal desiderio di imparare.

“L'intelligenza può essere guidata solo dal desiderio. Perché ci sia desiderio, occorre che ci siano piacere e gioia. L'intelligenza cresce e porta frutto solo nella gioia. La gioia di imparare è indispensabile agli studi, come la respirazione ai corridori. Dove essa è assente non ci sono studenti, ma povere caricature di apprendisti che al termine del loro apprendistato non avranno neppure un mestiere.”

Bibliografia

Andrà, Chiara; Paolini, Nicola et al. (2016), *BetOnMath, azzardo e matematica a scuola*, Springer, Italia.

Benuzzi, Federico (2018), *La legge del Perdente*, Dedalo, Bari.

Borlengo, Sara; Lucchini, Marta (2017), *Pensare il caso*, Egea (Pristem), Milano.

Canova, Paolo; Rizzuto, Daniele (2016), *Fate il nostro gioco*, Add editore, Torino.

Delucchi, Emanuele; Gaiffi, Giovanni et al. (2012), *Giochi e percorsi matematici*, Springer, Italia.

Kucharski, Adam (2016), *La scommessa perfetta. La scienza che sbanca il casinò*, ed. Le Scienze, Codice Edizioni, Torino.

Manara, Carlo Felice (1989), *Il certo e il probabile*, La Scuola, Brescia.

Ross, Sheldon M. (2013), *Calcolo delle Probabilità*, Apogeo, Milano.

Weil, Simone (1999), *Lezioni di Filosofia*, Adelphi, Milano.

Un algoritmo della moltiplicazione nascosto in una filastrocca

Bruno Iannamorelli¹

¹Università degli Studi dell'Aquila,
Dipartimento di Scienze Umane,
Viale Nizza, 2, 67100, L'Aquila, Italy
jannab@tiscali.it

Sunto

Una filastrocca conosciuta in molti Paesi che possiamo collocare nel cassetto della matematica ricreativa è servita a svelare un algoritmo della moltiplicazione in uso nell'antico Egitto. Si tratta di uno schema di calcolo molto apprezzato dai bambini che hanno difficoltà nel memorizzare l'odiata tabellina pitagorica, ma non ha nulla di magico. Può essere compresa facilmente pensando uno dei due fattori della moltiplicazione in base dieci e l'altro in base due.

Parole chiave: moltiplicazione, raddoppiare, algoritmo, filastrocca.

1. Premessa

Uno dei documenti matematici più antichi è il papiro egizio, conosciuto come papiro di Rhind, lungo circa 6 m e largo 33 cm. Scritto intorno al 1650 a. C. in linguaggio ieratico, riporta 87 problemi con relativa soluzione tratti da un documento antecedente (2000 – 1800 a. C.), come chiarisce lo stesso autore Ahmes accennando anche che forse si tratta di materiali presenti nell'opera di Imhotep (2650 a.C. circa), famoso architetto e medico del faraone Zosen.

La frase di apertura del papiro afferma che sarà presentato *“uno studio corretto per conoscere tutte le cose esistenti e tutti i loro misteriosi segreti”*. Il papiro di Ahmes non conferma questo intento ma rimane la fonte più completa per comprendere gli esordi della matematica egizia.

È l'unico papiro che riporta la firma dell'autore, lo scriba Ahmes, mentre Henry Rhind era un collezionista inglese che lo aveva acquistato in Egitto nel 1858 per poi regalarlo al British Museum di Londra. Sarebbe più giusto chiamarlo papiro di Ahmes, invece viene data più importanza al collezionista inglese che lo ha portato a Londra piuttosto

che all'autore che lo ha firmato.

2. La filastrocca

Il 79° degli 87 problemi risolti da Ahmes è un problema di aritmetica ricreativa, forse il primo di questo genere. Il testo è molto scarno e la soluzione è strana. Presenta solo queste informazioni: 7 case, 49 gatti, 343 topi, 2401 spighe d'orzo, 16807 *heqat* d'orzo (l'*heqat* era una unità di misura pari a circa 4,7 litri). Sotto questi numeri compare 19607 che è proprio la risposta alla domanda: qual è la somma di case, gatti, topi, spighe d'orzo, *heqat* d'orzo?



Fig. 1 Frammento problema N.79 del papiro di Ahmes

Ci aspetteremmo che la soluzione di Ahmes fosse stata trovata con l'addizione:



CASE	7
GATTI	49
TOPI	343
SPIGHE D'ORZO	2401
HEQAT D'ORZO	16807
	19607

Fig. 2

Invece Ahmes non riporta questa somma, ma la sua soluzione è originale.

Intanto, il testo del problema potremmo enunciarlo così:

*In un villaggio ci sono 7 case,
in ogni casa ci sono 7 gatti,
ogni gatto acchiappa 7 topi,
ogni topo mangia 7 spighe d'orzo,*

Un algoritmo della moltiplicazione nascosto in una filastrocca

*ogni spiga dà 7 heqat d'orzo.
Quante case, gatti, topi, spighe, heqat d'orzo
ci sono nel villaggio?*

È una filastrocca molto simile ad altre che sono state scritte successivamente. Per esempio, in Italia, nel 1202 ne fu presentata una da Fibonacci che recitava così:

*Ci sono 7 vecchie in viaggio per Roma,
ognuna di esse ha 7 muli,
ogni mulo porta 7 sacchi,
ogni sacco contiene 7 pagnotte,
in ogni pagnotta ci sono 7 coltelli,
ogni coltello è contenuto in 7 foderi.
Vecchie, muli, sacchi, pagnotte, coltelli, foderi,
in quanti viaggiano per Roma?*

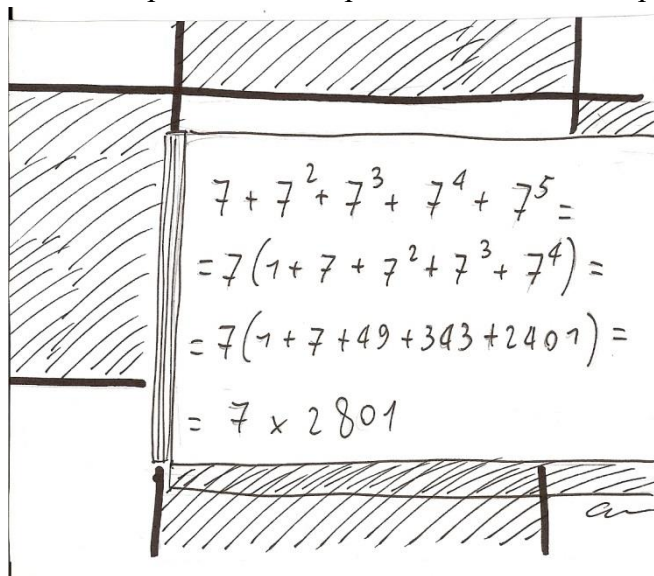
E ne esiste anche un'altra in Spagna:

*Mentre andavo a Sant'Ives
Incontrai un uomo con 7 mogli,
ogni moglie aveva 7 sacchi,
ogni sacco aveva 7 gatti,
ogni gatto aveva 7 mici.
Mici, gatti, sacchi e mogli,
in quanti andavano a Sant'Ives?*

La stessa filastrocca si ritrova in Italia dove Sant'Ives è sostituito con Camogli, un paesino della Liguria, per fare rima con mogli.

Sono filastrocche aritmetiche per imparare a sommare potenze di 7.

La soluzione di Ahmes può essere compresa se utilizziamo le potenze:



The image shows a hand-drawn sketch of a papyrus scroll fragment. The scroll is represented by a rectangular area with diagonal hatching on the left and right sides. Inside the scroll, there is a vertical line on the left and a horizontal line at the top. The mathematical calculations are written in the center of the scroll:

$$\begin{aligned} &7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = \\ &= 7(1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) = \\ &= 7(1 + 7 + 49 + 343 + 2401) = \\ &= 7 \times 2801 \end{aligned}$$

Fig. 3

Nel frammento del papiro di Ahmes (fig. 1) è riportata la moltiplicazione 7×2801 : è una

scorciatoia per calcolare la somma delle prime cinque potenze di 7. È una soluzione geniale, ma la moltiplicazione viene eseguita con un algoritmo strano.

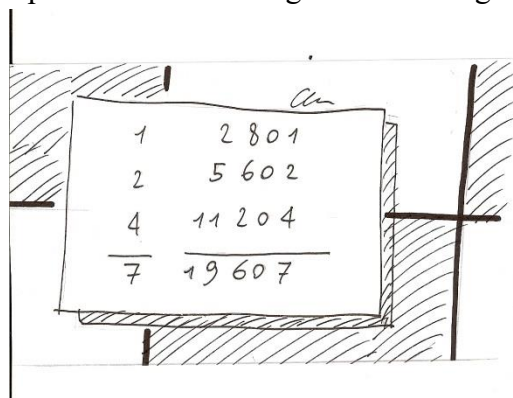


Fig. 4

Ahmes ha scritto $7 = 1+2+4$ e quindi $(1+2+4) \times 2801 = 2801 + 2 \times 2801 + 4 \times 2801$. Il risultato è 19607. Ingegnoso: evita anche lo sforzo di calcolare 4×2801 perché ha semplicemente raddoppiato 5602 che è il doppio di 2801.

3. Algoritmo della moltiplicazione nell'antico Egitto

Illustriamo con qualche esempio l'algoritmo della moltiplicazione usato dagli antichi Egizi che evita l'odiata "tabellina pitagorica". Ricordiamo che i simboli numerici anticamente erano quelli riportati in fig. 5 e, con questi, si semplifica molto la tecnica del raddoppio utilizzata nella moltiplicazione.

						
1	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6

Fig. 5

Esempio 1.

Moltiplicare 17 per 32.

Supponiamo che lo scriba egizio avesse scelto 32 come moltiplicando e 17 come moltiplicatore. Avrebbe scritto in colonna, a sinistra 1 e il suo doppio 2 e il doppio di 2 fermandosi prima di superare il moltiplicatore 17, mentre a destra avrebbe scritto 32 e il suo doppio 64 e il doppio di 64 e così via fino a pareggiare la colonna sinistra, come nella tabella seguente:

Un algoritmo della moltiplicazione nascosto in una filastrocca

1	I	nnnnII	32
2	II	nnnnII nnnnII	64
4	IIII	⊙nnnnIIII IIII	128
8	IIII IIII	⊙nnnnIIII ⊙nnnnIIII	256
16	nnnnII IIII	⊙⊙⊙ ⊙⊙nnnnII	512

Il prodotto 32×17 si calcola sommando $32 + 512 = (32 \times 1) + (32 \times 16) = 32 \times (1 + 16) = 32 \times 17$.

Come si può notare, è molto semplice raddoppiare un numero con i geroglifici anche se può risultare ingombrante e la ricerca del prodotto non richiede la memorizzazione di tabelline. I bambini di oggi sicuramente proveranno invidia per i loro coetanei dell'antico Egitto ...

Scambiando il moltiplicando con il moltiplicatore, ovviamente il prodotto è lo stesso. Ripetiamo il metodo egiziano usando solo la notazione moderna.

Notazione moderna	
Moltiplicatore	Moltiplicando
1	17
2	34
4	68
8	136
16	272
32	544

In questo caso il prodotto si trova ancora più facilmente senza eseguire alcuna addizione (perché 32 è una potenza di due).

Esempio 2.

Moltiplicare 225 x 83.

Prepariamo una tabella come avrebbe fatto uno scriba egizio, ma usando i nostri simboli numerici.

Notazione moderna	
Moltiplicatore 83	Moltiplicando 225
1	✓ 225
2	✓ 450
4	900
8	1800
16	✓ 3600
32	7200
64	✓ 14400
1+2+16+64=83	225+450+3600+14400=18675

Per calcolare il prodotto si devono addizionare i numeri scritti a destra di 1, di 2, di 16 e di 64 , perché la loro somma è 83.

$$225 \times 83 = 225 \times (1+2+16+64) = 225 + 450 + 3600 + 14400 = 18675 .$$

Si potrebbe continuare con qualche altro esempio e concludere con una osservazione: è come se gli antichi egizi pensassero il moltiplicatore scritto in base due!

Bibliografia

Jannamorelli B., (2010), Abbasso la Matematica: regole e formule addio!, Torre de'Nolfi: Ed. Qualevita.

Gillings R. J., (1972), Mathematics in the time of the pharaohs, New York: Dover.

Gheverghese G. J., (2000), C'era una volta un numero, Milano: il Saggiatore.

Irrazionalità dei radicali

Cesare Labianca

Istituto di Istruzione Superiore “Luigi di Savoia” – Chieti
Via G. D’Aragona, 21, 66100, Chieti, Italy
cesarelabianca@gmail.com

Abstract

Lo scopo della presente comunicazione è puramente didattico: si vuole, infatti, cercare di colmare una lacuna presente nei libri di testo di Matematica per il biennio delle scuole medie superiori e che ritengo incomprensibile. In tutti i testi è presente la dimostrazione classica dell’irrazionalità della radice quadrata di 2, storicamente importante; manca invece una dimostrazione dell’irrazionalità della radice ennesima di numeri naturali o numeri razionali positivi (che non siano potenze ennesime di numeri naturali o razionali). Le due dimostrazioni che propongo ritengo siano comprensibili a studenti del secondo anno delle scuole medie superiori, dopo aver fornito loro, come prerequisito, qualche semplice teorema di aritmetica elementare sulla divisibilità tra numeri interi.

Parole chiave

Numeri irrazionali, Radicali, Numeri primi.

1. Introduzione

La relazione riguarda una proposta didattica sulla dimostrazione dell’irrazionalità delle radici ennesime dei numeri naturali, diversi da una potenza ennesima. L’importanza didattica della dimostrazione risiede nel fatto che per gli studenti del biennio rappresenta il primo approccio ai numeri irrazionali e quindi all’insieme dei numeri reali. Il loro “mondo numerico” è costituito solo dai numeri interi e dai numeri decimali limitati o periodici. Non è semplice per la loro mente, abituati solo a tali numeri, pensare a numeri decimali illimitati, in cui le cifre della parte decimale non sono regolate da nessuna sequenza algoritmica.

2. Grandezze incommensurabili

Da appassionato della Storia della Matematica, per introdurre i numeri irrazionali e i radicali, sono sempre partito, fin dagli inizi della mia carriera di docente, dalla dimostrazione dell'irrazionalità della radice quadrata di 2, indicata in seguito esplicitamente nelle Indicazioni Nazionali dei Licei Scientifici della riforma del 2010.

Ho sempre sottolineato ai miei studenti del secondo anno delle superiori l'importanza storica di tale dimostrazione, perché la radice quadrata di 2, numero irrazionale, esprime il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato.

Ma, racconto a loro, nell'antica Grecia, ai tempi di Pitagora, erano noti solo i numeri interi positivi e il rapporto tra essi. E quindi due segmenti erano sempre commensurabili, cioè multipli di un segmento comune, ovvero il rapporto delle loro lunghezze era sempre esprimibile mediante un numero intero positivo o un rapporto tra interi positivi.

La tradizione attribuisce la dimostrazione, che il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato non poteva essere un numero intero positivo, o un rapporto tra interi positivi, a Ippaso da Metaponto, che, per aver rivelato tale dimostrazione, venne affogato nel mare di fronte a Crotone.

Questa scoperta era infatti in totale dissonanza con le credenze degli stessi pitagorici, inaccettabile per quella sorta di religione che era il misticismo pitagorico, basato sull'idea che il numero fosse l'essenza della natura (*"tutto è numero"*) e che i soli numeri concepibili fossero i numeri interi positivi e i loro rapporti.

Pertanto, la diagonale e il lato di un quadrato rappresentano il primo esempio di grandezze incommensurabili.

Gli altri esempi notevoli di grandezze incommensurabili sono il lato e l'altezza di un triangolo equilatero (rapporto= $\frac{2}{\sqrt{3}}$), la diagonale e il lato di un cubo (rapporto= $\sqrt{3}$), una circonferenza e il suo diametro (rapporto= π), un segmento e la sua sezione aurea (rapporto= $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$) (e quindi il raggio della circonferenza circoscritta a un decagono regolare e il suo lato o la diagonale di un pentagono regolare e il suo lato).

3. Motivazione didattica

Il motivo che mi ha spinto a presentare questa breve relazione è che non ho mai trovato sui libri di testo di Matematica delle scuole superiori, almeno in quelli da me adottati, una dimostrazione dell'irrazionalità delle radici ennesime di un numero intero positivo, che non sia potenza ennesima di un numero intero.

Irrazionalità dei radicali

Non mi sono mai posto, colpevolmente, il problema di trovare una dimostrazione, pensando, erroneamente, che fosse difficile, dal momento che nessun testo ne forniva una.

Invece, la dimostrazione è semplice e credo che la si possa proporre in una classe del biennio delle superiori.

La dimostrazione l'ho ricavata da un classico testo di Teoria dei numeri (Tom Apostol, 1976), in cui il primo capitolo è dedicato alla divisibilità e al Teorema Fondamentale dell'Aritmetica.

Nella sezione degli esercizi ce n'è uno (il tredicesimo) che mi ha colpito e in cui si chiede di dimostrare l'irrazionalità della radice ennesima di un numero intero positivo, che ovviamente non sia potenza ennesima di un numero intero positivo. Trovandosi in quel capitolo, ho pensato, vuol dire che bastavano le conoscenze del contenuto di quel capitolo.

Infatti, la dimostrazione che ho dedotto richiede solo la conoscenza della tecnica della dimostrazione per assurdo e il seguente teorema su una proprietà della divisibilità tra numeri interi.

4. Teorema sull'irrazionalità dei radicali

Teorema 1 Siano a e b due numeri naturali primi tra loro. Allora anche due potenze qualsiasi di a e b sono numeri primi tra loro:

$$\forall a, b, m, n \in \mathbb{N}, m \geq 1, n \geq 1, \text{GCD}(a, b) = 1 \Rightarrow \text{GCD}(a^m, b^n) = 1$$

La dimostrazione è semplice, perché se a e b non hanno divisori in comune, diversi da 1, non potranno averne ovviamente neanche due potenze qualsiasi di a e b .

Grazie a questo teorema è possibile ora dimostrare l'irrazionalità delle radici ennesime dei numeri interi positivi, diversi da potenza ennesime di interi positivi.

Teorema 2 Sia t un numero intero positivo che non sia una potenza ennesima di un numero intero positivo. Allora la radice ennesima di t non è un numero razionale:

$$\forall t, k, n \in \mathbb{N}, t > 1, n > 1, t \neq k^n \Rightarrow \sqrt[n]{t} \notin \mathbb{Q}$$

Dimostrazione.

Se per assurdo $\sqrt[n]{t} \in \mathbb{Q}$, allora esistono due numeri interi positivi a e b , primi tra loro, tali che $\sqrt[n]{t} = \frac{a}{b}$. Allora, si avrà:

$$t = \left(\frac{a}{b}\right)^n \Rightarrow t = \frac{a^n}{b^n} \Rightarrow b^n \cdot t = a^n$$

Quindi, a^n e b^n non sono primi tra loro, essendo b^n divisore di a^n .

E questo va contro la condizione che invece a^n e b^n sono primi tra loro, essendo per ipotesi a e b primi tra loro e quindi, per il teorema 1, anche le loro potenze.

5. Un teorema sulle radici di un polinomio

E, per concludere questa breve relazione, illustro un interessante teorema, trovato in uno dei testi classici della teoria dei numeri (G. H. Hardy e E. M. Wright, 1936-2008), la cui dimostrazione è simile a quella del teorema precedente.

Teorema 3 Sia

$$P(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \dots + c_2x^2 + c_1x + c_0$$

un polinomio con coefficiente direttore uguale a 1, a coefficienti interi e termine noto $c_0 \neq 0$. Allora le soluzioni reali dell'equazione $P(x)=0$ sono numeri interi o irrazionali:

$$\exists t \in \mathbb{R} : P(t) = 0 \Rightarrow t \in \mathbb{Z} \vee t \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

Dimostrazione.

Se per assurdo esiste un numero razionale, non intero, $\frac{a}{b}$, con a e b primi tra loro, soluzione dell'equazione $P(x)=0$, allora si ha:

$$\frac{a^n}{b^n} + c_{n-1} \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + c_{n-2} \frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} + \dots + c_2 \frac{a^2}{b^2} + c_1 \frac{a}{b} + c_0 = 0 \Rightarrow$$

$$a^n + c_{n-1}(b \cdot a^{n-1}) + c_{n-2}(b^2 \cdot a^{n-2}) + \dots + c_2(b^{n-2} \cdot a^2) + c_1(b^{n-1} \cdot a) + b^n c_0 = 0 \Rightarrow$$

$$a^n = -c_{n-1}(b \cdot a^{n-1}) - c_{n-2}(b^2 \cdot a^{n-2}) - \dots - c_2(b^{n-2} \cdot a^2) - c_1(b^{n-1} \cdot a) - b^n c_0 \Rightarrow$$

$$a^n = b \cdot [-c_{n-1}a^{n-1} - c_{n-2}(b \cdot a^{n-2}) - \dots - c_2(b^{n-3} \cdot a^2) - c_1(b^{n-2} \cdot a) - b^{n-1}c_0] \Rightarrow$$

$$a^n = b \cdot [k].$$

Irrazionalità dei radicali

Pertanto, b è divisore di a^n , ma questo è contro l'ipotesi che a e b sono primi tra loro, e quindi, per il teorema 1, anche b e a^n .

6. Conclusioni

A conclusione di questa relazione, credo si debba sottolineare quanto sia importante introdurre gli studenti ai numeri irrazionali, generati inizialmente dalle radici ennesime, e al confronto con i numeri razionali. E lo si può fare didatticamente, utilizzando da una parte la Geometria, analizzando le coppie di grandezze geometriche incommensurabili, a loro familiari già dalla scuola media di primo grado; dall'altra usando l'Algebra, con i concetti di divisibilità tra i numeri naturali e di numero primo.

Dal punto di vista didattico, aver chiaro il concetto di numero irrazionale, partendo dai radicali, faciliterà in seguito la comprensione di altri importanti e fondamentali numeri irrazionali, quali π e il numero di Napier e , i logaritmi, le potenze ad esponente non razionale, i valori delle funzioni goniometriche e delle funzioni inverse goniometriche.

In prospettiva didattica, si può generalizzare la dimostrazione dell'irrazionalità delle radici ennesime, svolta precedentemente, anche ai logaritmi e alle funzioni goniometriche.

La corretta conoscenza dei numeri irrazionali troverà il suo compimento all'ultimo anno del corso di studio delle medie superiori, quando, utilizzando la teoria dei limiti, molti dei numeri irrazionali studiati negli anni precedenti saranno introdotti come limiti di successioni di numeri razionali o di frazioni continue, o come somma di infiniti numeri razionali.

Bibliografia

Hardy G. H., Wright E. M., (1936 - 2008). *An introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, University Press.

Apostol Tom M., (1976). *Introduction to Analytic Number Theory*, New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag.

Niven Ivan M., (1961). *Numbers: Rational and Irrational*, New York, Random House, (trad. in italiano (1965). *Numeri razionali e numeri irrazionali*, Bologna, Zanichelli).

Cesare Labianca

Courant R. and Robbins H., (1996). "Incommensurable Segments, Irrational Numbers, and the Concept of Limit" §2.2 in *What Is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*, 2nd ed. Oxford, England: Oxford University Press, pp. 58-61. (trad. in italiano (1971). *Che cos'è la Matematica?*, pp. 100-116, Torino, Bollati Boringhieri).

Kline M., (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford, University Press. (trad. in italiano (1991). *Storia del pensiero Matematico?*, vol I e II, Torino, Einaudi).

Operazioni logiche e probabilità di eventi condizionati

Luciana Delli Rocili¹ Antonio Maturo²

¹Istituto Comprensivo Statale Pescara 5, Via Gioberti n. 15, 65100 Pescara
e-mail: lucianadr@live.it

²Mathesis Abruzzo, Via Pianacci 24, 65015, Montesilvano
e-mail: antomato75@gmail.com

Sunto

In questo lavoro focalizziamo la nostra attenzione sulle operazioni logiche fra eventi condizionati, sui legami fra le probabilità soggettive di due eventi condizionati e quella del risultato di una operazione logica fra tali eventi.

Oltre ad un'analisi delle operazioni note, delle loro proprietà e delle possibili interpretazioni e applicazioni, si cerca di attribuire loro un significato non solo da un punto di vista logico e probabilistico, ma anche in contesti della vita reale.

Si propone infine un percorso didattico per far acquisire ai ragazzi i vari concetti.

Parole Chiave: Eventi condizionati. Probabilità soggettiva di eventi condizionati. Condizioni di coerenza. Operazioni fra eventi condizionati e loro interpretazione.

1. Introduzione

Molto spesso, nei testi di Calcolo delle Probabilità, il concetto di evento condizionato è praticamente ignorato. Infatti dati due eventi E, H , si assume che essi appartengano ad un'algebra di eventi $\mathcal{E}$ su cui è stata assegnata una probabilità $p: \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ e ci si limita alla “definizione” di probabilità condizionata $p(E|H)$ come rapporto:

$$p(E|H) = p(E \cap H)/p(H), \quad (1.1)$$

con l'avvertenza che tale definizione ha significato solo per $p(H) > 0$.

Al contrario, nell'impostazione soggettiva del Calcolo delle Probabilità (de Finetti, 1970; Dubins, 1975; Lindley, 1990; Scozzafava, 2001; Coletti, Scozzafava, 2002) si attribuisce un significato al concetto di evento condizionato nell'ambito della logica trivalente, si definisce la probabilità di un evento condizionato $E|H$ indipendentemente dal fatto che sia $p(H) > 0$ oppure $p(H) = 0$, con l'unica esclusione del caso in cui H è l'evento impossibile $\emptyset$. Da questo punto di vista la formula (1.1) non è una definizione, bensì un teorema, valido quando $p(H) > 0$.

Ricordiamo che, all'inizio dei nostri studi di Calcolo delle Probabilità, la definizione di probabilità condizionata tramite la formula (1.1) ci creò molti dubbi dal punto di vista logico, poichè il concetto di evento condizionato e probabilità condizionata ci sembravano in alcuni casi immediati, senza passare attraverso la formula (1.1). Finalmente le idee si sono chiarite una volta studiati i fondamenti della probabilità soggettiva.

Probabilmente, l'uso della formula (1.1) come definizione può essere stato ritenuto utile per evitare di entrare nel campo della logica trivalente. Tuttavia, come spiega ampiamente de Finetti nell'appendice critica del suo libro (1970), se si vuole seguire un filo logico soddisfacente, è necessario definire l'evento condizionato come ente logico con tre valori di verità, seguendo in particolare le teorie esposte in (Reichenbach, 1944). Se $\mathcal{E}$ è l'algebra di eventi presa in considerazione, la probabilità condizionata è una funzione $p: \mathcal{E} \times (\mathcal{E} - \emptyset) \rightarrow [0, 1]$ soddisfacente ad opportuni assiomi (Dubins, 1975; Lindley, 1990; Scozzafava, 2001; Coletti, Scozzafava, 2002), dove l'evento condizionato $E|H$ è rappresentato dalla coppia $(E, H) \in \mathcal{E} \times (\mathcal{E} - \emptyset)$.

In questo lavoro desideriamo fare il punto su alcuni aspetti logici sugli eventi condizionati, considerando anche i risultati di alcuni lavori sulla logica trivalente (Heyting, 1971; Gentilhomme, 1968; Fadini, 1979; Klir, Yuan, 1995; Maturo, 1993, 2008).

La possibilità e l'utilità di considerare tali concetti è stata sperimentata in varie classi della scuola primaria, in cui gli alunni, opportunamente guidati, hanno saputo destreggiarsi abilmente fra la logica ternaria e la probabilità soggettiva. I risultati e le proposte sono stati riportati in vari lavori (Delli Rocili, Maturo, 2013, 2015, 2018, 2019, 2020). Tali concetti sono stati utili anche per impostare una didattica interdisciplinare fra Matematica e Italiano.

2. I concetti di evento condizionato e probabilità condizionata

Dato un evento A , indichiamo con A^c il suo contrario. Inoltre, dati due eventi A e B , indichiamo con $A \cap B$ l'evento $A \cap B$, ossia l'evento vero se e solo se A e B sono entrambi veri. Denotiamo con Ω l'evento certo e con $\emptyset$ l'evento impossibile.

Seguendo l'impostazione di de Finetti, ripresa da vari autori (de Finetti, 1970; Maturo, 1993, 2008; Scozzafava, 2001; Coletti, Scozzafava, 2002; Delli Rocili, Maturo, 2020), dati due eventi E, H , l'evento condizionato $E|H$ può essere definito come una proposizione che assume i valori “V = vero”, “I = indeterminato”, “F = falso”, a seconda che siano veri gli eventi $E \cap H, H^c \cap H, E^c \cap H$.

Possiamo quindi scrivere:

Operazioni logiche e probabilità di eventi condizionati

$$E|H = (E \cap H, H^c, E^c \cap H), \quad (2.1)$$

dove $E \cap H$, H^c , $E^c \cap H$, si dicono, rispettivamente, *parte* (o *componente*) *vera*, *indeterminata*, *falsa* di $E|H$.

L'evento $E|H$ si presenta come una proposizione condizionata del tipo:

$$E|H = \text{"se è vero } H \text{ allora è vero } E\text{"},$$

ad esempio "se gioca Ronaldo allora la Juventus vince", con

$$E = \text{"la Juventus vince"}, H = \text{"gioca Ronaldo"}.$$

Viceversa, se $K = (A, B, C)$ è una terna ordinata di eventi a due a due incompatibili e tali che la loro unione è l'evento certo Ω , allora si può interpretare K come l'evento condizionato $E|H$ con $E = A$, $H = A \cup C$, ossia:

$$E|H = \text{"se si verifica } A \text{ o } C \text{ allora si verifica } A\text{"}.$$

Ad esempio sia $A = \text{"supero l'esame di Matematica"}$, $C = \text{"non supero l'esame di Matematica"}$, $B = \text{"l'esame è rimandato"}$. Allora:

$$E|H = \text{"se l'esame non è rimandato allora lo supero"}.$$

Una interpretazione del concetto di evento condizionato $E|H$, con $H \neq \emptyset$, si ottiene considerando una scommessa associata ad $E|H$. Un individuo, chiamiamolo Carlo, paga una somma K (la puntata) ad un individuo (o associazione) chiamato Banco, e ottiene in cambio:

- Una vincita S se $E|H$ è vero ($E|H = V$);
- La restituzione della somma K se H è falso ($E|H = I$);
- Niente se $E|H$ è falso ($E|H = F$).

La scommessa si dice *coerente* se essa, nel caso in cui non ci sia restituzione della somma, non risulta con certezza vantaggiosa o svantaggiosa per Carlo. Ossia, assumendo $S > 0$, la puntata non deve essere negativa né superiore alla vincita. Inoltre, per $E \cap H = \emptyset$, deve essere $K = 0$ e per $E \cap H = H$ deve essere $K = S$.

Il rapporto $p = K/S$ definisce implicitamente la probabilità $p(E|H)$ dell'evento condizionato $E|H$. Le condizioni di coerenza implicano quindi:

$$p(\emptyset|H) = 0, p(H|H) = 1, 0 \leq p = p(E|H) \leq 1. \quad (2.2)$$

Ordinando i tre possibili esiti secondo la convenienza di Carlo, poniamo $V > I > F$, essendo V il risultato più favorevole e F il più sfavorevole.

L'affermazione condizionale $E|H = \text{"se vale } H \text{ allora vale } E\text{"}$ non deve essere interpretata come la classica implicazione logica $H \rightarrow E$, perché pur assumendo gli stessi valori di verità per H vero, ha un valore di verità diverso per H falso. Infatti, per H falso, risulta $H \rightarrow E$ è vero, mentre $E|H$ è indeterminato.

Seguendo le notazioni di de Finetti e Reichenbach, l'affermazione $E|H$ è detta “quasi-implicazione”. Per fissare le idee indichiamolo con il simbolo $H \Rightarrow E$, simile a quello usato dagli autori citati.

Dato $E|H$, l'evento condizionato contrario $(E|H)^c$ è l'evento che assume valore “vero” se $E|H$ è falso e valore “falso” se $E|H$ è vero. In altri termini:

$$(E|H)^c = E^c|H = (E^c \wedge H, H^c \wedge E \wedge H). \quad (2.3)$$

L'evento condizionato contrario è quindi interpretabile come una scommessa, in cui un altro individuo, chiamiamolo Giuseppe, paga una somma K^c a Banco e ottiene in cambio:

- Una vincita S^c se $E|H$ è falso ($E|H = F$);
- La restituzione della somma K^c se H è falso ($E|H = I$);
- Niente se $E|H$ è vero ($E|H = V$).

Se Banco riceve contemporaneamente le due scommesse con $S = S^c$ allora finisce per ricevere la somma $K + K^c$ e per pagare la somma S . L'insieme delle due scommesse si dice *coerente* se ciascuna delle due scommesse è coerente e inoltre risulta $K + K^c = S$, ossia se, per Banco, la seconda scommessa annulla l'effetto della prima. In altre parole, devono valere le condizioni:

$$0 \leq p \leq 1, 0 \leq p^c \leq 1, p + p^c = 1. \quad (2.4)$$

Un ulteriore risultato che conviene ricordare si ha se a scommettere contro Banco sono in tre, Carlo, Giuseppe e Luigi, che scommettono rispettivamente su eventi condizionati $E_1|H, E_2|H, E_3|H$ tali che $\{E_1, E_2, E_3\}$ sono a due a due incompatibili e tali che la loro unione contiene H . Dette K_1, K_2, K_3 le puntate, supponiamo che le vincite siano tutte uguali a $S > 0$. Nel caso in cui si verifica H , Banco paga con certezza la somma S e riceve con certezza la somma $K_1 + K_2 + K_3$. L'insieme delle scommesse è coerente se risulta $S = K_1 + K_2 + K_3$, ossia se, posto $p_1 = K_1/S, p_2 = K_2/S, p_3 = K_3/S$, risulta:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1. \quad (2.5)$$

Chiamiamo “condizioni di coerenza additive” quelle espresse dalle formule (2.2), (2.4), (2.5). Con semplici calcoli si ottiene, come conseguenza di tali formule, la seguente *proprietà additiva*:

$$(E_1 \wedge E_2 = \emptyset, H \neq \emptyset) \Rightarrow p(E_1 \cup E_2|H) = p(E_1|H) + p(E_2|H). \quad (2.6)$$

Infine, è importante ricordare che, ragionando a partire da opportune scommesse, si ottiene la “condizione di coerenza moltiplicativa” o *proprietà moltiplicativa*:

$$(A \subseteq B \subseteq C) \Rightarrow p(A|B) p(B|C) = p(A|C). \quad (2.7)$$

Operazioni logiche e probabilità di eventi condizionati

Nel caso in cui $C = \Omega$, evento certo, allora $B|C = B$, $A|C = A$ e, per $p(B) > 0$, la (2.7) diventa

$$p(A|B) = p(A \cap B)/p(B), \quad (2.8)$$

ossia, per $B = H$, $A = E$, si ottiene la (1.1) come conseguenza della (2.7). Quindi, nel contesto della probabilità soggettiva, la (1.1) non è “un punto di partenza” per un discorso sulle probabilità condizionate, ma piuttosto un punto di arrivo.

3. Le operazioni logiche fondamentali

3.1 Inclusione

Dati due eventi condizionati $K = (A, B, C)$ e $T = (D, E, F)$ appare naturale porre $K \subseteq T$, e diciamo che K è *contenuto* o *incluso* in T , se $A \subseteq D$, $C \supseteq F$, ossia se la parte vera di K è contenuta in quella di T e la parte falsa di K contiene quella di T .

3.2 Unione di due eventi condizionati

Dati due eventi condizionati $A|B$ e $C|D$ si dice *unione* (o *disgiunzione*) di $A|B$ e $C|D$, e si indica con $A|B \cup C|D$, l'evento condizionato consistente nel considerare il massimo dei valori assunti da $A|B$ e $C|D$.

In altri termini l'unione è definita dalla seguente Tabella 3.1.

$A B \cup C D$	Colonna C_1 $C D = CD = V$	Colonna C_2 $C D = D^c = I$	Colonna C_3 $C D = C^cD = F$
Riga R_1 $A B = AB = V$	V	V	V
Riga R_2 $A B = B^c = I$	V	I	I
Riga R_3 $A B = A^cB = F$	V	I	F

Tabella 3.1

Nel caso in cui è vuota l'intersezione fra gli eventi rappresentati dalla riga R_i e dalla colonna C_j , che indichiamo brevemente $R_i \cap C_j$, all'incrocio fra la riga R_i e la colonna C_j sostituiamo il valore di verità della Tabella 3.1 con il simbolo $\emptyset$.

Diciamo *costituenti* associati alla coppia di eventi condizionati $(A|B, C|D)$ le intersezioni $R_i \cap C_j$ non vuote. Da ora in poi in tutte le tabelle che saranno presentate

sottintendiamo che il valore di verità associato alla coppia (R_i, C_j) è sostituito da $\emptyset$ ogni volta che $R_i \cap C_j = \emptyset$.

Ad esempio, sia

$A|B = \text{“se faccio una prova scritta allora la supero”},$

$C|D = \text{“se faccio una prova orale allora la supero”}.$

In tal caso $A|B \cup C|D$ può essere interpretato come la proposizione: “se supero almeno una delle due prove allora sono promosso e se non supero nessuna delle due prove allora sono bocciato”, dove la promozione corrisponde al fatto che l’evento $A|B \cup C|D$ assume valore “V” e la bocciatura al fatto che assume valore “F”. L’esito dell’esame resta indeterminato se ho una sola bocciatura e una delle due prove non si svolge, oppure se non si svolge nessuna delle due prove.

L’unione consiste quindi nel ritenere valido il migliore dei risultati di $A|B$ e $C|D$.

Un utile esercizio è la dimostrazione del seguente

Teorema 3.1 (*Compatibilità dell’unione rispetto all’inclusione*) Dati due eventi condizionati $A|B$ e $C|D$, risulta:

$$A|B \subseteq C|D \text{ se e solo se } A|B \cup C|D = C|D. \quad (3.1)$$

3.3 Intersezione di due eventi condizionati

Dati due eventi condizionati $A|B$ e $C|D$ si dice *intersezione* (o *congiunzione*) di $A|B$ e $C|D$, e si indica con $A|B \cap C|D$, l’evento condizionato consistente nel considerare il minimo dei valori assunti da $A|B$ e $C|D$. In altri termini, l’intersezione è definita dalla seguente Tabella 3.2.

$A B \cap C D$	Colonna C_1 $C D = CD = V$	Colonna C_2 $C D = D^c = I$	Colonna C_3 $C D = C^cD = F$
Riga R_1 $A B = AB = V$	V	I	F
Riga R_2 $A B = B^c = I$	I	I	F
Riga R_3 $A B = A^cB = F$	F	F	F

Tabella 3.2

Operazioni logiche e probabilità di eventi condizionati

Riprendendo l'esempio precedente, sia $A|B$ = “se faccio una prova scritta allora la supero”, $C|D$ = “se faccio una prova orale la supero”, allora $A|B \cap C|D$ può essere interpretato come: “se supero entrambe le due prove sono promosso e se non supero una o nessuna delle due prove sono bocciato”, dove la promozione corrisponde al fatto che l'evento $A|B \cap C|D$ assume valore “V” e la bocciatura che assume valore “F”. L'esito dell'esame resta indeterminato se ho una sola promozione e una delle due prove non si svolge, oppure se non si svolge nessuna delle due prove. L'intersezione consiste quindi nel ritenere valido il peggiore dei risultati di $A|B$ e $C|D$.

Un utile esercizio è la dimostrazione del seguente

Teorema 3.2 (*Compatibilità dell'intersezione rispetto all'inclusione*) Dati due eventi condizionati $A|B$ e $C|D$, risulta:

$$A|B \subseteq C|D \text{ se e solo se } A|B \cap C|D = A|B. \quad (3.2)$$

3.4 Quasi-implicazione di due eventi condizionati

Dati due eventi condizionati $A|B$ e $C|D$ si dice *quasi-implicazione* di $A|B$ su $C|D$, e si indica con $A|B \Rightarrow C|D$, l'evento condizionato che assume valore “vero” se $A|B$ e $C|D$ sono entrambi veri, valore “falso” se $A|B$ è vero e $C|D$ è falso, valore “indeterminato” negli altri casi (Reichenbach, 1944; de Finetti, 1970). In altri termini la quasi-implicazione è definita dalla seguente Tabella 3.3.

$A B \Rightarrow C D$	Colonna C_1 $C D = CD = V$	Colonna C_2 $C D = D^c = I$	Colonna C_3 $C D = C^cD = F$
Riga R_1 $A B = AB = V$	V	I	F
Riga R_2 $A B = B^c = I$	I	I	I
Riga R_3 $A B = A^cB = F$	I	I	I

Tabella 3.3

Riprendendo l'esempio precedente, sia $A|B$ = “se faccio una prova scritta allora la supero”, $C|D$ = “se faccio una prova orale la supero”, allora $A|B \Rightarrow C|D$ può essere interpretato come l'evento condizionato “vero” se io faccio le due prove e le supero entrambe, “falso” se io faccio le due prove, supero la prova scritta e non supero la prova orale, “indeterminato” negli altri casi.

La quasi-implicazione $A|B \Rightarrow C|D$ può essere considerata come l'estensione del concetto di "evento condizionato" agli eventi condizionati (de Finetti, 1970). Ossia

$$A|B \Rightarrow C|D \Leftrightarrow (C|D) | (A|B). \quad (3.3)$$

4. Operazioni "numeriche" fra eventi condizionati

In molti lavori di studiosi della probabilità soggettiva, un evento condizionato $E|H$ è visto come una terna di numeri reali $(1, p, 0)$, dove si verifica il valore 1 se $E|H$ è vero, il valore p se è *indeterminato* e il valore 0 se è falso, dove $p \in [0, 1]$ è la *probabilità* dell'evento $E|H$. Questa posizione deriva dall'idea di considerare l'evento condizionato $E|H$ come una scommessa, ossia una terna $(S, K, 0)$, in cui S è la vincita, ottenuta in corrispondenza dell'evento $E|H$; K è la puntata, restituita se si verifica H^c ; 0 è la somma che si riceve se si verifica $E^c|H$. Dividendo tutti i numeri per S e ricordando che il rapporto $p = K/S$ è la *probabilità* dell'evento condizionato $E|H$ definita implicitamente dalla scommessa, segue che $E|H$ è rappresentato da una terna $(1, p, 0)$.

Indichiamo con " $\bullet$ " un'operazione in R , insieme dei numeri reali. Se $A|B$ e $C|D$ sono due eventi condizionati definiamo $A|B \bullet C|D$ in base alla seguente Tabella 4.1, in cui si indicano con p_1 e p_2 , rispettivamente, le probabilità di $A|B$ e $C|D$.

$A B \bullet C D$	Colonna C_1 $C D = CD = 1$	Colonna C_2 $C D = D^c = p_2$	Colonna C_3 $C D = C^c D = 0$
Riga R_1 $A B = AB = 1$	$1 \bullet 1$	$1 \bullet p_2$	$1 \bullet 0$
Riga R_2 $A B = B^c = p_1$	$p_1 \bullet 1$	$p_1 \bullet p_2$	$p_1 \bullet 0$
Riga R_3 $A B = A^c B = 0$	$0 \bullet 1$	$0 \bullet p_2$	$0 \bullet 0$

Tabella 4.1

Come nel paragrafo precedente, il risultato che si trova sulla Riga i e Colonna j è sostituito dal simbolo $\emptyset$ dell'insieme vuoto se gli eventi che caratterizzano la riga i e la colonna j hanno intersezione vuota.

Operazioni logiche e probabilità di eventi condizionati

Condizioni necessarie affinché $A|B \bullet C|D$ sia un *evento condizionato* è che nei risultati della tabella diversi da $\emptyset$ compaiano solo numeri reali appartenenti all'intervallo $[0, 1]$ e che al più ci sia un solo numero $p = p_1 \bullet p_2$ diverso da 0 e 1.

In tali ipotesi ci si chiede se il numero p sia, sotto opportune condizioni, uguale alla probabilità di $A|B \bullet C|D$ o almeno ad essa collegato da qualche formula.

L'addizione di eventi condizionati

L'addizione $A|B + C|D$ di due eventi condizionati è definita dalla seguente Tabella 4.2:

$A B + C D$	Colonna C_1 $C D = CD = 1$	Colonna C_2 $C D = D^c = p_2$	Colonna C_3 $C D = C^c D = 0$
Riga R_1 $A B = AB = 1$	$1 + 1$	$1 + p_2$	$1 + 0$
Riga R_2 $A B = B^c = p_1$	$p_1 + 1$	$p_1 + p_2$	$p_1 + 0$
Riga R_3 $A B = A^c B = 0$	$0 + 1$	$0 + p_2$	$0 + 0$

Tabella 4.2

Le condizioni affinché $A|B + C|D$ sia un evento condizionato, per p_1 e p_2 non nulli, impongono che:

- le parti vere dei due eventi condizionati siano disgiunte;
- la parte indeterminata di ciascuno dei due eventi condizionati abbia intersezione vuota con la parte vera e la parte falsa dell'altro;
- sia $p_1 + p_2 \leq 1$.

Tali condizioni sono verificate se $B = D$ e $ABCD = \emptyset$. In tali ipotesi risulta:

- $A|B + C|D = A|B \cup C|D$;
- l'elemento $p_1 + p_2$ che si trova sulla seconda riga e seconda colonna della tabella è proprio la probabilità di $A|B \cup C|D$, in base alla *proprietà additiva* (2.6).

La moltiplicazione di eventi condizionati

La moltiplicazione $A|B C|D$ di due eventi condizionati è definita dalla seguente Tabella 4.3.

A B C D	Colonna C ₁ C D = CD = 1	Colonna C ₂ C D = D ^c = p ₂	Colonna C ₃ C D = C ^c D = 0
Riga R ₁ A B = AB = 1	1	p ₂	0
Riga R ₂ A B = B ^c = p ₁	p ₁	p ₁ p ₂	0
Riga R ₃ A B = A ^c B = 0	0	0	0

Tabella 4.3

Le condizioni perché A|B C|D sia un evento condizionato, per p₁ e p₂ non nulli e diversi dall'unità, impongono che la parte vera di ciascuno dei due eventi condizionati abbia intersezione vuota con la parte indeterminata dell'altro.

Un caso in cui ciò avviene è quello in cui B = C D. In tali ipotesi A|B C|D = A|D e l'elemento p₁ p₂ che si trova sulla seconda riga e seconda colonna della tabella è proprio la probabilità di A|B C|D, in base alla *proprietà moltiplicativa* (2.7).

5. Conclusioni e prospettive didattiche

Dal punto di vista didattico, consigliamo di fare esperienze analoghe a quelle descritte nei nostri lavori (Delli Rocili, Maturo, 2013, 2019, 2020).

In una prima fase si fanno enunciare ai ragazzi delle proposizioni che essi, a prima vista, ritengono essere eventi condizionati, prese da situazioni comuni della vita quotidiana o da analisi di situazioni del mondo dello sport. Una commissione, formata da due ragazzi e l'insegnante, valuta criticamente se tali proposizioni abbiano tutte le caratteristiche necessarie per essere eventi condizionati, calcolando le parti vera, falsa e indeterminata.

Un semplice esempio di evento condizionato può essere quello illustrato in Figura 5.1.



Figura 5.1

In una seconda fase, raccolte le proposizioni valutate come eventi condizionati, si invitano i ragazzi a fare le operazioni logiche descritte nel paragrafo 3 e ad interpretarle dal punto di vista linguistico.

In una terza fase si invitano i ragazzi ad “inventare” operazioni alternative e a discuterne il significato.

In una quarta fase i ragazzi sono invitati a fare scommesse con pagamenti per mezzo di figurine o denaro del Monopoli, per trovare per via sperimentale le varie formule di coerenza e arrivare a comprendere appieno il significato della forma numerica (1, p, 0) dell’evento condizionato.

Nella quinta e ultima fase i ragazzi sono invitati a sperimentare operazioni “numeriche” sugli eventi condizionati come quelle descritte nel paragrafo 4, interpretando i risultati ottenuti, “inventando” operazioni alternative, cercando di capirne il significato.

Bibliografia

Coletti, G., Scozzafava, R., (2002), *Probabilistic logic in a coherent setting*, Kluwer Academic Publishers, London.

de Finetti, B. (1970), *Teoria delle Probabilità*, vol. I e II, Einaudi, Torino.

Delli Rocili L., Maturo A., (2013), Logica del certo e dell’incerto per la scuola primaria, *Science & Philosophy*, 1 (1), 37-58.

Delli Rocili L., Maturo A., (2015). Interdisciplinarietà, logica dell’incerto e logica sfumata nella scuola primaria *Science & Philosophy*, 3(2), 11-26.

Delli Rocili L., Maturo A., (2018), Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria, in Manuppella G., & Maturo A. (Eds.), *Insegnare*

Matematica: didattica, inclusione e cooperazione, pp. 35-46, Serie: Quaderni APAV, no 3, Pescara.

Delli Rocili L., Maturo A., (2019), Un percorso didattico per introdurre il ragionamento probabilistico nella Scuola Primaria, in Manuppella G., & Maturo A. (Eds.). *Dall'intuizione ai concetti: metodologie per elaborare percorsi didattici e modelli matematici* pp. 35-46, Serie: Quaderni APAV, no 5, Pescara.

Delli Rocili L., Maturo A., (2020), Logica a tre valori e probabilità condizionata nella scuola primaria, *Mondo Matematico e Dintorni*, Vol 3, No 1-2 (2020), 65-84.

Dubins, L.E., (1975), Finitely additive conditional probabilities, conglomerability and disintegrations, *The Annals of Probability*, 3, 89-99.

Fadini A., (1979), *Introduzione alla teoria degli insiemi sfocati*, Liguori Editore, Napoli.

Gentilhomme, M.Y., (1968), Les ensembles flous en linguistiques, *Cahiers de linguistique theorique et appliquée*, Bucarest, (5) 47, pp. 47-65.

Heyting, A., (1971), Intuitionism, an introduction, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Klir G.J., Yuan B., (1995), *Fuzzy sets and fuzzy logic*, Prentice Hall.

Lindley D. V., (1990), *La logica della decisione*, Il Saggiatore, Milano.

Maturo A., (1993), Struttura algebrica degli eventi generalizzati, *Periodico di Matematiche*, 4, 1993, p. 18-26.

Maturo A., (2008), La moderna visione interdisciplinare di Geometria, Logica e Probabilità in Bruno de Finetti, *Ratio Sociologica*, 2, 2008, pp. 39-62.

Reichenbach H., (1944), *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica*, tr. it. Einaudi, Torino, 1954

Scozzafava R., (2001), *Incertezza e probabilità. Significato, valutazione, applicazioni della probabilità soggettiva*, Zanichelli, Bologna.

Prevenire il bullismo e il cyberbullismo tra gli studenti

Cristina Ispas¹

Mario Innocenzo Mandrone²

¹Universitatea Babeş-Bolyai, Centrul Universitar UBB din Reşiţa (Romania)

²Università del Sannio di Benevento (Italia)

Sunto

Ogni anno un numero sempre più elevato di 11-17enni subisce derisioni, minacce, aggressioni verbali e fisiche, diffamazioni in modo particolare in ambienti scolastici. In questo intervento si prenderanno in esame non solo le cause che possono contribuire a determinare tale fenomeno, cause che vanno da quelle sociali e culturali e, perciò valoriali, ad altre a più spiccato carattere psicologico ed educativo, ma anche le differenti forme in cui esso si manifesta, tenendo conto delle più accreditate ricerche di settore condotte con una pluralità di metodi e con un approccio scientifico accettato da molti studiosi di didattica e assolutamente in linea con le indicazioni istituzionali.

Parole Chiave: Cyberbullismo. Prevenzione. Politiche scolastiche.

1. Politiche scolastiche efficaci. I consulenti scolastici

L'esplosione di episodi di violenza che interessano in modo particolare le scuole, talvolta anche eccessivamente enfatizzato dai media, configurano un quadro sociale ed educativo critico. Nella realtà scolastica l'alunno apprende le regole di condotta e potenzia le proprie abilità cognitive, emotive e sociali. Essa può divenire teatro sia di comportamenti pro-sociali sia di condotte aggressive, occasionali o reiterate, che incidono in modo profondo sullo sviluppo degli individui a vario titolo coinvolti. I soggetti maggiormente coinvolti sono comunque i bambini delle scuole elementari e dei primi anni delle scuole medie dove il fenomeno sembra più diffuso e pervasivo.

Una sua conoscenza approfondita può aiutare chi interviene sia per prevenire il fenomeno considerato sia per ridurlo. Purtroppo solo recentemente tali fenomeni sono stati tenuti nella dovuta considerazione ed hanno ricevuto particolare attenzione anche dal mondo accademico diventando oggetto di studio sistematico. La definizione che ne dà Dan Olweus, uno dei maggiori studiosi del settore, è la seguente: "uno studente è oggetto di azioni di bullismo, ovvero è prevaricato e vittimizzato, quando viene esposto, ripetutamente nel corso del tempo, ad azioni offensive messe in atto da parte di uno o più compagni".

Tale comportamento contribuisce a creare nella vittima gravi conseguenze psicologiche quali ad es. un senso di inadeguatezza e insicurezza diffusa, il calo del rendimento

scolastico fino all'abbandono degli studi, l'abbassamento dell'autostima, l'instaurarsi di comportamenti devianti e di difficoltà relazionali.

Tra i possibili fattori di rischio che influenzano l'incidenza del fenomeno, riscontriamo certamente le relazioni familiari, il temperamento, le caratteristiche esteriori, le difficoltà personali e i disturbi specifici, e le dinamiche di gruppo. Per tale motivo è di fondamentale importanza saper individuare e conoscere i rischi e i primi campanelli d'allarme di quello che può in breve tempo divenire una vera e propria forma di bullismo, nonché possedere strumenti adeguati per sostenere e guidare i ragazzi coinvolti. In tale contesto risulta di particolare rilievo quanto sia necessario un capovolgimento della visione classica: il bullo non deve più essere considerato come "il cattivo che va soltanto punito" ma come colui che sta esprimendo una difficoltà, di qualsiasi natura essa sia. Il suo comportamento va pertanto contestualizzato e interpretato anche come una possibile richiesta d'aiuto. Per cercare di far fronte al bullismo è necessario, quindi, che si mobilitino tutti i soggetti a vario titolo coinvolti: dai ragazzi, ai genitori, agli insegnanti, agli educatori, ma anche ai media e alle istituzioni, perché il fenomeno del bullismo non resti nel silenzio ma diventi tema di discussione e di confronto.

Da una comparazione di dodici programmi di prevenzione sull'efficacia dei programmi di intervento a scuola, condotta da Polain, Pigott e al. Nel 2012 effettuata coinvolgendo 12.784 studenti, si evince che, in generale, tali programmi di contrasto e di prevenzione sono risultati molto efficaci. Recenti indagini sviluppate da Manganelli, Cavicchioli e Lucidi nel 2017 evidenziano, inoltre, come siano significativamente più frequenti episodi di bullismo a carico di bambini e ragazzi immigrati di prima e seconda generazione rispetto a quelli rivolti a studenti nativi. Ciò evidenzia il ruolo determinante del contesto socio-culturale nel quale sorgono e si sviluppano difficoltà di adattamento sociale che hanno come logica conseguenza forme pervasive di aggressività, di discriminazione e di reiterato comportamento violento.

La letteratura specialistica, fondata sulle evidenze scientifiche di sperimentazioni pregresse e di altri dati sperimentali acquisiti e rielaborati da un pool di ricercatori universitari particolarmente interessati alle problematiche di devianza giovanile, ha messo in evidenza che le diverse forme di cyberbullismo (ma anche del bullismo fisico) possono essere combattute attivando progetti di intervento preventivo centrati sul vissuto di appartenenza del cyberbullo e sull'attivazione di norme funzionali alla coesione sociale. Ecco perché bisogna promuovere scuole sicure e inclusive, incoraggiare lo sviluppo di politiche che supportino un ambiente scolastico coinvolgente ed attrattivo, delineare progettazioni ed attuazioni di attività didattiche mirate e programmi di prevenzione della violenza sia all'interno dell'istituzione scolastica che nello spazio virtuale.

A livello legislativo sempre più paesi hanno promulgato leggi con lo scopo di contrastare o ridurre tale fenomeno nefasto e dannoso sia per il singolo che per la collettività.

Prevenire il bullismo e il cyberbullismo tra gli studenti

Una particolare attenzione deve essere infine rivolta ai rapporti di valutazione annuali e pluriennali dei programmi di prevenzione attuati e ciò non solo al fine di determinarne l'efficacia quanto soprattutto per progettare ulteriori interventi mirati sulla base dei risultati delle ricerche effettuate nello specifico settore e degli elementi innovativi dettati dalla società e dalla evoluzione scientifica e tecnologica.

2. Interventi nella scuola: educare il personale scolastico e i genitori

A livello scolastico, una delle strategie avanzate da molti studiosi è quella di definire alcuni obiettivi o linee guida da perseguire all'interno dell'offerta formativa con attività finalizzate alla prevenzione e al contrasto del bullismo e del cyberbullismo coinvolgendo tutti i componenti della comunità educante (Collegio dei Docenti, Consiglio d'Istituto, famiglie). La strategia di contrasto di tali fenomeni dovrebbe essere costituita, quindi, già a partire dalle scuole primarie, da un insieme di misure di prevenzione rivolte agli studenti di varia tipologia.

Ogni istituzione scolastica, anche in rete con altre scuole, in collaborazione con altri enti e associazioni territoriali in un'ottica di sinergia interistituzionale, è chiamata a mettere in campo le necessarie azioni preventive, tra le quali è doveroso, necessario ed indispensabile annoverare:

1. coinvolgimento di tutte le componenti della comunità scolastica nella prevenzione e nel contrasto del bullismo e cyberbullismo, favorendo la collaborazione attiva dei genitori;
2. valutazione oggettiva dell'efficacia degli interventi attuati;
3. creazione sul sito web della scuola di una sezione dedicata ai temi del bullismo e cyberbullismo.
4. apertura di uno Sportello di ascolto online e/o face to face presso ciascuna scuola;
5. percorsi di formazione tenuti da esperti rivolti agli alunni e ai genitori sulle problematiche connesse a tale fenomeno.

D'altra parte gli insegnanti e con essi tutto il personale scolastico sono chiamati a impegnarsi per:

1. prendere consapevolezza del problema;
2. elaborare una politica scolastica antibullismo, in stretta collaborazione con i dirigenti scolastici e il personale non docente;
3. analizzare i bisogni della specifica scuola e la presenza del fenomeno dal punto di vista quantitativo e qualitativo (diffusione, frequenza degli episodi, numero dei ragazzi coinvolti, tipologie di bullismo);
4. intervenire tempestivamente di fronte a episodi di prepotenza (non sottovalutarli né tollerarli);
5. dare sostegno alle vittime;

6. considerare i bulli come persone da aiutare e coinvolgere gli alunni nella ricerca di soluzioni adeguate al problema;
7. promuovere l'ascolto e il dialogo, anche al fine di comprendere le cause delle azioni di prevaricazione;
8. promuovere una cultura di gruppo centrata su solidarietà, collaborazione, empatia e comportamenti prosociali;
9. creare un'alleanza educativa e un clima di collaborazione con i genitori;
10. effettuare un monitoraggio costante del fenomeno, anche con l'aiuto di esperti.

Tutto ciò nella consapevolezza che monitoraggio e intervento devono avere continuità nel tempo (un intervento limitato e fine a se stesso può far crescere la consapevolezza sul problema ma non è sufficiente a risolverlo in modo significativo).

Un obiettivo rilevante all'interno di un approccio antibullismo centrato sul gruppo-classe, è quello di potenziare i comportamenti cooperativi tra bambini a scuola. L'approccio cooperativo, infatti, permette di modificare il clima e la qualità delle relazioni nella classe, contribuendo a ridurre anche le difficoltà di apprendimento ed integrazione dei ragazzi problematici.

Le soluzioni tecnologiche indubbiamente offrono un prezioso aiuto ai genitori nella educazione dei bambini, ma naturalmente non possono essere né esaustive né sostitutive. L'approccio educativo volto a costruire una relazione autentica tra bambino e genitore, finalizzato a garantirne un armonioso sviluppo bio-psico-sociale, non può limitarsi a quanto detto.

Pertanto, insegnanti, consulenti, genitori e altri adulti significativi per i bambini hanno una grande responsabilità: aiutare i bambini a prendere buone decisioni su come utilizzare la tecnologia e la comunicazione online ed aiutarli anche ad acquisire capacità di autoprotezione. (Ybarra & Mitchell, 2004b).

3. Educare gli studenti

Compito dell'istituzione scolastica è quello di individuare strategie per gestire queste emozioni, strategie in grado di aiutare i ragazzi ad individuare modalità di espressione efficaci e non distruttive. Dietro ogni azione violenta si possono nascondere sensazioni di sofferenza, paura e impotenza. Tra le maggiori conseguenze di quanto, detto si rileva in modo generalizzato come le difficoltà nell'elaborazione delle reazioni aggressive, ostili e antisociali, producono, a cascata, conseguenze deleterie per le organizzazioni scolastiche, formative e, non ultime, sanitarie che incidono, in maniera fortemente significativa sullo sviluppo affettivo-cognitivo e, in generale, sul livello di benessere psicofisico.

Recenti indagini condotte da Spinelli et al. (2011) sui comportamenti aggressivi e antisociali dei ragazzi in età scolare, in particolare su un campione di adolescenti con un'età media di 15 anni, inducono a considerare ormai questi atteggiamenti di bullismo e cyberbullismo come una piaga sociale e una vera e propria emergenza educativa.

Prevenire il bullismo e il cyberbullismo tra gli studenti

Gli stessi autori hanno poi sviluppato un intervento psicoeducativo basato su attività didattico-formative, role playing e training di educazione emotiva allo scopo di promuovere comportamenti prosociali nei ragazzi finalizzato alla prevenzione del comportamento aggressivo e antisociale e a favorire forme di inclusione, rispetto della diversità e integrazione sociale.

Il bullismo, però, non può essere considerato, studiato e preso in carica solo dalle istituzioni scolastiche perchè la sue radici sono in realtà molto estese e si ramificano all'interno della stessa società. Gli insegnanti, perciò, devono prestare particolare attenzione allo sviluppo di quelle abilità che aiutino gli studenti a riconoscere le conseguenze legali e personali del bullismo, migliorare le capacità di risoluzione dei problemi sociali e di gestione della rabbia, incoraggiare comportamenti prosociali e la capacità di entrare in empatia con le vittime (Bradshaw, Waasdorp, O'Brennan, & Gulemetova, 2011; Hazler, 2006; Limber, Kowalski, & Agatston, 2008; Lund, Blake, Ewing, & Banks, 2012; Macklem, 2003), considerando la rete come strumento di condivisione, interazione e socializzazione al fine di comprenderne le dinamiche e prevenire comportamenti pericolosi. A tale scopo la scuola e i docenti devono trovare la strategia giusta o, con parola ricorrente in ambito scolastico, il giusto metodo didattico per motivare i giovani e spingerli a frequentare la scuola con interesse.

Molti sono i metodi che la ricerca didattica mette a disposizione dei docenti per coinvolgere ed interessare gli alunni da applicare in situazioni diverse e che servono per il raggiungimento di vari scopi. Tra questi ricordiamo la didattica laboratoriale, il mastery learning, il cooperative learning, la peer education e il role-playing. Molto utile si rivela nella gestione di situazioni di conflitto fra alunni, la didattica laboratoriale in cui le attività vengono svolte in gruppo, tutti gli alunni devono interagire con gli altri, cooperare e rispettare gli accordi presi collegialmente.

Particolarmente efficace nella gestione dei conflitti in ambito scolastico si rivela il cooperative learning, una modalità di apprendimento in cui gli studenti lavorano insieme in piccoli gruppi caratterizzati da una forte interdipendenza positiva fra i membri per raggiungere obiettivi comuni e, quindi, largamente condivisi.

Non si tratta di un semplice lavoro di gruppo nel quale si chiede ai componenti di realizzare un prodotto finale, ma è un modo per educare i ragazzi a comportamenti sociali che permetta loro un'efficace cooperazione. I vantaggi che il cooperative learning presenta sono essenzialmente:

1. *Migliori risultati degli studenti* in quanto, lavorando in gruppo, la motivazione di ognuno cresce e, quindi, si sviluppano maggiori capacità di ragionamento e di pensiero critico;
2. *Relazioni più positive tra gli studenti*: si sviluppa il rispetto reciproco e lo spirito di squadra in quanto gli studenti sono coscienti dell'importanza dell'apporto di ciascuno al lavoro comune;
3. *Maggiore benessere psicologico*: i risultati migliori e una positiva relazione fra i ragazzi fanno sviluppare in ognuno l'autostima che aiuta a sopportare meglio le difficoltà e lo stress.

La scuola, nonostante sia l'ambiente organizzato istituzionalmente per istruire i giovani, non è l'unica fonte di conoscenze e di trasmissione di regole e comportamenti.

Altri ambienti che condizionano in modo significativo la crescita dei giovani sono la famiglia, le associazioni educativo-ricreative, il gruppo di amici frequentati al di fuori di qualsiasi contesto organizzato: in casa, per strada, nei bar, su Facebook.

Ognuno di questi ambienti contribuisce allo sviluppo psico-fisico globale dei ragazzi e spesso incide in maniera più significativa rispetto alla scuola. Sebbene bullismo e cyberbullismo siano ormai fenomeni largamente analizzati, studiati ed approfonditi nelle loro molteplici sfaccettature e nelle perverse dinamiche evolutive, ancora oggi, questa tematica non trova spazio adeguato nella programmazione didattico-educativa dei docenti. Ciò determina negli studenti impreparazione ad affrontare eventuali situazioni critiche che si dovessero determinare a scuola o anche in ambienti extrascolastici e una diffusa disinformazione con conseguente caduta di tensione e di responsabilità nel caso in cui i ragazzi assistono o vengono a conoscenza di tali deprecabili comportamenti.

4. I programmi di aiuto: tutoring, tipo peer-group

Con il termine tutoring si intendono tutti quegli interventi mirati a sostenere o aiutare un individuo o un gruppo di individui che si trovano in condizioni di disagio a scuola, al lavoro, o in altre situazioni sociali. In ambito scolastico il tutor è un docente che si pone a disposizione del singolo alunno per accogliere le sue esigenze a livello psichico e cognitivo. Una forma particolare di tutoring è la peer education che prevede che sia un membro di un gruppo a svolgere il ruolo di educatore nell'ambito del medesimo gruppo. Il termine "peer" ha il significato di pari e, quindi, può essere inteso come coetaneo, ma la parità, oltre che per l'età, può anche essere intesa come identità di genere, di status sociale, di etnia ecc. La peer education è un tipo di intervento utilizzato essenzialmente per la promozione della salute, per la prevenzione di comportamenti a rischio (consumo di droga, alcool, tabacco, bullismo, violenza, comportamenti alimentari scorretti).

La tecnica è particolarmente utile nei casi in cui vi siano rapporti interpersonali conflittuali o per indurre modifiche di comportamento nel gruppo o ancora per esaminare cosa potrebbe succedere se avvenisse un cambiamento di qualsiasi genere.

Il tutoring, la peer education e il role-playng sono quindi le strategie didattiche più efficaci per combattere il cyberbullismo attivando iniziative di intervento mirate e percorsi didattici adeguati, per aiutare gli studenti ad utilizzare le risorse tecnologiche che la moderna società dell'informazione mette a disposizione in modo consapevole e responsabile. Si può altresì prevedere di costituire gruppi di pari con studenti ritenuti a "rischio" o anche con coloro che hanno vissuto nel corso degli anni le complesse problematiche del bullismo e cyberbullismo e, in generale, nei casi in cui vi siano rapporti interpersonali conflittuali attivando modalità di intervento e strategie didattiche efficaci, quali ad es. il tutoring e/o la peer-education o anche il role-playing, nei diversi

Prevenire il bullismo e il cyberbullismo tra gli studenti

contesti, per indurre modifiche di comportamento nel gruppo, imparare ad interagire con gli altri, ad ascoltare e sostenere, se necessario, il proprio punto di vista, ma anche a modificare i propri atteggiamenti e adeguarli alle situazioni più diverse.

I vantaggi riscontrati dall'utilizzo di tali strategie generalmente includono:

1. relazioni più positive tra gli studenti,
2. un maggiore benessere psicologico,
3. una maggiore responsabilità individuale,
4. la capacità di prendere decisioni e difenderle,
5. una maggiore capacità di gestione dei conflitti nei rapporti interpersonali
6. un uso appropriato delle abilità di collaborazione.

Tutto ciò sposta il discorso dalla didattica tradizionale alla didattica bio-educativa; una didattica nella quale l'individuo viene considerato nella sua globalità e nella dinamicità del suo evolversi. Dal punto di vista della didattica bio-educativa, infatti, il soggetto che apprende è considerato membro di una comunità in formazione continua, disponibile ad apprendere utilizzando adattivamente il proprio sistema emotivo/cognitivo, in modo sincrono e sinergico, intimamente correlato alla dimensione affettivo-emozionale. Abbandonando, però, la logica di un insegnamento come mera trasmissione delle conoscenze, sono state proposte, sperimentate ed organizzate le "learning communities" (o comunità di apprendimento) innovative sia nella struttura che nella attuazione.

Le learning communities rappresentano "un particolare ambiente di ricerca cooperativa che, prendendo a modello le comunità scientifiche, fa della riflessione problematica sulla conoscenza e della mutua condivisione delle risorse intellettuali il principio ispiratore di ogni attività" (Calvani, 2001).

Le principali caratteristiche di una comunità di apprendimento sono:

1. l'eterogeneità dei suoi membri;
2. la condivisione dei compiti;
3. la valorizzazione dell'individualità;

Pertanto, all'interno di una learning community, non esistono più ruoli predeterminati. Attraverso tali strategie si raggiunge quello che Jonassen definisce apprendimento significativo i cui nodi focali sono da ricercarsi nell'apprendimento attivo, costruttivo, collaborativo, intenzionale, conversazionale, riflessivo. Molteplici e complesse sono le attività svolte nelle learning communities. Come si può immaginare, utilizzando le nuove tecnologie informatiche e della comunicazione come imprescindibile strumento di lavoro, è possibile realizzare le cosiddette "virtual learning communities", la cui organizzazione prevede:

1. forme di didattica "on line", eliminando cioè, del tutto la didattica in presenza;
2. forme di didattica "blended", che consiste nel proporre alcuni moduli on line ed altri in presenza;
3. forme di didattica "integrata", in cui l'organizzazione delle lezioni prevede dei moduli in presenza che possono essere integrati da una didattica on line (Trentin, 2003)

“La possibilità di connettersi agli altri “everytime, everywhere, anyway”: questa è la grande novità che ci è capitata, e che si sta perfezionando col passaggio dal wired al wireless: lo stato di connessione permanente” – così scriveva de Kerckhove nell’anno 2000.

5. Conclusioni

La scuola deve svolgere un ruolo attivo nell'educare gli studenti ad affrontare le diverse situazioni di bullismo sia all'interno che all'esterno dell'istituzione scolastica con l'obiettivo di acquisire e sviluppare strategie in grado di risolvere situazioni conflittuali che, se gestite positivamente, possono essere espresse senza violenza, senza danneggiare se stessi o gli altri ; al contrario, situazioni emotive represses facilmente sfociano in comportamenti esplosivi e dannosi verso se stessi e o la collettività.

Riuscire a difendersi dai possibili rischi connessi all'utilizzo delle nuove tecnologie della comunicazione dipende dal lavoro per conoscerle, impararne il funzionamento, le dinamiche pregi e difetti. Per disinnescare questi pericoli appare necessario che famiglie, insegnanti e alunni possano interagire in un percorso condiviso fatto di “buone pratiche” finalizzato ad educare i ragazzi ad un uso corretto e consapevole delle nuove tecnologie fin dalla scuola media, a coglierne le sfumature, ad allargare e non di poco lo spazio di ricerca.

Occorre, pertanto, rafforzare e valorizzare un patto educativo in cui la scuola è chiamata ad adottare misure atte a prevenire e contrastare ogni forma di violenza e di prevaricazione, mentre la famiglia è chiamata a collaborare non solo educando i propri figli ma anche vigilando sui loro comportamenti. Purtroppo, spesso l'assenza di dialogo e l'impotenza dei genitori dinanzi ai nuovi media sono senz'altro fra le cause principali della diffusione del cyberbullismo.

Un fenomeno che necessita non solo di essere dibattuto, ma affrontato concretamente attraverso un lavoro di concerto ad opera di tre attori: la famiglia, la scuola e le istituzioni teso a far acquisire una maggiore consapevolezza dell'ambiente virtuale e delle possibili conseguenze derivanti da un uso improprio della rete. Compito fondamentale della scuola è perciò quello di:

1. innescare nei ragazzi sentimenti positivi in grado di far emergere e liberare quanto c'è di meglio in ogni individuo;
2. suscitare passione, entusiasmo, impegno e coinvolgimento;
3. creare un clima emozionale che promuova innovazione, relazioni positive e durevoli.

I risultati ottenuti in oltre venti anni di ricerca sul campo, l'esperienza accumulata da un pool sempre più ampio di ricercatori universitari affascinati dallo studio di queste problematiche, hanno permesso di raccogliere una enorme mole di dati grazie ai quali è stato possibile individuare criteri di misura oggettivi per la valutazione delle cosiddette „competenze di intelligenza emotiva” ritenute oggi essenziali per superare le difficoltà

Prevenire il bullismo e il cyberbullismo tra gli studenti

in cui molti adolescenti si dibattono a causa anche (o forse soprattutto) di fenomeni devianti e perversi molti dei quali sono ascrivibili al bullismo e al cyberbullismo. Grazie anche all'apporto di molti altri centri di ricerca, tanto il corpus dei dati quanto le elaborazioni teoriche sull'argomento in questione (intelligenza emotiva) hanno continuato ad ampliarsi. Tutte queste fonti hanno consentito di dare una risposta a domande significative sulle risorse emozionali necessarie affinché un ragazzo bullizzato possa trovare in sè, insieme all'azione determinante dell'istituzione scolastica, la spinta emotiva necessaria per riuscire a superare le barriere psicologiche in cui il soggetto si sente imprigionato. Per superare tali difficoltà, però, bisogna entrare in sintonia con la realtà emotiva del ragazzo o del gruppo su cui si sta lavorando, affinché la giusta direzione intrapresa possa essere accettata traducendo così in azioni positive ciò che ognuno avverte di dover fare.

I benefici ottenuti, ovviamente, si riflettono nella sfera personale in livelli sempre più elevati di consapevolezza di sè, comprensione empatica, autocontrollo e relazioni ben sintonizzate. Pertanto le scuole (ma anche le Università) dovrebbero includere i fondamenti dell'intelligenza emotiva nella gamma di competenze insegnate ai propri studenti. I benefici ottenuti si tradurrebbero in un vantaggio non solo per il singolo, ma avrebbero effetti positivi anche per le famiglie, le comunità, come per la società nel suo complesso.

L'insegnamento, d'altra parte, è un processo sociale e la costruzione della conoscenza è un processo di iniziazione, collaborativo e identificativo, in cui l'adulto prende a carico il più giovane e, oltre che guida, diventa mediatore per l'accrescimento delle competenze individuali. Come ci ricorda Erasmo da Rotterdam, il grande pensatore rinascimentale, "Le migliori speranze di una nazione riposano nell'educazione adeguata dei suoi giovani."

Bibliografia

- Ahmad, Y., & Smith, P.K. (1990). Behavioural measures: bullying in schools. Newsletter of the Association for Child Psychology & Psychiatry, 12, 26-27.
- Aleandri, G. (2008). *Giovani senza paura. Analisi socio-pedagogica del fenomeno bullismo*. Roma: Armando Armando.
- Alivernini, F., Manganelli, S., Cavicchiolo, E., & Lucidi, F. (2017). Measuring Bullying and Victimization Among Immigrant and Native Primary School Students: Evidence From Italy. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 1-13
- American Psychiatric Association. (2014). *DSM-5. Manuale diagnostico e statistico dei disturbi mentali*. Milano: Raffaello Cortina Editore.
- Baldry, A. C. (2001). Bullismo a scuola e comportamenti devianti negli adolescenti: possibili fattori di rischio. *Rassegna Italiana di Criminologia*, 12, 375-396.
- Beale, Andrew & Hall, Kimberly. (2007). *Cyberbullying: What School Administrators (and Parents) Can Do*. The Clearing House. 81. 8-12. 10.3200/TCHS.81.1.8-12.

- Bradshaw, Catherine & Sawyer, Anne & O'Brennan, Lindsey. (2007). Bullying and peer victimization at school: Perceptual differences between students and school staff. *School Psychology Review*. 36. 361-382.
- Charach, A., Pepler, D. and Ziegler, S. (1995) 'Bullying At School: A Canadian
- Davis, S., & Nixon, C. (2010). The youthvoiceresearchproject: Victimizationandstrategies.
Retrievedfrom: <http://njbullying.org/documents/YVPMarch2010.pdf>
- De Mennato (1998), *Fonti per una pedagogia della complessità*, Liguiri, Napoli
- Diamanduros, Terry & Downs, Elizabeth & Jenkins, Stephen. (2008). The role of school psychologists in the assessment, prevention, and intervention of cyberbullying. *Psychology in the Schools*. 45. 693 - 704. 10.1002/pits.20335.
- Espelage, D. L., & Swearer, S. M. (Eds.). (2004). *Bullying in American schools: A social-ecological perspective on prevention and intervention*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Gini, G., &Espelage, D. D. (2014) Peer victimization, cyberbullying, and suicide risk in childrenandadolescents. *JAMA Pediatrics*, 312, 545-546. Retrieved from <http://jamanetwork.com/journals/jama/article-abstract/1892227>
- Graham, S., & Juvonen, J. (2001). *An attributional approach to peer victimization*. In J. Juvonen & S. Graham (Eds.), *Peer harassment in school: The plight of the vulnerable and victimized* (p. 49–72). The Guilford Press.
- Gulemetova, Michaela; Drury, Darrel; and Bradshaw, Catherine P. (2011) "National Education Association Bullying Study,"*Colleagues: Vol. 6: Iss. 2, Article 11*.
- Hinduja, Sameer & Patchin, Justin. (2010). Bullying, Cyberbullying, and Suicide. *Archives of suicide research : official journal of the International Academy for Suicide Research*. 14. 206-21. 10.1080/13811118.2010.494133.
- Kounin, J. S. (1970). *Discipline and Group Management in Classrooms*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
- Kowalski, R. M., Limber, S. P., & Agatston, P. W. (2008).*Cyber bullying: Bullying in the digital age*. Malden, MA: Blackwell.
- Kowalski, Robin & Limber, Susan & Agatston, Patricia. (2012). Cyber Bullying: Bullying in the Digital Age. *American Journal of Psychiatry - AMER J PSYCHIAT*. 165. 10.1002/9780470694176.
- Li, Q. (2010) 'New Bottle But Old Wine: A Research on Cyberbullying in Schools', *Computers and Human Behavior*.
- Lund, Emily & Blake, Jamilia & Ewing, Heidi & Banks, Courtney. (2012). School Counselors' and School Psychologists' Bullying Prevention and Intervention Strategies: A Look Into Real-World Practices. *Journal of School Violence*. 11. 246-265. 10.1080/15388220.2012.682005.
- Maher, D. (2008). Cyberbullying: An ethnographic case study of one Australian upper primary school class. *Youth Studies Australia*, 27(4), 32-39
- Moffitt, Terrie & Caspi, Avshalom & Rutter, Michael & Silva, Phil. (2001). Sex differences in antisocial behavior. *Sex differences in antisocial behaviour*:

Prevenire il bullismo e il cyberbullismo tra gli studenti

- Conduct disorder, delinquency, and violence in the Dunedin longitudinal study. 10.1017/CBO9780511490057.
- Myrick, R. D., Highland, W. H., & Sabella, R. A. (1995). Peer helpers and perceived effectiveness. *Elementary School Guidance & Counseling*, 29(4), 278–288.
- Offord, Abaigh & Turner, Hannah & Cooper, Myra. (2006). Adolescent inpatient treatment for anorexia nervosa: A qualitative study exploring young adults' retrospective views of treatment and discharge. *European Eating Disorders Review Eur. Eat. Disorders Rev.* 14. 377-387.
- Olweus, D. (1973). *Hackkycklingar och iiversittare: Forskning om skolmobbing*. Stockholm:
- Olweus, D. (1978). *Aggression in the schools. Bullies and whipping boys*. Washington, DC: Hemisphere Press (Wiley).
- Olweus, D. (1978). *Aggression in the schools: Bullies and whipping boys*. Washington, DC:
- Olweus, D. (1980). Familial and temperamental determinants of aggressive behavior in adolescent boys: A causal analysis. *Developmental Psychology*, 16, 644-660.
- Olweus, D. (1980). The consistency issue in personality psychology revisited-with special reference to aggression. *British Journal of Social and Clinical Psychology*, 19, 377-390.
- Olweus, D. (1993). *Bullying at school: What we know and what we can do*. Oxford: Blackwell
- Olweus, D. (1993). Victimization by peers: Antecedents and long-term outcomes. In K. H.
- Olweus, Dan. (1997). Bully/victim problems in school: Facts and intervention. *European Journal of Psychology of Education*. 12. 495-510. 10.1007/BF03172807.
- O'Moore, A. M., Kirkham, C., & Smith, M. (1997). Bullying behaviour in Irish schools: A nationwide study. *The Irish Journal of Psychology*, 18(2), 141–169.
- Patchin, J. W., & Hinduja, S. (2019). 2019 Cyberbullying Data. *CyberbullyingResearch Center*. Retrieved from <https://cyberbullying.org/2019-cyberbullying-data>.
- Patchin, Justin & Hinduja, Sameer. (2012). Cyberbullying: An update and synthesis of the research. *Cyberbullying Prevention and Response: Expert Perspectives*. 13-35.
- Pepler, D. J., & Craig, W. M. (1995). A peek behind the fence: Naturalistic observations of aggressive children with remote audiovisual recording. *Developmental Psychology*, 31(4), 548–553. <https://doi.org/10.1037/0012-1649.31.4.548>
- Roland, E., & Idsøe, T. (2001). Aggression and bullying. *Aggressive Behavior*, 27(6), 446–462. <https://doi.org/10.1002/ab.1029>
- Sabella RA, Patchin JW, Hinduja S. Cyberbullying myths and realities. *Comput Hum Behav* 2013;29:2703e11.
- Salmivalli C, Huttunen A, Lagerspetz KMJ. (1997). Peer networks and bullying in schools. *Scand J Psychol* 38:305–312.

- Smith, P. K., Morita, Y., Junger-Tas, J., Olweus, D., Catalano, R. F., & Slee, P. (Eds.). (1999). *The nature of school bullying: A cross-national perspective*. Taylor & Frances/Routledge.
- Sutton J, Smith PK, Swettenham J. (1999). Social cognition and bullying: Social inadequacy or skilled manipulation? *Br J DevPsychol* 17:435–450.
- Trentin G., (1998) *Insegnare e apprendere in rete*, Zanichelli, Bologna
- Vivolo-Kantor, Alana & Hamburger, Merle & Basile, Kathleen. (2011). *Measuring Bullying Victimization, Perpetration, and Bystander Experiences: A Compendium of Assessment Tools*.
- Ybarra, M. L. & Mitchell, K. J. (2004). Online aggressor/targets, aggressors, and targets: a comparison of associated youth characteristics. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 45, 1308–1316.

Paradossi della Probabilità condizionata: un possibile uso nella didattica della matematica dell'incerto

Aniello Buonocore¹

¹Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli”
Via Cintia, Complesso Monte S. Angelo, Napoli.
Email: aniello.buonocore@unina.it

Sunto

Per il tema “dati Previsioni” si propone l'impostazione didattica basata sui problemi. In particolare, si propone di utilizzare, in maniera appropriata e con la finalità di sollecitare le abilità comunicative ad argomentative, alcuni dei paradossi della probabilità condizionata che nel corso del tempo sono stati occasione di discussioni vivaci e intriganti. Qui, in particolare ci si sofferma sul paradosso dei tre prigionieri proponendo una rappresentazione grafica della classica soluzione algebrica basata sul teorema di Bayes.

Parole chiave: Probabilità congiunta e condizionata, paradossi, insegnamento per problemi, rappresentazioni grafiche.

1. Introduzione

Tra i problemi proposti da Martin Gardner, nel corso della sua lunga carriera di scrittore di matematica ricreativa, uno che suscita ancora oggi un grande interesse è quello, pubblicato in (Gardner, 1959) che è noto come *il paradosso dei tre prigionieri*. Un problema analogo fu proposto già nel 1889 da Joseph Louis François Bertrand in (Bertrand, 1889) noto come *il paradosso delle tre scatole*. Sulla pagina di Wikipedia, dedicata a questo problema, si legge:

*These simple but counterintuitive puzzles are used as **a standard example in teaching probability theory**. Their solution illustrates some basic principles, including the Kolmogorov axioms.*

Comunque, entrambi si possono considerare gli antesignani di alcuni altri problemi che condividono le seguenti caratteristiche:

- l'enunciato è semplice da formulare e, di norma, attrae l'attenzione di chi l'ascolta;
- fornisce uno stimolo immediato alla discussione;

- la soluzione può essere ottenuta utilizzando vari registri linguistici e simbolici;
- la difficoltà di comunicare agli altri i propri ragionamenti;
- la numerosità delle varianti che sono state proposte.

Con riferimento all'elenco precedente, è emblematico il caso di Marilyn vos Savant relativamente ad una delle varianti del problema dei tre prigionieri che è nota come dilemma di Monty Hall. Monty Hall è stato l'ideatore e per molti anni anche conduttore di *Let's make a deal*, un programma televisivo americano durante il quale un giocatore poteva vincere un'automobile in base ad una particolare procedura casuale: al giocatore veniva offerta la facoltà di cambiare una porta inizialmente scelta tra tre, dopo l'apertura da parte del conduttore di una delle altre due porte.

Sollecitata da uno dei lettori che chiedeva quale strategia fosse più conveniente per il giocatore, ovvero confermare oppure cambiare la scelta iniziale, la vos Savant fornì una soluzione che faceva propendere per la strategia del cambiare. In seguito a ciò, ricevette circa mille lettere, come lei stessa riferisce e nella maggior parte di esse c'erano critiche per la sua risposta e, in certi casi, insulti nei suoi confronti. Vos Savant ne rimase molto colpita e si mise a contare in quante di quelle lettere i lettori le davano ragione: erano meno di cento. Decise allora di continuare a parlarne anche in successive puntate della rubrica in cui continuò a spiegare le sue ragioni anche con ragionamenti alternativi. Riferì nella sua rubrica che dopo molte settimane era riuscita a convincere solo il 56% delle persone che nel frattempo avevano continuato a mandarle lettere. E questo malgrado le sue riconosciute capacità comunicative e argomentative.

Paul Hoffman, autore di una biografia di Paul Erdős pubblicata sotto il titolo *The Man Who Loved Only Numbers*, si sofferma molto sulla considerazione che Erdős e anche altri matematici dovettero, infine, accettare a malincuore l'idea che le due porte rimaste chiuse non fossero equiprobabili ai fini del giocatore.

In questo contributo, oltre a presentare un'analisi approfondita del paradosso dei tre prigionieri, si intende fornire un incoraggiamento e alcuni suggerimenti ai docenti che volessero utilizzare nella loro programmazione didattica relativa al tema *Dati e Previsioni* la probabilità condizionata e l'insegnamento basato sui problemi. Il paradosso dei due figli è fornito esclusivamente per focalizzare l'attenzione sul ragionamento erraneo.

Nel seguito si presuppone che gli studenti abbiano già svolto attività sulla probabilità di unioni disgiunte di eventi e sulla probabilità di un evento condizionata dall'avverarsi di un altro.

2. Il problema dei due figli

L'elenco seguente rappresenta un possibile enunciato del problema.

- 1) Si prendono in considerazione solo le famiglie nelle quali ci sono due figli.
- 2) Si presuppone che le quattro possibili coppie relative al genere dei figli siano equiprobabili.

Paradossi della Probabilità condizionata: un possibile uso nella didattica della matematica dell'incerto

- 3) Si fa la conoscenza di uno dei figli di una di queste famiglie e si osserva che è un maschio (M).

Si richiede di valutare la probabilità che anche l'altro figlio sia maschio.

Il ragionamento su base intuitiva porta a concludere che la probabilità ricercata sia pari a $1/2$: l'altro figlio o è maschio oppure è femmina (F) e tali eventualità sono equiprobabili per il punto 2). Tale soluzione è però erranea in quanto non esclude dalla considerazione l'evento "entrambi i figli sono femmine" che non può più presentarsi dal momento che è stato già osservato che uno dei figli è maschio.

La Figura 1 fornisce una rappresentazione grafica della soluzione corretta e al contempo evidenzia l'errore della soluzione intuitiva.

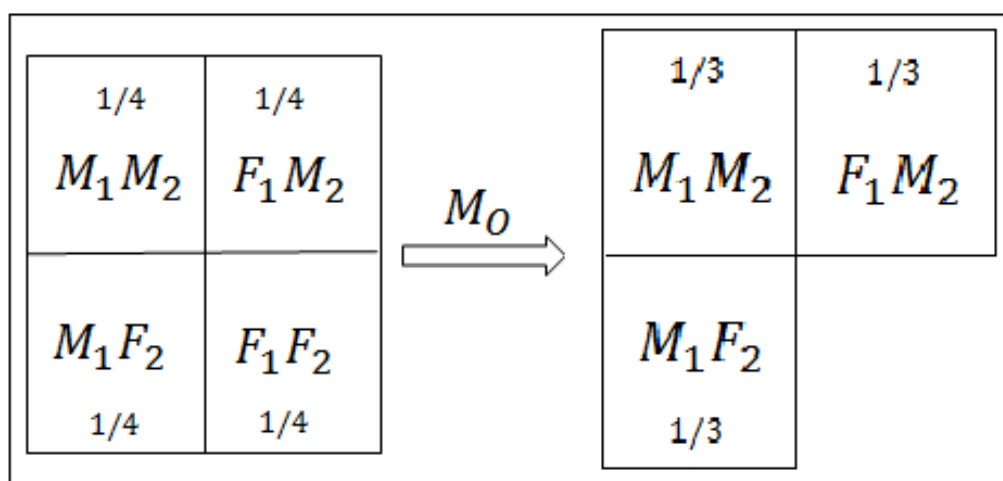


Figura 1

Nella Figura 1, M_1 (M_2) rappresenta il primo (il secondo) maschio e lo stesso vale per le femmine, il segno di congiunzione è omissso: pertanto $M_1 F_2$ rappresenta l'evento "primo figlio maschio" e "secondo figlio femmina". La dimensione uguale dei quadratini (a sinistra e a destra della freccia) indica la uguale probabilità per le possibili coppie relative al genere. Il simbolo M_0 sopra la freccia rappresenta l'avvenuta informazione aggiuntiva che uno dei figli è maschio.

3. Il paradosso dei tre prigionieri: una possibile formulazione e una discussione in classe

La seguente è una versione completamente specificata del problema.

- 1) Tre prigionieri condannati a morte, siano essi A , B , C , sono chiusi in celle separate, in attesa dell'esecuzione.
- 2) Il governatore locale decide di rilasciarne uno. Scrive il loro nome su tre pezzi di carta che rimescola nel cappello, ne estrae uno e comunica segretamente il nome al guardiano.

- 3) Il prigioniero *A*, non riuscendo a convincere il guardiano, sia esso *G*, a rivelargli il nome della persona che sarà rilasciato, gli formula la seguente richiesta: “Almeno, dimmi il nome di uno tra gli altri due prigionieri che sarà giustiziato; precisamente, se sarà *B* ad essere rilasciato mi dirai *C*; se sarà *C* ad essere rilasciato mi dirai *B*; se sarò io ad essere rilasciato, lancia una moneta per decidere se dire *B* o *C*. In questo modo non mi dai alcuna informazione che mi riguarda e d’altra parte almeno uno dei due sarà giustiziato.”
- 4) Il guardiano si ritira nella sua stanza per riflettere e il giorno successivo comunica al prigioniero *A* che ad essere giustiziato sarà il prigioniero *C*.

Appresa questa informazione, il prigioniero *A* ragiona al seguente modo:

adesso so che il prigioniero C sarà giustiziato e l’altro ad essere giustiziato sarà il prigioniero B oppure io stesso; di conseguenza, la probabilità del mio rilascio adesso è salita a 1/2.

La domanda è se c’è qualcosa di sbagliato nel suo ragionamento e in tal caso valutare la probabilità del rilascio di *A* in maniera corretta.

A questo punto, si riporta un’interessante discussione avvenuta in una quarta classe di Liceo riportata in (Benedetti, 2000), che sarà poi ripresa nel paragrafo 5 per illustrarne la profondità delle riflessioni degli studenti coinvolti.

Benedetta trova la questione stupida, la classe ridacchia dando dello stupido alla guardia: danno per certo che il valore numerico della probabilità sia salito ad 1/2.

Tirocinante: “però la guardia non menziona il diretto interessato, dà solo informazioni sugli altri due”

Benedetta: “ma è uguale, comunque indirettamente sono sempre informazioni su di lui ...”

Chiara si lamenta del fatto che aveva scritto che ad essere condannato era stato il prigioniero B ed invece adesso scopre che è C e quindi deve cancellare . . .

Andrea: “Ma noo, non vedi che è la stessa cosa?”

Tirocinante (commento): Questo genere di rompicapo sembra aver sviluppato in classe un clima che contribuisce all’implicazione degli studenti nell’attività matematica. Per di più la sua soluzione richiede, per essere compresa, un continuo cambio di registri, più rappresentazioni verbali e più rappresentazioni algebriche. Ciò arricchisce enormemente la trattazione formale del teorema di Bayes fornita dai manuali.

Tirocinante (commento): rifaccio un ragionamento analogo al precedente, sempre verbalizzando i passaggi algebrici:

$$P = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1} = \frac{1}{3},$$

e si scopre, con la sorpresa generale, che la probabilità è rimasta la stessa, 1/3, mentre la probabilità dell’altro prigioniero di ottenere la libertà è salita a 2/3. ...

A me sembra comunque che il problema stia nel giustificarsi il calcolo di una probabilità condizionata dal realizzarsi di un evento a posteriori: l’effetto asse del tempo!

Paradossi della Probabilità condizionata: un possibile uso nella didattica della matematica dell'incerto

L'unica strada, pertanto, è quella di pensare alla probabilità come ad una nuova valutazione della stessa prova in seguito all'acquisizione di nuove conoscenze.

Anche gli studenti alla fine sembrano seguire questa direzione: la probabilità non appartiene oggettivamente alla prova, ma alle conoscenze che si hanno di essa, affermazione che si colloca lungo la strada della definizione soggettiva.

Federico: “*ma allora la probabilità cambia a seconda della situazione?*”

Tirocinante (commento): *Tale domanda, anche se non molto chiara, esprime la necessità di capire cosa sia questa probabilità condizionata: dall'interesse mostrato da un gruppetto della classe mi sembra che il teorema di Bayes, applicato in queste situazioni può costituire una strada per passare da una visione classica ad una soggettiva, forse migliore rispetto ad un approccio nel quale si parli da subito di premi assicurativi o corse di cavalli.*

4. Una soluzione formale

Gli eventi da considerare sono R_A, R_B e R_C ovvero “il prigioniero indicato nel pedice della lettera R è quello che sarà rilasciato”. In più ci sono gli eventi G_A, G_B e G_C ovvero “il prigioniero indicato nel pedice della lettera G è quello nominato dal guardiano”. Tenendo conto che il guardiano non potrà mai nominare il prigioniero A e neppure il prigioniero che sarà rilasciato, l'evento certo Ω può essere partizionato al seguente modo

$$\Omega = (R_A G_B) \cup (R_A G_C) \cup (R_B G_C) \cup (R_C G_B),^1$$

e dai punti 1), 2) e 3) del precedente paragrafo, si ricavano le seguenti probabilità:

$$\mathbb{P}(R_A) = \mathbb{P}(R_B) = \mathbb{P}(R_C) = 1/3,$$

$$\mathbb{P}(R_A G_B) = \mathbb{P}(R_A) \mathbb{P}(G_B | R_A) = (1/3) \cdot (1/2) = 1/6,$$

$$\mathbb{P}(R_A G_C) = \mathbb{P}(R_A) \mathbb{P}(G_C | R_A) = (1/3) \cdot (1/2) = 1/6,$$

$$\mathbb{P}(R_B G_C) = \mathbb{P}(R_B) \mathbb{P}(G_C | R_B) = (1/3) \cdot 1 = 1/3,$$

$$\mathbb{P}(R_C G_B) = \mathbb{P}(R_C) \mathbb{P}(G_B | R_C) = (1/3) \cdot 1 = 1/3.$$

La Tabella 1 riassume tutte le informazioni prima del pronunciamento di G (condizionamento).

¹ La congiunzione logica è omessa: ad esempio, il simbolo $R_A G_B$ rappresenta l'evento “a essere rilasciato sarà il prigioniero A e il guardiano nomina il prigioniero B ”.

	G_A	G_B	G_C
R_A	$R_A G_A = \emptyset$	$R_A G_B \quad 1/6$	$R_A G_C \quad 1/6$
R_B	$R_B G_A = \emptyset$	$R_B G_B = \emptyset$	$R_B G_C \quad 1/3$
R_C	$R_C G_A = \emptyset$	$R_C G_B \quad 1/3$	$R_C G_C = \emptyset$

Tabella 1.

Nella Tabella 1, i numeri nelle caselle dove la congiunzione è non impossibile rappresentano le probabilità dei corrispondenti eventi. Si noti che nelle caselle della diagonale e nelle caselle della prima colonna c'è l'evento impossibile: G non può indicare il prigioniero che sarà rilasciato e non può indicare il prigioniero A .

In seguito alla comunicazione del guardiano, l'evento certo diventa

$$G_C = (R_A G_C) \cup (R_B G_C),$$

e gli altri due atomi di Ω , ovvero $R_A G_B$ e $R_C G_B$ non potranno più essere presi in considerazione. Pertanto, la probabilità che ad essere rilasciato sia il prigioniero A vale

$$\mathbb{P}(R_A|G_C) = \frac{\mathbb{P}(R_A G_C)}{\mathbb{P}(G_C)} = \frac{\mathbb{P}(R_A G_C)}{\mathbb{P}(R_A G_C) + \mathbb{P}(R_B G_C)} = \frac{1/6}{1/6 + 1/3} = \frac{1}{3},$$

mentre per il prigioniero B risulta

$$\mathbb{P}(R_B|G_C) = \frac{\mathbb{P}(R_B G_C)}{\mathbb{P}(G_C)} = \frac{\mathbb{P}(R_B G_C)}{\mathbb{P}(R_A G_C) + \mathbb{P}(R_B G_C)} = \frac{1/3}{1/6 + 1/3} = \frac{2}{3}.$$

La Tabella 2 riassume tutte le informazioni dopo il condizionamento.

	G_C
R_A	$R_A G_C \quad 1/3$
R_B	$R_B G_C \quad 2/3$

Tabella 2.

Nella Tabella 2, sono riportati gli atomi non impossibili dopo che G ha indicato C con le rispettive probabilità.

Sono stato così ritrovate le conclusioni algebriche espresse dalla tirocinante durante la discussione con la classe. Comunque, con il ragionamento formale sviluppato, si evince chiaramente dove si trova l'errore commesso dal prigioniero A : egli ha pensato, dopo la comunicazione del carceriere, che l'evento certo fosse diventato $R_A \cup R_B$. Però, così fa-

Paradossi della Probabilità condizionata: un possibile uso nella didattica della matematica dell'incerto

cendo non tiene conto che una parte di R_A , ovvero l'atomo $R_A G_B$, non può più presentarsi dal momento che il guardiano ha nominato il prigioniero C .

5. La soluzione in forma grafica e le osservazioni degli studenti

La soluzione formulata nel paragrafo precedente può avere una rappresentazione grafica in virtù del seguente ragionamento che si evince dalla Tabella 1 e dalla Tabella 2 e che evidenzia anche l'asimmetria in termini di probabilità tra il prigioniero A (che ha fatto la richiesta al guardiano G) e il prigioniero B .

- a) La probabilità $1/3$ che spetta ad A in seguito al sorteggio per stabilire il prigioniero da rilasciare si divide in due parti uguali (G sceglie a caso tra B e C nel caso in cui ad essere rilasciato sia A): $1/6$ spetta a $R_A G_C$ e l'altro $1/6$ spetta a $R_A G_B$.
- b) La probabilità $1/3$ che spetta a B in seguito al sorteggio per stabilire il prigioniero da rilasciare è assegnata anche all'atomo $R_B G_C$ in quanto $R_B G_A$ e $R_B G_B$ sono entrambi impossibili.
- c) La probabilità $1/3$ che spetta a C in seguito al sorteggio per stabilire il prigioniero da rilasciare è assegnata anche all'atomo $R_C G_B$ in quanto $R_C G_A$ e $R_C G_C$ sono entrambi impossibili.
- d) La probabilità dell'unione dei due atomi che non si potranno più verificarsi in seguito al pronunciamento di G , ovvero $(R_A G_B) \cup (R_C G_B)$, vale $1/6 + 1/3 = 1/2$.
- e) In seguito al condizionamento, le probabilità dei due atomi restanti devono essere rapportate a $1/2$ e quindi raddoppiate.

La rappresentazione grafica è nella Figura 2.

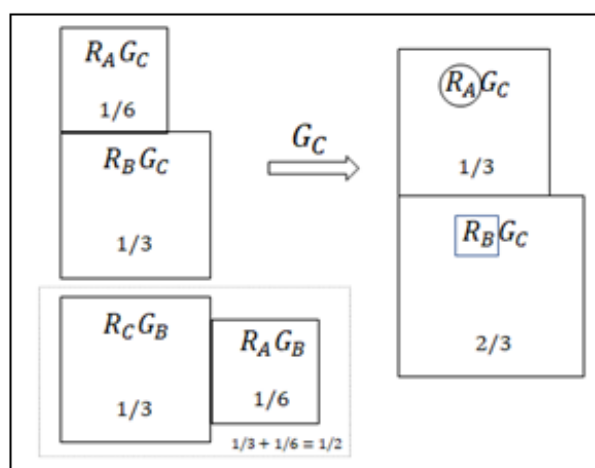


Figura 2.

Nella Figura 2, la dimensione uguale dei quadratini (a sinistra e a destra della freccia) indica la uguale probabilità per le possibili coppie relative al rilascio e all'indicazione ottenuta. Il simbolo G_C sopra la freccia rappresenta l'avvenuta informazione aggiuntiva che il guardiano G ha nominato il prigioniero C .

Allora, seppure a modo loro, Benedetta e Andrea avevano colto i punti salienti della situazione, come si può vedere nella Figura 3:

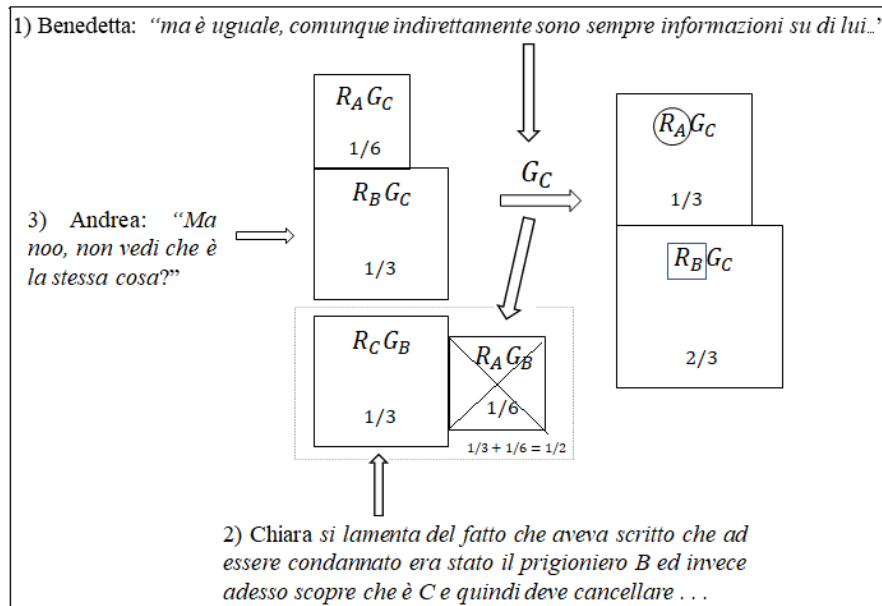


Figura 3.

Nella Figura 3, sono riportati i commenti di Benedetta, Chiara e Andrea che conducono ad una spiegazione del paradosso in forma grafica. La spiegazione algebrica del tutto diventa superflua.

Infatti, Benedetta ha colto che solo apparentemente G non si è espresso su A e Andrea ha colto la simmetria esistente tra B e C . Il resto è costituito dal passaggio dalla probabilità all'area dei quadratini e dalla discussione nell'assegnazione del valore di queste aree.

6. Conclusioni

Il sunto in (Leviatan, 2002), che qui si riporta per comodità del lettore, riporta considerazioni in linea con le finalità di questo contributo. Ma anche delle note di tipo cautelativo che non si possono sottacere:

Probability theory offers a large variety of Paradoxes. Some of them are (nowadays) interesting mainly from a historical point of view, as the theory has already been adapted to resolve them. Others actually hide common misconceptions in a very subtle and tricky way. Introducing Paradoxes in class carries potential danger: it may result in a feeling of insecurity when the conflict between the mathematical solution and the intuition (or between two seemingly correct mathematical solutions) seems unresolvable. On the other hand, properly introduced, Paradoxes can play a very useful role in the classroom as they serve as leverage to fruitful discussions, an provoke deeper thinking about the (not always intuitive) probabilistic ideas.

Paradossi della Probabilità condizionata: un possibile uso nella didattica della matematica dell'incerto

Con particolare riguardo alle forme di cautela così bene evidenziate, si conclude questa proposta con alcuni suggerimenti di carattere metodologico.

- Fare molta attenzione a non ingenerare un circuito fatto di accettazione della soluzione e di successivi ripensamenti, di proposte che indirizzano l'analisi su linee non richieste, di tentativi reiterati di far prevalere la propria opinione.
- Lavorare su una visione ampliata del condizionamento: l'evento che si è avverato, oltre a diventare il nuovo evento certo, fornisce soprattutto tutto quello che non deve più essere preso in considerazione.
- Scegliere le notazioni in maniera espressiva e adeguata al contesto.
- Sollecitare gli studenti a riformulare la soluzione in diversi registri linguistici e con opportune rappresentazioni grafiche.
- Le buone rappresentazioni grafiche dei problemi sono importanti per favorire la comprensione e arrivare rapidamente alle soluzioni dei problema.

Bibliografia

Benedetti Claudia (2000), *Probabilità a scuola: un percorso di condivisione dei registri Semiotici*, Tesi di abilitazione all'Insegnamento nella Scuola Secondaria, SSIS-Università di Bologna.

Gardner, Martin (1959), Mathematical games: Problems involving questions of probability and ambiguity, *Scientific American*, vol. **201**(4), pp 147-182, 1959.

Bertrand, Joseph (1889), *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars et fils, Paris.

Leviatan, Talma (2002), On the use of paradoxes in the teaching of probability, Proceedings of International Conference on Teaching Statistics 6, IASE, Cape Town, South Africa.

Le equazioni algebriche facili

Franco Eugeni

email eugenif3@gmail.com

Sunto

Ciascuno di noi negli anni ha raccolto informazioni su questioni varie di algebra elementare, che furono utili in qualche occasione, talvolta fuori dallo standard espositivo dei libri scolastici, ma spesso utili a riflettere, interessanti da applicare, importanti per approfondire. Parimenti si presentano criticamente alcuni concetti di base quali quelli di radice aritmetica, radice algebrica e radice complessa.

Parole Chiave: Equazioni algebriche. Campo complesso. Equazioni facili.

1. Le nozioni di radici aritmetica e algebrica

Prima di trattare il primo caso di questa nota, ricordiamo la definizione di radice sia in campo reale che in campo complesso.

Dato un numero reale positivo o nullo a , si chiama *radice n -ma aritmetica* di a , un numero positivo b , tale che sia $b^n = a$. Tale numero b , si denota con il simbolo

$$b = \sqrt[n]{a}$$

sussiste il seguente:

Teorema. Sia $a \geq 0$ un numero reale, ed $n > 1$ un numero naturale, allora esiste un unico numero reale $b \geq 0$ tale che sia:

$$b^n = a.$$

Dim. Sia $A' = \{x \in \mathbf{R} \text{ t.c. } x \geq 0, x^n < a\}$, $B = \mathbf{R}^+ \setminus A$, $A = \mathbf{R} \cup A$

La coppia (A, B) , è chiaramente una sezione del campo razionale che definisce b . #

Dato un numero reale a , si chiama *radice n -ma algebrica* di a l'insieme delle soluzioni reali dell'equazione $x^n = a$. Tale insieme si denota con:

$$(a)\sqrt[n]{a}.$$

Per la risoluzione dell'equazione binomia $\mathbf{c\ x^n + b = 0}$, ovviamente riconducibile alla forma $\mathbf{x^n = a}$, si hanno i seguenti quattro casi:

I caso, n pari, $a \geq 0$. Risulta:

$$(a) \sqrt[n]{a} = \{- \sqrt[n]{a}, + \sqrt[n]{a}\}$$

Formula insiemistica che per usuale abuso di linguaggio scriveremo nella forma:

$$(a) \sqrt[n]{a} = \pm \sqrt[n]{a} .$$

II caso, n pari, $a < 0$ Risulta: $(a) \sqrt[n]{a} = \emptyset$.

III caso, n dispari, $a \geq 0$. Risulta: $(a) \sqrt[n]{a} = \{\sqrt[n]{a}\}$ che si scrive , per abuso di linguaggio:

$$(a) \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}.$$

IV caso, n dispari, $a < 0$. Risulta: $(a) \sqrt[n]{a} = \{\sqrt[n]{-|a|}\} = \{- \sqrt[n]{|a|}\}$ che si scrive, per abuso di linguaggio: $(a) \sqrt[n]{a} = - \sqrt[n]{|a|}$.

Pertanto nel caso dispari la nozione di radice algebrica si confonde con l'aritmetica.

Le proprietà dei radicali, peraltro di banali dimostrazioni, si possono riassumere introducendo la definizione di potenza ad esponente razionale, come segue:

$$a^{1/n} := \sqrt[n]{a}$$

e più in generale

$$a^{m/n} := \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Le proprietà dei radicali si riassumono, per $h,r,s \in \mathbb{Q}$ ed $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-$ nelle seguenti:

$$a^r a^s = a^{r+s} \quad , \quad (a^r)^s = a^{rs} \quad , \quad a^{hr/hs} = a^{r/s}$$

E' piuttosto raro trovare nei libri le considerazioni che si possono fare sugli **esponenti a base negativa**, che qui tratteremo in dettaglio.

Teorema. Sia $a < 0$ un numero reale negativo, ed $m \geq 2$ un numero naturale allora esiste un unico numero reale b tale che sia $b^m = a$, se e solo se m è dispari, con $m=2n+1 \geq 3$.

Tale radice così definita non è una radice aritmetica, ma algebrica, in quanto il numero b è comunque soluzione, peraltro unica, dell'indicata equazione, inoltre il suo legame con una radice aritmetica è espressa dalla seguente relazione:

$$(a) \sqrt[2n+1]{-|a|} = - \sqrt[2n+1]{|a|}.$$

Dal Teorema precedente si desume ancora che:

Dato un numero reale negativo $a < 0$, e assegnati due naturali m, n ($n \geq 2$) il simbolo:

Le equazioni algebriche facili

$$a^{m/n} := \sqrt[n]{a^m}$$

è un ben preciso numero reale, escluso il caso che sia $m = 2k+1$ dispari con $n = 2h$ pari, ovvero escluso il caso nel caso:

$$(-|a|)^{2k+1/2h} := \sqrt[2h]{(-|a|)^{2k+1}}$$

che non esiste in campo reale, come tutte le radici pari di numeri negativi.

NOTA. Se scrivo $[a^{1/n}]^m$ tale valore non è $\sqrt[n]{a^m}$ poiché ho cambiato l'ordine degli esponenti rispetto alla definizione. Si osservi:

$$[(-2)^{2/3}]^{1/2} = [(-2)^2]^{1/3}]^{1/2} = 4^{1/6} = 2^{1/3}, \quad [(-2)^{1/2}]^{2/3} \text{ non esiste e } (-2)^{1/3} = -2^{1/3}.$$

Quando la base è negativa esistono eccezioni, quando non sia m dispari con n pari, come provano i seguenti esempi:

$$1.- m, n \text{ entrambi pari: } \sqrt{(-5)^2} = 5, \text{ mentre } (\sqrt{-5})^2 \text{ non esiste;}$$

$$(-5)^{6/4} = [(-5)^6]^{1/4} = 25^{6/4} = 25^{3/2} \text{ mentre } (-5)^{3/2} = [(-5)^3]^{1/2} \text{ non esiste}$$

$$2.- m \text{ pari con } n \text{ dispari: } [-2]^{2/3} = [(-2)^2]^{1/3} = \sqrt[3]{4}, \quad [(-2)^{1/3}]^2$$

2. La radice in campo complesso

Senza tornare ai dettagli che definiscono il campo dei numeri complessi, si noti che ogni volta che si assegna un numero complesso in forma trigonometrica:

$$a+ib = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) := \rho e^{i\theta}$$

l'arco θ è definito a meno multipli additive di 2π . Se l'arco o *argomento* θ soddisfa la limitazione $-\pi \leq \theta \leq \pi$, diremo che θ è l'*argomento principale*.

Dato un numero complesso $a+ib$, (a, b reali) si chiama *radice n -ma complessa* di $a+ib$ l'insieme delle soluzioni in campo complesso dell'equazione

$$z^n = (x+iy)^n = a+ib.$$

Tale *insieme* si denota con:

$$(C)\sqrt[n]{a+ib}$$

Posto $a+ib = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) := \rho e^{i\theta}$, si ha il seguente insieme, costituito da n elementi:

$$(C)\sqrt[n]{a+ib} = \left\{ \sqrt[n]{\rho} [\cos [(\theta + 2k\pi)/n] + i \sin [(\theta + 2k\pi)/n]] \right\}$$

con $k = 0, 1, \dots, k-1$.

È facile provare, ed è utile esercizio, che tali elementi sono tutti tra loro distinti, mentre ogni valore di k differente dai valori $0, 1, \dots, k-1$, eguaglia uno degli n numeri già considerati.

Se $a=1, b=0$, risulta $\rho=1, \theta=0$ e l'insieme suddetto diviene:

$$(C)\sqrt[n]{1} = \{ \cos 2k\pi/n + i \sin 2k\pi/n \text{ con } k = 0, 1, \dots, k-1 \}$$

insieme i cui elementi si chiamano le *radici n-me dell'unità*. Re che una

Una radice n-ma dell'unità si dice *primitiva* se non è radice m-ma dell'unità con $m < n$. Si prova che tali radici primitive sono tutte quelle per cui il valore k che le determina è primo con n . Ne segue che il numero di tali radici primitive è esattamente quello dato dalla ben nota funzione di Eulero:

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - 1/p)$$

essendo p un numero primo.

Nel continuare il nostro excursus sulle varie definizioni di radice dobbiamo ricordare ancora che si chiama *radice n-ma complessa principale* di $a+ib$, il numero complesso denotato con $(*)\sqrt[n]{a+ib}$, dato da:

$$(*)\sqrt[n]{a+ib} := \sqrt[n]{\rho} [\cos(\theta/n) + i \sin(\theta/n)],$$

con θ è *argomento principale* di $a+ib$, ovvero tale che $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

A conclusione osserviamo che:

$$(a)\sqrt[4]{16} = 2, (b)\sqrt[4]{16} = \{-2, +2\} = \pm 2, (c)\sqrt[4]{16} = \text{insieme delle radici quarte dell'unità}$$

ed ancora per la radice principale complessa si ha: $(*)\sqrt[4]{16} = 2 (\cos 0 + i \sin 0) = 2$.

Si ha pure: $\sqrt[3]{-8} = -2, (a)\sqrt[3]{-8} = \{-2\}$,

$$(c)\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8} [(\cos [(\pi + 2k\pi)/3] + i \sin [(\pi + 2k\pi)/3]] =$$

$$2\{ \cos(\pi/3) + i \sin(\pi/3), \cos \pi + i \sin \pi, \cos(5\pi/3) + i \sin(5\pi/3) \} =$$

$$= 2\{ (\sqrt{3} + i)/2, -1, (\sqrt{3} - i)/2 \}$$

ed ancora per la radice principale complessa si ha: $*\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8} (-1) = \sqrt[3]{-8}$, poiché tra $-\pi$ e π , incontriamo solo il valore per $k=1$, cioè $(\pi + 2\pi)/3 = \pi$.

Interessante concludere con l'esempio seguente. Risolvere l'equazione:

$$x^2 - (1+3i)x - 2(1-i) = 0$$

$$x = [(1+3i) \pm (c)\sqrt{(1+3i)^2 + 8(1-i)}] / 2 = [(1+3i) + (c)\sqrt{-2i}] / 2$$

Le equazioni algebriche facili

essendo $(c)\sqrt{-2i} = \pm (-1+i)$, sostituendo si hanno le soluzioni.

Tali nozioni potrebbero essere facilmente estese al corpo dei quaternioni.

3. Le equazioni algebriche facili da risolvere

Un polinomio algebrico in una variabile, usualmente si scrive nella forma:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

forma, secondo alcuni, denominata *forma normale*. L'intero n è detto il grado del polinomio e le quantità a_i , sono detti i coefficienti, x si dirà la variabile. Nella nostra trattazione supporremo che i coefficienti e la variabile x , siano numeri reali, ma si può sempre supporre, tali elementi siano, più in generale, in campo complesso. Più in generale ancora, molte questioni possono essere trattate anche in un qualsiasi campo e con poche varianti in un anello d'integrità.

Precisiamo solo che l'insieme di detti polinomi, corredati dell'addizione di polinomi e del prodotto degli stessi, costituisce a sua volta un dominio d'integrità, nel quale gli elementi invertibili sono i polinomi costanti.

Una equazione algebrica in una variabile corrisponde nella ricerca, nell'ambito di un prefissato insieme numerico X , di quei valori $x \in X$, per i quali risulti:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Fisseremo le idee nel caso nel quale i coefficienti a_i sono reali, ma allargheremo la nostra ricerca sulla variabile x , anche al caso che tale soluzione possa appartenere al campo complesso $\mathbb{C}$. Ciò dipende dal fatto che sussiste il cosiddetto:

Teorema fondamentale dell'algebra.

Una equazione algebrica in una variabile $P(x) = 0$, di grado n , a coefficienti reali o complessi, in una variabile, ammette in campo complesso esattamente n soluzioni, ciascuna delle quali eventualmente contata più volte.

Da ciò segue che ogni polinomio algebrico a coefficienti reali o complessi, in una variabile si può scrivere nella forma:

$$P(x) = a_0 (x - x_1)^{h_1} (x - x_2)^{h_2} \dots (x - x_k)^{h_m} \dots$$

dove $h_1 + h_2 + \dots + h_m = n$.

Tornando al problema di descrivere i casi facili, relativi al problema di risoluzioni delle sopradette equazioni algebriche, a coefficienti reali, occorre ricordare che le equazioni di grado superiore al 2° sono un osso duro da trattare. A volte, raramente, capitano casi per

i quali la soluzione è semplice. In generale una risposta generale è data dalla Teoria di Galois, ma noi vogliamo indicare casi nei quali tale teoria può essere ignorata.

Trattiamo alcuni di tali casi.

Per trattare il primo caso che presentiamo, occorre una premessa, importante per presentare tale risultato in una forma più generale.

Ricordiamo la cosiddetta struttura del poset¹ $(Q^*, |)$. Denotiamo con Q^* l'insieme dei numeri razionali positivi, ridotti ai minimi termini, ovvero:

$$Q^* = \{p/q \text{ t. c. } p, q \text{ sono interi positivi con } \text{MCD}(p, q) = 1.\}$$

Dati due elementi p/q e h/k di Q^* si dice che h/k divide p/q e si scrive

$$(h/k) | (p/q) \text{ se e solo se } h | p \text{ e } k | q.$$

Questa relazione di divisibilità tra razionali è riflessiva, simmetrica e transitiva, pertanto la struttura $(Q^*, |)$ è un insieme parzialmente ordinato, dotato di MCD e mcm, che sono definiti quali che siano i naturali a, b, c, d , come segue:

$$\text{MCD}(a/b, c/d) = (a/b ; c/d) := (a;c)/(b;d)$$

$$\text{mcm}(a/b, c/d) = [a/b ; c/d] := [(a;c)/[b;d]$$

Passiamo ora al primo dei casi di nostro interesse.

a. Sia data un'equazioni di grado n , a coefficienti interi.

Se una tale equazione ha per soluzione un numero **intero**, questi è necessariamente tra i divisori del termine noto a_n . Se più in generale l'equazione ha una soluzione razionale, questa è tra i divisori razionali di a_n/a_0 (sia pure non ridotto ai minimi termini). Ciò dipende dal fatto che detta x una soluzione intera si ha:

$$-(a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}) x = a_n$$

ne segue che x divide a_n .

Del resto se la soluzione è del tipo $x = p/q$, si ha:

$$[-(a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1})/a_0] (p/q) = (a_n/a_0),$$

onde l'asserto.

Esempio 1. L'equazione $10x^2 - 11x + 3 = 0$ non ha soluzioni intere, come si verifica provando i divisori di 3 che sono $\pm 1, \pm 3$. L'equazione ha invece due soluzioni tra i divisori (non interi) di $3/10$ che ha come divisori sia interi che razionali (a meno del segno) i seguenti: 1, 3, $1/2$, $1/5$, $1/10$, $3/2$, $3/5$, $3/10$.

¹“Poset” significa Partial ordered set, ovvero insieme parzialmente ordinato.

Le equazioni algebriche facili

Le soluzioni sono $1/2$ e $3/5$ come si prova sostituendo.

Esempio 2. L'equazione $P(x) = 10x^3 - 31x^2 + 25x - 6 = 0$ ha soluzioni intere, poiché considerato che i divisori di 6 sono 1,2,3,6 e i loro opposti, per tentativi ho $P(2) = 0$, dunque 2 è una radice intera, anzi è l'unica intera. L'equazione ha ancora due soluzioni tra i divisori non interi di $6/10$ che sono: $1/1, 1/2, 1/5, 1/10, 2/1, 2/2=1, 2/5, 2/10=1/5, 3/1, 3/2, 3/5, 3/10, 6/1, 6/2=3, 6/5, 6/10=3/5$, non tutti distinti e i loro opposti. La verifica fornisce $P(1/2) = P(3/5) = 0$, dunque $1/2$ e $3/5$ sono radici razionali dell'equazione.

Consideriamo ora un secondo caso classico che desideriamo ricordare.

b. - Le cosiddette **equazioni reciproche**, sono interessanti per il fatto che i coefficienti del polinomio presentano particolari simmetrie. Tale è il caso nel quale i coefficienti equidistanti dagli estremi sono uguali (dette di *prima specie*) oppure opposti (dette di *seconda specie*). In una reciproca di seconda specie di grado pari, occorre che manchi il termine medio, mancanza giustificata dal fatto che tale termine dovrebbe essere uguale al suo opposto. Possibili soluzioni sono certamente oppure eventualmente entrambi). Se una equazione reciproca ammette la radice allora ha come soluzione anche la reciproca $x=q/p$. Si procede quindi per abbassamento di grado. Vi sono anche casi nuovi (detti *pseudo-reciproche di terza specie*) che non appaiono nei testi scolastici.

Tali equazioni dipendono pure dal grado, presentiamo otto casi.

b.1.- Le reciproche di 3° grado di prima e seconda specie hanno rispettivamente come radice - 1 oppure +1, e quindi si abbassano al 2° grado, ottenendo equazioni di 2° grado a loro volta reciproche ma di prima specie:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = (x+1) [ax^2 + (b-a)x + a] = 0$$

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = (x-1) [ax^2 + (b+a)x + a] = 0$$

b.2.- Le reciproche di quarto grado e prima specie:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

si risolvono con il seguente artificio: si divide tutto per x^2 ottenendo:

$$a(x^2 + 1/x^2) + b(x + 1/x) + c = 0$$

posto $x + 1/x = y$ si ha: $x^2 + 1/x^2 + 2 = y^2$, da cui si ha l'equazione ausiliaria:

$$ay^2 + by + c - 2a = 0.$$

b.3.- Le reciproche di quarto grado e seconda specie (manca il termine x^2):

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0 \quad \text{ovvero}$$

Franco Eugeni

$$a(x^4 - 1) + b x(x^2 - 1) = 0$$

che si riduce a: $x^2 - 1 = 0$ e $a(x^2 + 1) + b x = 0$, che è a sua volta una reciproca di 2° grado e di prima specie.

b.4.-Le pseudo-reciproche di quarto grado e “terza specie”²

$$a x^4 + b x^3 + c x^2 - b x + a = 0$$

dividendo per x^2 si ha l'equazione ausiliaria:

$$a(x^2 + 1/x^2) + b(x - 1/x) + c = 0$$

posto $y = x - 1/x$ si ha: $y^2 = x^2 + 1/x^2 - 2 =$, da cui

$$a(y^2 + 2) + b y + c = 0.$$

b.5.-Le reciproche di 5° grado di prima e seconda specie hanno rispettivamente come radice - 1 oppure +1, e quindi si abbassano al 3° grado, ottenendo in entrambi i casi delle reciproche di 4° grado e di prima specie:

$$a x^5 + b x^4 + c x^3 + c x^2 + b x + a = (x+1) [a x^4 + (b-a)x^3 + (a-b+c) x^2 + (b-a) x + a] = 0$$

$$a x^5 + b x^4 + c x^3 - c x^2 - b x - a = (x-1) [a x^4 + (b+a)x^3 + (a+b+c) x^2 + (b+a) x + a] = 0$$

dove l'espressione in ciascuna delle quadre si risolvono ponendo $y = x + 1/x$.

b.6.- Le reciproche di sesto grado e prima specie:

$$a x^6 + b x^5 + c x^4 + d x^3 + c x^2 + b x + a = 0$$

si risolvono con il seguente artificio: si divide tutto per x^3 ottenendo:

$$a(x^3 + 1/x^3) + b(x^2 + 1/x^2) + c(x + 1/x) + d = 0$$

posto $y = x + 1/x$ si ha:

$$y^2 = x^2 + 1/x^2 + 2 = , y^3 = x^3 + 1/x^3 + 3(1/x) + 3x = x^3 + 1/x^3 + 3y$$

da cui si ha una equazione ausiliaria di 3° grado:

$$a y^3 + b y^2 + (c-3a) y + d - 2b = 0.$$

b.7.-Le reciproche di sesto grado e seconda specie (manca il termine x^3):

$$a x^6 + b x^5 + c x^4 - c x^2 - b x - a = 0$$

che si scrive come:

$$a(x^6 - 1) + b x(x^4 - 1) + c x^2(x^2 - 1) = 0$$

che si riduce a: $x^2 - 1 = 0$ e ad una equazione di 4° grado residua.

² Caso che appare in questa nota per la prima volta.

Le equazioni algebriche facili

$$(x^2 - 1) [a x^4 + b x^3 + a x^2 + b x + a + c] = 0$$

b.8.- Esistono anche le: *pseudo-reciproche di sesto grado e “terza specie”*³

$$a x^6 + b x^5 + c x^4 + d x^3 - c x^2 + b x - a = 0$$

dividendo per x^3 si ha l'equazione ausiliaria:

$$a (x^3 - 1/x^3) + b (x^2 + 1/x^2) + c(x - 1/x) + d = 0$$

posto $y = x - 1/x$ si ha:

$$y^2 = x^2 + 1/x^2 - 2, \quad y^3 = x^3 - 1/x^3 + 3(1/x) - 3x = x^3 - 1/x^3 - 3y$$

$$a(y^3 + 3y) + b(y^2 + 2) + c y + d = 0.$$

che è la risolvente di 3° grado.

c.- Ancora vi sono casi semplici e interessanti, ma che non sono riportati sui testi scolastici.

c.1.- Un'equazione di 3° grado $a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$, che soddisfa la condizione: $c = ka$, $d = kb$, cioè che presenta una reciprocità proporzionale, si ha:

$$a x^3 + b x^2 + k a x + k b = a x (x^2 + k) + b (x^2 + k) = 0,$$

di banale soluzione.

c.2.- Una equazione di 4° grado, priva del termine medio

$$a x^4 + b x^3 + c x + d = 0 \quad \text{con } c = ka, d = kb, \text{ si ha:}$$

$$a x^4 + b x^3 + k a x + k b = a x (x^3 + k) + b (x^3 + k) = 0$$

di banale soluzione.

c.3.- Per un'equazione di 5° grado,

$$a x^5 + b x^4 + c x^3 + d x^2 + e x + f = 0 \quad \text{con } d = ka, e = kb, f = kc$$

si ha:

$$a x^5 + b x^4 + c x^3 + k a x^2 + k b x + k c = a x^2 (x^3 + k) + b x (x^3 + k) + c (x^3 + k) = 0,$$

di banale soluzione.

³ Caso che appare in questa nota per la prima volta.

c.4.-Per un'equazione di 6° grado, priva del termine medio

$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^2 + ex + f = 0$ e con $d = ka$, $e = kb$, $f = kc$ si ha:

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + kax^2 + kbx + kc = a x^2 (x^4 + k) + b x (x^4 + k) + c (x^4 + k) = 0,$$

di banale soluzione. Il chiaro procedimento può continuare.

Bibliografia

V.E. Bononcini, (1965). *Istituzioni di Matematiche*, Patron, Bologna

F. Eugeni, 1969-70. *Dai numeri naturali ai numeri ipercomplessi*, Dispense del corso di Matematiche Complementari, Uni. L'Aquila. Cfr. [www.afsu.it /discipline/Dai numeri nat.agli ipercomp./ Dai numeri nat.ai compl./](http://www.afsu.it/discipline/Dai%20numeri%20nat.agli%20ipercomp./Dai%20numeri%20nat.ai%20compl./)

F. Eugeni-A. Liberatore, (1983). *Considerazioni didattiche sulla potenza ad esponente frazionario*, pp. 126-129, in Convegno "Mathesis" "La matematica nell'educazione", vol.II (Comunicazioni e interventi), Monopoli, 26-30 aprile 1981.

La matematica contagiosa

Diana Cipressi

Docente di matematica e scienze

Istituto Comprensivo n. 4 Chieti Scuola Sec. di 1° grado G. Mezzanotte

e-mail diana.cipressi@gmail.com

Sunto

Non è facile convivere con una pandemia e affrontare un'emergenza sanitaria; possiamo però imparare a comprendere la diffusione di un virus, con un approccio educativo a carattere interdisciplinare, e trattare i problemi della comunità in cui viviamo con l'aiuto delle scienze biologiche e della matematica.

Per pianificare una matematica per il cittadino consapevole, faremo riferimento alle competenze chiave di cittadinanza: *Matematica e scienze* (sviluppare il pensiero matematico nei problemi in situazioni quotidiane e spiegare il mondo naturale); *Imparare a imparare* (riflettere su sé stessi e far fronte all'incertezza e alla complessità); *Cittadinanza* (comprendere i diversi punti di vista delle persone).

Procediamo nella ricerca di alcuni modelli matematici che possono formalizzare problemi legati alla pandemia. Tra i possibili percorsi didattici, qui sceglieremo di focalizzare alcuni aspetti aritmetici e algebrici, trattabili nelle tre classi della scuola sec. di 1° grado:

- dalla dimensione di virus e microparticelle ai numeri decimali;
- dal fattore di contagio al diagramma ad albero;
- dalla crescita dei contagi alla pendenza di una funzione;
- dalla velocità di diffusione alla funzione esponenziale.

Parole chiave: Virus; interdisciplinarietà; numeri decimali; grafo; pendenza di funzione; funzione esponenziale.

1. Dalla dimensione di virus e microparticelle ai numeri decimali

L'appello rivolto alla popolazione invita ad adottare uno stile di vita consapevole: “*Se ti vuoi bene, metti la mascherina. Protegge te e gli altri.*”

Si tratta di capire perché la mascherina ci difende dal Coronavirus, riducendo la carica virale (lasciando passare solo il 30% del virus, una quantità insufficiente al contagio), di far chiarezza su alcune informazioni false, che attribuiscono alla mascherina la causa di un avvelenamento da anidride carbonica e infine di comprendere come la mascherina rappresenti un filtro per trattenere alcune particelle lasciandone passare altre.

Analizziamo le dimensioni di un virus e di una molecola di anidride carbonica:

- il Coronavirus ha una forma sferica con diametro di circa 100 *nanometri*
- la molecola di anidride carbonica è “larga” circa 200 *picometri*.

e confrontando tra loro:

Coronavirus	100 <i>nanometri</i>	0,000 000 1 <i>metri</i>
Anidride carbonica	200 <i>picometri</i>	0,000 000 000 2 <i>metri</i>

si deduce che l'anidride carbonica è più “piccola” del virus.

I vari sottomultipli del metro, ci porteranno verso un microcosmo da scoprire.

Dividendo un segmento OA in dieci parti uguali, si ottiene un segmento OX tale che il rapporto $OA / OX = 10$; se $OA = 1\ m$ allora $OX = 1\ m : 10 = 1\ dm$.

Continuando a dividere OA in cento, mille, ... parti uguali, ciascuna parte risulta un centesimo, un millesimo, ... del segmento OA.



Misurare pertanto significa confrontare una grandezza con un'altra omogenea, assunta come unità di misura e contare quante volte l'unità è contenuta nella grandezza da misurare. Tra i sottomultipli del metro si ha:

- Un *nanometro* corrisponde ad un miliardesimo di metro cioè
 $1\ nm = 1\ m : 1\ 000\ 000\ 000 = 0,000\ 000\ 001\ m$
- Un *picometro* corrisponde a un metro diviso mille miliardi cioè
 $1\ pm = 1\ m : 1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 0,000\ 000\ 000\ 001\ m$.

In tabella riassumiamo la corrispondenza tra i simboli e i valori delle unità di misura:

La matematica contagiosa

Valore	Simbolo
1	<i>m</i>
0,1	<i>dm</i>
0,01	<i>cm</i>
0,001	<i>mm</i>
...	
0,000 001	<i>μm</i>
...	
0,000 000 001	<i>nm</i>
...	
0, 000 000 000 001	<i>pm</i>

Questo viaggio nell'infinitamente piccolo intrapreso con i numeri decimali potrà essere esteso alle potenze con esponente negativo:

Valore decimale	..	0,000 000 001	0,000 001	0,001	..	1
Potenza	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	...	10^0
Simbolo	<i>pm</i>	<i>nm</i>	<i>μm</i>	<i>mm</i>	...	<i>m</i>

Le dimensioni del Coronavirus e dell'anidride carbonica (rispettivamente $10^{-7} m$ e $10^{-10} m$) mostrano che la mascherina filtra le particelle del virus ma non dell'anidride carbonica. La mascherina quindi, indossata per coprire naso e bocca, rappresenta un buon dispositivo di protezione per fronteggiare il COVID-19.

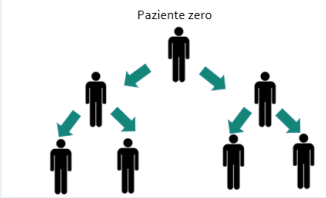
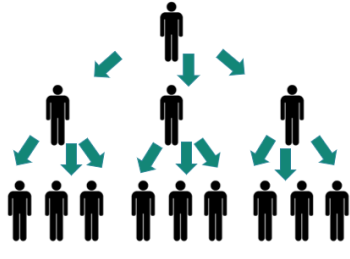
2. Dal fattore di contagio al diagramma ad albero

Gli esperti ci parlano dei meccanismi di immunità di gregge, del controllo sull'indice di trasmissibilità del virus e delle relazioni tra la copertura vaccinale e un fattore variabile R_0 . Cerchiamo di capire perché c'è preoccupazione se R_0 è maggiore di 1 e invece ottimismo se R_0 scende.

Il fattore R_0 rappresenta il numero medio di persone che sono state contagiate da un singolo infetto, all'interno di una popolazione non vaccinata nella quale la malattia non era presente prima.

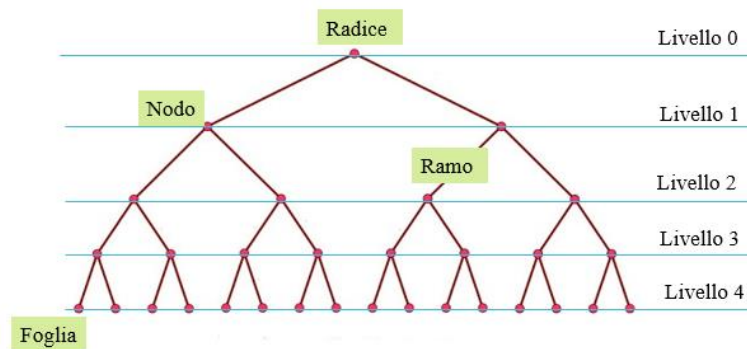
Vuol dire che se $R_0 = 1$ allora una persona infetta ne contagia in media un'altra persona che a sua volta ne contagierà un'altra, e così via; se $R_0 = 2$ allora una persona infetterà due persone che a loro volta ne contagieranno 4, ...; ecc

Nella tabella vediamo come all'aumentare di R_0 , l'aumento delle persone infette diventa sostanziale già al secondo livello del grafico.

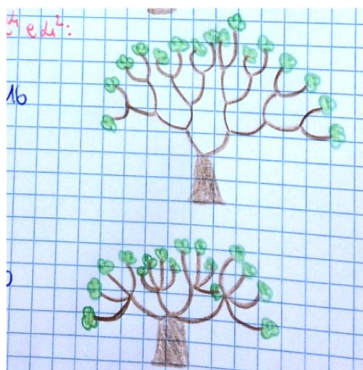
$R_0 = 1$	$R_0 = 2$	$R_0 = 3$
		
Totale infetti = $1+1+1 = 3$	Totale infetti = $1+2+4 = 7$	Totale infetti = $1+3+9 = 13$

Concludiamo che maggiore è il valore di R_0 tanto più è elevato il numero di persone infette che fanno aumentare il rischio di propagazione dell'agente infettivo.

Un modello matematico di diffusione è il digramma ad albero, un tipo di rappresentazione che permette di articolare un processo in più livelli, e che si sviluppa da una radice per ramificazioni successive.



L'albero viene percorso dalla radice verso le foglie, in discesa se la radice è posta in alto.



Gli alunni di classe prima possono colorare alberi con fusto e foglie.

Il primo albero rappresenta $R_0 = 2$: ogni nodo ha due ramificazioni su quattro livelli, con un totale di $2^4=16$ foglie.

Il secondo albero raffigura $R_0=4$: ogni nodo ha quattro rami su due livelli, e germoglia $4^2=16$ foglie.

La matematica contagiosa

Con i diagrammi ad albero, gli alunni apprendono meglio le potenze: la base è il numero di rami uscenti da ciascun nodo e l'esponente è il numero di livelli da percorrere.

R_0 è un fattore caratteristico non solo del COVID-19, ma anche di altre patologie infettive:

Infezione	R_0
morbillo	12-18
polio	5-6
ebola	2
influenza	1,3

L'obiettivo delle misure di contenimento, come ad esempio il distanziamento fisico, è quello di ridurre il fattore R_0 ad un valore inferiore a 1: se $R_0 < 1$, l'infezione tende ad estinguersi, se $R_0 > 1$ l'infezione continua a diffondersi nella popolazione.

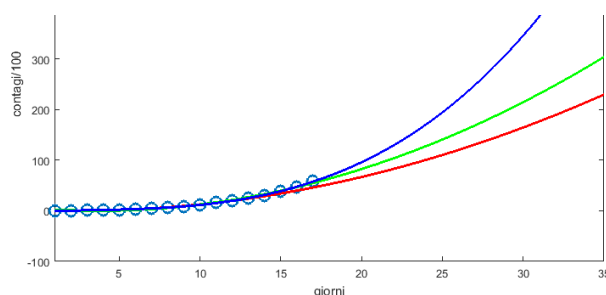
Dai valori di R_0 segue un piano vaccinale per il controllo della malattia infettiva: ad un valore alto di R_0 , corrisponderà una maggiore popolazione da immunizzare.

3. Dalla crescita dei contagi alla pendenza di una funzione

Notizie e bollettini sulla situazione dei contagi sono costanti e gli aggiornamenti descrivono, in ciascun paese, il comportamento del Coronavirus e l'evolversi della situazione.



E i grafici vanno interpretati: *qual è il comportamento di una curva? La linea verde subisce un cambiamento nel tempo? Le linee del grafico hanno una stessa pendenza?*

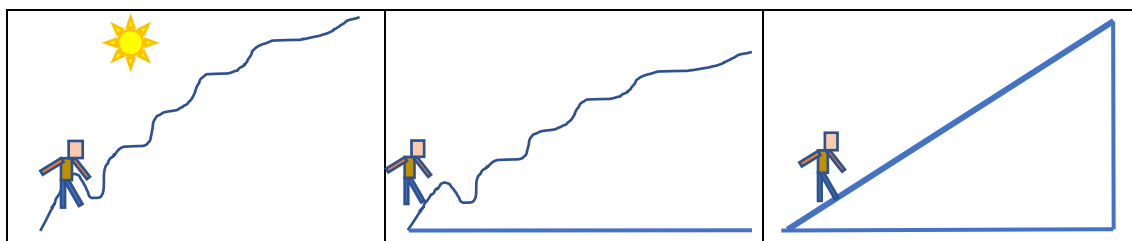


Cosa si intende per pendenza? Il pendio di una strada, un percorso in salita o in discesa, l'inclinazione rispetto ad un piano, un dislivello tra due quote.

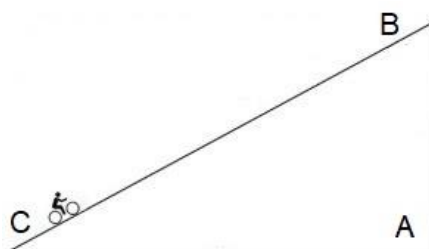
Gli alunni riflettono sui significati e discutono sulle caratteristiche:

Che cosa può caratterizzare una “salita”? Quando una salita è pericolosa? Come si può stabilire se una salita è più ripida di un'altra? In che modo si può calcolare la pendenza di una strada?

Iniziamo a disegnare una salita (tortuosa, dritta, delimitata, ...) cercando di individuarne le parti rilevanti.



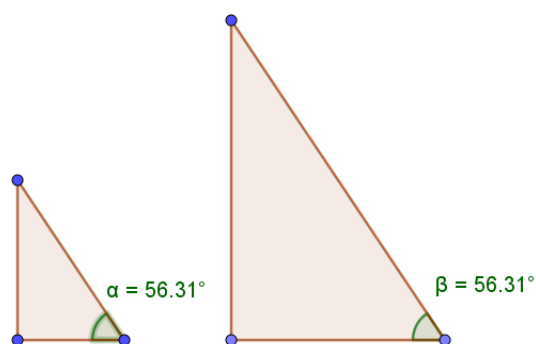
Passeremo gradualmente dall'idea di strada in salita alla rappresentazione di un triangolo rettangolo ABC e dal tragitto all'ipotenusa BC.



Riflettiamo su due aspetti caratteristici del triangolo ABC: l'inclinazione dell'ipotenusa rispetto al cateto AC che dipende dall'angolo in C e il dislivello tra B e C espresso dal cateto AB.

Faremo riferimento sia alla similitudine dei triangoli che alle rette sul piano cartesiano.

a) *Due triangoli simili hanno angoli congruenti.*



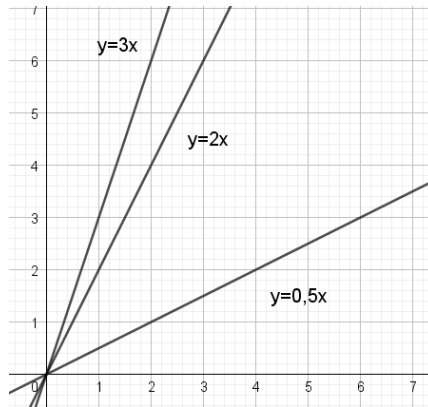
$$\alpha = \beta$$

Stessa inclinazione
dell'ipotenusa
nei due triangoli

Dunque la “pendenza” dipende dall'angolo compreso tra ipotenusa e cateto: maggiore è α , maggiore è l'inclinazione dell'ipotenusa.

La matematica contagiosa

Nel *piano cartesiano* la pendenza di una retta è legata al suo coefficiente angolare m :



$$m_1 = 0,5$$

$$m_2 = 2$$

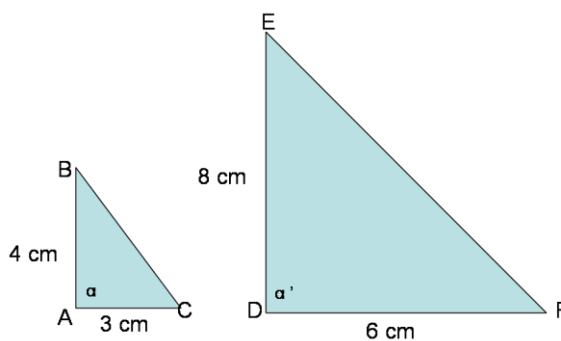
$$m_2 > m_1$$

La retta $y = 2x$
è “più alta”
della retta $y = 0,5x$

Da un esame dei valori di m , segue che:

- Maggiore è il coefficiente angolare m , maggiore è la “salita” della retta.
- La retta è crescente se m è positivo, decrescente se m è negativo.

b) *Due triangoli simili hanno i cateti in proporzione:*



Il rapporto dei cateti
è costante:

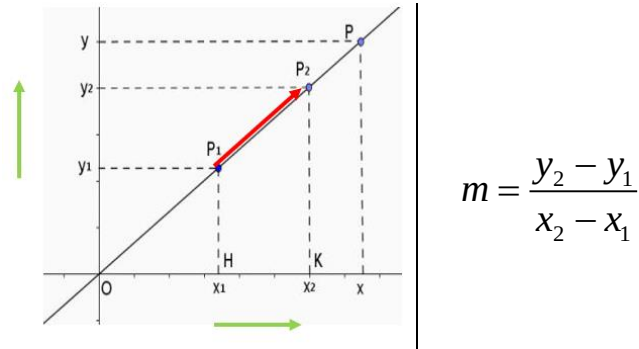
$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} = \frac{4}{3}$$

BC e EF
hanno stessa pendenza

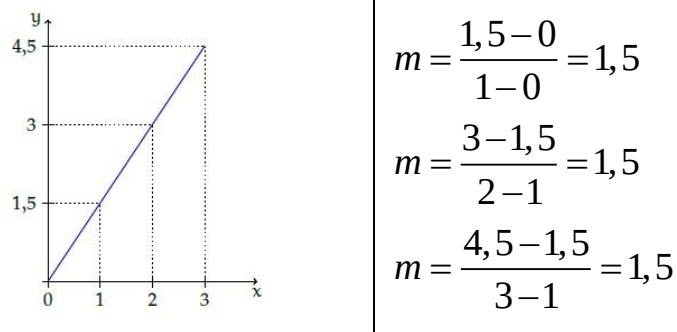
Ad uno spostamento orizzontale di 3 cm, corrisponde un dislivello di 4 cm e ad uno spostamento di 6 cm, corrisponde un dislivello di 8 cm; i due triangoli presentano una stessa pendenza, data dal rapporto dei cateti:

$$Pendenza = \frac{dislivello}{spostamento}$$

Anche nel *piano cartesiano* la pendenza di una retta è data da un rapporto: presi due punti distinti $P_1 (x_1; y_1)$ e $P_2 (x_2; y_2)$ sulla retta, si calcola la variazione $y_2 - y_1$ delle ordinate rispetto alla variazione $x_2 - x_1$ delle ascisse.



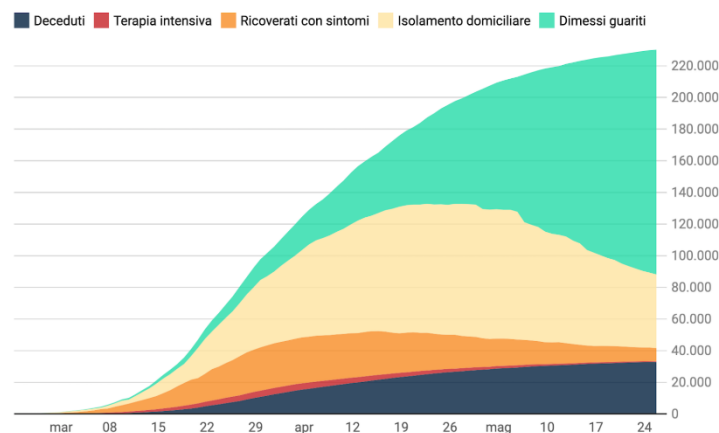
Si potrà verificare che la retta ha una pendenza costante, poiché il rapporto non dipende dalla scelta dei punti P_1 e P_2 della retta. Infatti:



4. Dalla velocità di diffusione alla funzione esponenziale

I notiziari aggiornano lo stato di evoluzione della pandemia rilasciando dati e numeri, interpretabili con maggiore efficacia attraverso il linguaggio dei grafici.

Si osservano curve con andamento variabile: *la curva verde all'inizio sale molto rapidamente; la curva gialla ha un picco e poi scende; la curva blu è quasi piatta.*



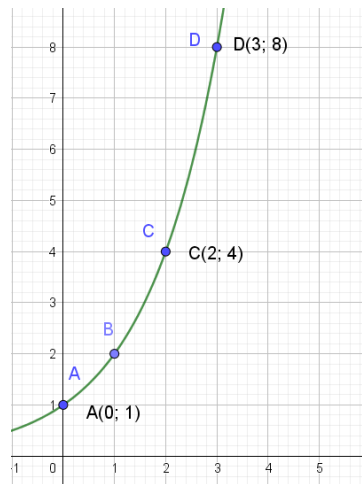
Altre curve hanno un andamento di sola salita, come quando si parla di “*crescita esponenziale dei contagi*”.

La matematica contagiosa

Analizziamo a questo proposito le potenze in base 2, nella riproduzione dei batteri: ogni cellula si divide in due cellule uguali, 2 cellule dopo una generazione, 4 cellule dopo 2 generazioni, 8 cellule dopo tre, ...

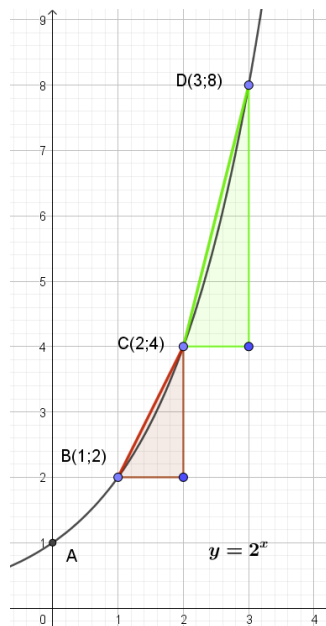
n° generazioni	0	1	2	3
n° di cellule	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$

Rappresentiamo i dati della tabella sul piano cartesiano e colleghiamo i punti con linee curve. Dalle potenze di 2 approdiamo alla funzione esponenziale:



$$y = 2^x$$

Notiamo che l'andamento di questa funzione ha un avanzamento molto veloce; basta confrontare la pendenza in più tratti della funzione:



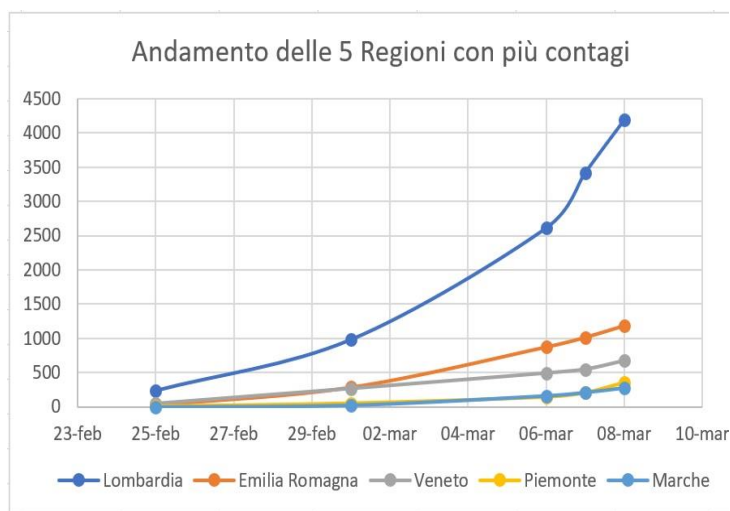
Approssimiamo il grafico con tratti rettilinei BC e CD:

$$m_{BC} = \frac{4-2}{2-1} = 2$$

$$m_{CD} = \frac{8-4}{3-2} = 4$$

Il tratto CD ha una velocità di crescita maggiore del tratto BC più vicino all'origine.

Gli alunni possono analizzare l'andamento dei contagi in alcune regioni:

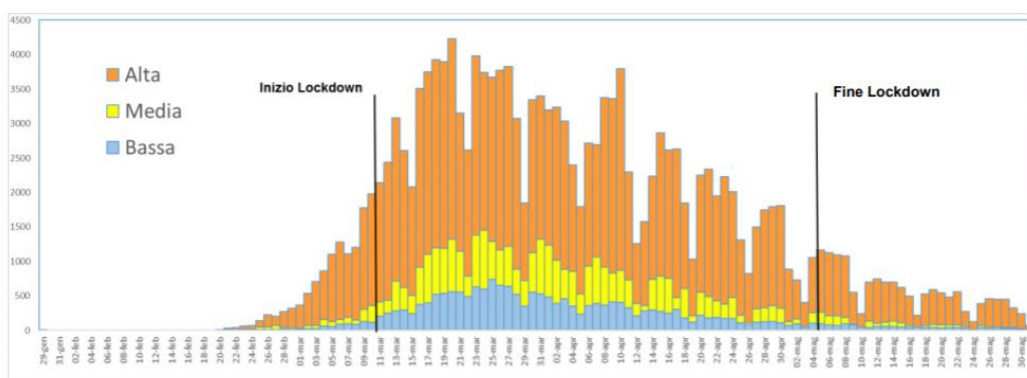


- L'andamento dei contagi in Lombardia è costante? Perché?
- Qual è la pendenza del grafico relativo alla Lombardia nel periodo 25 febbraio – 1 marzo?
- Qual è la regione che ha subito una maggiore velocità di crescita?

Altri grafici mostrano l'efficacia delle *misure di contenimento* della diffusione del virus quali il rispetto del distanziamento fisico, l'uso della mascherina, l'igiene delle mani e delle superfici, rafforzate dalla vaccinazione di massa e dalle limitazioni imposte dai lockdown.

Tali misure daranno segni di miglioramento e il grafico dei contagi subirà un cambiamento: *Quale sarà l'andamento della curva quando il contagio inizierà a diminuire?*

Analizziamo l'andamento della curva epidemica in Italia per i casi segnalati in un periodo di lockdown che va dai primi di marzo ai primi di maggio 2020.



Notiamo che le tre zone ad alta, media e bassa incidenza di diffusione hanno un picco nel periodo di marzo seguito da una graduale diminuzione dei casi segnalati.

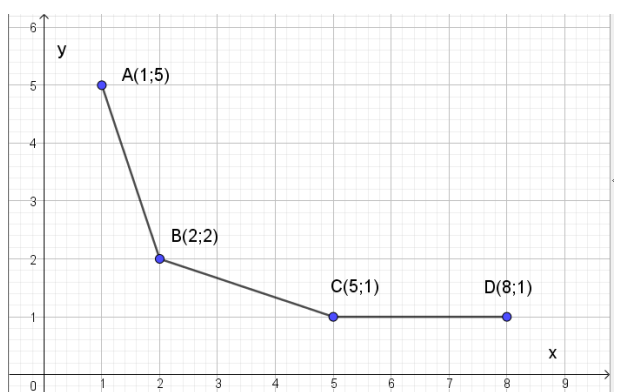
Il quotidiano ci informa che dopo il lockdown gli ospedali hanno potuto riprendere a lavorare con più tranquillità, quando il numero dei ricoverati in terapia intensiva ha iniziato a diminuire.

Coronavirus, i numeri dicono che il lockdown ha funzionato



Ma che cosa è cambiato nel grafico? Qual è l'andamento della curva dopo il picco? Che tipo di numero può descrivere il rallentamento della pandemia?

Analizziamo quindi un grafico di decrescita sul piano cartesiano e calcoliamo il coefficiente angolare nei tratti rettilinei:



$$m_{AB} = \frac{2-5}{2-1} = -3$$

$$m_{BC} = \frac{1-2}{5-2} = -\frac{1}{3}$$

$$m_{CD} = \frac{1-1}{8-5} = 0$$

Notiamo che i tratti AB e BC hanno coefficiente angolare -3 e -1/3 rispettivamente e CD nullo: concludiamo che la curva “*in discesa*” viene espressa da numeri negativi, e che la curva “*piatta*” dallo zero.

Considerazioni finali

Un percorso didattico sulla pandemia diventa uno spunto di riflessione per comprendere come la matematica può aiutarci in una situazione di vita; ci accorgiamo che i modelli matematici, che hanno semplificato la complessità del fenomeno, hanno descritto i meccanismi della trasmissione del virus consentendo preziose previsioni sugli scenari futuri.

Gli obiettivi del percorso di apprendimento saranno una guida per acquisire i principi di cittadinanza attiva, per valorizzare i comportamenti individuali e collettivi all'interno della comunità e per incoraggiare il pensiero critico sulle responsabilità da adottare nella vita sociale.

È chiaro che l'educazione alla cittadinanza non andrà confinata ad alcune discipline, ma sarà una fonte necessaria per diffondere una cultura viva e valoriale.

Bibliografia e sitografia

Castelnuovo Emma. *La matematica. Leggi matematiche*. La Nuova Italia

Morrison Philip Morrison Phyllis Eames Charles Eames Ray. *Potenze di dieci*. Zanichelli.

Il matematico che difese il vaccino

<https://www.prismamagazine.it/2021/02/15/il-matematico-che-difese-il-vaccino/>

Semplici modelli matematici di diffusione dei virus:

<http://matematica.unibocconi.it/articoli/semplifici-modelli-matematici-di-diffusione-dei-virus>

Entità Geometriche rappresentate su Supporto Digitale tramite la Geometria Orientata

Pierpaolo Palka¹ Eula Grilli² Vincenzo Romagnuolo³ Vincenzo Tartaglia⁴

¹Università G. D'Annunzio, Viale Pindaro n. 42, 65100 Pescara
e-mail: ppalka@unich.it

² Sit Rilievi Ambiente, L.re G. Matteotti 3, 65121 Pescara
e-mail: eula.grilli@libero.it

³ Ingegnere, Via Cetto Ciglia, 65100 Pescara
e-mail: vincenzo.romagnuolo.vr@gmail.com

⁴ Dottore, Galleria K.Wojtyla, 66020 S. Giovanni T. (Ch)
e-mail: enzo.t@hotmail.it

Sunto

Desideriamo mostrare l'importanza di possedere una Piattaforma Grafica Proprietaria dove, per Piattaforma Grafica Proprietaria, intendiamo un raccoglitore di algoritmi e procedure matematiche finalizzato al Disegno Automatico. E' fondamentale per noi che questo raccoglitore sia stato progettato per **non** avvalerci di librerie di terze parti. Ai nostri tecnici, risulta facilmente implementabile e sostenibile. Oggi siamo orgogliosi e ad ogni collaudo riusciamo a precisare le caratteristiche del Software aumentandone i punti di forza. La Piattaforma Grafica Proprietaria è stata realizzata dal prof. Pierpaolo Palka, in trent'anni di ricerca, nel campo della Rappresentazione Digitale. Essa è alla base del Software RilArch di proprietà della Sit Rilievi (www.sitrilievi.it). RilArch è l'acronimo di **Rilievo di Architetture**. La Sit Rilievi con sede a Pescara, da subito, ha rilevato Rilarch ed oggi lo fornisce gratuitamente per farlo monitorare nell'utilizzo professionale. **Rilarch è scaricabile** in modo gratuito dal sito www.sitrilevi.it

Andando sul sito si mostrerà in che modo siano rappresentati analiticamente, su un supporto digitale, i piani ed i solidi, mettendo in evidenza le operazioni matematiche utilizzate.

Richiamiamo alla memoria questa caratteristica di distinzione:

- su **Supporto Cartaceo** la rappresentazione di figure geometriche come segmento di retta, porzione di piano contenuti in un poligono chiuso o porzione di spazio contenuti in un solido, non richiede espressamente la conoscenza del verso con cui essi sono disegnati.
- su **Supporto Digitale** la stessa rappresentazione necessita della conoscenza del verso con cui vengono rappresentati.

Questa differenza è un concetto fondamentale. Infatti Il **Supporto Digitale** può essere definito dinamico rispetto al **Supporto Cartaceo**.

Nel Supporto Digitale, per la continua rigenerazione del disegno, possono essere rappresentate varie viste sequenziali, mentre nel Supporto Cartaceo abbiamo una sola vista. A questo punto possiamo dire che, tra i problemi più importanti inerenti la rappresentazione di figure geometriche nello spazio, ci sono:

- la conoscenza della posizione relativa tra esse
- la conoscenza delle superfici nascoste di ciascuna di esse.

1. Introduzione

L'iniziativa nasce dalla collaborazione tra la Dirigente della Scuola Media I. C. Pescara⁶ - Pescara, dott.ssa Mariella Centurione insieme alla Docente Prof. Marisa Riccitelli e l'Arch. Prof. Pierpaolo Palka Docente di "Disegno Digitalizzato e Rappresentazione del Territorio" presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università G. D'Annunzio Chieti-Pescara.

Il Prof. Pierpaolo Palka, in 30 anni di ricerche, ha realizzato un Software di Disegno automatico che **non** si basa su librerie di terze parti.

La motivazione di tale studio è che, spesso, non si conoscono le operazioni eseguite all'interno di un Software, infatti, dopo aver ottenuto risultati dai calcoli, chiediamo agli studenti: "ragazzi, abbiamo ottenuto questi risultati, ma essi da dove derivano?"

Nel fare la sintesi delle risposte è nata l'esigenza di qualcosa di più comprensibile, più personale, cioè avere un archivio di algoritmi propri, poi questo archivio immediato e personalizzato si è esteso nel tempo ed ha permesso il riconoscimento di RilArch.

Mettendo in luce tutti gli aspetti scientifici che si trovano dietro un qualsiasi Software di Disegno Automatico, comunemente usato, si è arrivati a migliorare la sostenibilità di RilArch.

L'Esperienza Didattica nella Scuola Media

La Prof. M. Riccitelli, al corrente di tale ricerca, ne ha parlato con la Preside della Scuola Media Comprensivo 6-Pescara, ottenendo il consenso per un Corso di Disegno Automatico attraverso il Software RilArch. Il progetto iniziato 2 anni fa è tutt'ora in essere. Il Software RilArch viene utilizzato per illustrare agli alunni i seguenti concetti:

- nozioni di Geometria e Matematica che ci sono dietro un Software di Disegno Automatico,
- origine della retta e del solido che si disegna sullo schermo,
- imparare a introdurre dati geometrici dentro un Software di Disegno Automatico
- studio della procedura attraverso la quale si caricano i dati,

Entità Geometriche rappresentate su Supporto Digitale tramite la Geometria Orientata

- realizzare un qualsiasi disegno dell'alunno ad esempio la piantina di casa,
- creare una stimolante curiosità ottenendo un risultato personale,
- abituare lo studente alla comprensione dell'oggetto nella totale spazialità,
- conoscere gli algoritmi che hanno generato l'immagine.

In conclusione si è messo a frutto la veloce capacità di smanettare che hanno i ragazzi di oggi con risultati sorprendenti.

Parole Chiave: Principi di Geometria Proiettiva. Coordinate. Entità Grafica. Algoritmi. Digitalizzazione. Cad.

2. L' Evoluzione Tecnologica

E' noto, dalla disamina storica dell'evoluzione della Scienza della Rappresentazione, come quest'ultima sia basata su regole scientifiche mirate alla realizzazione di prospettive e di proiezioni ortogonali. Nel tempo, oltre al cartaceo è nato un nuovo supporto bidimensionale chiamato Supporto Digitale.

E' doveroso ampliare le nostre visuali in merito alla possibilità di trasformare le regole note della Rappresentazione, in relazione ai nuovi supporti su cui si basano le nuove tecnologie.

Sono note e chiare le regole di un supporto cartaceo per rappresentare elementi grafici, non sono altrettanto chiare agli utenti quelle applicate su un supporto digitale.

L'era tecnologica di pari passo con l' invenzione ed evoluzione del PC ha compiuto passi da gigante, specialmente sul piano della potenza e velocità esecutiva, ha proposto un nuovo tipo di supporto, il monitor, su cui eseguire anche le rappresentazioni architettoniche.

Il video, componente dell'arredo PC, comunque, è, di per sé, un supporto bidimensionale digitale e, per tale caratteristica, può sembrare simile al Supporto Cartaceo.

Entrambi, però, non sono equiparabili tra loro proprio per quanto concerne le modalità d'uso, cioè il modo di disegnare su di essi. Naturalmente da queste prime considerazioni è facilmente deducibile che oltre al modo di utilizzare gli strumenti operativi anche le teorie di base dei due sistemi sono diversi. Da quanto detto emerge chiaramente l'opportunità di distinguere due modi di disegnare.

Riflessioni su applicazioni di disegno su supporto digitale

Tratteremo il noto argomento del disegno tecnico, che oltre al supporto cartaceo in quest'ultimo periodo può essere seguito anche su un nuovo supporto detto digitale che avviene attraverso l'uso di Software.

Il percorso, infatti, permetterà la padronanza del Software tale da ottenere un disegno geometrico consapevole. Infatti l'orientamento del quaderno è indirizzato al fatto che, spesso, quando si lavora ad un disegno automatico non si conoscono le operazioni eseguite all'interno del Software. Siamo bravi ad ottenere disegni complessi, ma ci

chiediamo come avvengono i processi di base?

Il Software vuole raggiungere una posizione di rilevanza nel mondo del disegno digitale riportando alla mente del disegnatore alcune nozioni ormai sopraffatte dalla tecnologia. Questo è possibile mediante uno studio molto accurato di programmazione e di duro lavoro che muove e regola lo spirito del Software. Si desidera dare una guida a tutti coloro che si accostano al Disegno Automatico per un approccio corretto, e che desiderano conoscere un Cad realizzato in Italia senza librerie di terze parti.

Il lavoro risulterà diviso in due parti. Una prima parte dedicata allo studio delle entità di geometria attraverso il disegno tradizionale comparandolo con il disegno automatico.

Una seconda parte dedicata agli esercizi sul Software RilArch per vedere applicate le nozioni esposte e per mettere in evidenza le opportunità del disegno automatico che permette di visualizzare il disegno nella sua totalità spaziale, farlo ruotare in modo dinamico, modificare facilmente il disegno in ogni momento anche un attimo prima della stampa

Ogni disegno puo' essere richiamato in un altro, unendoli tra loro per realizzare disegni complessi.

Supporto cartaceo Fig. 1 e 2

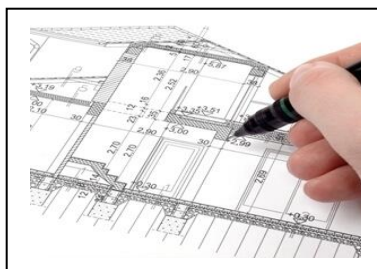


Fig.1



Fig.2

Sul supporto cartaceo i disegni vengono realizzati a mano, con l'ausilio di particolari strumentazioni come la matita, la riga, le squadre, la gomma ... ed in casi più professionali ci si serve del tecnigrafo, che permette uno spostamento più razionale sul piano.

Osserviamo, ancora, che l'uso della matita, il cui segno, lasciato su un supporto piano di qualsiasi materiale, dà la rappresentazione immediata e concreta di un oggetto pensato. In definitiva possiamo affermare che tra il pensare e il disegnare l'oggetto non si frappone nessun altro elemento che possa interromperne la continuità.

Ci si avvale della Geometria Descrittiva sul piano euclideo ampliato.

Gli argomenti fondamentali sono la doppia proiezione ortogonale e la prospettiva, strumenti importanti al fine di rappresentare nelle tre dimensioni, il mondo che ci circonda.

Supporto digitale Fig. 3



Fig.3

Con l'avvento delle nuove tecnologie, è nato un nuovo supporto bidimensionale che ha preso il nome di supporto digitale, pertanto, è bene ampliare le nostre visuali in merito alla possibilità di trasformare le regole note della rappresentazione su supporto cartaceo, in relazione ai nuovi supporti digitali.

Gli strumenti tradizionali, usati nel passato per disegnare sulla carta, nel PC sono sostituiti dal mouse, dalla penna ottica o dalla tavola grafica.

Questi costituiscono gli strumenti per disegnare su supporto digitale.

All'immediatezza della produzione del disegno su un supporto cartaceo, di primo acchito, vien da pensare che anche sul supporto digitale si possa avere lo stesso risultato in modo immediato. In effetti non è così, poiché fra i due supporti esiste una incompatibilità d'uso di grande rilevanza allorquando si vuole impropriamente disegnare sul video come se si lavorasse sulla carta.

Naturalmente anche il supporto digitale offre la possibilità di rappresentare sul monitor un elemento geometrico, o di altro genere, con l'impiego del mouse, ma dipendente dal Software intermediario. E' vero che il mouse consente di spostare l'indicatore posizionale (cursore) da un punto all'altro del video, dando l'impressione della operatività di una matita, ma può farlo perché aiutato - o meglio, guidato - da un "soggetto" intermediario idoneo a tradurre in segni, per mezzo di operazioni matematiche, quanto pensato dall'uomo e conservato nella memoria del PC. Di conseguenza la rappresentazione grafica non è frutto di un passaggio diretto, come nel caso dell'uso della matita, dal pensato all'immagine disegnata, ma viene mediata da un elaboratore elettronico che si interpone tra la mente umana e il mouse.

Gli utili elementi teorici di base sono differenti nei due modi di rappresentazione, anche quando si vuole rendere simili nell'uso il supporto digitale e quello cartaceo.

In definitiva, per quanto illustrato dettagliatamente in precedenza, è evidente che il disegno su supporto cartaceo si avvale della teoria della geometria proiettiva classica mongiana, basata sul piano euclideo ampliato, mentre il disegno su supporto digitale si avvale del piano euclideo ampliato con l'uso di coordinate omogenee e di vettori bi e tridimensionali, aventi cioè due o tre coordinate e due o tre componenti vettoriali.

Con l'uso dei due indici (i, j) indicanti rispettivamente la posizione orizzontale e la posizione verticale dei pixel, possiamo colorare tutti i pixel della finestra in modo

uniforme oppure accenderne alcuni con un determinato colore, come mostrano le figure sottostanti Fig.4 e 5.

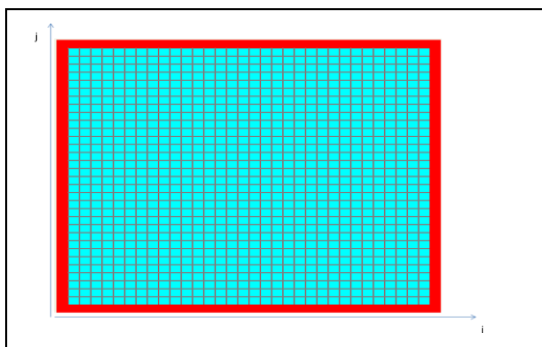


Fig.4

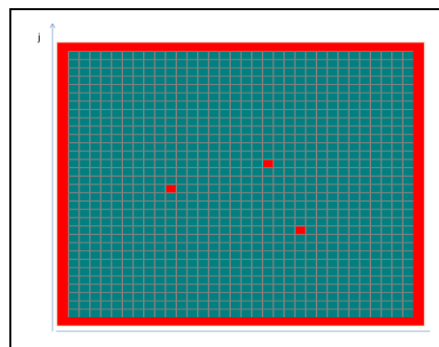


Fig.5

3. Interfaccia Grafica o Interfaccia Utente

L'interfaccia utente (dall'inglese *User Interface*) è un'interfaccia uomo macchina, ovvero ciò che si frappone tra una macchina e un utente, consentendone la reciproca interazione. In genere la interfaccia dedicata ad un programma di disegno automatico come il programma Rilarch è divisa in quattro parti.

Parte A=posta nella parte superiore del programma viene chiamata Barra degli strumenti Orizzontale.

In essa è possibile trovare il Menu File perché è preposta all'interazione con la gestione dei file come l'apertura, nuovo file, importa file, esporta file, etc. Su questa parte si possono trovare altre funzioni inerenti riguardanti le opzioni in generale, come il colore di fondo, il tipo di cursore, il tipo di linee, spessore...

Parte B=Barra degli strumenti Orizzontale posta a destra, in essa è possibile trovare tutti gli strumenti di disegno, come punto, linea nonché azioni come taglia, estendi....

Parte C= posta nella parte bassa, chiamata anche *barra di stato*, in essa sono riportate le coordinate nonché i suggerimenti da seguire per ogni azione di disegno, tipo: seleziona elemento, individua il punto di origine...

Parte D= posta a sinistra, dedicata alla gestione dei piani di disegno detti anche *Lajer*. Riteniamo sia importante non tralasciare la conoscenza delle parti principali che formano una interfaccia grafica, cominciando dalla **Barra di Stato**.

Nel disegno digitale è possibile rappresentare una Entità grafica non solo tramite l'uso del mouse, equivalente della matita, ma anche tramite l'uso di coordinate bi o tridimensionali.

E' importante illustrare questo aspetto ai discenti, in quanto sappiamo che istintivamente l'uso del mouse prevale su quello basato sulle introduzioni delle coordinate.

Molte volte, però, l'uso del mouse, non permette l'individuazione esatta della posizione di un punto salvo se non sia già presente un altro punto di coordinate note o in precedenza

Entità Geometriche rappresentate su Supporto Digitale tramite la Geometria Orientata

disegnato a cui il mouse si possa agganciare con gli strumenti di cattura. Per questo motivo un Software di Disegno Automatico possiede una barra di stato Fig. 6, in genere nella posizione inferiore in cui viene data la possibilità di introdurre dei valori numerici, tra cui anche le coordinate di un punto.

Barra di Stato



Fig.6

Le coordinate per convenzione sono introdotte secondo la **x**, la **y** e la **z**, separate tra loro da una virgola. Vengono introdotte dopo [**Comando:**] nella posizione in cui è possibile notare un cursore lampeggiante.

Esempio di Fig.6:

[**Comando:**] Punto: 0.2, 5.1, 7.1

Pertanto prima nozione fondamentale per l'uso di un CAD

“Le coordinate introdotte sono separate da una virgola”

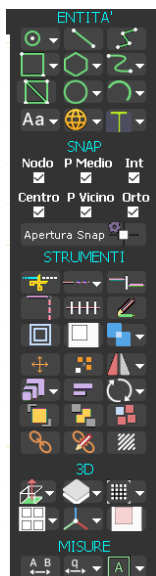
“Le coordinate decimali si rappresentano con un punto”.

Barra degli Strumenti Orizzontale



Fig.7

Nella Barra degli Strumenti Orizzontale è possibile trovare: i bottoni predisposti alla gestione dei File, la gestione delle proprietà delle Entità da Layer e le varie Opzioni.

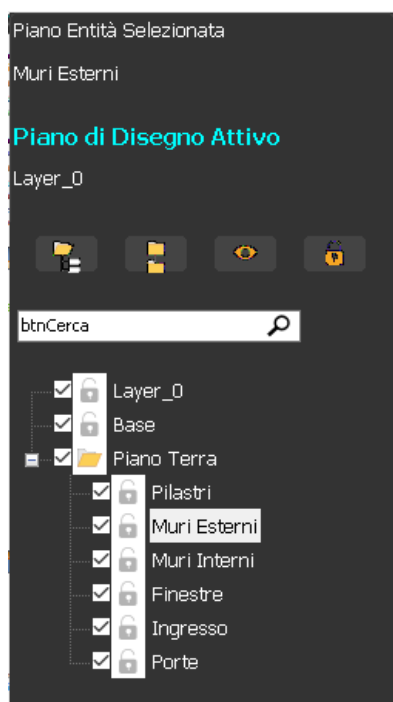


b

Nella Barra degli Strumenti Verticale è possibile trovare:

I bottoni predisposti al disegno delle Entità Grafiche, la possibilità di Attivare e Disattivare gli Strumenti di Cattura, tutte le Opzioni Inerenti la Modifica delle Entità Grafiche. Fig.8.

Figura 8



I Layer o Piani di Disegno rappresentano uno strumento indispensabile per la realizzazione di progetti complessi.

Il software RilArch gestisce i Piani di Disegno tramite un DataBase ad Albero in cui sono presenti Cartelle su cui non si può disegnare. Quaste, infatti, sono i raccoglitori dei cosiddetti Layer di Disegno su viene eseguito il Disegno.

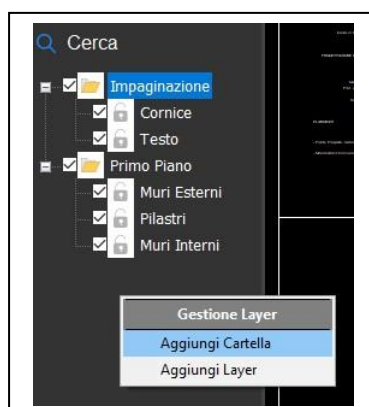
La Cartelle, a loro volta, possono contenere altre Cartelle.

In tal modo è possibile gestire un Progetto Complesso tenendo sotto controllo ogni parte di esso.

Le Cartelle ed i Layer in esse contenute possono essere accese o spente così da mostrare solo le parti da esaminare in quel momento. Fig.9.

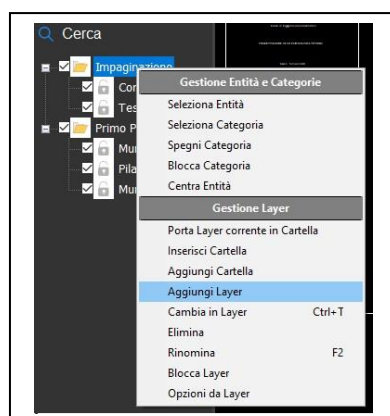
Fig.9

La Cartelle ed i Layer sono gestite da due tipi di Menù a tendina:



Il primo permette la creazione di Cartelle e Layer di Disegno direttamente sul Livello "0". Fig. 10

Fig.10



Il secondo permette la creazione di Cartelle e Layer di Disegno su Cartelle già esistenti sul Livello "0" e quindi appartenenti ai Livelli successivi, Livello "1", Livello "2" etc. Fig. 11

Fig.11

4. Entità

Il Punto

Su un supporto cartaceo istintivamente siamo portati a rappresentare un punto anche senza l'ausilio di un piano cartesiano, come mostra la figura Fig.12.



Fig.12

L'entità è così piccola che quando la si disegna non si riesce ad individuarla e si è portati, in qualche modo spontaneo ad ingrandirlo disegnandoci intorno fino ad ottenere un cerchietto ben visibile.

L'entità più piccola che incontriamo in un programma di disegno automatico è il Pixel, informe e così piccolo che quando lo si disegna sul video spesso non si riesce ad individuarlo.

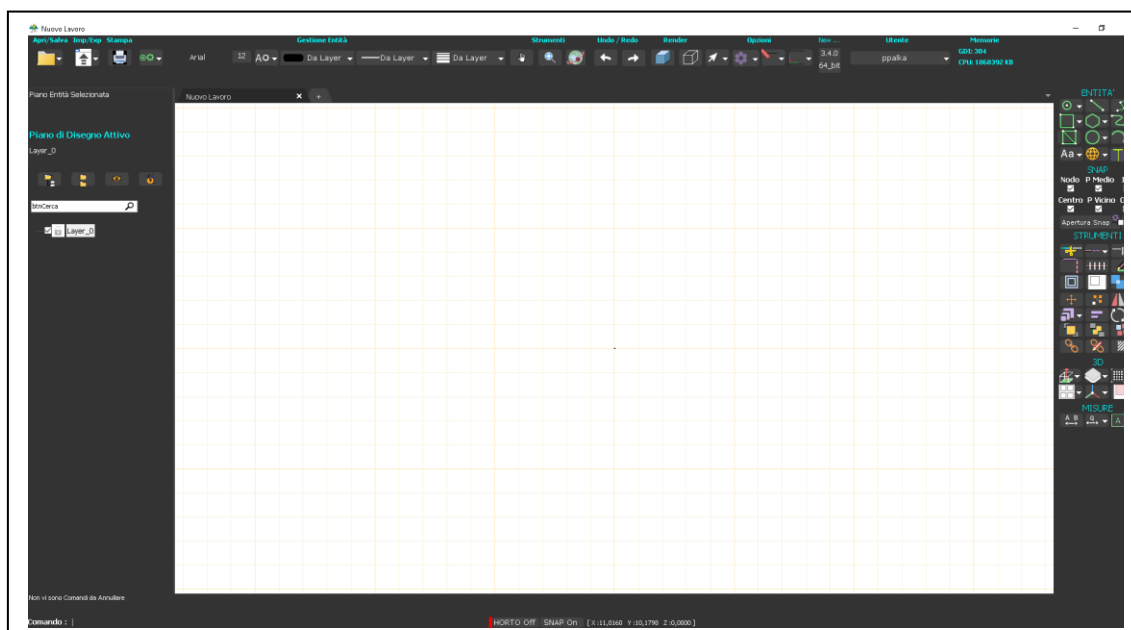


Fig.13

Per poter visualizzare un punto occorre dargli una forma, per far ciò occorre scrivere appositamente un algoritmo che regoli tale forma.

Tale algoritmo si basa sulla conoscenza della posizione del Pixel espressa dalle coordinate

Pierpaolo Palka, Eula Grilli, Vincenzo Romaguolo, Vincenzo Tartaglia

x, y individuate dalla posizione del mouse ed è possibile disegnare un segmento orizzontale partendo dal valore x decrementato di una quantità nota che chiameremo GP (grandezza punto) fino al punto ottenuto incrementando la x della quantità GP.

Il segmento orizzontale sarà dunque formato dai punti P1 (x - GP, y) e P2 (x + GP, y).

Successivamente si effettua lo stesso procedimento per la y ottenendo così la forma desiderata.

Nel nostro caso una croce.

Al variare di tale algoritmo è possibile ottenere qualsiasi forma.

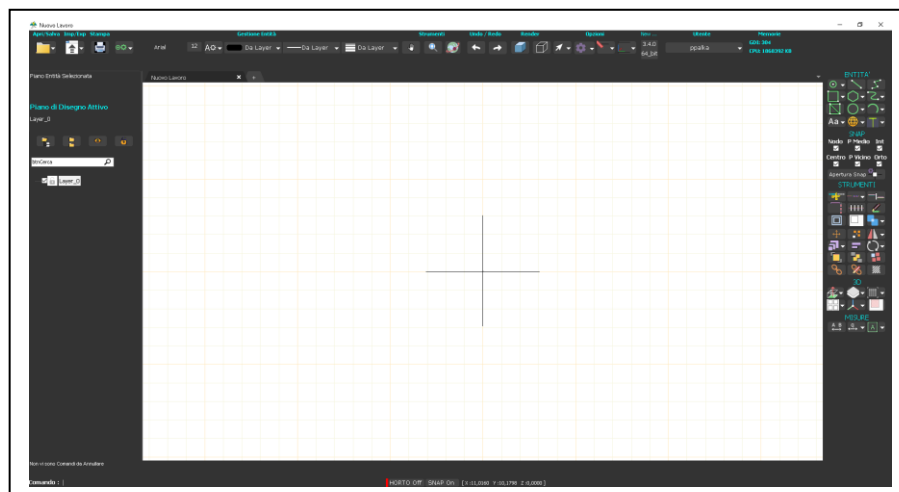


Fig.14

IL SEGMENTO RETTILINEO

La Prospettiva Classica



Fig.15

Visitando una città, percorrendone un lungo corso o semplicemente passeggiando lungo le sue vie costellate di edifici a latere e di diverse altezze, ci è facile notare che essi sembrano rimpicciolire le loro dimensioni man mano che ci allontaniamo col nostro punto di vista.

Le linee che caratterizzano la orizzontalità, come ad esempio, quelle dei balconi o delle coperture

finali convergono in punti molto lontani rispetto al punto di vista.

Entità Geometriche rappresentate su Supporto Digitale tramite la Geometria Orientata

Naturalmente, secondo la posizione dell'osservatore, con il suo punto di vista, è possibile ottenere uno, due o tre punti di fuga in grado di individuare una due o tre direzioni. Ed è importante notare ancora che il fascio di rette che investe l'oggetto osservato forma un cono visivo con vertice l'occhio.

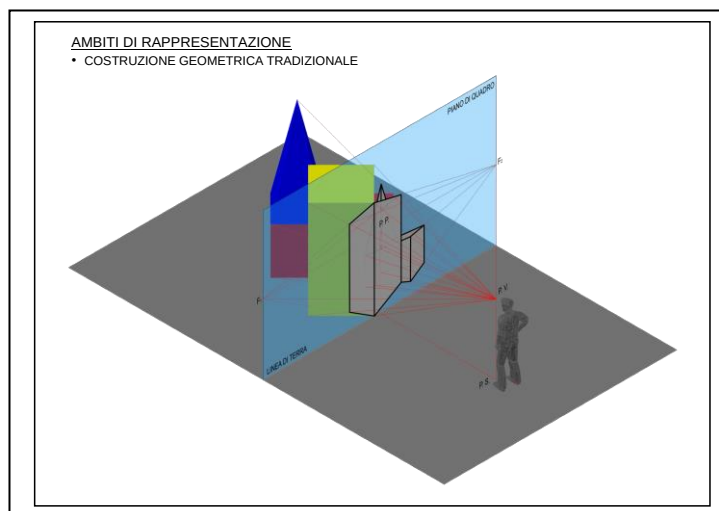


Fig.16

Animazione sul supporto cartaceo

Un supporto cartaceo non è dinamico ciò implica che per vedere un oggetto da più punti di vista occorre seguire più disegni. Per realizzare un movimento su un supporto cartaceo occorre far scorrere velocemente i vari disegni.

Esempio:

Prendiamo un notes cartaceo, pensiamo ad un soggetto o oggetto da disegnare, esempio desidero vedere un cubo che ruota

Sulla prima pagina disegniamo la prima posizione del cubo con la matita. Così via via ridisegniamo le varie posizioni del cubo per tanti fogli. Quando andremo a sfogliare velocemente le pagine, i cambiamenti del cubo appariranno come movimenti veloci.

Possiamo concludere che, poiché il supporto cartaceo può contenere un solo disegno alla volta non è possibile ottenere una vista dinamica, pertanto esso sarà contemplato come un supporto statico.

Altro esempio che potrebbe avvicinarci alla comprensione di una vista dinamica con un solo supporto è l'animazione prismatica in cui con un solo supporto è possibile vedere i movimenti dell'oggetto inclinando leggermente il supporto stesso secondo 2 inclinazioni

Animazione sul supporto digitale

Consideriamo il supporto digitale, abbiamo detto che esso è composto da Pixel che

possono essere accesi e spenti per poter ottenere un disegno.

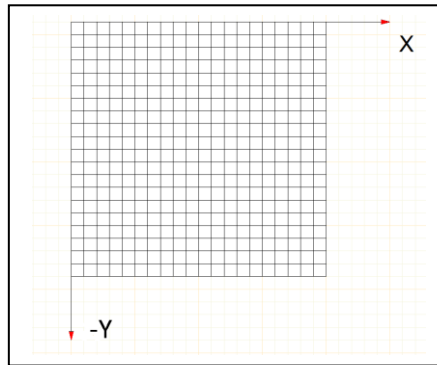


Fig.17

Supponiamo di disegnare un quadrato su di esso

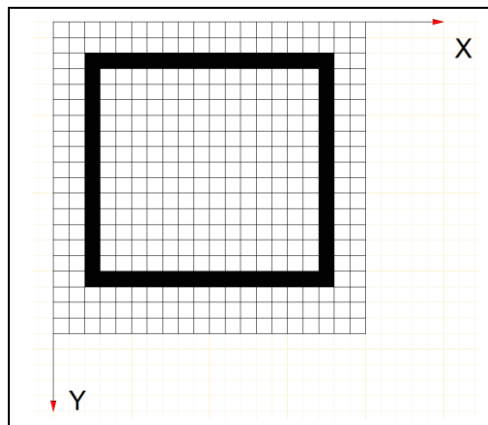


Fig.18

E' possibile notare come il disegno sia il risultato dei Pixel accesi, in questo caso colorati di nero.

Nel disegno i Pixel sono rappresentati da quadratini grandi, ma nella realtà essi sono infinitesimi. Questo è il motivo per cui vedremo alcune entità rappresentate da linee frastagliate.

Esso è caratterizzato dal fatto che puo' essere affiancato ad un banco di memoria da cui attingere piu' figure. Successivamente è possibile mostrare le figure memorizzate una dietro l'altra grazie al ad un refresh del supporto che è cosi' in grado di mostrare una figura dietro l'altra, come ad esempio le insegne luminose delle farmacie.

Per poter ottenere quanto detto occorre che avvengano due cose:

che il supporto digitale, per ciascun Pixel, oltre alle coordinate xy sia dotato anche della z.

Introduzione di operazioni matriciali per ottenere i cambiamenti di posizione dell'oggetto.

E' bene spiegare in che modo si disegnano i segmenti rettilinei su supporto digitali. Immaginiamo di ruotare il suddetto quadrato tramite operazioni matriciali, il risultato che

otteniamo è il seguente e notiamo, per quanto detto prima, come le linee sembrano quasi disegnate in modo casuale.

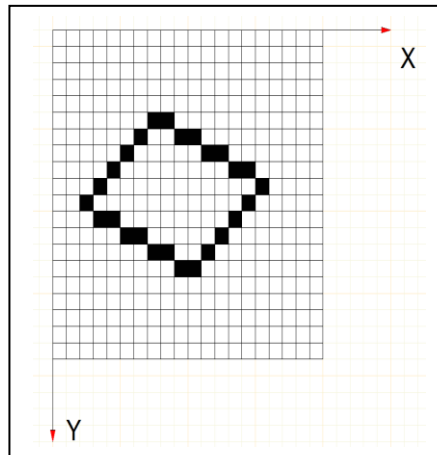


Fig.19

Con quanto esposto è possibile realizzare un Software tipo Paint completamente in 2D il cui funzionamento è basato sulla colorazione dei Pixel tramite le procedure di Scan Conversion.

Cosa sono gli Scan Conversione? Riportiamo la procedura di Bresenham.

Algoritmo della linea di Bresenham

Permette di rappresentare l'equazione di una retta tramite il riempimento dei Pixel coinvolti secondo un certo criterio, tenendo conto se l'inclinazione della retta supera i 45 gradi oppure è inferiore

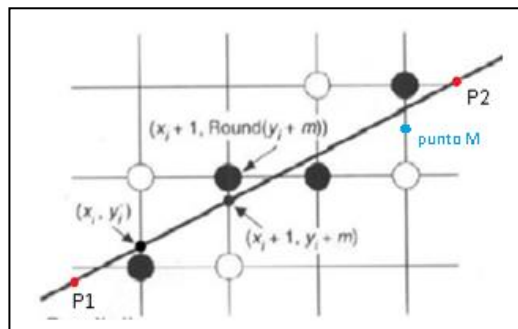


Fig.20

Consideriamo la figura e immaginiamo di disegnare un segmento rettilineo da P1 a P2, questa attraverserà la griglia di Pixel in punti (x_i, y_i) generici che possono trovarsi sotto o sopra il Punto Medio (M) della maglia della griglia a maglia quadrata.

Se la retta si trova sotto il punto medio della maglia che attraversa, si colorerà quel Pixel avente il punto in basso a sinistra, come da Fig.21, Fig.22, Fig. 23.

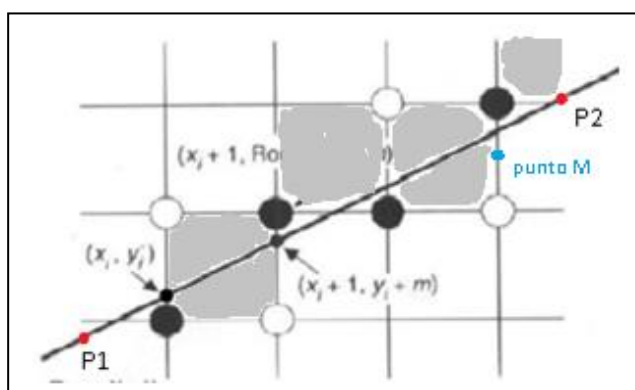


Fig.21

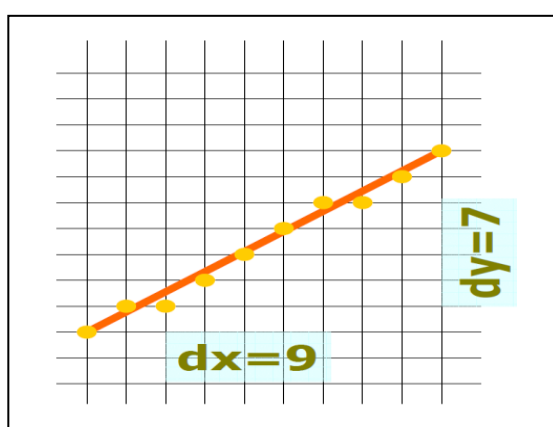


Fig.22

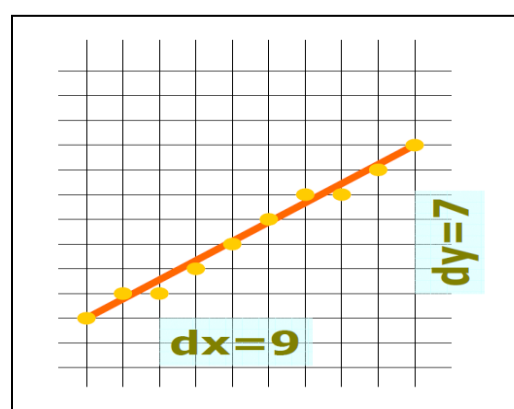


Fig.23

Allo stesso modo è possibile rappresentare l'equazione di una circonferenza secondo uno Scan Conversion come nella retta, Fig.24.

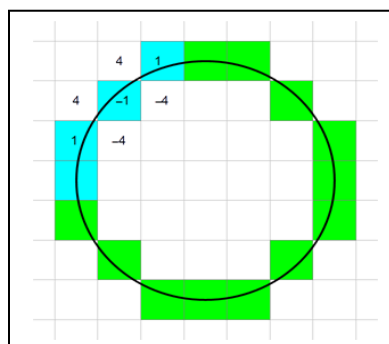


Fig.24

Allo stesso modo è possibile rappresentare l'equazione di una ellisse secondo uno Scan Conversion come fatto nella retta in precedenza, Fig.25

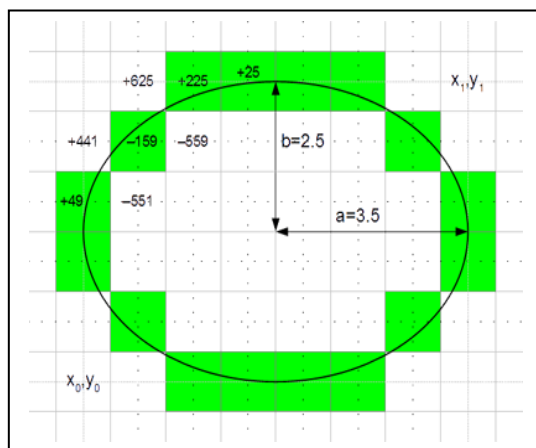


Fig.25

Allo stesso modo è possibile rappresentare l'equazione di un arco di circonferenza o di ellisse secondo uno Scan Conversion come abbiamo fatto in precedenza, Fig.26.

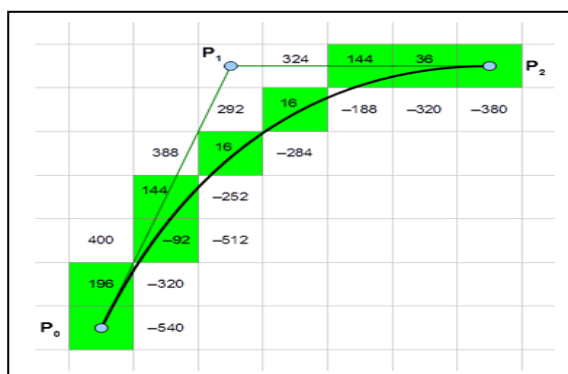


Fig.26

Dalla nostra esperienza risulta conveniente rappresentare i poligoni curvi soprattutto nelle 3 dimensioni, tramite segmenti rettilinei infinitesimi, Fig.27.

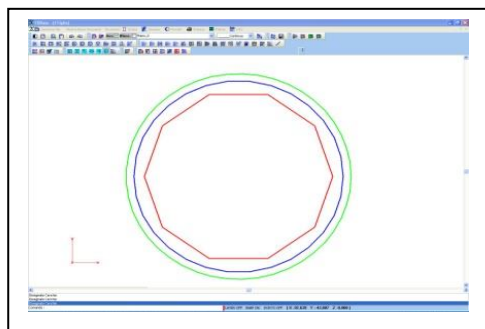


Fig.27

Infatti nei vari tipi di trasformazioni si dimostra che il segmento rettilineo rimane un segmento rettilineo.

5. Non solo Mouse

A differenza del disegno sul supporto cartaceo, in cui la rappresentazione avviene direttamente tra il pensiero ed il supporto attraverso l'uso di una matita, nel disegno digitale è possibile rappresentare un segmento rettilineo non solo tramite l'uso del mouse, equivalente della matita, ma anche tramite l'uso di coordinate bi o tridimensionali. E' importante illustrare questo aspetto ai discenti, in quanto sappiamo che istintivamente l'uso del mouse prevale su quello basato sulle introduzioni delle coordinate. Molte volte, l'uso del mouse, non permette l'individuazione esatta della posizione di un punto salvo se non sia già presente un altro punto di coordinate note o in precedenza disegnato a cui il mouse si possa agganciare. Per questo motivo un Software di Disegno Automatico possiede una barra di stato, in genere nella posizione inferiore in cui viene data la possibilità di introdurre dei valori numerici tra cui anche le coordinate di un punto. Così è stato realizzato per la Scuola Comprensivo 6 di Pescara.

Dopo aver avviato il Software è stato detto ai ragazzi di non toccare il mouse, ma di usare solo la tastiera. Prima, però, su un supporto cartaceo è stato detto loro di disegnare due punti, uno nell'origine $P(0,0,0)$ ed un altro sempre sull'origine, ma ad una altezza di 5 metri in z.

A questo punto, quasi tutti hanno esclamato "Ma come si fa, non si vede la differenza di posizione dei punti, sono di fatto uno sopra l'altro!". Allora è stato detto loro di ruotare il supporto cartaceo così da poter vedere i punti distanziati tra loro nello spazio. Ovviamente qualcuno ha risposto subito "prof. ci sta prendendo in giro?". Come risposta è stato chiesto ai ragazzi di tornare sul Software di Disegno Automatico, già avviato, facendo digitare i comandi relativi alle entità da disegnare. Nel nostro caso il punto, digitando il comando '**Dot**' a cui segue la risposta del Software che chiede dove posizionare il Punto tramite la barra dei comandi illustrati precedentemente, mostrando:

Comando: Punto In

e ciascun studente ha risposto con l'introduzione delle coordinate relative secondo il format illustrato in precedenza:

Comando: Punto In 0,0,0

e premendo successivamente il tasto invio, ottenendo la situazione seguente:

Entità Geometriche rappresentate su Supporto Digitale tramite la Geometria Orientata

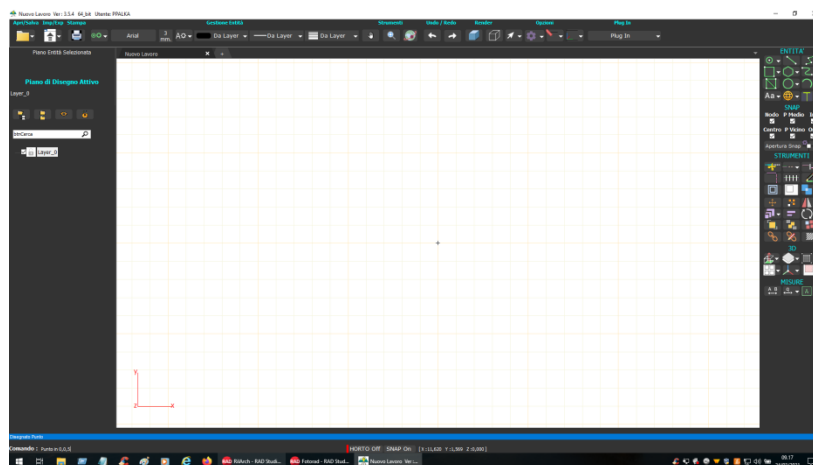


Fig.28

Successivamente è stato fatto introdurre un secondo punto di coordinate P2(0,0,5) seguendo la stessa procedura precedente, ottenendo il risultato seguente:

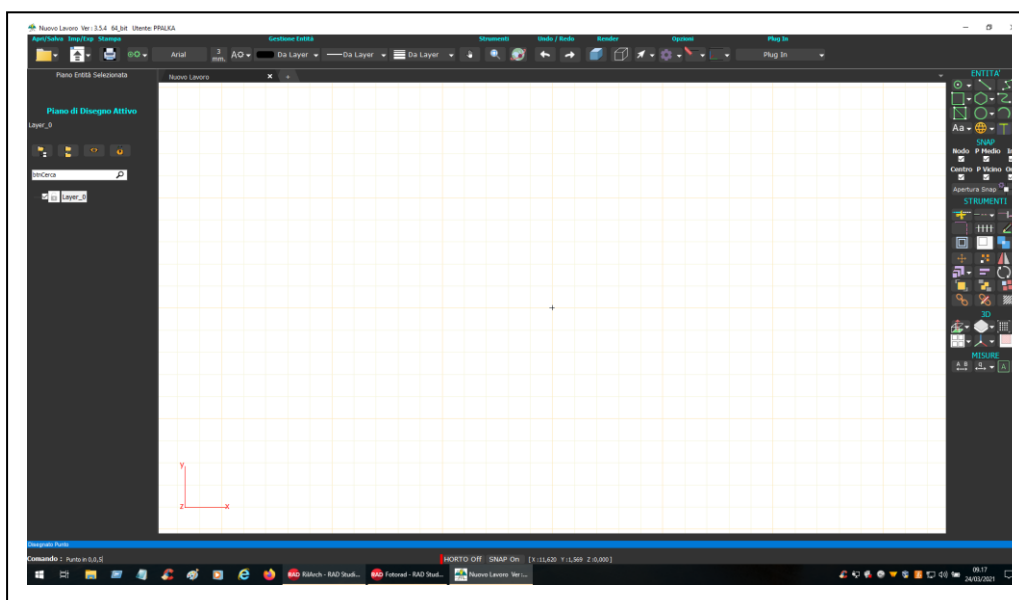


Fig.29

Alla cui vista hanno tutti di nuovo esclamato ‘prof. ma non è successo niente!’. Allora è stato detto loro di poter usare il mouse nel modo in cui veniva loro illustrato, cioè premendo nella barra degli strumenti un tasto che permetteva la visualizzazione 3d del disegno eseguito in precedenza. E con grande stupore hanno potuto vedere, dinamicamente, i due punti apparentemente sovrapposti, nella loro posizione spaziale. Ed in questo modo è stato fatto comprendere la differenza sostanziale che intercorre tra il supporto cartaceo e quello digitale.

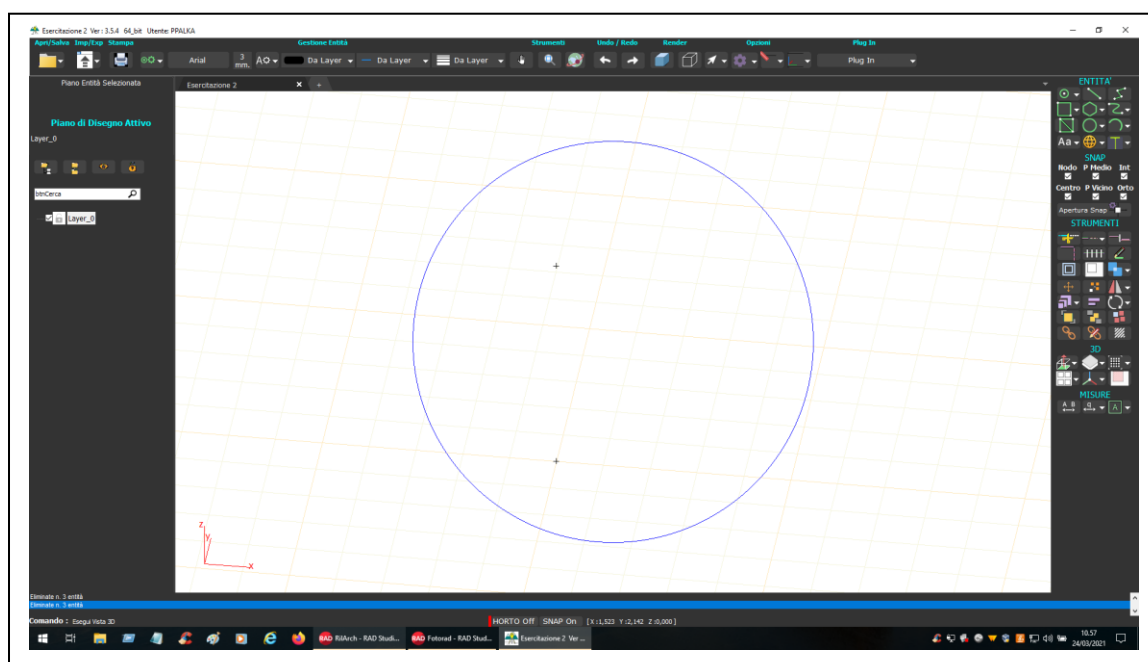


Fig.30

Successivamente è stato detto loro di continuare a posizionare altri punti così da ottenere un cubo di lato 5 metri con una piramide in cima e, con grande stupore nostro, la maggioranza in breve tempo è arrivata a risultato mostrato in Fig.31

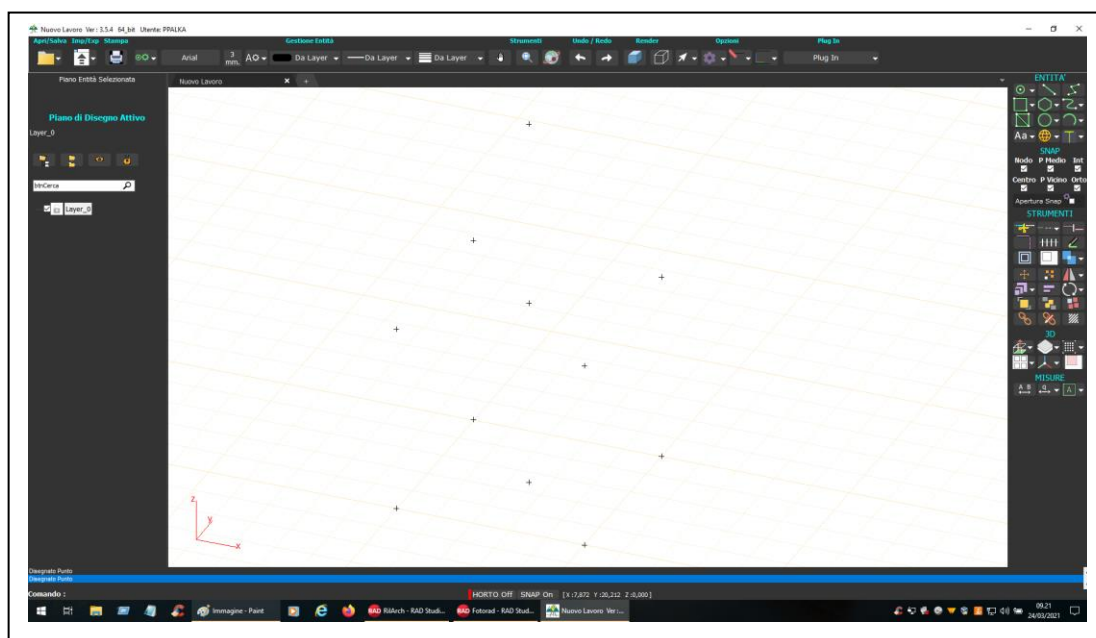


Fig.31

Era d'obbligo, a questo punto, mostrare qualcosa di meno faticoso e più accattivante, è stato mostrato anche come disegnare le facce del cubo unendo i punti suddetti con con una polilinea. Fig.32.

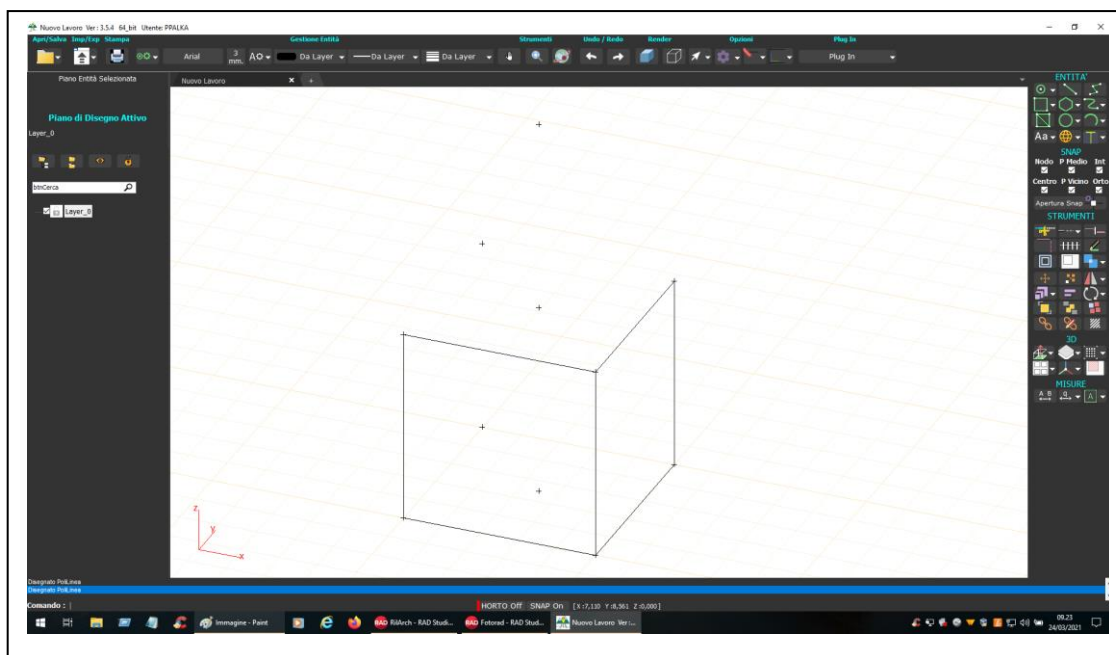


Fig.32

Infine è stato mostrato loro la possibilità di ottenere delle ombreggiature per visualizzare in maniera più elegante il solido ottenuto. Fig.33

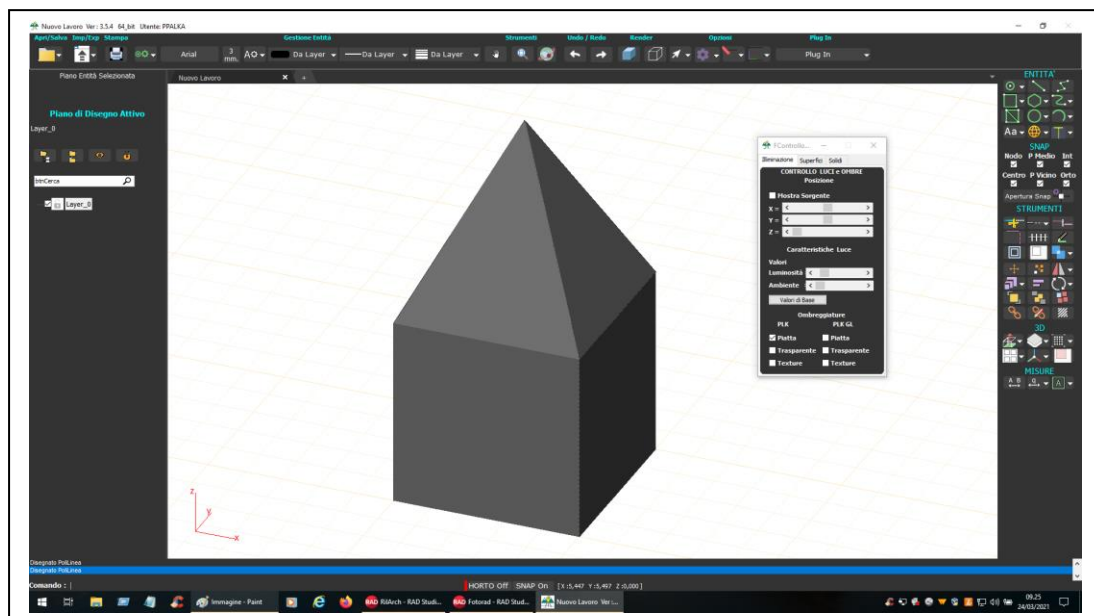


Fig.33

Grande è stato lo stupore degli studenti, e grande è stato anche il nostro stupore quando qualcuno ci ha chiesto: “prof. come è riuscito ad ottenere tutto ciò? Lo insegna anche a noi?”

6. Conclusione

Al termine di questa interessante esperienza abbiamo relazionato i punti di forza del nostro progetto che è stato accolto dalla Preside, dell'Istituto Comprensivo Pescara 6, a braccia aperte, dando prova di gestire una Scuola fortemente orientata verso il futuro. L'istituto ha lavorato con intensità attraverso i Docenti e la curiosità degli alunni ha reso il lavoro caratteristicamente entusiasmante.

Il risultato finale è stato anche un effetto positivo sul piano delle motivazioni e stimoli, i ragazzi hanno dimostrato dimestichezza con il Software utilizzandolo anche come mezzo di comunicazione tra loro nel risolvere ad aiutarsi nelle difficoltà.

Bibliografia

- 1- M. Docci, R. Migliari, Scienza della Rappresentazione. Fondamenti e Applicazioni della geometria descrittiva, Roma: La Nuova Italia, 1992
- 2- Storia di Fotorad - Aracne Editrice, 2012.
- 3- P. Palka, E. Cavallini, Informatica applicata al Disegno Automatico, Aracne Editrice, 2013.
- 4- Steven Harrington, Computer Graphics, Mc Graw Hill, 1987.
- 5- Rogers, Adams, Mathematical Elements for Computer Graphics, 1990.
- 6- Leendert Ammeraal, Programmazione Grafica in c++. Tecniche Nuove, 1993.

Sviluppi e metodi asintotici

Andrea Laforgia

Dipartimento di Matematica e Fisica, Largo San Leonardo Murialdo1, 00146 ROMA
email: laforgia@mat.uniroma3.it

Sunto

Il presente lavoro è puramente espositivo. Esso contiene elementi introduttivi di Analisi asintotica. Molte proprietà delle Funzioni speciali possono essere stabilite con l'ausilio di tecniche che si fondano su risultati dell'Analisi asintotica. In particolare sono di fondamentale importanza gli sviluppi asintotici dei polinomi ortogonali e dei loro zeri e delle funzioni di Bessel di prima e seconda specie e dei loro zeri che trovano riferimento in numerosi settori applicativi della Matematica e della Fisica. Qui citiamo a titolo di esempio, fenomeni di *scattering* (lavoro con Elbert citato in Bibliografia) e fenomeni relativi a gas ideali, (lavoro con Natalini in Bibliografia). In quest'ultimo lavoro il lettore può trovare una bibliografia vasta, ma non certo esaustiva dei possibili ambiti di applicazione.

Parole Chiave: metodi asintotici, analisi asintotica, funzioni di Bessel, funzione gamma, polinomi ortogonali, zeri.

1. Introduzione

L'*analisi asintotica* è l'arte di trovare una funzione semplice che sia una buona approssimazione di una data funzione complicata, con una precisione crescente, via via che l'argomento della funzione data si comporta in un modo prestabilito. L'analisi asintotica è un settore della matematica in cui l'intuizione e l'esperienza giocano un ruolo determinante. Ogni problema, infatti, va esaminato per proprio conto e nessun risultato può ottenersi come applicazione di teoremi generali. Chiariamo le idee risolvendo un problema preciso.

Si consideri la seguente funzione

$$(1) \quad f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}.$$

Siamo interessati al comportamento di $f(x)$ per $x \rightarrow \infty$. La cosa più semplice che possiamo affermare è che $f(x) \rightarrow \infty$ per $x \rightarrow \infty$. Un'ulteriore questione è: in che modo $f(x) \rightarrow \infty$. Lo fa come e^x ? Oppure come $\log x$? O ancora come $x^{1/2}$?

La risposta, nel nostro caso specifico, è molto semplice. La funzione $f(x)$ tende all'infinito come x . Ma allora è lecito chiedersi: come si comporta $f(x) - x$, per $x \rightarrow \infty$? Per rispondere a queste questioni scriviamo

$$\begin{aligned} (2) \quad f(x) &= \frac{1+x^2}{1+x} = \frac{1+x^2}{x} \cdot \frac{x}{1+x} = \frac{1+x^2}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \\ &= \frac{1+x^2}{x} \left\{ 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \dots \right\} = \left(x + \frac{1}{x} \right) \left\{ 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \dots \right\} = \\ &= x - 1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \dots \end{aligned}$$

Da questo sviluppo, che converge per $|x| > 1$, si vede che $f(x) - x$ è limitato per $x \rightarrow \infty$ e che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x] = -1.$$

Chiaramente si può chiedere il comportamento di $f(x) - x + 1$. La (2) ci dice subito che $f(x) - x + 1$ si comporta come $\frac{2}{x}$ per $x \rightarrow \infty$. Questa richiesta può continuarsi indefinitamente; ogni questione trova comunque risposta tramite la (2). La (2) perciò è tanto uno sviluppo convergente di $f(x)$ per $|x| > 1$, quanto uno *sviluppo asintotico* di $f(x)$ per alti valori di x , intendendo con questo che la successione di informazioni prima richieste riceve risposta da un esame della serie (2). Daremo una definizione rigorosa di sviluppo asintotico nel paragrafo successivo.

La (2), utile per ottenere informazioni sul comportamento di $f(x)$, per $x \rightarrow \infty$, è comunque inutile per fornire informazioni per $x \rightarrow 0$. In questo caso conviene operare come segue:

$$(3) \quad f(x) = \frac{1+x^2}{1+x} = (1+x^2)(1-x+x^2-\dots) = 1-x+2x^2-2x^3+\dots$$

La (3) fornisce uno sviluppo convergente e asintotico in un intorno di $x = 0$.

Esaminiamo ora un caso più complesso. Sia

$$(4) \quad f(N) = \sum_{n=1}^N \cos(\log n)$$

e chiediamoci come si comporta $f(N)$ per $N \rightarrow \infty$. Una semplice informazione si ha dalla disuguaglianza

$$(5) \quad |f(N)| \leq \sum_{n=1}^N |\cos(\log n)| \leq N$$

da cui si ricava che $f(N)$ non cresce più velocemente di N . Comunque, l'uso del valore assoluto ha distrutto la delicatezza del problema (4), poiché si è impedita la cancellazione tra i termini della (4) dovuta ai cambiamenti di segno del coseno. Non è chiaro nemmeno se $f(N) \rightarrow \infty$ per $N \rightarrow \infty$ e, se ciò accade, se tende all'infinito come $N^{1/2}$, $N^{1/5}$, $\log N$, ecc. Inoltre, a differenza del caso precedente, non abbiamo uno sviluppo asintotico come quello della (2), anzi non conosciamo neppure il primo termine dello sviluppo.

2. Definizioni rigorose

I concetti che abbiamo illustrato intuitivamente nell'introduzione possono essere precisati per mezzo delle definizioni che ora formalmente daremo.

Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni date, $g(x)$ continua, e sia x_0 un punto fissato. Diciamo che $f(x)$ è un "O grande di $g(x)$, per $x \rightarrow x_0$ " e scriviamo

$$f(x) = O(g(x)), x \rightarrow x_0$$

se esiste una costante A , tale che

$$|f(x)| \leq A|g(x)|$$

per ogni valore di x in un certo intorno di x_0 .

Diciamo che $f(x)$ è un "o piccolo di $g(x)$, per $x \rightarrow x_0$ " e scriviamo

$$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$$

se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Diciamo infine che " $f(x)$ è asintoticamente equivalente a $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ " e scriviamo

$$f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$$

se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Nella definizione di O , se x_0 coincide con ∞ , allora l'espressione "in un certo intorno di x_0 " va sostituita con "per ogni x sufficientemente alto". In alcuni casi accade che, anziché $x \rightarrow x_0$, occorre considerare $x \rightarrow x_0^+$. In tali circostanze le definizioni si modificano in modo naturale.

Vediamo ora di spiegare, con parole semplici, il significato dei simboli ora definiti.

- a) $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow x_0$, significa che $f(x)$ non cresce più velocemente di $g(x)$, per $x \rightarrow x_0$;
- b) $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow x_0$, significa che $f(x)$ cresce più lentamente di $g(x)$, per $x \rightarrow x_0$;
- c) $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow x_0$, significa che $f(x)$ e $g(x)$ crescono con la stessa velocità per $x \rightarrow x_0$.

Le relazioni

$$f(x) = g(x) + O(h(x)), x \rightarrow x_0$$

$$f(x) = g(x) + o(h(x)), x \rightarrow x_0$$

significano, rispettivamente,

$$f(x) - g(x) = O(h(x)), x \rightarrow x_0$$

$$f(x) - g(x) = o(h(x)), x \rightarrow x_0.$$

Prima di procedere nella trattazione, riteniamo utile riportare alcuni risultati relativi ai simboli introdotti. Il lettore dovrebbe verificare ciascuno di essi, servendosi delle definizioni rigorose date sopra.

$$\sin x = O(1), \quad x \rightarrow \infty$$

$$(1+x^2)^{-1} = o(1), \quad x \rightarrow \infty$$

$$(1+x^2)^{-1} = o(x^{-1}), \quad x \rightarrow \infty$$

$$(1+x^2)^{-1} = O(x^{-2}), \quad x \rightarrow \infty$$

$$(1+x^2)^{-1} \sim x^{-2}, \quad x \rightarrow \infty$$

$$(1+x^2)^{-1} = x^{-2} + o(x^{-2}), \quad x \rightarrow \infty$$

$$(1+x^2)^{-1} = x^{-2} + o(x^{-3}), \quad x \rightarrow \infty$$

Sviluppi e metodi asintotici

$$(1+x^2)^{-1} = x^{-2} + O(x^{-4}), \quad x \rightarrow \infty$$

$$(1+x^2)^{-1} = x^{-2} - x^{-4} + O(x^{-6}), \quad x \rightarrow \infty$$

$$\frac{n}{n+1} \sim 1, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sin x \sim x, \quad x \rightarrow 0$$

$$\cos x = 1 + O(x^{-2}), \quad x \rightarrow 0$$

$$\sqrt{n^2 + 1} \sim n, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sqrt{n^2 + 1} = n + o(1), \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sqrt{n^2 + 1} = n + O(n^{-1}), \quad n \rightarrow \infty$$

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n = O(n!), \quad n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = O((1-x)^{-1}), \quad x \rightarrow 1^-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} x^n = O((1-x)^{-\alpha}), \quad x \rightarrow 1^-$$

$$\int_2^x \frac{dy}{y} = O(\log(x)), \quad x \rightarrow \infty$$

$$\int_0^{\pi} e^{-x^4} \sin nx \, dx = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Dalle definizioni date si ricava inoltre che $f(x) = O(1)$, $x \rightarrow x_0$, significa semplicemente che $f(x)$ è limitata; $f(x) = o(1)$, $x \rightarrow x_0$, significa che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. Inoltre, non ha alcun

significato aggiungere alla destra del simbolo $\sim$ un termine dominato da un altro termine che è già presente. Per esempio,

$$f(x) \sim x + x^{1/7}, \quad x \rightarrow \infty$$

non è diverso da

$$f(x) \sim x, x \rightarrow \infty.$$

Osserviamo, infine, la seguente proprietà di notevole significato. E' possibile che si abbia

$$f(x) = O(x^{\alpha + \varepsilon}), x \rightarrow \infty$$

per ogni $\varepsilon > 0$, senza che si abbia $f(x) = O(x^\alpha), x \rightarrow \infty$. Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$

$$x^{1/2} \log x = O(x^{1/2} x^\varepsilon) \neq O(x^{1/2}), x \rightarrow \infty.$$

3. Successioni e serie asintotiche

In questo paragrafo definiamo *le successioni e le serie asintotiche*. Sia $\Phi_0(x), \Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots$ una successione di funzioni continue e sia x_0 un punto fissato. Diciamo che $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ è una *successione asintotica* per x_0 se per ciascun n fissato, abbiamo

$$(6) \quad \Phi_{n+1}(x) = o(\Phi_n(x)), x \rightarrow x_0.$$

Per esempio, la successione

$$1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots$$

è asintotica per ∞ .

Sia ora $f(x)$ una funzione data e sia $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ una successione asintotica per x_0 . La serie

$$(7) \quad a_0 \Phi_0(x) + a_1 \Phi_1(x) + \dots$$

è detta *serie asintotica* per $f(x)$, in x_0 , se per ciascun n intero fissato risulta

$$(8) \quad f(x) = a_0 \Phi_0(x) + a_1 \Phi_1(x) + \dots + a_n \Phi_n(x) + o(\Phi_n(x)), x \rightarrow x_0.$$

La scrittura

$$(9) \quad f(x) \approx \sum_{i=0}^{\infty} a_i \Phi_i(x), x \rightarrow x_0$$

significa che la serie a destra è una serie asintotica, nel senso della (8).

Sviluppi e metodi asintotici

Una serie asintotica non è necessariamente convergente. Anzi, i casi più interessanti di serie asintotiche sono quelli in cui manca la convergenza. Di conseguenza la serie nella (9) non fornisce, fissato un qualsiasi valore di x , il valore esatto di $f(x)$. Comunque le serie asintotiche sono estremamente utili per ottenere un valore approssimato di $f(x)$ perché, in generale, i primi termini decrescono molto rapidamente e, inoltre, tanto più rapidamente, quanto più x è vicino a x_0 . In alcuni casi, pochi termini forniscono una straordinaria precisione.

La serie (2) relativa alla funzione $\frac{1+x^2}{1+x}$ è asintotica, ma anche convergente. L'esempio che segue mostra che effettivamente una serie asintotica può divergere.

Consideriamo la funzione

$$(10) \quad f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{x+t} dt.$$

Vogliamo trovare una serie asintotica per $f(x)$, con $x \rightarrow \infty$. Integrando per parti, abbiamo

$$(11) \quad f(x) = \frac{1}{x} - \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$$

e dopo n integrazioni per parti

$$(12) \quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} + (-1)^{n+1} (n+1)! \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(x+t)^{n+2}} dt.$$

Denotiamo con $r_n(x)$ l'ultimo addendo, cioè il *resto*:

$$(13) \quad r_n(x) = (-1)^{n+1} (n+1)! \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(x+t)^{n+2}} dt.$$

Abbiamo allora

$$(14) \quad |r_n(x)| = (n+1)! \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(x+t)^{n+2}} dt = \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} \int_0^\infty \frac{e^{-xy}}{(1+y)^{n+2}} dy \leq \\ \leq \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} \int_0^\infty e^{-xy} dy = \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$$

I calcoli eseguiti e la maggiorazione del resto fornita dalla (14) mostrano che i primi n termini della (12) forniscono un'approssimazione di $f(x)$ con un resto che è o dell'ultimo termine, quindi proprio ciò che la definizione (8) richiede. Possiamo dunque scrivere

$$(15) \quad f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{x+t} dt \approx \sum_{i=0}^\infty (-1)^i \frac{i!}{x^{i+1}}, x \rightarrow \infty.$$

La (14) fornisce comunque ulteriori informazioni. La maggiorazione ottenuta, infatti, mostra che l'errore commesso dopo n termini è, in valore assoluto, minore del primo termine trascurato. Osserviamo che la serie nella (15) non converge per nessun valore finito di x .

Per verificarlo osserviamo che, se x è fissato, l' i -esimo termine è ottenuto (a parte il segno) dal precedente moltiplicato per $\frac{i}{x}$. Pertanto i termini decrescono fino a che $\frac{i}{x} < 1$, cioè fintanto che $i < x$, ma per $i > x$ essi crescono rapidamente. Osserviamo che usando soltanto il primo termine della serie (15) l'errore commesso è dell'ordine di x^{-2} che, quando x è grande, è senz'altro accettabile ed è certamente preferibile a valutazioni numeriche basate sul calcolo approssimato dell'integrale (10).

Vediamo ora un'altra applicazione. Consideriamo la funzione esponenziale reale $E_i(x)$, dove x è reale e positivo, definita da

$$(16) \quad E_i(x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{-1} dt$$

e cerchiamone una valutazione approssimata, utile per valori alti della variabile x . Integrando per parti otteniamo

$$E_i(x) = -\frac{e^{-t}}{t} \Big|_x^\infty - \int_x^\infty e^{-t} t^{-2} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^\infty e^{-t} t^{-2} dt.$$

Dopo successive integrazioni per parti, ricaviamo

$$(17) \quad \begin{aligned} E_i(x) &= \frac{e^{-x}}{x} + \frac{e^{-t}}{t^2} \Big|_x^\infty + 2 \int_x^\infty e^{-t} t^{-3} dt = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + \frac{2!e^{-x}}{x^3} - \frac{3!e^{-x}}{x^4} + \dots \\ &\dots + \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!e^{-x}}{x^n} + (-1)^n n! \int_x^\infty e^{-t} t^{-(n+1)} dt \end{aligned}$$

e quindi

$$(18) \quad \begin{aligned} E_i(x) &= e^{-x} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n} \right\} + (-1)^n n! \int_x^\infty e^{-t} t^{-(n+1)} dt = \\ &= s_n(x) + r_n(x) \end{aligned}$$

dove

$$(19) \quad s_n(x) = e^{-x} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n} \right\}$$

Sviluppi e metodi asintotici

rappresentano le somme parziali e

$$(20) \quad r_n(x) = (-1)^n n! \int_x^\infty e^{-t} t^{-(n+1)} dt.$$

La serie

$$(21) \quad e^{-x} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{x^n} + \dots \right\}$$

di cui s_n è la somma parziale è divergente per ogni valore fissato di x . Infatti il termine n -esimo tende all'infinito per $n \rightarrow \infty$.

Tenuto conto del fatto che $E_i(x) = s_n + r_n(x)$ deve essere limitata per $x > 0$, si ha che $r_n(x)$ è illimitata per $n \rightarrow \infty$. Quest'ultima conclusione può ricavarsi anche direttamente dalla (20). Consideriamo ora n fissato e supponiamo che x assuma valori "alti". Allora dalla (20) otteniamo

$$|r_n(x)| = n! \int_x^\infty e^{-t} t^{-(n+1)} dt < \frac{n!}{x^{n+1}} \int_x^\infty e^{-t} dt = \frac{n! e^{-x}}{x^{n+1}}$$

e si ha

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n! e^{-x}}{x^{n+1}} = 0.$$

L'espressione $n! e^{-x} x^{-(n+1)}$ che rappresenta una maggiorazione del resto è dello stesso ordine di grandezza del termine $(n+1)$ -esimo della serie (21). Inoltre, per n fissato, il rapporto di $r_n(x)$ e dell'ultimo termine della somma s_n è in valore assoluto

$$(22) \quad \left| r_n(x) \frac{x^{-n} e^{-x}}{(n-1)!} \right| < \frac{n}{x} \rightarrow 0, \text{ per } n \rightarrow \infty \text{ e } n \text{ fissato.}$$

Ciò mostra che se x è sufficientemente alto ed n è *finito*, s_n fornisce una buona approssimazione di $E_i(x)$. Come risulta evidente dalla (22), la precisione dell'approssimazione cresce al crescere di x , per n fissato. L'errore, come s'è detto, è dell'ordine del primo termine trascurato in $s_n(x)$.

Tenendo conto dei risultati ottenuti possiamo dunque scrivere

$$(23) \quad E_i(x) \approx e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \dots \right), \quad \text{per } x \rightarrow \infty$$

e quindi concludere che la parte destra della (23) è lo sviluppo asintotico della funzione $E_i(x)$, per $x \rightarrow \infty$.

Il problema che ora spontaneamente sorge è il seguente: per un dato $x > 0$ qual è il valore di n tale che $s_n(x)$ fornisca la migliore approssimazione di $E_i(x)$?

Chiaramente per x sufficientemente alto, come si vede dalla (19), i termini di s_n inizialmente decresceranno; per esempio, $2! x^{-3} < x^{-2}$ per x sufficientemente alto. Tuttavia, a un certo valore, diciamo N , i termini con $n > N$ inizieranno a crescere successivamente per un dato x , comunque alto questo valore di x sia scelto, perché il termine n -esimo $(-1)^{n+1} (n-1)! e^{-x} x^{-n}$ è illimitato per $n \rightarrow \infty$. Poiché l'errore, come s'è mostrato, è dell'ordine del primo termine trascurato, il valore ottimale che n può assumere è $n=N$.

Naturalmente N non è uguale per tutti i valori di x , ma dipende da x : $N = N(x)$.

4. La funzione gamma

La *funzione gamma*, o *funzione di Eulero*, è definita com'è noto da

$$(24) \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \alpha > 0.$$

Accanto a questa funzione, di cui si possono trovare alcune proprietà nel testo *Equazioni differenziali* di A. Laforgia, possono definirsi le due seguenti funzioni

$$(25) \quad \gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt, a > 0, x > 0$$

$$(26) \quad \Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt, a > 0, x > 0$$

che hanno notevole rilevanza applicativa.

Per ottenere uno sviluppo in serie della funzione $\gamma(a, x)$, possiamo sviluppare in serie e^{-t} e integrare termine a termine. Un facile calcolo dà

$$(27) \quad \gamma(a, x) = \int_0^x \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \right) t^{a-1} dt = x^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(a+n)n!}.$$

La (27) dà una serie convergente per ogni x , e quindi può essere usata per calcolare $\gamma(a, x)$ per qualsiasi valore di x . La serie comunque diventa di scarsa utilità via via che x assume valori alti. Pertanto, tranne nel caso in cui x sia molto vicino allo zero, la serie nella (27) non è uno strumento idoneo ai fini del calcolo numerico. Per valori alti della variabile x si può ottenere un'altra serie asintotica, divergente, nel modo seguente:

$$(28) \quad \gamma(a, x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt - \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt = \Gamma(a) - \Gamma(a, x),$$

dove $\Gamma(a)$ è la funzione gamma definita dalla (24) e $\Gamma(a, x)$ è la funzione definita dalla (26).

Si osservi che il caso $a = 0$, corrispondente all'integrale $\int_x^{\infty} e^{-t} t^{-1} dt$, è stato dettagliatamente studiato nel paragrafo precedente. Possiamo comunque eseguire successive integrazioni per parti dell'integrale nella (26), in modo analogo a quello utilizzato per $E_i(x)$. Risulta

Sviluppi e metodi asintotici

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt = e^{-x} x^{a-1} + (a-1) \int_x^\infty e^{-t} t^{a-2} dt$$

e dopo ripetute integrazioni per parti

$$(29) \Gamma(a, x) = e^{-x} \{x^{a-1} + (a-1)x^{a-2} + \dots + (a-1)(a-2)\dots(a-n+1)x^{a-n}\} + \\ + (a-1)(a-2)\dots(a-n) \int_x^\infty e^{-t} t^{a-n-1} dt.$$

Per un n fissato

$$\left| \int_x^\infty e^{-t} t^{a-n-1} dt \right| < x^{a-n-1} \int_x^\infty e^{-t} dt, \text{ per } n > a-1 \\ = x^{a-n-1} e^{-x} = o(x^{a-n} e^{-x}), \text{ per } x \rightarrow \infty.$$

Pertanto quello dato dalla (29) è uno sviluppo asintotico per la funzione $\Gamma(a, x)$.

Questo sviluppo può essere usato per stabilire uno sviluppo asintotico della funzione $\gamma(a, x)$.

Dalla (28) otteniamo infatti

$$(30) \gamma(a, x) \approx \Gamma(a) - e^{-x} x^a \left\{ \frac{1}{x} + \frac{a-1}{x^2} + \frac{(a-1)(a-2)}{x^3} + \dots \right\}.$$

La serie asintotica nella (30) è divergente. Consideriamo infatti il rapporto tra il termine $(n+1)$ -esimo e il termine n -esimo nella (30) così come abbiamo fatto nel paragrafo precedente per ottenere il valore ottimo di N per un dato x . Abbiamo, in questo caso, che N è dato da $|a - N| = [x]$.

Se a è un intero positivo la serie ha un numero finito di termini e in questo caso la (30) fornisce esattamente, piuttosto che asintoticamente, $\gamma(a, x)$.

5. Conclusioni.

L'Analisi asintotica è lo strumento principe per la valutazione numerica di molte Funzioni speciali. Le funzioni gamma e gamma incompleta, che qui abbiamo considerato, rappresentano soltanto alcuni possibili esempi.

Con strumenti e strategie più raffinate è possibile trattare sviluppi asintotici di soluzioni di equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali. Anche gli zeri delle Funzioni speciali, le cui proprietà sono fondamentali per la loro stretta attinenza con svariati fenomeni della Fisica, possono trattarsi con "strumenti" asintotici.

Il lettore che desidera approfondire questi temi, in relazione ai polinomi ortogonali, può consultare il recentissimo volume di A. Laforgia e M. E. Muldoon citato in bibliografia, che contiene gli argomenti più salienti sul trattamento degli zeri, delle loro proprietà di monotonia e di disuguaglianze ad essi relative. Tra questi risultati citiamo il Teorema di Hellmann-Feynman e il Teorema di Sturm nella forma di Szegő.

Bibliografia

Luigi Gatteschi, Funzioni speciali, UTET, 1973.

Julian Havil, Exploring Euler's Constant, Princeton University Press, 2003.

Andrea Laforgia, Equazioni differenziali ordinarie, Accademica Editrice 2001.

Andrea Laforgia, Martin E. Muldoon, Zeros of orthogonal Polynomials in Encyclopedia of Special Functions, The Askey -Bateman Project, vol.1, Cambridge University Press, 242-268.

Arpad Elbert and Andrea Laforgia, An Inequality for Legendre Polynomials, J. of Mathemat. Phys. **35**, 1348 (1994).

Andrea Laforgia e Pierpaolo Natalini, Zeros of Bessel Functions: Monotonicity, Concavity, Inequalities, Le Matematiche, vol. LXII 2007, 255-270.

In viaggio con i numeri

Silvia Benvenuti

Università di Bologna
email silvia.benvenuti5@unibo.it

Sunto

Il cosiddetto *mateturismo* è un'interessante tendenza che negli ultimi anni si sta diffondendo, a partire dai paesi anglosassoni, un po' in tutta Europa, Italia compresa, sull'onda del sempre maggiore interesse che la matematica riscontra nel grande pubblico. In questo contributo si analizzano alcuni spunti possibili per visitare le città d'arte "con gli occhi del matematico", e si suggerisce a titolo di esempio un breve itinerario mateturistico della città di Barcellona.

Parole chiave

Matematica; arte; architettura; turismo.

1. Introduzione

Chi l'ha detto che un dipinto solleciti solo le corde di un appassionato d'arte? O che un edificio faccia emozionare solo un architetto? Siamo sicuri che visitare una città d'arte gratifichi solo la nostra componente umanistica? E che i viaggi d'istruzione debbano riguardare soltanto la storia o la storia dell'arte? Anche la scienza può offrire spunti interessanti, o essere chiamata in causa in un contesto multidisciplinare. È abbastanza ovvio, per esempio, che la matematica sia uno strumento tecnico imprescindibile per discipline quali l'architettura e il design. Molto meno evidente è che possa rappresentare uno strumento "creativo", in grado di fornire all'artista nuove ispirazioni e soluzioni originali. Eppure, questa visione è condivisa da molti artisti e architetti, di diverse epoche e discipline, ed è interessante scoprire questo punto di vista nelle opere cui siamo soliti guardare solo da un'altra prospettiva. Per questo proponiamo un viaggio in Italia, alla scoperta dei luoghi dell'arte che visiteremo però "con altri occhi": quelli dello scienziato in genere, e del matematico in particolare.

2. Insegnanti di matematica in gita

Diciamocelo: per noi insegnanti di matematica, la gita scolastica dei tempi pre-Covid – auspicabilmente di nuovo possibile in un futuro non troppo remoto – non è mai stata un momento professionalmente edificante. Tradizionalmente, il nostro ruolo si riduce a tenere gli studenti in fila abbaiano come cani da pastore, assicurarci di non lasciare a terra nessuno, supplicarli che non distruggano l'albergo, controllare che non si stonino (troppo) con alcol, fumo o altro che non possiamo nemmeno immaginare, convincerli che se vogliono a tutti i costi passare la notte in una stanza che non è la loro, è comunque preferibile che facciano il trasferimento via corridoio anziché sospesi tra finestra e finestra a 5 piani di altezza, e tutte le varie incombenze di carattere sbirresco a cui la nostra disciplina ci ha relegato da sempre. Ebbene, è arrivato il momento della riscossa: magari contando sulla complicità dei colleghi di lettere e storia dell'arte, nulla vieta di mettere in piedi una gita interdisciplinare che sia, invece che meramente turistica, *mateturistica*. In altri termini ci proponiamo di tenere in conto, oltre all'aspetto storico e artistico delle bellezze che andremo a visitare, anche la matematica che ne ha reso possibile la realizzazione. E questo non tanto perché è servita come strumento tecnico, ma soprattutto perché è servita come strumento *creativo*, suggerendo all'artista, all'architetto, al designer e in generale all'autore dell'opera soluzioni nuove e inattese.

Il cosiddetto *mateturismo* è un'interessante tendenza che negli ultimi anni si sta diffondendo, a partire dai paesi anglosassoni, un po' in tutta Europa, Italia compresa, sull'onda del sempre maggiore interesse che la matematica riscontra nel grande pubblico. Sono diversi i testi che propongono percorsi di questo tipo, con l'idea che visitare, con l'aiuto di una guida esperta, una città d'arte o un luogo ricco di storia, possa portarci a scoprire quanto profonda sia la presenza della matematica nel suo tessuto architettonico e urbanistico. Scoprire quanto spesso dietro la facciata di un palazzo, nella prospettiva di un celebre affresco, nella struttura di un ponte o di una cupola che abbiamo visto decine di volte si nasconda una sorprendente sfida matematica, che il più delle volte ha coinvolto personalità illustri della storia della scienza e dell'arte, da Leonardo a Bramante, costituisce un modo divertente e nuovo di viaggiare e di confrontarsi con il nostro paesaggio urbano. In Italia probabilmente i primi esperimenti in tal senso sono (Aa.Vv, 2004), (Aa.Vv, 2005), (Luminati, 2006), cui si sono aggiunti nel tempo molti altri contributi, tra cui (Benvenuti, 2011), (Duvernois, Mele, Rossi, 2012), (Benvenuti, 2013), (Lucente, 2016), (Lucente, 2019).

Cerchiamo qui di illustrare qualche spunto generale, e poi un esempio particolare, pescando tra le destinazioni “classiche” per lo studente italiano.

3. Qualche spunto

Il nostro paese, così ricco di bellezze artistiche spesso innovative, presenta innumerevoli spunti per guardare all'arte con gli occhi del matematico. Qui ne prendiamo in esame solo tre: l'architettura militare, la prospettiva e il concetto di arco.

Dovunque vi muoviate nello stivale, avrete modo di ammirare qualche fortificazione “alla moderna”, termine che individua la tecnica con la quale, in Europa, le fortificazioni realizzate nel corso del Medioevo vennero modificate, a partire dal Quattrocento, per rispondere a esigenze difensive profondamente mutate. Scrive in proposito Niccolò Tartaglia, nel suo libro *Quesiti et inventioni diverse* del 1537: «Io dico che fortificare una città vi occorre la materia e la forma, che lo ingegno dell'huomo se approva per la forma delle sue mura, e non per la grossezza di quelle». Ovvero: se vogliamo proteggere adeguatamente una città, dobbiamo farlo scegliendo con intelligenza il materiale da costruzione e la forma delle sue mura, perché farle spesse non è sufficiente. Questa attenzione da parte di un importante matematico non deve stupire: è infatti proprio ai matematici che si deve lo sviluppo dell'architettura militare del periodo, in quanto tutti i problemi soggiacenti sono di natura eminentemente geometrica. Matematici applicati, li definiremmo oggi, utilizzando un'etichetta che forse non ha poi tanto senso, e che comunque allora nessuno si sarebbe sognato di specificare. Quella dell'intellettuale “specializzato” è infatti un'invenzione (e probabilmente una necessità) degli ultimi secoli. Prima di allora l'intellettuale era per sua natura poliedrico: si occupava di matematica ma anche di arte, di architettura e di astronomia, di ingegneria e letteratura, e chi più ne ha più ne metta. Pensiamo a Leon Battista Alberti, Piero della Francesca, Luca Pacioli, Albrecht Dürer, Leonardo Da Vinci, ma l'elenco potrebbe allungarsi a piacimento.

Le cinte medioevali progettate a partire dal XII secolo erano costituite da tratti di mura ad andamento rettilineo, dette cortine, generalmente (quasi) perpendicolari al suolo, intervallate da numerose torri. Sulla sommità delle mura si tracciava un cammino di ronda, da cui controllare la situazione, e un parapetto sormontato da merli. L'efficacia di una fortificazione era quindi legata soprattutto alla sua altezza: più una muraglia era alta, più lontano avrebbe consentito di guardare e più difficile sarebbe stato scalarla. Per difendersi, inoltre, si faceva uso della cosiddetta “difesa piombante”, consistente nel getto dall'alto di pietre, olio bollente e pece fusa, a cui si aggiungeva l'offensiva degli arcieri appostati attraverso le feritoie o fra le merlature. La situazione mutò radicalmente con lo sviluppo delle artiglierie portatili: nel momento in cui i progressi della metallurgia permisero di costruire cannoni sempre più potenti, aumentandone progressivamente la gittata, non era più necessario, per abbattere una muraglia, farsi sotto con gli arieti, ma si poteva prenderla a cannonate da centinaia di metri di distanza. In questo senso, più una fortificazione era alta più costituiva un bersaglio facile: quello che nelle epoche precedenti era un punto di forza, si traduceva irrimediabilmente in un tallone d'Achille.

Era necessaria, a quel punto, una riforma radicale della strategia difensiva, che chiamava in causa a gran voce “lo ingegno dell’uomo” evocato da Tartaglia.

Si fece inevitabilmente strada l’idea di “forma resistente”: bisognava cioè individuare, per mura e fortificazioni, una conformazione geometrica in grado di contrastare, proprio in virtù della sua forma, gli attacchi dell’artiglieria. In questo senso, lo studio della balistica e quello della scienza delle fortificazioni erano naturalmente strettamente legati, tanto che spesso gli stessi scienziati e matematici impegnati nell’una, fornivano poi le risposte più adeguate nel campo dell’altra. Luca Pacioli, nel suo *De divina proportione*, afferma in proposito che «mesura e lor proportioni se retrovaranno fabricati e formati» nelle «rocche, torri, revelini, muri, antemuri, fossi, ponti, turrioni, merli, mantelli e altre fortezze», e accomuna allo stesso fondamento matematico anche «tutte artiglierie, instromenti e machine militari». Per scoprire quale fosse la geometria funzionale a una difesa efficiente, vi rimandiamo a (Benvenuti, 2021) e (Benvenuti, 2021 bis). Per vedere invece il risultato di tutte queste elucubrazioni, non avete invece che l’imbarazzo della scelta: a Pisa consigliamo di visitare la Cittadella, con il celebre bastione progettato da Giuliano da Sangallo (1512); a Firenze non mancherete di dare un’occhiata alla fortezza da Basso (1534), opera di Antonio da Sangallo il Giovane; a Livorno il vostro interesse sarà concentrato su quella che si chiama, molto semplicemente, “la” Fortezza, realizzata da Antonio da Sangallo il Vecchio (1531-1540); a Vinci troverete i disegni di Leonardo; a Lucca la cinta muraria meglio conservata, a Piombino il Torrione e il Rivellino...e qui ci fermiamo perché l’elenco potrebbe allungarsi a dismisura.

Passiamo quindi alla prospettiva che, si sa, nasce a Firenze, nella bottega di Filippo Brunelleschi. O meglio nel cantiere del Duomo, Santa Maria del Fiore, in corrispondenza della porta principale che dà sul Battistero, dove per la prima volta venne fatta una pubblica dimostrazione di come si possa rendere la tridimensionalità nel piano di un quadro. Il metodo cui ci riferiamo, che verrà poi chiamato “prospettiva lineare centrale”, consente di rappresentare qualsiasi cosa veda l’occhio, nella giusta proporzione e dimensione perché chi osserva il quadro veda quello che stava vedendo il pittore mentre lo dipingeva. Ma la cosa bella è che fin dall’inizio Filippo, artista tra gli artisti, ebbe la consapevolezza chiara che il procedimento si reggeva su ben precise leggi matematiche. E lo disse ai suoi forte e chiaro, e con le sue parole lo ripetiamo anche noi, alla faccia di chi vede tra matematica e arte una distanza incolmabile:

D’ora in poi, chiunque intenda dedicarsi all’arte e alla pittura dovrà studiare Euclide e poi, partendo dalle conoscenze che avrà acquisito, studiare la delicata arte della prospettiva.

Principio che, da quel momento, è stato alla base del lavoro di tanti artisti, anche i più insospettabili. Chi pensate che abbia affermato, per esempio: «Devi, soprattutto da giovane, usare la geometria come guida alla simmetria nella composizione delle tue opere. So che i pittori più o meno romantici sostengono che queste impalcature matematiche uccidono l’ispirazione dell’artista, dandogli troppo su cui pensare e riflettere.

In viaggio con i numeri

Non esitare un attimo a rispondere loro prontamente che, al contrario, è proprio per non aver da pensare e riflettere su certe cose, che tu le usi»? Un po' di pazienza e ci arriveremo...

Concludiamo questo paragrafo con uno spunto superclassico, quello degli archi. In architettura, si definisce “arco” un elemento strutturale a forma curva che si appoggia su due *piedritti* (vedi Figura 1).

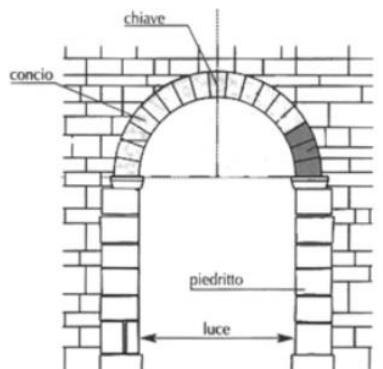


Figura 1. Nomenclatura dell'arco

Gli archi che ci sono più familiari sono quelli a tutto sesto, cui ci ha abituato il sacro romano impero, o quelli a sesto acuto, tipici dei costruttori gotici. Ma di archi ce ne sono di diverse fogge, a seconda della "forma curva" che scegliamo di appoggiare sui piedritti. Quel che è più interessante è che a forme diverse corrispondono caratteristiche strutturali diverse. Gli archi classici, per esempio, si ottengono contrapponendo due archi di circonferenza. In quello a tutto sesto i due archi hanno lo stesso centro e lo stesso raggio, mentre in quello a sesto acuto il raggio è lo stesso ma il centro di ogni arco è situato alla base dell'altro, come mostrato in Figura 2.



Figura 2: Costruzione degli archi classici: tutto sesto (sinistra) e sesto acuto (destra)

Comunque sia, secondo il solito Leonardo, un arco come questi è «una fortezza causata da due debolezze», in quanto i due quarti «ciascuno debolissimo per sé desidera cadere e opponendosi alla ruina l'uno dell'altro, le due debolezze si convertono in un'unica fortezza». Fortezza per modo di dire: dal punto di vista della distribuzione statica delle

forze, infatti, un arco a tutto sesto è decisamente una struttura poco efficiente. La chiave di volta, non potendo scaricare il suo peso in verticale (altrimenti cadrebbe) lo scarica perpendicolarmente al piano di appoggio coi due conci adiacenti, determinando così due forze inclinate. Il mutuo contrasto tra i conci si traduce in un propagarsi delle forze inclinate: in questo modo si determina una forza totale, anch'essa inclinata, che corrisponde al peso complessivo dell'arco sui piedritti. Tradotto, questo significa che il peso dell'arco, sommato eventualmente a quello degli elementi che sorregge, si distribuisce in modo da gravare sulla struttura di appoggio, spingendo i piedritti verso l'esterno: se quindi vogliamo che l'arco non crolli, dobbiamo ipotizzare una struttura decisamente massiccia per i piedritti e un contenimento laterale (detto *contrafforte*) che, contrastando la componente laterale della spinta, consenta loro di rimanere in piedi a sostenere tutto questo peso. In questo senso, l'arco a sesto acuto è già un po' meglio, in quanto in questo caso la risultante delle spinte dovute al peso proprio e ai carichi sostenuti cade molto più vicino alla base del piedritto (ovvero ha una componente orizzontale minore); questo fa sì che si possa fare a meno dei grossi spessori murari che fungevano da contrafforte nel caso dell'arco romano e che si possano sostituire i massicci pilastri di sostegno con colonne più slanciate. Ci sono soluzioni ancora migliori? Anche qui, solo un po' di pazienza...

4. Un esempio: escursione fuori confine

La prassi delle gite della quinta superiore – sempre nella ormai lontana epoca covid free in cui speriamo di ricollocarci quanto prima - è quella di visitare destinazioni estere, sancendo in questo modo la (quasi) raggiunta maturità dei nostri studenti. Visto che Barcellona è una delle destinazioni più amate dagli italiani, concentriamoci su di lei, e sugli edifici progettati da uno dei suoi architetti più iconici, Antoni Gaudí – quello della Sagrada Família, per intenderci. Ne parleremo senza entrare troppo nei dettagli, rimandando a (Benvenuti, 2010) e (Benvenuti, 2011) per ulteriori approfondimenti.

In questo caso, la prima cosa che dovrete far osservare ai ragazzi è l'ubiquità, nell'opera del catalano, delle superfici curve, nella convinzione che «La linea retta è la linea degli uomini, quella curva è la linea di Dio»: in quanto fervente cattolico, infatti, Gaudí voleva costruire a onore di Dio, e quindi imitando la natura, sua meravigliosa creazione, chiaramente caratterizzata da superfici curve e irregolari. È per questo che nei suoi palazzi non c'è un muro a piombo né una linea dritta, ma tutto è curvo. Tuttavia, costruire in pietra superfici curve è un'operazione nient'affatto banale, che Gaudí, che fortunatamente un po' di matematica se l'era studiata, risolse scegliendo la giusta famiglia di superfici da costruire, quelle che chiamiamo *superfici rigate*. Si tratta, per definizione, di quelle superfici che si ottengono facendo scorrere una linea retta su un profilo predeterminato: se per esempio si fa scorrere una linea retta verticale parallelamente a sé stessa lungo il profilo di una linea retta orizzontale, si ottiene il piano, che per definizione è quindi una

In viaggio con i numeri

superficie rigata; se invece la retta verticale si fa scorrere lungo il profilo di una circonferenza posta su un piano perpendicolare, si ottiene il cilindro, anch'esso quindi superficie rigata. Questi due esempi non interessano Gaudí, essendo il primo assolutamente non curvo, e il secondo assolutamente non originale: gli vengono in aiuto altre rigate più creative, dai nomi esotici quali *iperboloide a una falda*, *paraboloide iperbolico*, *elicoide* e *conoide*, che vedete in figura, nell'ordine, con a fianco la loro interpretazione "alla catalana".

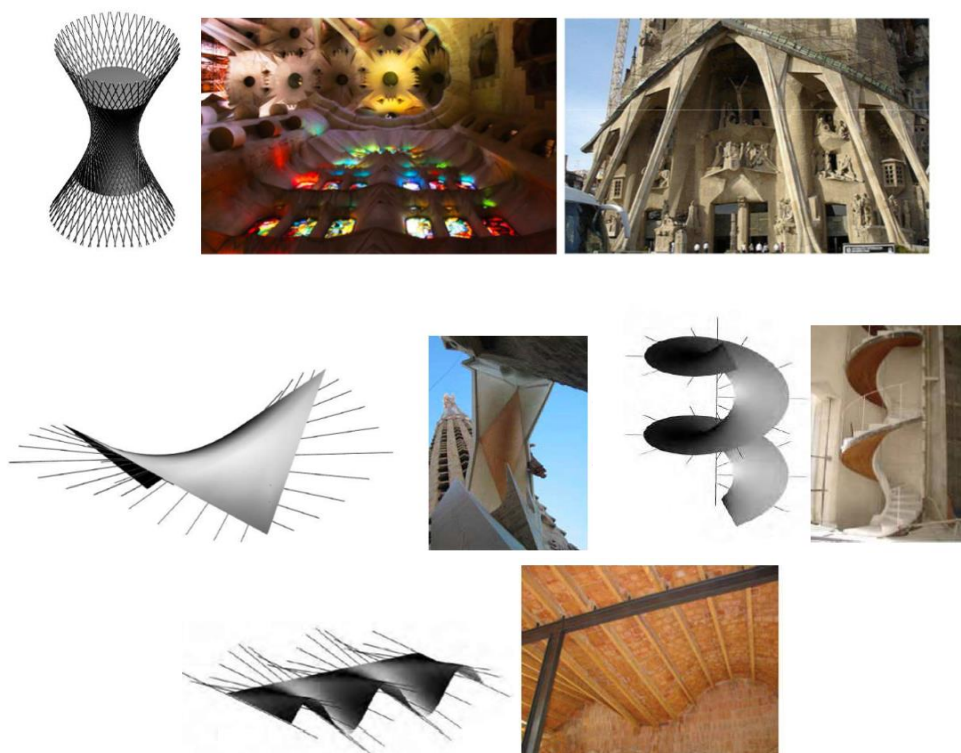


Figura 3: Superfici rigate nell'architettura di Antoni Gaudí

La vostra ricognizione dell'opera dell'architetto catalano non può dirsi completa se non scoprite qualcosa del suo *modus operandi*: Gaudí, in modo abbastanza sistematico, progettava i suoi edifici utilizzando strani oggetti detti *modelli stereo-funicolari*. Appesa una bella tavola di legno al soffitto, si muniva di catenelle di varie lunghezze, ne fissava alcune per gli estremi alla tavola e altre alle prime in punti opportuni, lasciando poi che si disponessero tutte naturalmente sotto l'effetto della forza di gravità, a costruire quello che a prima vista si sarebbe detto un lampadario barocco. A questo punto, non restava che mettere uno specchio sul pavimento: il lampadario riflesso rivelava la sua vera natura, quella di scheletro di un edificio complicatissimo, avente come ingredienti fondamentali l'arco catenario e un suo parente, l'arco funicolare, che dà il nome al modello stesso.

Si chiama *catenaria* la curva descritta da una catenella o da una corda tenuta per gli estremi e lasciata pendere, soggetta soltanto al proprio peso. La sua forma assomiglia alla più comune parabola, ma ha un'equazione più complessa, che chiama in causa il coseno iperbolico invece che un semplice polinomio di secondo grado.

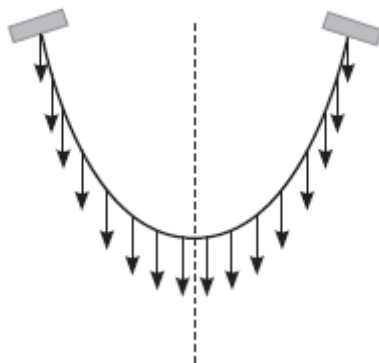


Figura 4. Catenaria

Se poi alla fune di cui sopra, fissata per i due estremi, si appendono diversi carichi puntuali (cosa che Gaudí faceva appendendo alle sue catenelle sacchetti pieni di pallini di piombo, o attaccando in un punto intermedio di una catenella l'estremo di un'altra), si ottiene una nuova curva, detta *funicolare*, che non è altro che una catenaria a tratti (figura 5). In particolare, se i carichi appesi sono orizzontalmente uniformi, la funicolare ottenuta è proprio una parabola (figura 6).

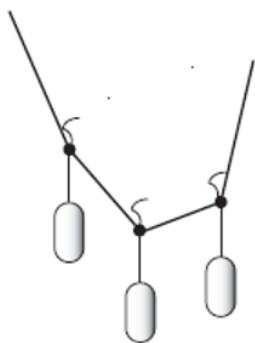


Figura 5: la funicolare

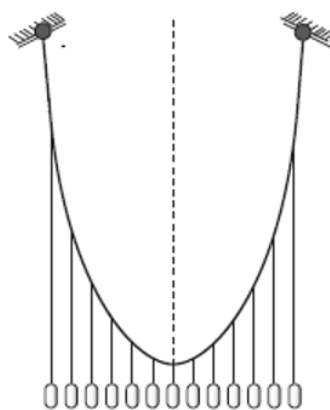


Figura 6: la parabola

In viaggio con i numeri

Le curve ottenute in questo modo sono soggette solamente a forze di tensione, quindi se le ribaltiamo, ovvero facciamo l'operazione di riflessione che Gaudí otteneva con lo specchio, otteniamo archi, detti rispettivamente catenari e funicolari, soggetti esclusivamente a forze di compressione. Di conseguenza, grazie alla sua forma, lungo un arco catenario il carico è distribuito in modo omogeneo e per questo, a differenza di altri tipi di arco quale quello romano (a tutto sesto) o quello gotico (a sesto acuto), l'arco catenario sta in piedi senza bisogno di contrafforti o altri elementi di supporto. Inoltre è una struttura *ottima* nel senso (tecnico) che, a parità di materiale di costruzione, è quella di minimo peso in grado di sopportare un carico fissato. È l'arco perfetto, insomma, che con Gaudí, e quindi all'inizio del Novecento, fa il suo debutto in architettura – e incidentalmente risponde alla questione lasciata aperta alla fine del paragrafo precedente.

Per finire di annodare i fili in sospeso, bisognerebbe fare una capatina a Figueras, un centinaio di chilometri a nord di Barcellona, dove si trova la casa museo di un altro degli artisti catalani più iconici, Salvador Dalí. Esula dagli scopi di questo contributo parlare della sua opera, anche se come avrete capito è sua la bellissima frase di cui poco sopra abbiamo cercato di individuare l'attribuzione. Vi rimandiamo per questo a (Benvenuti, 2016), (Benvenuti, 2017), e soprattutto (Benvenuti, Cenci, Todesco, 2017) – buon divertimento!

5. Conclusioni

Questo contributo ha indagato la valenza didattica e culturale di un accostamento sistematico tra matematica e arte che consenta di guardare alle bellezze architettoniche e artistiche da un punto di vista insolito. Questo approccio consente quantomeno di guardare alle destinazioni turistiche classiche in modo diverso, potenzialmente allargando il campo degli stimoli che dalla visita di tali destinazioni possiamo portarci a casa: parafrasando Proust, il nostro sarà un vero viaggio di scoperta, non perché visiteremo nuove terre, ma perché lo faremo con nuovi occhi.

Bibliografia

- (Aa.Vv, 2004) Aa.Vv, *Matemilano. Percorsi matematici in città*, Springer, 2004.
(Aa.Vv, 2005) Aa.Vv, *Con altri occhi. Sguardi matematici e non sulla città*, Electa, 2005.
(Benvenuti, 2010) S. Benvenuti, *Insalate di matematica 3. Sette variazioni su arte, design e architettura*, Sironi, 2010.
(Benvenuti, 2011) S. Benvenuti, *Matematica per creativi*, XLaTangente n.24/2011, p. 20-23, [12 19 XlaTangente 09](#)
(Benvenuti, 2013) S. Benvenuti, *Mateturisti a Milano*, Linx Magazine n.15/2013, p. 40-47, [Linx Magazine 15 by Linx Edizioni - issuu](#)

- (Benvenuti, 2017) S. Benvenuti, *Genio e regulatezza: le passioni matematiche di Salvador Dalí*, <http://maddmaths.simai.eu/divulgazione/salvador-dali/>, 2017.
- (Benvenuti, Todesco, Cenci, 2017) S. Benvenuti, GM. Todesco, L. Cenci. *Catastroficamente creativo: Dalí e la quarta dimensione*, <http://www.loopmm.com/benvenuti/index.html>, 2017.
- (Benvenuti, 2021) S. Benvenuti, *Toscana matematica*, edizioni MathUp, in uscita con Prisma, Giugno 2021.
- (Benvenuti, 2021 bis) S. Benvenuti, *In viaggio con i numeri: 12 itinerari per mateturisti curiosi*, Edt, Giugno 2021.
- (Duvernois, Mele, Rossi, 2012) S. Duvernois, G. Mele, M. Rossi (ed). *Milano - maths in the city - a mathematical tour of Milanese architecture*, 2012.
- (Lucente, 2016) S. Lucente, *Itinerari matematici in Puglia*, Giazira, 2016.
- (Lucente, 2019) S. Lucente, *Itinerari matematici in Basilicata*, Giazira, 2019.
- (Luminati, 2006) D. Luminati, *Matetrentino, percorsi matematici a Trento e dintorni*, Springer, 2006.

Competizioni, gare e didattica della matematica

Lucia Maddalena^{ab}; Luca Grilli^a

^aUniversità di Foggia
Dipartimento di Economia, Management e Territorio
Foggia, Italy

^bCorresponding Author: lucia.maddalena@unifg.it

Sunto

Le gare e le competizioni nel nostro sistema educativo, per quanto lodate o condannate, rimangono centrali nel sistema d'istruzione nazionale. La tradizionale valutazione degli studenti e la misurazione delle loro abilità scolastiche di base (PISA, TIMSS) creano inevitabilmente, direttamente o indirettamente, una competizione tra gli studenti, tra gli insegnanti, tra le scuole e anche tra i paesi. Dopo un'introduzione sulle ricadute positive delle competizioni sull'insegnamento e apprendimento, e sulla performance complessiva del sistema educativo, l'articolo presenta le esperienze degli autori in 10 anni di gare di matematica, MATHS CHALLENGE, organizzate con la collaborazione dei docenti degli I.I.S.S. e riservate agli studenti in uscita (IV e V anno). Una particolare attenzione è rivolta al potenziale utilizzo di tali competizioni come attività di orientamento in uscita per gli studenti che concludono il ciclo di istruzione secondaria superiore.

Parole Chiave: Gare di Matematica; Logica; Problem Solving; Alfabetizzazione Matematica; Orientamento Universitario.

1. Introduzione

Le gare di matematica sono molto utili, forniscono un grande incentivo ai giovani studiosi di matematica, ai docenti e attirano giovani menti brillanti. Le competizioni aiutano gli studenti perché svolgono un ruolo fondamentale nel motivare gli studenti ad esibirsi ed eccellere e offrono molte più soddisfazioni rispetto al semplice premio che ricevono. I concorsi offrono ai partecipanti la possibilità di acquisire una notevole esperienza, mostrare abilità, analizzare e valutare i risultati e scoprire le attitudini personali. Allo stesso tempo, le stesse gare incoraggiano gli studenti ad adottare tecniche innovative e a sviluppare le proprie idee e abilità. Pochissime opportunità nella vita media degli studenti forniscono una tale esposizione e la possibilità di confrontarsi realmente con un'attività competitiva, e tutto questo in un lasso di tempo così breve come quello tipico delle gare. Gli studenti affrontano periodicamente una serie di sessioni di brainstorming, sequenze

di risoluzione rapida dei problemi e sperimentano una forma di apprendimento totalmente diversa da quella tradizionalmente incontrata nel percorso didattico. Inoltre il curriculum di questi studenti si arricchisce dei risultati ottenuti nelle competizioni come testimonianza di distintive e eccezionali capacità. Non di meno le competizioni offrono la possibilità di conoscere nuovi ragazzi, fare amicizia e confrontarsi con altre realtà. Karnes e Riley (1996) sostengono che “le competizioni migliorano anche le capacità di apprendimento autodiretto degli studenti e il senso di autonomia. Gli obiettivi principali delle competizioni di matematica sono aumentare la motivazione, l'entusiasmo e l'interesse per la matematica e fornire alle scuole e ai genitori informazioni sugli studenti più capaci”. Le gare sviluppano e coltivano talenti ed è per tutte queste ragioni che da diversi anni docenti di scuole di ogni ordine e grado si impegnano con generosità e dedizione per organizzare e/o partecipare a gare e competizioni non solo di matematica. Risale al 1894 la gara Eötvös, per studenti delle scuole secondarie in Ungheria, essa è riconosciuta come il precursore delle Olimpiadi della Matematica. Gara progettata per sviluppare la fantasia e la creatività dei ragazzi. In Romania, a Bucarest ancor prima, nel 1885 si tenne una gara di matematica nella scuola primaria ma le prime olimpiadi con la partecipazione di 7 nazioni risalgono al 1959. Attualmente le nazioni partecipanti alle International Mathematical Olympiad (IMO) sono 80 e i continenti sono 5. La squadra italiana è selezionata tramite le fasi nazionali delle Olimpiadi della matematica. In Italia dal 1895 l'organizzazione venne affidata alla Scuola Normale di Pisa. Per selezionare la rappresentativa italiana alle IMO vennero organizzate le Gare nazionali, che per le prime 4 edizioni si svolsero a Viareggio, dal 1989 a Cesenatico. Dal 1997 l'organizzazione è passata all'Unione Matematica Italiana (UMI). In Italia abbiamo una lunga tradizione di gare sostenute dal Centro PRISTEM e i Campionati Internazionali di Giochi Matematici. Da circa 10 anni gli autori sono impegnati nell'organizzazione di gare che hanno sempre visto la partecipazione di tanti studenti degli I.I.S.S. grazie all'interazione tra scuola e Università.

2. La gara “MATHS CHALLENGE”

A partire dall'a.a. 2012-2013, il Dipartimento di Economia, Management e Territorio (DEMeT) dell'Università di Foggia, con la collaborazione della Mathesis - sezione di Foggia e della Fondazione dei Monti Uniti di Foggia, organizza la gara MATHS CHALLENGE.

La gara è gestita da un comitato scientifico attualmente composto da: Prof.ssa Lucia Maddalena (Presidente); Prof. Luca Grilli (Coordinatore); Prof.ssa Viviana Fanelli (componente - UniBA); Prof.ssa Carmen Talia (componente - Mathesis- sez. Foggia).

La competizione Maths Challenge è strutturata con domande a risposta multipla con una sola risposta esatta su logica, algebra, geometria e tutte le aree fondamentali della matematica. Partecipano alla gara gli studenti del quarto e quinto anno della Scuola Secondaria Superiore, senza alcuna distinzione per tipologia di istituto, partecipano alla

gara quindi studenti provenienti indistintamente da Licei, Istituti tecnici, Istituti professionali. Questo è un elemento molto importante e caratterizzante della prova e rappresenta una notevole sfida nel momento in cui si cerca di proporre quesiti che possano essere affrontati non banalmente da alunni provenienti da scuole diverse e che erogano programmi a volte molto diversi. La finalità fondamentale di queste gara è quella di stimolare i giovani e valorizzare le eccellenze, ma anche di favorire la diffusione dell'interesse per la matematica, offrendo l'opportunità di affrontare problemi diversi nella loro formulazione da quelli affrontati a scuola. L'atteggiamento culturale prevalente evidenzia remore e difficoltà nella diffusione dei saperi scientifici e in particolare verso la matematica, troppo spesso considerata ostica e di difficile comprensione.

E' opportuno sottolineare che questa iniziativa nelle diverse edizioni, ha visto sempre la partecipazione di tanti docenti che hanno svolto la funzione di referenti di istituto, i quali con grande spirito di servizio e nessun contributo economico, hanno partecipato attivamente alle diverse fasi della competizione.

Per il Dipartimento DEMeT, la gara Maths Challenge rappresenta anche un importante momento di interazione con il territorio e in particolare con le scuole superiori anche al fine di creare un ponte tra la scuola e l'università nell'ottica di selezionare e motivare i migliori studenti orientandoli verso la scelta del percorso universitario.

Il Dipartimento DEMeT offre agli studenti che hanno partecipato alla fase finale del concorso la possibilità di immatricolarsi ad un corso di laurea di primo livello senza dover sostenere il test per la verifica delle competenze. Nel corso degli anni diversi finalisti della gara Maths Challenge hanno usufruito di questa possibilità.

La gara è strutturata in due fasi distinte: la prima prova (semifinale), ha luogo nei diversi istituti ed è volta a selezionare gli studenti che hanno accesso alla seconda fase (finale) che decreta il vincitore assoluto della competizione insieme ai primi classificati per ogni singolo istituto.

Alla fase finale partecipano gli studenti che si sono classificati nelle prime 10 posizioni della graduatoria di Istituto inclusi eventuali ex-aequo nella decima posizione.

Successivamente alla fase finale è prevista una cerimonia di premiazione che si tiene presso il Dipartimento di Economia, Management e Territorio (DEMeT) dell'Università di Foggia. Durante la cerimonia di premiazione sono comunicati ufficialmente i nomi del primo classificato in assoluto nella fase finale (vincitore della gara Maths Challenge) e dei primi classificati per ogni istituto (nel caso di ex-aequo premiamo il più giovane).

E' opportuno sottolineare che l'iscrizione alla competizione Maths Challenge e la partecipazione a tutte le fasi previste è completamente gratuita e si svolge grazie al contributo generoso e gratuito di tutti i docenti interessati.

Ecco alcuni numeri della competizione:

- 8 edizioni
- circa 600 studenti partecipano alla prova semifinale in ogni edizione
- circa 150 studenti partecipano alla prova finale
- circa 20 istituti partecipano regolarmente alla gara di istituto

i vincitori delle diverse edizioni sono stati:

- Maths Challenge 2013: MICHELE D'ERRICO - Istituto di Istruzione Superiore "G. Galilei", Manfredonia
- Maths Challenge 2014: NENNA FRANCESCO - Liceo Scientifico "G. Galilei", Manfredonia
- Maths Challenge 2015: MAGGI ROBERTO - Liceo Scientifico "Battaglini", Taranto - NOTARANGELO ILENIA Liceo Scientifico "G. Galilei", Manfredonia (FG)
- Maths Challenge 2016: gara non disputata
- Maths Challenge 2017: FALCONE GIUSEPPE - Liceo Scientifico "C. Cafiero" Barletta
- Maths Challenge 2018: IAMMARINO CONCETTA - Liceo Scientifico "G. Marconi" - Foggia; - DI NARDO PASQUALE I.I.S.S. "Bonghi-Rosmini" Lucera
- Maths Challenge 2019: PAVARINI DANIELE ROMANO - Liceo Scientifico "Marconi" - Foggia; TOMACIELLO GIOVANNI - Liceo Scientifico "Marconi" - Foggia
- Maths Challenge 2020: finale non disputata per COVID-19

L'edizione 2021 della competizione Maths Challenge si è tenuta per la prima volta in modalità "a distanza" attraverso la somministrazione, a circa 500 studenti, di un modulo Google con 20 quesiti a risposta multipla nella prima fase semifinale. Il Comitato Scientifico ha deciso di sospendere la data della prova finale nella speranza di poter svolgere la prova in presenza.

3. I quesiti

Come anticipato nella sezione precedente i quesiti della gara Maths Challenge rispondono alla sfida di dover essere da un lato non banali e interessanti e dall'altro di essere adatti a studenti di diverse tipologie di scuole. Tale sfida è stata colta con passione dal comitato scientifico che ogni anno seleziona e redige un numero di quesiti pari a circa 20 per la fase semifinale e 30 per la fase finale.

Per poter avere un'idea del tipo di quesiti proposti riportiamo una selezione di questi divisi per tipologia. Le prove complete e tanto altro materiale è disponibile nella pagina web della competizione: <https://www.demet.unifg.it/it/area-studenti>

LOGICA PROPOSIZIONALE:

Esempio 1:

- Per essere ammesso al primo anno del corso di laurea in Economia presso l'Università di Foggia è necessario sostenere un test di ingresso oppure classificarsi tra i primi 50 nella competizione Maths Challenge. Un'indagine ha evidenziato che questa regola non è stata rispettata, questo equivale al fatto che:

- (A) nessuno studente ha sostenuto il test di ingresso
- (B) esiste uno studente che non ha superato il test di ammissione
- (C) uno studente si è classificato al primo posto nella competizione Maths Challenge e si è iscritto al corso di laurea in Lettere
- (D) almeno uno studente iscritto al corso di laurea in Economia presso l'Università di Foggia non ha sostenuto il test di ingresso e non si è classificato tra i primi 50 nella competizione Maths Challenge
- (E) almeno uno studente non si è iscritto al corso di laurea in Economia presso l'Università di Foggia e ha sostenuto il test oppure si è classificato tra i primi 50 nella competizione Maths Challenge.

Soluzione Esempio 1:

La risposta è (D). Il quesito richiede di trovare la proposizione che equivale alla negazione della premessa. La premessa può essere formulata in termini di implicazione logica:

P (essere ammesso al primo anno del corso di laurea in Economia presso l'Università di Foggia) IMPLICA Q (sostenere un test di ingresso) oppure (non esclusivo) R (classificarsi tra i primi 50 nella competizione Maths Challenge).

Analizziamo le alternative proposte:

- a) nessuno studente ha sostenuto il test di ingresso (falso, non nega l'implicazione);
- b) esiste uno studente che non ha superato il test di ammissione (falso, non nega l'implicazione);
- c) uno studente si è classificato al primo posto nella competizione Maths Challenge e si è iscritto al corso di laurea in Lettere (falso, R vera non implica necessariamente P vera);
- d) almeno uno studente iscritto al corso di laurea in Economia presso l'Università di Foggia non ha sostenuto il test di ingresso e non si è classificato tra i primi 50 nella competizione Maths Challenge (risposta esatta: non Q (non ha sostenuto il test di ingresso) e non R (non si è classificato tra i primi 50 nella competizione Maths Challenge) dovrebbe risultare P falsa, ma P è vera e questo nega logicamente la premessa;
- e) almeno uno studente non si è iscritto al corso di laurea in Economia presso l'Università di Foggia e ha sostenuto il test oppure si è classificato tra i primi 50 nella competizione Maths Challenge (falso, Q o R vera non implica necessariamente P vera).

Esempio 2:

Tutti gli studenti che partecipano alla prova Maths Challenge ricevono un portachiavi rosso. Almeno uno studente di Foggia partecipa alla prova Maths Challenge. Luca è uno studente di Foggia. Se le precedenti affermazioni sono vere è possibile affermare con certezza che:

- (A) Luca riceve un portachiavi rosso
- (B) se Luca riceve un portachiavi rosso allora ha partecipato alla prova Maths Challenge
- (C) se Luca non riceve un portachiavi rosso non ha partecipato alla prova Maths Challenge

(D) se Luca non ha partecipato alla prova Maths Challenge sicuramente non riceve un portachiavi rosso

(E) Luca non riceve un portachiavi rosso se partecipa alla prova Maths Challenge.

Soluzione Esempio 2:

La risposta è (C).

Tutti gli studenti che partecipano alla prova Maths Challenge ricevono un portachiavi rosso:

P (partecipare alla prova Maths Challenge) IMPLICA Q (ricevere un portachiavi rosso).

Almeno uno studente di Foggia partecipa alla prova Maths Challenge: informazione inutile, non fondamentale per la risposta. Luca è uno studente di Foggia: importante che sia uno studente perché la proposizione P riguarda tutti gli studenti. Il fatto che sia di Foggia è un'informazione non importante.

- a) Luca riceve un portachiavi rosso (non è certo...è solo uno studente, può riceverlo oppure no);
- b) Se Luca riceve un portachiavi rosso allora ha partecipato alla prova Maths Challenge (falso poiché Q vera non implica P vera);
- c) Se Luca non riceve un portachiavi rosso non ha partecipato alla prova Maths Challenge (risposta esatta, infatti Q falsa implica P falsa);
- d) Se Luca non ha partecipato alla prova Maths Challenge sicuramente non riceve un portachiavi rosso (falso poiché P falsa non implica Q falsa, ricevere un portachiavi rosso è condizione necessaria ma non sufficiente);
- e) Luca non riceve un portachiavi rosso se partecipa alla prova Maths Challenge (falso, Q falsa e P vera nega P implica Q).

PROBLEM SOLVING

Esempio 3.

Gli organizzatori del concorso Maths Challenge devono stabilire le dimensioni dell'attestato di partecipazione da consegnare agli studenti che hanno partecipato alla fase finale delle selezioni. Si decide che il formato migliore del documento è dato da un rettangolo con un lato di lunghezza doppia rispetto all'altro. Ogni attestato sarà corredato da un vetro e da una cornice. Per determinare la spesa totale in funzione delle dimensioni dell'attestato, trascurando i costi relativi alla stampa, viene richiesto un preventivo. Il costo del vetro prevede una quota fissa pari a 5 euro e una quota variabile pari a 0,07 euro/cm². Il costo della cornice prevede una quota fissa pari a 6 euro e una quota variabile pari a 0,20 euro/cm. Indicando con x la misura del lato minore in cm, scrivere la funzione del costo totale per ogni attestato in funzione di x:

(A) $C(x) = 11 + 0,07 x^2 + 0,2 x$

(B) $C(x) = 6 + 0,07 x^2 + 0,8 x$

(C) $C(x) = 0,14 x^2 + 1,2 x + 11$

(D) $C(x) = 11 + 0,07 x^2 + 1,2 x$

(E) $C(x) = 5 + 0,07 x^2 + 1,2 x$.

Soluzione Esempio 3:

La risposta è (C).

Indicando con $C_v(x)$ il costo del vetro e con $C_c(x)$ il costo della cornice in funzione di x , si ottiene: $C_v(x) = 5 + 0,07 \cdot 2x^2$ e $C_c(x) = 6 + 0,20 \cdot 6x$.

Il costo totale è quindi $C(x) = C_v(x) + C_c(x) = 0,14 x^2 + 1,2 x + 11$.

Esempio 4:

Due treni partono contemporaneamente, uno dalla stazione A e l'altro dalla stazione B, distanti fra loro 100 km. La velocità del primo treno è di 60 km/h e quella del secondo è di 40 km/h. I due treni sono destinati a scontrarsi poiché viaggiano sullo stesso binario. Dopo quanto tempo i due treni si scontrano?

(A) 5 ore (B) 2 ore (C) 1 ora (D) 3 ore (E) nessuna delle precedenti.

Soluzione Esempio 4:

La risposta è (C).

Il primo treno percorre 60 km in un'ora; il secondo 40 km in un'ora. Si incontreranno, quindi, esattamente dopo un'ora.

Esempio 5

Un'automobile ha percorso 1200 km in 15 ore. Nelle prime 5 ore ha mantenuto una velocità media pari ai $\frac{2}{3}$ di quella mantenuta nelle ultime 10 ore. Determinare le due velocità.

(A) 75 km/h; 100 km/h (B) 20 km/h; 50 km/h (C) 60 km/h; 90 km/h (D) 25 km/h; 50 km/h (E) 64 km/h; 96 km/h.

Soluzione Esempio 5

La risposta è (C).

La velocità media nell'intervallo di tempo $\Delta t = 15h$ è $v = 1200/15$ km/h. Se v_1 è la velocità media nell'intervallo di tempo $\Delta t_1 = 5h$ e v_2 la velocità media nell'intervallo di tempo $\Delta t_2 = 10h$, risulta che lo spazio percorso nelle prime 5 ore di viaggio è $s_1 = 5 v_1$ mentre lo spazio percorso nelle 10 ore successive è $s_2 = 10 v_2$. Sommando membro a membro queste due relazioni si ottiene:

$$s_1 + s_2 = 5 v_1 + 10 v_2$$

Sostituendo 1200 Km al posto di $s_1 + s_2$ e sapendo che $v_1 = \frac{2}{3} v_2$ e risolvendo l'equazione nella sola incognita v_2 , si ottiene $v_2 = 90$ Km/h e quindi $v_1 = 60$ Km/h.

PERCENTUALI E APPLICAZIONI:

Esempio 6:

Le tariffe ferroviarie aumentano del 20%. Si decide di applicare uno sconto del 20% a chi viaggia in coppia. Così facendo quale sconto viene applicato alle coppie rispetto alle vecchie tariffe?

(A) 10% (B) 5% (C) 7% (D) 4% (E) nessuna delle precedenti.

Soluzione Esempio 6:

La risposta è (D).

Sia T_1 la taria iniziale. Aumentando T_1 del 20% la nuova tariffa sarà:

$$T_2 = T_1 + 0,2T_1 = 1,2T_1$$

Viaggiando in coppia a T_2 si applica uno sconto del 20% ovvero si pagherà una taria:

$$T_3 = T_2 - 0,2T_2 = 1,2T_1 - 0,2 * 1,2T_1 = 0,96T_1$$

Rispetto all'inizio, chi viaggia in coppia ha uno sconto pari a:

$$T_1 - 0,96T_1 = 0,04 T_1 = 4\%T_1$$

CALCOLO COMBINATORIO

Esempio 7:

Determinare quante persone ci sono nella centesima fila di un corteo sapendo che nella prima fila ci sono 5 persone, mentre in ogni fila successiva ci sono tre persone in più rispetto alla precedente.

(A) 305 (B) 302 (C) 299 (D) 308 (E) nessuna delle precedenti.

Soluzione Esempio 7:

La risposta è (B).

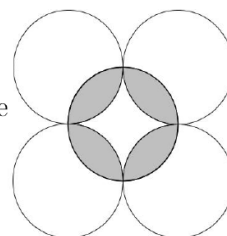
Il numero di persone, in ciascuna fila, costituisce una progressione aritmetica di ragione 3 e primo termine 5.

Nella centesima fila ci sono $5 + 99 \cdot 3$ persone = 302 persone.

GEOMETRIA:

Esempio 8:

Quanto vale l'area ombreggiata in figura sapendo che le circonferenze disegnate hanno tutte lo stesso raggio r ?



(A) $\frac{2-\pi}{2}r^2$ (B) $\frac{4-\pi}{4}r^2$ (C) $\frac{4-\pi}{2}r^2$ (D) $\frac{8-\pi}{4}r^2$ (E) nessuna delle precedenti.

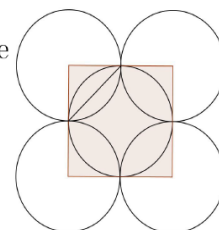
Soluzione Esempio 8:

La risposta è (E).

Considerando il quadrato che ha i vertici nei centri delle quattro circonferenze si deduce che l'area di una fogliolina, per la simmetria della figura, è $2\left(\frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right)$.

L'area richiesta è quattro volte l'area di una fogliolina, ovvero:

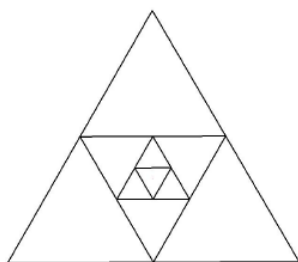
$$2r^2(\pi - 2)$$



Esempio 9:

I punti medi dei lati di un triangolo equilatero di lato 16 individuano un nuovo triangolo; i punti medi di questo nuovo triangolo individuano un nuovo triangolo e così via, come in figura. Qual è l'area del triangolo più interno?

- (A) $4\sqrt{3}$ (B) $12\sqrt{3}$ (C) $16\sqrt{3}$ (D) $64/\sqrt{3}$ (E) $\sqrt{3}$.



Soluzione Esempio 9:

La risposta è (E).

Il lato del triangolo più interno misura 2 quindi la sua area è $\sqrt{3}$.

NUMERI

Esempio 10:

Tra i divisori di $5! \cdot 6! \cdot 7!$ quanti sono quadrati perfetti?

- (A) 576 (B) 288 (C) 144 (D) 72 (E) 36.

Soluzione Esempio 10:

La risposta è (E).

Applicando la definizione di fattoriale si ottiene che il prodotto assegnato è

$$2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7$$

quindi i divisori sono del tipo $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$. Per i divisori quadrati perfetti deve essere $a = 0; 2; 4; 6; 8; 10$; $b = 0; 2; 4$; $c = 0; 2$; $d = 0$. In tutto si hanno 36 scelte possibili.

Esempio 11:

I compagni di classe di Lucia hanno comprato il regalo per la sua festa di compleanno. Sapendo che tutti hanno dato la stessa quota in monete da un euro, che i maschi sono 11, le femmine n e che, complessivamente, sono stati raccolti $n^2 + 12n + 23$ euro, quante sono le femmine?

(A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2 (E) 1.

Soluzione Esempio 11:

La risposta è (E).

Dividendo la somma raccolta per il numero di compagni si ottiene:

$$\frac{n^2 + 12n + 23}{n + 11} = n + 1 + \frac{12}{n + 11}$$

Poichè $n^2 + 12n + 23$ deve essere un intero positivo, $n + 11$ deve dividere 12. L'unico caso accettabile è $n=1$.

Esempio 12

Quanti sono i fattori primi di x , soluzione dell'equazione $\log_{12} \log_8 \log_4 \log_2 x = 2013$?

(A) 12 (B) 8 (C) 4 (D) 1 (E) non si possono determinare.

Soluzione Esempio 12:

La risposta è (D).

Risolvendo l'equazione si ottiene:

$$2^{4^8 12^{2013}}$$

Il solo fattore primo è 2.

Esempio 13:

Determinare la somma dei coefficienti del polinomio

$$(15a^{20} - 5a^{13} - 7)^{2013} - (15a^{20} + 5a^{13} + 7)^{671}$$

(A) 2013 (B) 671 (C) 20 (D) 13 (E) 0.

Soluzione Esempio 13:

La risposta è (E).

La somma dei coefficienti del polinomio si ottiene per $a = 1$:

$$3^{2013} - 27^{671} = 3^{2013} - 3^{3 \cdot 671} = 3^{2013} - 3^{2013} = 0$$

4. Conclusioni

L'esperienza decennale della gara Maths Challenge è stata ed è un'esperienza di interazione tra Scuola e Università che ha arricchito tutti, i docenti coinvolti come referenti di istituto, i componenti del Comitato Scientifico, le famiglie e soprattutto le studentesse e gli studenti coinvolti nelle diverse fasi della competizione.

Le gare di questi anni hanno consentito a tanti studenti di avere un feed-back sul loro livello di preparazione anche al di fuori delle aule scolastiche, confrontandosi con altri studenti della stessa scuola e di scuole diverse e lavorando a quesiti preparati da docenti diversi dai propri. La gara, quindi, è stata uno strumento per prendere consapevolezza dei propri punti di forza e delle lacune in merito alle conoscenze iniziali richieste per l'accesso al sistema universitario. Inoltre tale opportunità è stata anche uno strumento innovativo, incluso quest'anno "forzatamente digitale", per migliorare e potenziare le politiche di orientamento in ingresso per l'Università.

Piuttosto che incentivare la sola preparazione degli studenti per l'accesso ai test di ammissione all'Università, il cosiddetto teaching test, crediamo vadano pensati strumenti per colmare le lacune di base durante il percorso ordinario di studi. Negli ultimi anni sono stati realizzati diversi strumenti per consentire agli studenti di colmare gli obblighi formativi individuati nelle fasi di selezione iniziale, ad esempio i Dipartimenti di Area Economica forniscono l'accesso a corsi online gratuiti per acquisire le competenze di base in matematica intesi come prerequisiti per la preparazione agli esami curriculari. Infatti gli studenti "ammessi con obbligo di recupero" devono colmare il debito formativo mediante la frequenza dei corsi MOOC (Massive Open Online Courses) con la piattaforma Eudopen (<http://eduopen.org/>)

Gli studenti devono frequentare i corsi di:

- Matematica per principianti: Insiemi e operazioni elementari è raggiungibile a questo indirizzo: https://learn.eduopen.org/eduopenv2/course_details.php?courseid=38
- Precorso di Matematica Generale: Equazioni e Disequazioni è raggiungibile a questo indirizzo: https://learn.eduopen.org/eduopenv2/course_details.php?courseid=142.

EduOpen è una rete di atenei che offre corsi di livello universitario. La frequenza ai corsi è aperta a tutti – anche a studenti non universitari – ed è gratuita. Gli studenti possono ottenere, alla fine del percorso, vari livelli di attestati o certificati. Tutti gli studenti che completano un corso ricevono anche un Digital Badge rilasciato dalla piattaforma Bestr del CINECA. I partecipanti alla gara Maths Challenge che hanno ottenuto l'accesso alla fase finale della competizione sono ammessi alla frequenza dei corsi di laurea triennale dei Dipartimenti di Area Economica senza dover sostenere il test di ammissione. Nel corso dell'ultimo decennio, diversi finalisti Maths Challenge hanno deciso di iscriversi ai corsi dei Dipartimenti di Area Economica dell'Università di Foggia a testimonianza del successo di questa iniziativa in una prospettiva di orientamento attivo e finalizzato al reclutamento delle eccellenze.

Bibliografia

Petar Kenderov (2006): Competitions and mathematics education. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, European Mathematical Society

Berinde, V. (2004), Romania – The Native Country of International Mathematical Olympiads. A brief history of Romanian Mathematical Society. CUB PRESS 22, Baia Mare.

Frances A. Karnes, Tracy L Riley (1996), Competition developing and nurturing talents
Research Article

<https://doi.org/10.1177/107621759601900206>

https://it.wikipedia.org/wiki/Olimpiadi_internazionali_della_matematica

Una matematica da favola

Anna Maria Di Poccio¹

¹ Accademia Piceno - Aprutina dei velati (APAV),
Via del Concilio, 24, 65121, Pescara, Italia
e-mail: anna.dipoccio@gmail.com

Sunto

Il lavoro evidenzia l'importanza delle storie e narrazioni nel processo di apprendimento/insegnamento, ricercandone le potenzialità, le specificità e la loro valenza educativo-didattica. Questa scelta deriva dalla convinzione che un apprendimento *autenticamente significativo* è possibile se i bambini sono coinvolti emotivamente e cognitivamente. In tal senso, il percorso fantastico, concepito come struttura narrativa che declina la complessità del mondo reale, è immaginato da noi come efficace *ambiente di apprendimento*, anche per la formazione del pensiero matematico. Grazie alla comprensione dello *spazio* narrativo, i bambini esplorano, scoprono, costruiscono significati, abilità e motivazioni in una realtà condivisa. Ampliano le competenze di problem posing/solving, sviluppano la capacità immaginativa e il pensiero divergente.

Parole chiave: narrazione, fiabe, ambiente di apprendimento, matematica, problem posing/solving, capacità immaginativa, pensiero divergente.

1. Introduzione

Nel corso degli ultimi decenni molto si è scritto sul ruolo fondamentale del mondo narrato e delle storie, della loro capacità di introdurre i bambini al mondo (Bruner, 1992), oltre che per facilitare il sapere. Si assiste ad una maggiore attenzione sui fondamenti teorici e metodologici dell'applicabilità del metodo narrativo in tutte le discipline e in tutti gli ambiti. Al centro della nostra riflessione non può non essere il "*bambino che apprende*", a partire dalla sua esigenza più profonda, che coincide con la costruzione di senso, sia personale che sociale. Ma, in che modo il bambino costruisce il sapere, acquisisce, manipola e rielabora la conoscenza? Come, la narrazione, le storie, i libri illustrati, possono aiutare i bambini a costruire conoscenza, abilità, competenza?

Queste sono domande che ne sollecitano molte altre. Per esempio, perché narrare? E poi, quali sono le potenzialità della narrativa e il legame tra emozioni, cognizione e motivazione intrinseca?

Va da sé che a tali quesiti si potranno formulare risposte convincenti, ove ci sia un impegno chiarificatore, che consideri l'*ambiente di apprendimento* non solo dai confini fisici dell'aula o della scuola, ma *ambiente* inteso come valore culturale che consente di affermare la propria vita in un processo continuo di realizzazione. Quello che K. Lewin (1965) chiama *spazio di vita* di un individuo. Egli ci precisa i criteri che orientano il comportamento e possono così riassumersi: attività istintiva e volontaria, gioco, emozione, linguaggio, espressione. Dimensioni co-determinate dall'ambiente. Perciò vanno considerati i molteplici aspetti ancorati al *contesto* in cui si attiva l'obiettivo di apprendimento: interazione tra persone/risorse e complessità dei sistemi simbolici e culturali (Jonassen *et al*, 1999). Questo processo in divenire risale all'inizio degli anni novanta, nel dibattito dell'epistemologia costruttivista, ma affonda le radici nel pensiero di J.Dewey (1949). Infatti il filosofo e pedagogista statunitense sostiene che l'ambiente rappresenta le condizioni, quali esse siano, che interagiscono con i bisogni, i desideri, i propositi, le capacità personali, per creare l'esperienza che si compie. Dunque l'apprendimento può essere considerato come un sistema dinamico in cui lo studente *costruisce* attivamente nuova conoscenza mentre è impegnato e immerso in un'attività di apprendimento.

Fatta questa premessa, le pagine che seguono sono dedicate al *come* rendere il mondo dei numeri accattivante, coinvolgente, divertente e vivo nella memoria.

La nostra ipotesi è, che le fiabe, combinate con la matematica possano promuovere l'amore per la materia, a partire dalla capacità di costruire percorsi di modellizzazione a quella di identificare gli strumenti necessari per risolvere i problemi; organizzare, ricordare, riflettere, porre interrogativi, fare congetture, analizzare le possibili alternative. Di qui, la necessità di una riflessione sulla letteratura fiabesca, come risposta a questa sua preminente funzione educativa, e al suo proporsi *rotta pedagogica creativa*, sia delle esigenze di sviluppo dell'identità degli alunni, che della necessità dell'insegnante di farne un supporto metodologico straordinario per il mondo dei numeri. Di qui, peraltro, l'attenzione al rapporto tra dimensione narrativa, sviluppo dell'immaginazione e pensiero metaforico-figurativo, indissociabili alla facoltà del *comprendere* (Egan, 1986, 1988, 1988 a, 2012).

2. Una scelta: la narrazione, le storie, le fiabe, i libri illustrati

È noto che ogni essere umano percepisce la realtà in modo narrativo. La narrazione è la più antica forma di educazione che, da sempre, risponde ad una pluralità e complessità di funzioni, sia per la trasmissione dell'eredità culturale, sia per l'incidenza esercitata sull'apprendimento. Ma la principale ragione è che le storie raccontate hanno il potere di raggiungere sia la ragione che il cuore dei bambini, accogliendo le loro domande sulle grandi questioni della vita.

A questo punto è importante ricordare che la capacità di discriminare tra diverse quantità attinge a disposizioni innate nello sviluppo del bambino, prima ancora che abbia le parole

Una matematica da favola

per esprimerla. I disegni, mostrati in basso, rivelano la capacità cognitiva di un bambino (due anni) di percepire oggetti nell'ambiente e discernere tra uno o più elementi, distinguendo e mappando visivamente il senso di cardinalità dei numeri: due occhi, una bocca, una testa, due gambe, un sole, un numero indefinito di linee, ecc. (figura 1, 2).

Tali capacità sono i mattoncini che permettono a ciascun bambino di costruire l'*edificio della matematica*, partendo dalle conoscenze precedenti per approdare all'acquisizione del sistema simbolico, strettamente collegato all'apprendimento e alla comprensione dei suoi significati. Questa la ragione per la quale si riconosce la rilevanza dei dispositivi narrativi nell'azione didattica. Riassumendo, possiamo dire che la narrazione è un dispositivo meraviglioso che permette di creare esperienze numeriche che si prestano al gioco dell'immaginazione, all'ascolto e al dialogo condiviso.

D'altro canto, l'apprendimento è un processo complesso, in quanto coinvolge un reticolo di fattori, quali le motivazioni, la componente emotivo-affettiva e la personalità, ma anche l'interazione con l'ambiente socio-culturale entro il quale si entra in rapporto. Questi differenti fattori caratterizzano gli effetti sul processo di apprendimento, favorendolo in alcune situazioni o impedendolo in altre. In questa dimensione problematica, le storie ci prendono per mano, modellano la visione di noi stessi e del mondo e in qualche modo ne siamo il risultato (Taylor, 1999). Ma, per riuscire fattori di propulsione, devono trovare fondamento in attività formative, dove i bambini possano apprendere con il piacere di riuscita, annullando le sensazioni di ansia e paura.

E allora, ci siamo chiesti, quale è la natura della narrazione cui spetta il compito di ridurre la complessità e la confusione? Se la narrazione è l'arte di esprimere la vita reale o la fantasia, modulando abilmente la comunicazione verbale e paraverbale attraverso le parole, il tono della voce, le espressioni facciali, il ritmo, le pause, l'attenzione alle reazioni di chi ascolta e ai suoi commenti, occorre riconoscere la centralità della vicinanza emotiva e del clima di intimità che facilitano l'espressione emotiva e *il comprendere*. Un setting didattico che amplifica la comunicazione, l'attitudine all'ascolto, il rispetto delle regole e dei ruoli. Ciascuno ha grandi aspettative di soddisfazione relazionale e di ricevere empatia (Figura 3).



Figura 1

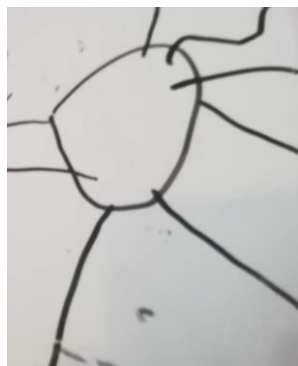


Figura 2

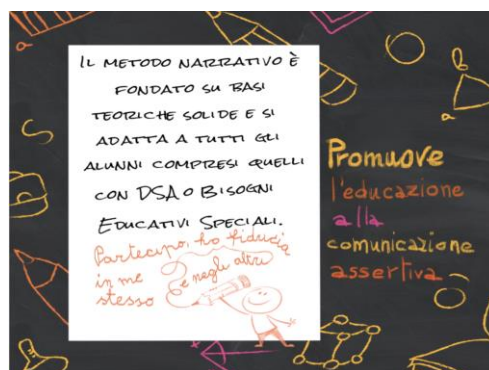


Figura 3

Tutto ciò è vero, ma se allarghiamo il campo delle considerazioni, leggere una storia, per quanto possa essere un'esperienza piacevole e divertente, è molto più di questo.

I bambini, dall'esperienza della lettura ne traggono un '*comportamento appreso*', allo stesso modo come giocare, saltare, cantare, mangiare, ecc.

I bambini sviluppano la capacità di *comprensione* che è essenziale nello studio. Capacità sorretta da due componenti: tra ciò che proviene dalla soggettività di ognuno e ciò che deriva dagli stimoli del testo. Come dice Morin (2000), c'è una conoscenza che è comprensiva e che si fonda sulla comunicazione, sull'empatia e persino sulla simpatia intersoggettiva; così io comprendo le lacrime, il sorriso, le risa, la paura, la collera vedendo l'*ego alter* come *alter ego*, con la mia capacità di provare i suoi stessi sentimenti. Le emozioni innescate nascono dal coinvolgimento empatico con gli stati interiori e i punti di vista dei personaggi (Levorato, 2000). Comprendere, quindi, comporta un processo di identificazione da soggetto a soggetto.

I bambini, entrando nella storia, si identificano nei protagonisti facendo proprie le loro abilità nel risolvere le *situazioni-problema*. L'empatia aiuta i bambini a mettere in relazione il fatto narrato con la realtà. Un processo di costruzione attiva che orienta il bambino al problem solving.

Va aggiunto a questo breve quadro, la valenza formativa del linguaggio dei libri illustrati e della loro struttura, quali ad esempio, il registro narrativo, la forma, i colori, le illustrazioni. Non è facile definire un libro illustrato, può essere qualunque cosa: un libro giocattolo, una storia illustrata che enfatizza l'aspetto visivo o, una storia raccontata con le sole immagini.

Ciò che i libri illustrati hanno in comune è l'aspetto della versatilità e quello dell'interazione dell'immagine con la componente verbale. Nel complesso, un libro illustrato è un testo o un iconotesto in cui il verbale e il visivo sono intrecciati magistralmente in un'unica entità, tra i confini del possibile e dell'impossibile. Si avrà presente che, a volte, è l'aspetto visivo che riassume e racconta la storia. Altre volte è il linguaggio verbale che prende il sopravvento. Le figure veicolano significati *altri* in chi legge, e assumono la caratteristica ermeneutica di farsi ponte di molteplici significati (Bruner, 1997). Le illustrazioni sono in grado di sviluppare ulteriormente il vocabolario matematico: esplorare il linguaggio posizionale, il vocabolario comparativo, l'organizzazione temporale, stabilire connessioni di causa ed effetto, o ancora, contare semplicemente gli oggetti in una pagina (Heuvel-Panhuizen, *et al*, 2014). Questa interazione tra parole e figure può assumere una diversa funzione: carattere di congruenza, contrapposizione o di alternanza. Qualunque sia la relazione, l'illustrazione di una storia aggiunge sempre informazioni che non possono essere fornite dalla narrazione verbale.

Ad esempio, la figura 3, ci mostra la flessibilità ma anche la complessità dell'attività descritta. Inoltre, elabora, completa, illumina il testo di ulteriori dettagli, rispetto al

Una matematica da favola

rapporto tra istanza narrativa e efficacia comunicativa. D'altronde, da sempre la letteratura per l'infanzia svolge un ruolo pedagogico nello sviluppo del bambino in quanto, narrare è educare (Cambi, Cives, 1996). Si tratta di una dimensione che armonizza le ragioni della mente e del cuore. Tutto ciò è particolarmente interessante per pervenire ad interventi didattici interdisciplinari.

Molti autori hanno creduto nella forza delle storie e della narrazione. Bruner ed Egan, in particolare, hanno rintracciato nella narrazione una importante modalità da affermare e potenziare come fattore catalizzatore di differenti stili cognitivi e intelligenze (Gardner, 2011). La tesi teorica di K. Egan (1997), suggerisce che l'intero curriculum potrebbe essere modellato secondo il potere coinvolgente delle storie, fin dalla primissima infanzia. L'autore concentra la sua specifica attenzione al coinvolgimento emotivo-affettivo delle storie. Bruner (2002), sostiene che la narrativa, anche quella di fantasia, dà forma a cose del mondo reale e spesso conferisce loro addirittura un titolo alla realtà. La sua posizione (1992), fa perno sul ruolo fondamentale della narrazione che la rende essenziale per lo sviluppo di quello che egli chiama 'pensiero narrativo', ossia la capacità cognitiva attraverso cui le persone costruiscono strutture mentali adeguate, per mettere ordine al disordine della propria esperienza.

Ma cos'è una fiaba? La fiaba è un genere letterario che ritroviamo nel corso dei secoli in ogni cultura. Un fattore universalmente concordato è la natura del racconto costruita su situazioni e azioni dei personaggi secondo una struttura sequenziale e temporale, legata a una *cooperazione interpretativa* che coinvolge chi legge. Da fruitore passivo, il lettore diventa protagonista attivo che traccia il suo percorso nel "bosco narrativo" facendo inferenze e operando delle scelte tra realtà e fantasia, secondo le regole del suo gioco, nel cosiddetto *mondo possibile* del racconto (Eco, 1979, 1994).

Amiamo definire la fiaba come *luogo pedagogico* con cui il bambino entra in contatto con i *problemi* della vita quotidiana, in modo giocoso. D'altro canto, il gioco per il bambino è la tecnica del progresso, la strada obbligata verso l'evoluzione e la conquista del mondo. Se all'inizio esso è soprattutto esercizio e lavoro pratico, ben presto si carica di significati più profondi e complessi, e permette al bambino di ricostruire il mondo secondo i suoi personali desideri, stimolando la creatività (Lodi, 1977).

3. Fiaba, tra gioco e apprendimento creativo della matematica

Non possiamo non rilevare atteggiamenti negativi, ansia, paura, nei confronti della matematica da parte degli studenti di ogni ordine e grado. Il motivo è che la trovano "difficile" da capire. L'avversione per la materia, le difficoltà di apprendimento, i fallimenti e i continui insuccessi scolastici sono elementi molto importanti, e se i suddetti fatti vengono mal gestiti o addirittura ignorati, possono procurare un disagio sociale e condizionamenti per il futuro dello studente (Figura 4).

La ricerca "*European Girls in STEM*", realizzata nel 2019 da Microsoft in collaborazione con la London School of Economics tenta di individuare anche le cause del gap di genere

per cui le donne non si scrivono a tali percorsi di studi. Ciò è fondamentale per il discorso che andiamo facendo e che deve attuarsi in un quadro di criteri e obiettivi dell'azione didattica che vuole essere "*ambiente educativo di apprendimento*", che tenga conto anche delle discriminazioni e stereotipi di genere.

Che la matematica ci circonda e faccia parte di ogni aspetto della nostra vita è un fatto noto, ma i bambini hanno bisogno di capire il ruolo della matematica nella vita di tutti i giorni e devono includere un'assimilazione creativa nella loro routine quotidiana.

È importante che le basi siano forti. Per questo, i bambini in una età molto precoce dovrebbero essere guidati in modo tale che abbiano più interesse per la disciplina, perché si può capire qualcosa solo se per essa c'è interesse. È fondamentale che l'insegnante abbia nel set degli strumenti vecchie e nuove procedure da modulare nel processo di apprendimento, in relazione ai bisogni del singolo allievo e all'interno dei gruppi. La metafora di Bruner (1997), della 'cassetta degli attrezzi' ha la specifica funzione di fornire non solo gli strumenti con cui gli individui costruiscono e ricostruiscono la propria concezione del mondo e se stessi, ma anche la capacità di affrontare i problemi complessi, ovvero, capirli, manipolarli e risolverli (Di Poccio, 2018). Ad ogni modo, se vogliamo aiutare gli studenti a sviluppare la comprensione dei concetti matematici, evitare gli ostacoli che si frappongono all'effettiva capacità di prendere decisioni per la propria vita e la carriera lavorativa, occorre predisporre le condizioni idonee affinché si possa favorire l'apprendimento.

E, allora, come si possono aiutare i bambini ad avere il massimo del loro sviluppo? Vigotskji (1990), l'aveva chiamata "zona di sviluppo prossimale". Lo studioso sostiene che lo sviluppo cognitivo avviene tramite interazioni sociali. Afferma che il processo di apprendimento risulta più efficace se il percorso conoscitivo è il risultato delle interazioni tra ciò che un alunno può comprendere senza alcun aiuto e le opportunità che provengono, invece, dal ruolo facilitante di un pari o di un adulto.



Figura 4



Figura 5

Una matematica da favola

Le fiabe, ideate come strutture narrative, consentono ai bambini la flessibilità di pensare in modo creativo alla matematica, ma soprattutto, producono soddisfazione, senso di gioia e competenza (Catarsi, 2001).

Si delinea, allora, una *situazione-contesto* (Figura 5) didatticamente efficace per facilitare e sostenere il processo di *costruzione attiva* della conoscenza.

In sintesi, riteniamo che il metodo narrativo comprenda tutti i processi, ritenuti basilari per attuare le condizioni che corrispondono ad una serie di punti salienti. Il metodo narrativo è innanzitutto una modalità che consente d'imparare a ragionare sui problemi, fare previsioni, progettare e verificare. Stimolare, fortificare, motivare: sono queste le parole chiave che alimentano la capacità immaginativa, sollecitano la costruzione del pensiero critico e riflessivo. È proprio qui che entrano in gioco la fantasia, la creatività e il pensiero divergente. Aspetti che permettono di coinvolgere il bambino emotivamente e cognitivamente secondo i profili intellettivi di ognuno. Una strada che aiuta a promuovere lo spazio metacognitivo.

Tutto ciò a ricordare che il compito della scuola non è mero atto trasmissivo. Il passaggio dal paradigma dell'insegnamento a quello dell'apprendimento ha spostato l'attenzione sulla complessità dei meccanismi degli ambienti educativi passando da una prospettiva trasmissiva a una costruttivista che parte dalle teorie sulla costruzione della conoscenza di Dewey, Piaget. Ma anche Vygotskij ci ha parlato, come sopra osservato, che ogni concetto si trasforma e si sviluppa in un contesto di negoziazione sociale del sapere. Nella pratica educativa si traducono in motivazione e partecipazione dello studente (Di Poccio, 2018).

L'apprendimento diviene un processo attivo di scoperta e partecipazione, basato sulla motivazione intrinseca piuttosto che su una conoscenza passiva di fatti e regole. Il ruolo dell'insegnante diventa sempre più visto come guida che facilita e gioca un ruolo essenziale in questo processo. Ciò sintetizza un modello organizzativo scolastico inclusivo, flessibile, pronto a rispondere alle soggettività di tutti gli allievi. Edgar Morin (2000), con la sua metafora "*La testa ben fatta*", enfatizza e sottolinea il ruolo dell'educazione. Allarga gli orizzonti a nuove prospettive, concentra l'attenzione sui problemi e le sfide più stringenti che i tempi attuali devono affrontare. L'idea di educazione è quella in cui si favorisce l'attitudine generale della mente a porre i problemi e trovare soluzioni, stimolando il pieno impiego dell'intelligenza generale.

In questa dimensione è conseguente pensare che le fiabe, intenzionalmente predisposte come *ambienti di apprendimento*, rappresentino per il bambino una strada privilegiata per conoscere, capire, formulare ipotesi.

Il potere generativo dell'immaginazione ci rende capaci di saper leggere sia le interpretazioni testuali che i fenomeni complessi (Levorato, 1988), fornendo chiavi di accesso ai bambini per operare in ambito dei concetti astratti.

Che cosa succederebbe se...? Quella delle "ipotesi fantastiche" è l'esercizio dell'immaginazione, una tecnica semplicissima. Una forma che fa scaturire una serie di domande. Per formulare la domanda si scelgono a caso un soggetto e un predicato. La loro unione fornirà l'ipotesi su cui lavorare. All'interno di quell'ipotesi tutto diventa logico

e umano, si carica di significati aperti a diverse interpretazioni, il simbolo vive di vita autonoma e sono molte le realtà cui si adatta (Rodari, 1973). *E se...*?

La tecnica della domanda induce a porsi interrogativi; arricchisce il pensiero di possibilità e offre il piacere di agire, di emozionarsi di fronte a nuove scoperte nell'attività di trovare soluzioni ai problemi. È la chiave per pensare, giocare, misurare, contare, senza temere di commettere errori, perché da questi si può imparare.

Questi aspetti essenziali sono sottesi ad una creatività di cui il docente è in possesso e, attraverso la quale, progetta il *come* e *che cosa* l'alunno apprende. Per esempio, quando si fa promotore di utilizzare storie divertenti, anche di *nonsense*, come gancio per attirare l'attenzione degli studenti o per rompere la routine. Ecco, allora, che la narrazione aiuta ad interagire con idee complesse. Tutti elementi che hanno un legame con il buon uso della logica e più in generale con la cognizione e la motivazione intrinseca.

4. Perché la fiaba nella didattica della matematica?

La fiaba da sempre ci affascina, viaggia nel tempo e nello spazio attraverso i secoli. È il luogo di tutte le ipotesi (Rodari, 1973), ci può dare delle chiavi per dare una spiegazione ai 'mondi possibili' della realtà che non conosce.

Con le storie tutto sembra possibile solo con un po' di fantasia. Lo svolgersi degli eventi di una storia è divertente così come lo è l'effetto sorpresa della sua conclusione. I bambini trovano un immediato divertimento. La trama, il conflitto, i problemi: dalla fiaba origina un problema. In ogni fiaba troviamo la classica impostazione della rottura di un equilibrio, di un conflitto o difficoltà che mette in crisi l'ordine naturale delle cose, un mezzo che lo complica e una fine che risolve.

Ma quale trama può rendere coinvolgente un problema matematico? Non si tratta di catturare soltanto l'attenzione degli studenti attraverso un'avventura, un dramma, ma di creare una trama in grado di soddisfare il suo scopo e focalizzare l'attenzione anche sulla matematica che emerge dalla storia. Una trama che sviluppa un problema può essere una straordinaria opportunità per incoraggiare il bambino ad individuare gli elementi cardine della situazione problematica operando la sua *transizione alla posizione del problema* e del perché ha bisogno di risolverlo.

Il processo permette ai bambini di esplorare e di provare a trovare da soli le diverse soluzioni al problema. Le attività possono essere costruite attraverso la semplice discussione o utilizzando giochi di ruolo, disegni, grafici, ecc.

Una storia è quindi in grado di guidare il pensiero dei bambini per costituirsi in elementi utili per problematizzare (problem posing) attorno a situazioni problematiche che dovranno successivamente risolvere (problem solving). Lo scopo è anche quello di favorire lo sviluppo del pensiero divergente, attraverso la gamma di strategie possibili, utili all'esplorazione e rappresentazione. La trama diventa, quindi, un fertile terreno che può orientare, sia i sentimenti che i pensieri del lettore o ascoltatore, al contenuto che una

Una matematica da favola

storia promuove. Si vuol dire, insomma, che la matematica nella fiaba acquista significato, soprattutto, se privilegiamo storie, personaggi, situazioni con forti conflitti, trame sorprendenti e coinvolgenti per i bambini. Così gli stimoli promossi sono in grado di generare nuove motivazioni all'apprendere.

Facciamo un esempio: (...) *Nella magica foresta del paese di Matelandia vivono sette folletti, un mondo delle meraviglie dove può accadere di tutto. Fata Isotta è sulle tracce della perfida strega per appropriarsi delle merende avvelenate che vuole rifilare agli abitanti. È più probabile che la fatina scelga il percorso giusto o quello sbagliato?* (...) (Di Poccio, 2016).

Inventare o narrare una fiaba risponde all'aspetto del gioco delle narrazioni: la logicità del discorso, la consequenzialità della narrazione, la fluidità logica degli interventi.

Un contributo di ulteriore chiarificazione viene da Rodari (1973), il quale fa notare:

Conosco maestri che inventano, e aiutano i bambini ad inventare, bellissime storie manovrando i "blocchi logici", i materiali strutturati per l'aritmetica, i gettoni per l'insiemistica, personificandoli, attribuendo loro ruoli fantastici: questo non è un "altro modo" di fare insiemistica, In opposizione al mondo operativo-manuale che questo insegnamento esige nelle prime classi. È sempre lo stesso modo, ma arricchito di significati. Si trova impiego così non solo la capacità del bambino di "capire con le mani" ma anche a quella, ugualmente preziosa, di "capire con la fantasia".

Del resto, dietro il gioco della creazione di storie passa un contenuto matematico e di organizzazione mentale (Caldelli, D'Amore, Giovannoni, 1984). Cambia la modalità comunicativa ma non il messaggio, ovvero, come i numeri ci aiutano nei compiti quotidiani.

Si potrebbe dire che narrare, dipingere o disegnare, rappresentare le scene della narrazione o la scena centrale, sono tutti momenti che forniscono il contesto per un efficace apprendimento.

Nello sviluppo del pensiero matematico, le storie consentono attività utilizzate per questo scopo, come ad esempio, l'attività fisica, contando i passi, i salti; cantando canzoni matematiche e battendo il ritmo che si ripete; osservando le opere d'arte e creando forme geometriche. Le opportunità per la matematica sono innumerevoli. Questa finalizzazione, del conoscere e capire, mostra ai bambini come i numeri ci aiutano nei compiti della vita quotidiana. Tali esempi pratici che coniugano storie e matematica, senza dubbio, creano nei bambini le condizioni più propizie per le fasi successive dello sviluppo di più difficili concetti matematici.

Lo sviluppo del vocabolario matematico è una parte essenziale dell'apprendimento che non può essere trascurato. I simboli come minore, maggiore, uguale, sono espressioni astratte per il bambino. I bambini, tuttavia, ne faranno un corretto uso nel percorso formativo se questa simbologia viene introdotta gradualmente.

Vi è ancora spazio per cogliere altri aspetti didattici della fiaba. Essa è per il bambino una prima esperienza di classificazione attraverso la struttura binaria degli opposti. Si tratta

di un primo orientamento concettuale su una vasta gamma di fenomeni complessi (buono-cattivo, bene-male, ricco-povero, odio-amore, piccolo-grande, dentro-fuori, caldo-freddo, felice-triste, alto-basso, lungo-largo, sotto-sopra...) (Egan, 2012).

Nella fiaba, il bambino può riconoscere le tipiche costanti narrative, guardando con occhio matematico ai momenti modulari che si ripetono. E ancora, le fiabe modellizzano fatti e fenomeni. Così una strategia possibile sarà quella di muovere dalla narrazione che è già una prima selezione di dati, per passare poi alle rappresentazioni non convenzionali e arrivare alla rappresentazione formale. Insomma, le fiabe sono piene di attività.

Il linguaggio e lo stile sono comprensibili per i bambini, ma allo stesso tempo promettono suspense, sorpresa e meraviglia.

Prendiamo in esame alcuni principi generali che stanno alla base delle fiabe. Il *c'era una volta... in un certo luogo... e in un certo tempo, quando gli animali potevano parlare*, ecc., costituiscono un mezzo per consentire al nostro pensiero di essere trasportato in un mondo "altro". Il bambino che ascolta si apre ad un repertorio ricco di nozioni, connessioni, relazioni matematiche e con un potere motivante messo in atto dal processo di *internalizzazione* (Vigotskji, 1990).

5. Considerazioni conclusive

L'intento che ci ha guidato è stato quello, pur senza pretese di esaustività, di mettere in luce l'importanza delle storie, immaginate come ambienti di apprendimento, funzionali all'esigenza di aiutare il bambino a familiarizzare con il vocabolario matematico. Quello della narrazione è un argomento che ben si presta ad essere analizzato sotto molteplici punti di vista e varie prospettive. Ci si è mossi seguendo un preciso cammino. In queste pagine abbiamo dato particolare attenzione al modo in cui il bambino si approccia in maniera attiva con il materiale narrativo.

Sono emersi alcuni dei motivi che rendono una storia narrata la strada privilegiata che permette ai bambini di comprendere e ricordare. Nel quadro di motivi si sono cercati i legami essenziali del supporto affettivo-emotivo, rilevanti nei processi cognitivi e meta-cognitivi. Si è detto, che creare un'atmosfera confortevole, intorno ad un tema matematico, significa fornire sicurezza e soddisfazione. Inoltre, si è fatto richiamo alla forza comunicativa del libro illustrato e delle storie raccontate ad alta voce e alla circolarità del processo di comunicazione. È emersa la rilevanza data alla storia narrata in cui lo studente può ritrovarsi, riconoscersi e misurarsi con le potenzialità dei personaggi o con gli stati interiori del protagonista e, nel contempo, si sono ricercate le sollecitazioni a conoscere e le motivazioni ad apprendere.

Crediamo che le storie siano una preziosa opportunità per esplorare, conoscere, rendere concreti e visibili e i concetti matematici astratti, poiché dalla narrazione prende forma la riflessione sull'esperienza, una realtà negoziata e condivisa culturalmente.

Una matematica da favola

Ora, se le storie, hanno così importanza per lo sviluppo cognitivo del bambino, in quanto, strumenti privilegiati per produrre senso e significato, crediamo che la ricerca scientifica debba essere accompagnata da una consapevolezza maggiore sulle molteplici possibilità di questa esperienza.

Bibliografia

Cambi, F., Cives, G., (1996), *Il bambino e la lettura, Testi scolastici e libri per l'infanzia*, Pisa

Bruner J., (1990), *Acts of meaning*, Cambridge, MA: Harvard University Press, (tr. it.) *La ricerca del significato*, Bollati Boringhieri, Torino, 1992

Bruner J., (1996), *The Culture of Education*, Harvard University Press, Cambridge (Mass.) (Trad. it. 1ed.) *La cultura dell'educazione. Nuovi orizzonti per la scuola*, Feltrinelli, Milano, 1997

Bruner J., (2002), *La fabbrica delle storie: diritto, letteratura, vita*, Roma-Bari, Laterza

Caldelli M.L., D'Amore B., Giovannoni L., (1984) *Il bambino matematizza il mondo, Esperienze protomatematiche nella scuola dell'infanzia*, La Nuova Italia, p. 28

Catarsi E., (2001), (a cura di), *Lettura e narrazione all'asilo nido*, Edizioni Junior, Bergamo

Dewey J., (1949), *Esperienza e educazione*, La Nuova Italia, Firenze, p. 32

Di Poccio A. M., (2016), *Numeri in fabula. Le probabili avventure nel paese di Matelandia* p. 78

Di Poccio A. M., (2018), *narrazione e apprendimento: scopriamo la matematica dell'incerto con il Digital Storytelling, insegnare matematica: didattica, inclusione e cooperazione*, Quaderni dell'APAV, n° 3, Pescara

Eco, U., (1979), *Lector in fabula. La cooperazione interpretativa nei testi narrativi*, Bompiani, Milano

Eco, U., (1994), *Sei passeggiate nei boschi narrativi*, Bompiani, Milano

Egan, K., (1986), *Teaching as Story Telling: an alternative approach to teaching and curriculum in the elementare school*. Chicago:University of Chicago Press

Egan, K., (1988), *Primary Understanding. Education in Early Childhood*. Routledge, New York

Egan, K., (1988a). *Teaching as Story Telling*. Canadian Journal of Education / Revue canadienne de l'éducation. 13. 10.2307/1494927

Egan, K., (1997), *The Educated Mind: How Cognitive Tools SHAPE Our Understanding*, Licensed by The University of Chicago Press, (trad. it.) *La comprensione multipla*.

Sviluppare una mente somatica, mitica, romantica, filosofica e ironica, Edizioni Erickson, Trento, (2012)

Gardner H., (2011), Educare al comprendere. Stereotipi infantili e apprendimento scolastico, Feltrinelli Editore, Milano,

Jonassen D., (1999), Learning with, technology, Merrill Prentice Hall

Levorato, M. C., (1988), Racconti, storie e narrazioni. I processi di comprensione dei testi, Il Mulino, Bologna

Levorato M.C., (2000), Le emozioni della lettura, il Mulino, Bologna

Lewin K., (1965), Teoria dinamica della personalità, Universitaria, Firenze, p. 75

Lodi M., (1977), Cominciare dal bambino. Scritti didattici, pedagogici e teorici, Giulio Einaudi editore s.p.a., Torino, p. 157

Morin E., (2000) La testa ben fatta. Riforma dell'insegnamento e riforma del pensiero, Cortina Editore, Milano

Rodari G., (1973) Grammatica della fantasia. Introduzione all'arte di inventare storie, Einaudi ragazzi, Edizioni EL (2013), Trieste, pp. 42-44

Taylor D., (1999), Le storie ci prendono per mano, Frassinelli, Segrate

Heuvel-Panhuizen, Marja & Elia, Iliada & Robitzsch, Alexander. (2014). Effects of reading picture books on kindergartners' mathematics performance. Educational Psychology. 36. 1-24. 10.1080/01443410.2014.963029.

Vygotskij L. S., (1990), Pensiero e linguaggio. Ricerche psicologiche, a cura di L. Mecacci, Roma-Bari, Laterza

Il Principio di Relatività Galileiano in Meccanica Classica

Liliana Restuccia^a

*^aDipartimento di Scienze Matematiche e Informatiche, Scienze Fisiche e Scienze della Terra,
Università di Messina, Viale Ferdinando Stagno d'Alcontres 31, S. Agata, 98166 Messina, Italia
lrestuccia@unime.it*

Sunto

In questo lavoro si enuncia e si discute il principio di relatività di Galileo. Introducendo i concetti di laboratorio (osservatore, sistema di riferimento) Newtoniano e Galileiano, si dimostra l'invarianza in forma della seconda legge di Newton per trasformazioni Galileiane, che fanno passare da un sistema di riferimento inerziale Galileiano ad un altro. Si enunciano i postulati che stanno alla base della Meccanica Newtoniana, che vale quando il modulo v della velocità dei mezzi che si stanno studiando è molto minore del modulo c della velocità della luce nel vuoto ($v \ll c$). Si ha modo di introdurre gli assiomi di Einstein che stanno alla base della relatività ristretta, valida per v minore di c ($v < c$) o comparabile con c , elaborata da Einstein in quadri-formulazione nello spazio-tempo di Minkowski, dove l'assioma del tempo assoluto non è più valido e dove le leggi sono invarianti per trasformazioni di Lorentz, le quali fanno passare da un sistema inerziale, nel senso Einsteiniano, ad un altro.

Parole Chiave Meccanica Newtoniana, Principio di relatività di Galileo, Trasformazioni di Galileo, Assiomi della Relatività ristretta di Einstein.

1. Introduzione

Questo articolo si occupa del principio di relatività di Galileo, trattando dapprima i concetti di spazio e tempo assoluto, di Laboratorio Newtoniano e di Laboratorio Galileiano (o inerziale) in Meccanica classica, che comprende teorie macroscopiche, aventi come fondamento teorico i principi della Meccanica Newtoniana e valide nell'ipotesi in cui il modulo della velocità dei punti mobili sia molto minore rispetto al modulo della velocità della luce nel vuoto.

E' necessario richiamare che si definisce teoria fisica una costruzione logico-razionale, valida sotto opportune ipotesi e limiti stabiliti, alla cui base sono posti assiomi (postulati), verità inconfutabili, che non si dimostrano. Tramite definizioni di enti fisici, che entrano in gioco nella teoria, enunciati, proposizioni, teoremi, ..., una teoria fisica conduce alla formulazione di leggi fisico-matematiche, chiamati modelli fisico-matematici, scritte sotto forma di equazioni o disequazioni (di tipo lineare, non lineare,

in forma finita, differenziale, integrale,...), in cui compaiono gli enti in gioco, atte a descrivere (o a predire) determinati fenomeni della natura. I risultati di una teoria fisica devono essere d'accordo con i dati sperimentali ottenuti durante osservazioni e misure riguardanti i fenomeni sotto considerazione. In generale, una teoria non studia un corpo ma un fenomeno collegato ad un suo comportamento. Per i vari comportamenti di uno stesso corpo si applicano differenti teorie. Quindi una teoria descrive un comportamento di un corpo ma non il corpo stesso.

Una teoria è chiamata macroscopica quando si riferisce alla scala di indagine macroscopica, dove non si distinguono atomi, particelle subatomiche, quali protoni, elettroni, neutroni (i quali interessano la scala atomica), non si distinguono particelle, reticoli cristallini (i quali interessano la scala mesoscopica), ma il corpo è visto come un mezzo continuo, vale a dire occupante una regione geometrica dello spazio, delimitata da confine o no (nel caso fosse considerato illimitato), in cui ogni punto del mezzo viene chiamato punto materiale. Dal punto di vista filosofico questo punto materiale non ha volume, ma non è un punto Euclideo, definito da Euclide “ciò che non parti”, poiché nella realtà fisica ogni punto materiale, avente massa m , contiene almeno 10^{23} particelle (atomi, molecole) e quindi possiede un volume, che non viene considerato ai fini della trattazione matematica. Questa discussione filosofica sul concetto di punto materiale o punto di un continuo è abbastanza complessa e andrebbe approfondita, ma per motivi di semplicità daremo per noto tale concetto fisico-matematico.

La Meccanica Newtoniana comprende tutte le teorie (la teoria dei corpi rigidi di Eulero, la teoria dei corpi deformabili, ed altre) sviluppatesi a partire dalla teoria di Newton, la quale è valida per un punto materiale, alla cui base sono posti i principi di Newton.

Il modello di Newton per un punto materiale (o seconda legge di Newton) descrive un corpo, il cui comportamento è il più semplice possibile. Infatti, esso descrive solo il movimento del corpo, caratterizzato dalla sua posizione, velocità, accelerazione e traiettoria, sotto l'azione di una forza esterna (che in certe situazioni può essere nulla ed in tal caso si studia la statica del punto). Tale corpo viene modellizzato come un punto concentrato nel suo baricentro, non è soggetto a rotazioni, non subisce deformazioni, risulta a temperatura costante e può solo traslare. Infatti, il punto materiale per sua definizione non può ruotare intorno ad assi propri e trasla soltanto, nel senso che, considerato un sistema di assi metrizzati Cartesiani solidali al corpo, modellizzato come punto, le direzioni di tali assi rimangono invariate rispetto alle direzioni di un altro sistema di assi Cartesiani solidali al laboratorio rispetto al quale si studia il movimento; inoltre il punto materiale ha dimensioni molto piccole rispetto al laboratorio in cui si eseguono le misure. La Meccanica di Newton vale nel *limite* detto appunto *classico* (ipotesi di base), vale a dire nel limite in cui il modulo v delle velocità dei punti mobili sia molto più piccolo rispetto al modulo c della velocità della luce nel vuoto ($v \ll c$, $c = 299\,792,458$ km/s).

In questo lavoro si fa vedere come la seconda legge della dinamica del punto materiale enunciata assiomaticamente da Newton, il quale nasce l'anno in cui Galileo muore (1642), fu enunciata in più modi da Galileo, il quale mediante studi sperimentali trova

in una visione molto moderna che esistono sistemi di riferimento (laboratori o osservatori), chiamati Galileiani, che si muovono di moto traslatorio rettilineo ed uniforme uno rispetto ad un altro, rispetto ai quali le leggi del moto si scrivono nella forma più semplice possibile e tale forma risulta invariante rispetto a tali laboratori.

Nella fisica moderna la proprietà per una legge fisica di essere invariante in forma è stata sostituita dalla proprietà di essere oggettiva. L'oggettività di una legge implica:

1) L'invarianza della legge stessa rispetto a determinati laboratori e quindi l'invarianza rispetto alla trasformazione di coordinate che relazionano il passaggio da un laboratorio ad un altro;

2) Gli enti fisici, vettori o tensori di ordine tensoriale più elevato rispetto a quello del vettore (che ha ordine uno), che giocano un ruolo all'interno della legge, devono seguire la legge di trasformazione degli enti vettoriali (o tensoriali) nel passaggio da un laboratorio ad un altro.

A partire da Galileo si è venuta a creare una linea di ricerca, essenziale per gli studi della fisica moderna in molte branche, che ricerca leggi oggettive della fisica, che descrivono fenomeni della natura rispetto a determinati laboratori o osservatori, e le leggi di trasformazioni che relazionano il passaggio da uno di tali osservatori ad un altro. Così il principio di oggettività, creato da Galileo, viene messo alla base della ricerca in fisica. Per esempio Einstein elabora in formulazione quadridimensionale la sua teoria della relatività ristretta, valida nell'ipotesi in cui le velocità in gioco devono essere minori (ma non molto minori come in fisica classica) o paragonabili alla velocità della luce, avente alla base i due famosi assiomi Einsteiniani, in modo tale che sia oggettiva rispetto alle trasformazioni di Lorentz, che relazionano il passaggio da un sistema inerziale (nel senso Einsteiniano) ad un altro.

2. Assiomi generali della Fisica Classica

In Meccanica classica Newton (vedi Sezione 8) definì assiomaticamente lo spazio rispetto al quale si studiano i fenomeni fisici ("spazio assoluto") ed il tempo che misura l'evolversi di un fenomeno nello spazio assoluto ("tempo assoluto"), mediante i cosiddetti: Assiomi generali della Fisica classica.

Assioma I (o dello spazio assoluto, indicato con Σ_a).

Si postula l'esistenza di un corpo di riferimento, chiamato piattaforma spaziale, rispetto al quale si studiano i fenomeni fisici della natura che in esso si svolgono, di natura "sui generis", caratterizzato a priori dalle seguenti proprietà fisiche e geometriche:

1) Per definizione fisso, rigido, inerte rispetto all'evolversi in esso dei fenomeni fisici (anche ottici).

2) Le sue proprietà geometriche si identificano con quelle di uno spazio euclideo tridimensionale.

Per Newton lo spazio assoluto Σ_a è uno spazio privilegiato immobile, coincidente col "*Cielo delle Stelle Fisse*", secondo la concezione astronomica dell'epoca. Secondo gli

studi moderni di cosmologia l'Universo è in continua espansione ed è illimitato, vale a dire senza frontiere.

Assioma II (o del tempo assoluto, indicato con T)

Si postula l'esistenza di un ente fisico unidimensionale, T, che fluisce uniformemente verso il futuro ed indipendentemente dai fenomeni naturali e dallo stato di quiete o di moto della piattaforma spaziale in cui essi si svolgono. Tale ente fisico stabilisce senza ambiguità:

- 1) Se due eventi sono simultanei oppure uno di essi precede o segue l'altro;
- 2) La durata di un fenomeno, definito come intervallo temporale che separa due eventi.

3. Laboratorio, Osservatore Newtoniano o Sistema di Riferimento Assoluto

Secondo i due assiomi di Newton lo spazio assoluto ed il tempo assoluto sono due realtà "a priori" indipendenti tra loro e dai fenomeni sotto considerazione.

Definizione 1: Si definisce sistema di riferimento assoluto, laboratorio o osservatore Newtoniano, indicato con (Σ_a, T) l'unione della piattaforma spaziale assoluta Σ_a e il tempo assoluto T, i quali sono *indipendenti* uno dall'altro.

Seguendo Cartesio (vedi Sezione 8) in un laboratorio Newtoniano si può introdurre un sistema di assi cartesiani metrizzati per prendere misurazioni in Σ_a , che non va confuso con il sistema assoluto di riferimento stesso. In verità in ogni piattaforma spaziale, nel caso tridimensionale, si possono introdurre ∞^6 sistemi cartesiani di assi metrizzati, che possono differire per l'origine O (individuata da 3 parametri liberi rappresentati dalle sue tre coordinate) e per l'orientamento degli assi (individuato dai 3 parametri liberi descriventi l'orientazione degli assi), vedi Fig. 1.

Introdotta in Σ_a insieme ad un sistema di assi cartesiani metrizzati di riferimento, che serve a prendere misurazioni, una variabile temporale, t , che misuri il tempo assoluto T, si ottiene un riferimento assoluto spazio-temporale Newtoniano che si indica con $R = (O, x^1, x^2, x^3, t)$.

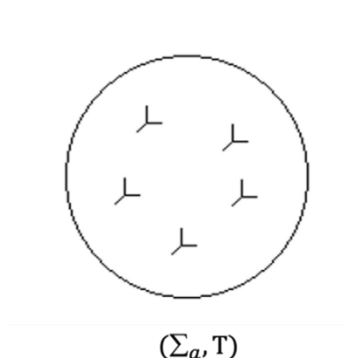


Figura 1. Un laboratorio Newtoniano (Σ_a, T) .

Rispetto a R un "evento" resta individuato da una quaterna ordinata di numeri reali

(x^1, x^2, x^3, t) : le coordinate spaziali x^1, x^2, x^3 , indicano il punto in cui l'evento accade, mentre t fornisce l'istante in cui l'evento si verifica.

4. Laboratori, Osservatori o Sistemi di riferimenti Galileiani

Galileo Galilei (vedi Sezione 8) muore l'anno in cui nasce Newton. Galileo applicò per primo "il metodo sperimentale" della scienza moderna e alla base delle sue ricerche pose un "principio di semplicità" secondo il quale le leggi che descrivono i fenomeni della Natura sono le più semplici possibili. Galileo è uno scienziato rinascimentale e come tale, riscoprendo i testi scritti dagli scienziati dell'antica Grecia, va alla ricerca della verità, perseguendo l'ideale della saggezza, della bellezza e della perfezione. Egli introduce per descrivere la natura scritta sotto forma di simboli matematici lo spazio chiamato appunto Galileiano.

Definizione 2: Dicesi "*spazio (o solido) Galileiano*", indicato con Σ , un solido che si muove di moto traslatorio, rettilineo ed uniforme rispetto al sistema assoluto Σ_a di Newton. E' evidente che Σ può essere anche sovrapposto a Σ_a , che è fisso. Associando il tempo assoluto T allo spazio rigido Galileiano e attribuendo a Σ tutte le proprietà fisiche e geometriche di Σ_a , meno quella dell'assoluta immobilità, si ottiene un riferimento spazio-temporale Galileiano (Σ, T) , dove appunto Σ è la base spaziale che si muove di moto traslatorio rettilineo ed uniforme rispetto ad una scelta come fissa.

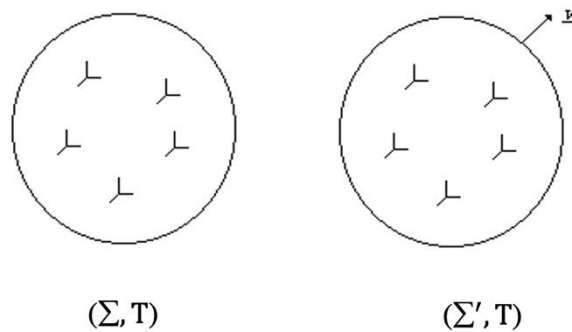


Figura 2. Laboratori Galileiani.

Due riferimenti Galileiani, in fisica classica, possono differire solo per la piattaforma spaziale. Pertanto, *tutti i possibili riferimenti Galileiani sono ∞^3* , essendo un moto traslatorio uniforme di un solido tridimensionale caratterizzato dalle 3 componenti arbitrarie del vettore velocità di traslazione (vedi Fig. 2). Associando a Σ un sistema di assi Cartesiani metrizzati ed a T una variabile metrizzata t si introduce in (Σ, T) un sistema Galileiano di coordinate indicato con $G = (0, x^1, x^2, x^3, t)$. Rispetto ad G un "evento" resta individuato da una quaterna ordinata di numeri reali (x^1, x^2, x^3, t) : le

coordinate spaziali x^1, x^2, x^3 , indicano il punto in cui l'evento accade, mentre t fornisce l'istante in cui l'evento si verifica.

E' appena necessario sottolineare che in ogni base spaziale Σ tridimensionale si possono introdurre ∞^6 sistemi di assi metrizzati Cartesiani, vedi Fig. 2.

5. Principio di relatività Galileiano

Galileo aveva fatto prima di Newton notevoli scoperte riguardanti l'evolversi dei fenomeni meccanici rispetto a due laboratori Galileiani. Tali scoperte vengono compendiate nel famoso "*Principio Galileiano di relatività*", che si enuncia nel seguente modo:

"I fenomeni meccanici si evolvono alla stessa maniera e quindi con le stesse leggi rispetto a due sistemi di riferimento mobili uno rispetto all'altro di moto traslatorio rettilineo ed uniforme (detti Galileiani) ", chiamati "inerziali" dal punto di vista meccanico.

Ciò significa che uno stesso esperimento a parità di dati iniziali (posizione e velocità iniziali) dà gli stessi risultati in un qualunque laboratorio Galileiano.

In modo del tutto equivalente tale principio può essere enunciato nella seguente forma:

"Il mutuo moto traslatorio rettilineo uniforme di due solidi Galileiani non può essere messo in evidenza con alcun esperimento meccanico eseguito a bordo di uno di essi."

Da questo enunciato segue l'impossibilità di distinguere un solido Galileiano da un altro.

Copernico (vedi Sezione 8) nella sua opera fondamentale *De Revolutionibus Orbium Celestium*, dove propone la sua teoria eliocentrica, chiarisce tra l'altro che a causa del moto relativo, agli effetti dell'apparenza, è lo stesso se si muova il Sole o se si muova la Terra. La terra nel suo movimento di rivoluzione intorno al sole infatti può essere modellata come un punto materiale, che pertanto trasla soltanto (e percorre un'orbita circolare, come gli altri pianeti, intorno al Sole) e tale moto traslatorio può essere approssimato rettilineo, se si pensa l'orbita percorsa durante tutto un anno.

Da questo enunciato del principio di relatività Galileiano segue ovviamente l'impossibilità di distinguere uno spazio (solido) Galileiano da un altro mediante esperimenti meccanici eseguiti a bordo di esso.

Segue, perciò, anche l'impossibilità di individuare lo spazio assoluto di Newton mediante esperienze meccaniche realizzate a bordo di un osservatore Galileiano.

Sicché, lo spazio assoluto, già identificato come spazio solidale con il cielo delle "stelle fisse" cessa di essere un sistema "privilegiato" di riferimento e va considerato come uno degli ∞^3 spazi Galileiani. Quindi un solo sistema "privilegiato" di riferimento per Newton, ∞^3 sistemi di riferimento per Galileo, tutti mobili l'uno rispetto all'altro di moto traslatorio rettilineo ed uniforme. Galileo enunciò il suo principio di relatività per via sperimentale. Ma Newton aveva anche, nella sua I legge, definito assiomaticamente il sistema inerziale.

Infatti, la I legge di Newton asserisce l'equivalenza fra i due stati naturali di un corpo in quiete e in moto traslatorio, rettilineo ed uniforme e definisce pertanto per via assiomatica un sistema inerziale come quel sistema di riferimento in un cui un corpo persevera nel suo stato di quiete o di moto traslatorio, rettilineo ed uniforme fino a che non interviene una forza che ne perturba il suo stato. Con questa interpretazione la I legge di Newton viene ad essere *indipendente dalla II legge*, di cui potrebbe essere pensata una conseguenza, quando la forza esterna è assunta nulla.

Il primo principio di Newton, messo alla base della meccanica Newtoniana, definisce quindi i sistemi inerziali alla stessa maniera di Galileo, per quanto Newton enunci la sua seconda legge, riferendosi al sistema assoluto di riferimento delle stelle fisse.

Ricordiamo che la seconda legge di Newton

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (1)$$

si enuncia nel seguente modo: una massa m sotto l'azione di una forza esterna $\mathbf{F}$ acquista un'accelerazione $\mathbf{a}$ direttamente proporzionale alla forza esterna e nella stessa direzione e verso della forza stessa. La forza $\mathbf{F}$ è detta causa o sorgente del moto.

La legge $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ è scritta sotto forma di un'equazione, dove al secondo membro compare la sorgente o origine del moto, cioè la forza che agendo sul punto materiale m causa la variazione istantanea della velocità del punto stesso, definita accelerazione, che compare al primo membro e pertanto costituisce l'effetto della causa.

6. Trasformazione di Galileo

Definizione 3: Si definisce "*Trasformazione di Galileo*" una trasformazione di coordinate invertibile tale che faccia passare da un riferimento spazio-temporale Galileiano $G = (O, x^1, x^2, x^3, t)$ ad un altro $G' = (O, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}, t)$.

Dagli elementi di cinematica classica è noto che tale trasformazione è lineare e descrive un moto traslatorio rettilineo uniforme (vale a dire che avviene con velocità avente durante il moto direzione, modulo e verso costanti) di un solido Galileiano Σ rispetto ad un altro solido Galileiano Σ' . Il moto dicesi traslatorio quando il sistema di riferimento Cartesiano introdotto nel laboratorio Σ' mantiene durante il moto gli assi di direzione invariabile rispetto agli assi del sistema Cartesiano introdotto in Σ , presi come assi di riferimento.

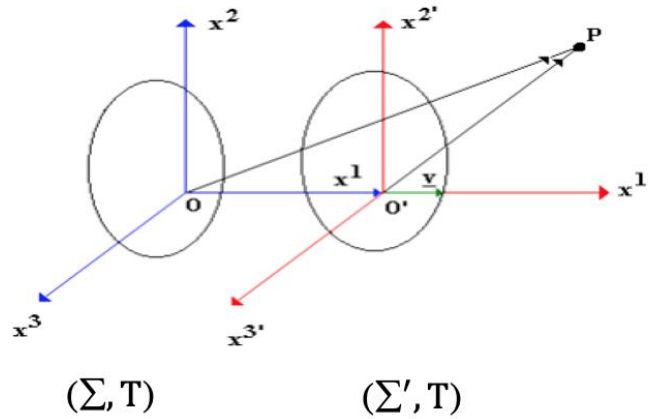


Figura 3. Due laboratori Galileiani che si muovono di moto traslatorio rettilineo ed uniforme uno rispetto all'altro, in cui sono stati introdotti due particolari sistemi di assi metrizzati di riferimento cartesiani, atti a prendere misure.

Si considerino due solidi Galileiani Σ e Σ' , ai quali sono associati solidalmente due sistemi di assi metrizzati Cartesiani (O, x^1, x^2, x^3) e (O, x^1', x^2', x^3') , per semplicità assunti con gli assi x^2 e x^2' , x^3 e x^3' paralleli, l'asse x^1' che si sovrappone all'asse x^1 e tali che per $t = t' = 0$, scelto come istante iniziale, siano sovrapposti, vedi Fig. 3. Supponiamo adesso che il sistema (Σ', T) si muova di velocità $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ rispetto a (Σ, T) . Considerato un punto P esso ha coordinate non accentate (x^1, x^2, x^3) rispetto a (Σ, T) e coordinate accentate (x^1', x^2', x^3') rispetto a (Σ', T) . Tutti gli enti misurati rispetto agli assi non accentati sono indicati senza accento, quelli misurati rispetto agli assi accentati sono indicati con l'accento, per cui $\mathbf{v}$ si intende misurata rispetto a (Σ, T) e $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$ misurata rispetto a (Σ', T) .

La trasformazione lineare di Galileo (detta "*trasformazione speciale*" per la scelta semplificata degli assi) si presenta nella forma

$$\begin{cases} x^1 = x^1' + vt \\ x^2 = x^2' \\ x^3 = x^3' \\ t = t' \end{cases} \quad (2)$$

dove il tempo t misurato in (Σ, T) è uguale al tempo t' misurato in (Σ', T) , *ipotesi di base in tutta la fisica classica*.

La (2) in forma matriciale si scrive:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1' \\ x^2' \\ x^3' \\ t' \end{pmatrix} \quad (3)$$

dove la matrice della trasformazione Galileiana $\mathbf{A}$ è invertibile, essendo il suo determinante diverso da zero

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Esiste la trasformazione inversa, avente la seguente forma

$$\begin{cases} x^{1'} = x^1 - vt \\ x^{2'} = x^2 \\ x^{3'} = x^3 \\ t' = t \end{cases} \quad (5)$$

riscrivibile in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ t \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Dimostriamo adesso che la forma della seconda legge della dinamica $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ è invariante in forma per trasformazioni di Galileo.

Consideriamo dapprima la legge $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ (supposta $\mathbf{F}$ una forza che dipende solo dalla posizione) scritta rispetto a un osservatore Galileiano (Σ, T) e vediamo successivamente come essa si scrive rispetto a (Σ', T) . La velocità $\mathbf{v}$ di un punto mobile è definita come la variazione istantanea (matematicamente la derivata temporale) della posizione P del punto materiale considerato, $\mathbf{v} = dP/dt$, o del raggio vettore OP , $\mathbf{v} = dOP/dt$, l'accelerazione $\mathbf{a}$ dello stesso punto è definita come variazione istantanea della velocità $\mathbf{v}$, $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, oppure come derivata seconda della posizione P , $\mathbf{a} = d^2P/dt^2$, o anche $\mathbf{a} = d^2OP/dt^2$. Introdotte le coordinate di P rispetto a (Σ, T) , $P = (x^1, x^2, x^3)$, e le coordinate di P rispetto a (Σ', T) , $P = (x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$, indicato con un punto sovrapposto ad un ente matematico la derivata temporale di quell'ente, per cui $\mathbf{v} = dP/dt = \dot{P}$ e $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = \ddot{P}$, la legge $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ rispetto a (Σ, T) si scrive in componenti

$$\begin{cases} m\ddot{x}^1 = X^1 \\ m\ddot{x}^2 = X^2 \\ m\ddot{x}^3 = X^3 \end{cases} \quad (7)$$

essendo $\mathbf{F} = (X^1, X^2, X^3)$ la forza misurata rispetto agli assi introdotti in Σ .

Per la sua rappresentazione rispetto a (Σ', T) , calcoliamo la velocità e l'accelerazione del punto P rispetto al sistema cartesiano con gli assi accentati

$$\begin{cases} \dot{x}^{1'} = \dot{x}^1 - v \\ \dot{x}^{2'} = \dot{x}^2 \\ \dot{x}^{3'} = \dot{x}^3 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}^{1'} = \ddot{x}^1 \\ \ddot{x}^{2'} = \ddot{x}^2 \\ \ddot{x}^{3'} = \ddot{x}^3 \end{cases} \quad (9)$$

essendo il modulo v della velocità di traslazione costante. Si evince dunque che l'accelerazione $\mathbf{a}$ ha le stesse componenti rispetto al sistema accentato e a quello non accentato

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}, \quad (10)$$

essendo $(\ddot{x}^{1'}, \ddot{x}^{2'}, \ddot{x}^{3'}) = (\ddot{x}^1, \ddot{x}^2, \ddot{x}^3)$ (11)

Con opportuni calcoli si dimostra che anche la forza $\mathbf{F}' = (X^{1'}, X^{2'}, X^{3'})$, misurata rispetto agli assi introdotti nel laboratorio (Σ', T) , è uguale alla forza $\mathbf{F} = (X^1, X^2, X^3)$:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}. \quad (12)$$

Segue che la II legge della dinamica (7) in (Σ', T) , prende la forma

$$\begin{cases} m\ddot{x}^{1'} = X^{1'} \\ m\ddot{x}^{2'} = X^{2'} \\ m\ddot{x}^{3'} = X^{3'} \end{cases} \quad (13)$$

vale a dire

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}' \quad (14)$$

da cui si nota la sua invarianza in forma, a parte gli accentati. In particolare, nel caso della II legge di Newton si ha $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$, $\mathbf{F}' = \mathbf{F}$.

Introdotta la trasformazione di Galileo, il principio di relatività Galileiano in meccanica può essere enunciato nel seguente modo:

"Le leggi differenziali della meccanica Newtoniana sono formalmente invarianti per trasformazioni di Galileo", vale a dire "Le leggi della meccanica assumono la stessa forma rispetto ad osservatori Galileiani".

Questo enunciato equivale a dire:

"Le leggi differenziali della meccanica Newtoniana sono formalmente invarianti per il gruppo (in senso algebrico) delle traslazioni di Galileo".

Infatti, dalla dinamica relativa classica in un osservatore qualsivoglia, mobile di moto qualunque rispetto ad un osservatore inerziale Galileiano, nella II legge di Newton compaiono le forze apparenti di trascinamento, F_τ , e di Coriolis, F_C , dovute al fatto che tale osservatore non si muove di moto traslatorio rettilineo ed uniforme. Tali forze apparenti sono nulle nei laboratori relativi Galileiani.

Il principio di relatività di Galileo vale per tutte le leggi della Meccanica classica e non solo per la II legge di Newton. Ma all'inizio del XX secolo studi, supportati anche da esperienze fisiche, fecero vedere che le leggi differenziali di Maxwell dell'elettromagnetismo *non sono invarianti per trasformazioni di Galileo* ma valgono soltanto nel riferimento assoluto di riferimento fisso Σ_a . Così, lo spazio assoluto Σ_a assume nella fisica classica il ruolo di *unico riferimento spaziale* privilegiato ai fini della formulazione degli assiomi dell'elettromagnetismo Maxwelliano e viene chiamato "etere cosmico". Dunque, ne seguiva una disparità tra fenomeni meccanici ed elettromagnetici nei confronti dei sistemi di riferimento: ∞^3 sistemi privilegiati (sistemi Galileiani) per le leggi meccaniche, uno solo (l'etere cosmico) per quelle elettromagnetiche. Einstein risolse il problema introducendo assiomaticamente una nuova classe di riferimenti spazio-temporali inerziali compatibili col principio esteso di relatività e creando la teoria della relatività ristretta valida quando le velocità in gioco sono minori ($v < c$) o prossime a quella della luce c .

7. Relatività Ristretta di Einstein

Einstein enuncia in maniera assiomatica i due principi che stanno alla base della relatività ristretta.

Assioma I

Esistono riferimenti spazio-temporali, chiamati inerziali, rispetto ai quali le leggi di Newton (inerzialità meccanica) e le equazioni di Maxwell (inerzialità elettromagnetica) rimangono invariate in forma.

Assioma II

La luce ha carattere isotropo, la sua intensità c è costante qualunque sia la direzione di propagazione della sorgente di luce e qualunque sia il suo moto.

Il valore $c = 299\,792,458$ km/s della luce nel vuoto è il limite massimo raggiungibile per una velocità. In particolare, c è la velocità dei fotoni, particelle quantizzate di luce.

La piattaforma spaziale Σ di un riferimento inerziale, nel senso Einsteiniano, conserva anche nella nuova visione tutte le proprietà intrinseche, fisiche e geometriche, di uno spazio (solido) Galileiano classico mentre la variabile temporale non è più un tempo assoluto, indipendente dai fenomeni fisici e dalla piattaforma spaziale alla quale viene associato.

Il tempo è diverso in ogni piattaforma spaziale, $t \neq t'$, e non è indipendente da essa. Indicheremo tali laboratori, nel senso Einsteiniano, con (Σ, t) , (Σ', t') e così via, dove $t \neq t'$. La teoria della relatività ristretta viene costruita nello spazio-tempo

quadridimensionale di Minkowski, dove le coordinate spaziali continuano ad essere x^1, x^2, x^3 e la quarta coordinata si definisce $x^4 = ct$ ed è legata alla variabile temporale. Questa quarta coordinata si fonde ma non si confonde con le altre tre variabili spaziali. In relatività speciale la “*trasformazione di Lorentz*” è la trasformazione quadridimensionale di coordinate invertibile che fa passare da un riferimento inerziale quadridimensionale, nel senso Einsteiniano, ad un altro.

8. Sezione Storica

Nikolaj Kopernik (Toruń, 1473–Frombork, 1543), conosciuto come Copernico, fu astronomo, matematico, fisico, giurista, ecclesiastico, governatore e medico polacco. Dà sistemazione e formulazione matematica alla cosmologia eliocentrica nella sua opera principale *De Revolutionibus Orbium Celestium* (pubblicata in Olanda prima della sua morte), dove discute la concezione geocentrica Tolemaica ed elabora la sua teoria rivoluzionaria eliocentrica, in cui enuncia i postulati che pone a fondamento della sua teoria. Principalmente, asserisce che la terra e i pianeti girano intorno al Sole con orbita circolare e moto uniforme, la terra ha forma sferica e ha un moto rotatorio intorno a sé stessa. In questa opera propone per la prima volta il principio del moto relativo, in base al quale, agli effetti dell'apparenza, è lo stesso se si muova il Sole o se si muova la Terra.

René Descartes (La Haye en Touraine, 1596 – Stoccolma, 1650), conosciuto come Cartesio, fu filosofo, matematico e fisico francese. Fondò il razionalismo scientifico, applicando il metodo matematico alla filosofia. Pose come principio fondante la conoscenza il cogito (“Cogito ergo sum”: “Io penso, dunque sono”) e come metodo d’indagine il dubbio metodico, o regola dell’evidenza, la quale asserisce di non accettare mai per vero alcuna cosa che non sia afferrabile con perfetta evidenza.

Nell’opera *La Géométrie* (1637) introduce l’uso sistematico degli assi coordinati che permettono di rappresentare i punti nello spazio fisico utilizzando le famose coordinate cartesiane e fonda la geometria analitica, in cui i problemi geometrici possono venire tradotti in problemi algebrici e risolti con le procedure dell’algebra. La geometria diviene una scienza analitica.

Galileo Galilei (Pisa 1564 - Arcetri, Firenze, 1642) fu scienziato, fisico e filosofo. Abbandonò gli studi di medicina per dedicarsi alla fisica e alla matematica. Iniziatore della prosa scientifica in volgare, applicò per primo il metodo sperimentale, proprio della scienza moderna, e il principio di semplicità secondo cui la natura segue leggi scritte nella forma più semplice possibile. Studiò il moto dei gravi, scoprì la legge delle oscillazioni pendolari. Usò a fini scientifici, perfezionandolo, il cannocchiale (1609). Fece grandi scoperte astronomiche (1610): i mari e le montuosità della Luna, la natura stellare della Via Lattea, le macchie solari, i quattro satelliti di Giove, le anomalie di

Il Principio di Relatività Galileiano in Meccanica Classica

Saturno e altro. Nel famosissimo *Dialogo sopra i Massimi Sistemi del Mondo Tolemaico e Copernicano* (1630-32) difende la concezione Copernicana, secondo la quale il Sole è immobile e la Terra gira attorno ad esso, suscitando una forte reazione negli ambienti universitari e teologici. Nel 1615 Galilei venne denunciato come eretico al Sant' Ufficio, processato, costretto all' abiura e condannato al confino nella sua villa in Arcetri e al controllo sospettoso dell'Inquisizione. Ciò non gli impedì di continuare e pubblicare importanti studi di statica e di dinamica.

Isaac Newton (Woolsthorpe-by-Colsterworth, 1642 – Londra, 1726) matematico, fisico, filosofo naturale, astronomo, teologo, storico e alchimista inglese. Fondò la meccanica razionale, in particolare elaborò i fondamenti della meccanica Newtoniana, studiò la gravitazione universale, dopo aver definito la legge di attrazione gravitazionale, derivando in maniera teorica le tre leggi di Keplero descriventi il moto dei pianeti intorno al Sole. La sua famosissima pubblicazione *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), concepita a soli 25 anni, in cui espose le sue teorie fisiche, occupa anche un posto di grandissimo rilievo nell'ambito della Matematica poiché in essa introdusse il calcolo infinitesimale ("Metodo delle flussioni"), sulla priorità della cui creazione insorse un'aspra polemica con Leibniz. Ancora giovanissimo scoprì la formula conosciuta col nome di "Binomio di Newton".

Albert Einstein (Ulma 1879- Princeton 1955), fisico tedesco naturalizzato statunitense, visse la sua infanzia a Monaco di Baviera, si laureò al Politecnico di Zurigo in Svizzera (1900), dove a Berna trovò un impiego all' Ufficio brevetti (1902). Nel 1905, chiamato *annus mirabilis*, pubblicò tre memorie che segnarono tappe storiche nello sviluppo della fisica. La prima esponeva i principi della relatività ristretta, la seconda, sul moto browniano, costituiva una prova dell'esistenza degli atomi, la terza, che gli valse il premio Nobel nel 1921, sull'effetto fotoelettrico avanzava l'ipotesi che la luce si propagava mediante quanti discreti di energia, i fotoni. Nel 1916 pubblicò una fondamentale memoria sulla teoria della relatività generale, che estendeva i principi della relatività ristretta e permetteva di interpretare fenomeni astrofisici fino allora inspiegabili. Nel 1933, in seguito al potere dei nazisti, lasciò la Germania e si trasferì negli USA, dove insegnò all'Università di Princeton.

9. Conclusioni

In questo lavoro si introducono i concetti che stanno alla base della Meccanica classica e le motivazioni che stanno alla base della nascita della teoria della Relatività ristretta di Einstein. In particolare, si enunciano gli assiomi di Newton di spazio assoluto e tempo assoluto, si definiscono il laboratorio o osservatore Newtoniano e il laboratorio o osservatore Galileiano. Si enuncia il principio di relatività di Galileo. Si danno le differenti formulazioni Galileiane, ottenute per via sperimentale, della seconda legge

della dinamica del punto materiale e la formulazione assiomatica della prima e seconda legge della dinamica Newtoniana. Si dimostra l'invarianza in forma della seconda legge di Newton rispetto a laboratori inerziali Galileiani. Si commenta la non invarianza della forma delle equazioni di Maxwell per descrivere fenomeni elettromagnetici, messe alla base dell'elettromagnetismo come postulati, e si enunciano gli assiomi della relatività ristretta di Einstein: il primo assioma asserisce l'esistenza di osservatori inerziali quadridimensionali rispetto a cui hanno forma invariante le leggi della meccanica e dell'elettromagnetismo, il secondo asserisce l'isotropia della velocità della luce e della costanza in modulo di tale velocità nel vuoto, assiomatizzato come limite massimo raggiungibile dalla velocità del mezzo considerato. Si commenta che in relatività speciale le "trasformazioni di Lorentz" sono trasformazioni di coordinate invertibili nello spazio-tempo di Minkowski che fanno passare da un riferimento spazio-temporale quadridimensionale, nel senso Einsteiniano, ad un altro. Si enfatizzano i limiti di validità della Meccanica classica, valida solo per v molto minore di c , e della relatività di Einstein valida solo quando v è minore o comparabile con c . Un'ultima Sezione storica dedicata alla conoscenza del profilo scientifico di *Nikolaj Kopernik*, *René Descartes*, *Galileo Galilei*, *Isaac Newton* e *Albert Einstein* chiude il lavoro.

Bibliografia

Giovanni Crupi, Elementi di Teorie Relativistiche Einsteiniane, Atti della Accademia Peloritana dei Pericolanti, Vol. LXXIII, Supplemento N.1, 1996.

Ludovico Geymonat, Storia del Pensiero Scientifico e Filosofico, Vol. II Garzanti 1970.

Stephen Hawking, Buchi Neri e Universi Neonati, Biblioteca Universale Rizzoli, 2000.

David Jou, Riscrivere La Genesi, Ediciones Destino, 2009.

Tullio Levi-Civita, Ugo Amaldi, Lezioni di Meccanica Razionale, Vol. I, Bologna, Zanichelli, 1923.

Giovanni Lampariello, Lezioni di Meccanica Razionale, Messina, Edizioni Ferrara, 1960.

John A. Wheeler, Gravità e Spazio-tempo, Zanichelli, 1997.

Joseph Fourier: l'interesse verso il “calore estremo”

Maria Teresa Caccamo^{1,2,*}, Agostino Semprebello^{1,2}, Salvatore Magazù^{1,2}

¹*Dipartimento di Scienze Matematiche e Informatiche, Scienze Fisiche e Scienze della Terra
Università degli Studi di Messina - Viale F. Stagno D'Alcontres 31, 98166 Messina*

²*CISFA – Consorzio Interuniversitario Scienze Fisiche Applicate Viale F. Stagno D'Alcontres
31, 98166 Messina*

^{*}*mcaccamo@unime.it*

Abstract.

Il presente lavoro ha il fine di mettere in evidenza il forte impatto avuto dagli studi dello scienziato francese Jean-Baptiste Joseph Fourier sulla comunità scientifica del suo tempo e su quella dei giorni nostri. Più precisamente verranno messi in evidenza, gli studi, le esperienze lavorative, la carriera scientifica ed il ruolo politico di Fourier. Il lavoro si incentra sugli studi dello scienziato sull'età e sulla temperatura della Terra che lo portarono a fare importanti considerazioni climatologiche, una fra tutte la definizione di quello che oggi è chiamato Effetto Serra. Inoltre, verrà introdotta l'equazione della conduzione del calore insieme alle definizioni di trasformata e di serie di Fourier che trovano diverse applicazioni in molto campi.

1. Introduzione

La trattazione verrà effettuata seguendo un approccio storico, ricostruendo dunque il personaggio, prima che lo scienziato, valutando così le esperienze di vita e le condizioni storico-politiche e psico-sociali che hanno fortemente influenzato i suoi interessi scientifici. Partendo dalla sua formazione e dal periodo iniziale della sua carriera professionale, si proseguirà discutendo gli importanti ruoli politici ed accademici ricoperti, passando attraverso la spedizione in Egitto che lo ha visto protagonista e l'ha profondamente segnato, sia nella sfera privata che in quella professionale.

L'obiettivo di questo lavoro è, altresì, quello di mettere in luce la vasta produzione scientifica dell'illustre francese, spesso ricordato solo per la celebre, nonché ampiamente utilizzata, Trasformata di Fourier. In questo quadro di riferimento si procederà con la descrizione di importanti contributi dovuti a Fourier come, ad esempio, quelli nei campi delle scienze del clima e della termodinamica.

2. Joseph Fourier: vita e storia del personaggio

Jean-Baptiste Joseph Fourier nacque ad Auxerre il 21 Marzo dell'anno 1768, in una famiglia semplice ed umile originaria della Lorena. La sua infanzia fu segnata dalla perdita dei genitori avvenuta quando il giovane Fourier aveva appena 8 anni.

Il suo percorso di studi comincia quando un tale Pallais, addetto a suonare l'organo e ad insegnare musica presso la cattedrale di Auxerre, nonché direttore di un collegio di studi secondario, gli impartì le prime lezioni di base di francese e latino.

La sua formazione prosegue grazie ad una nobile benefattrice, che lo affidò all'allora vescovo di Auxerre, Jean-Baptiste-Marie Champion de Cicé. Questi patrocinò gli studi del giovane francese, il quale inizialmente frequenterà l'Ecole Militaire sita ad Auxerre, spostandosi poi a Saint-Maur, ove proseguirà gli studi presso una congregazione benedettina (Duchè 1871) e, infine, presso il collegio di Montaigu di Parigi.

Le sue grandi capacità gli consentirono di ottenere risultati estremamente brillanti, anche non proferendo una grande mole di impegno. Ad un certo punto della sua carriera scolastica però, affascinato dagli studi matematici, cominciò ad applicarsi con grande interesse e dedizione, cimentandosi nella risoluzione di quesiti di matematica sia durante il giorno che durante la notte. Si dice che, mentre tutti riposavano si recava nella sala studio facendosi luce con i resti di candele che riusciva a racimolare durante il giorno (Cousin, 1840).

All'età di sedici anni Fourier fece ritorno all'Ecole Militaire, qui tenne delle lezioni di matematica, proprio come il professor Bonnard, suo insegnante qualche tempo prima. Bonnard mostrò sincero orgoglio nei confronti del suo giovane collega Fourier.

A questo punto, Fourier espresse la volontà di intraprendere la carriera militare, presentando domanda per essere ammesso in artiglieria o per far parte del genio militare. Purtroppo, al tempo, quel genere di carriera era riservata soltanto agli appartenenti all'aristocrazia e la concessione gli venne negata, a causa delle sue umili radici, pur avendo ricevuto l'appoggio di Raynaud e dell'eminente Legendre.

Ciononostante, Fourier poté proseguire brillantemente la sua carriera, accogliendo la proposta del priore della scuola di Auxerre per entrare, come novizio, nell'ordine dei benedettini. La sua fu una scelta strategica, da un certo punto di vista, in quanto i monaci benedettini, all'epoca, erano custodi di grande cultura e sapere; l'ordine era definito come il più "illuminato". Inoltre, era previsto che gli studenti meritevoli avessero la possibilità di recarsi presso un istituto parigino, gestito dagli stessi monaci, per potersi dedicare agli studi di proprio interesse. Il noviziato di Fourier ebbe inizio presso l'abbazia di Saint-Benoît-sur-Loire, ove si occupò di tenere un corso di matematica.

Nel 1789, anno in cui scoppiò la Rivoluzione francese, gli ordini monastici ed il clero in generale, vennero messi a dura prova e l'allora ventunenne Fourier, che era ancora un semplice novizio, lasciò la vita monastica. Gli fu subito affidata la cattedra di matematica, ancora una volta, presso l'École Militaire di Auxerre. Fu un apprezzato docente di matematica e, per un periodo, anche di filosofia; inoltre, propose una lezione di storia, a cadenza settimanale, riscuotendo grande successo tra studenti e colleghi.

La sua esperienza ad Auxerre si concluse nel 1794, anno in cui diventò allievo dell'*École Normale* (Missirini, 1843 e Blanchard, 2003).

Il 1789 fu anche l'anno in cui Fourier sottopose all'*Académie des Sciences* un saggio sulle equazioni algebriche che rappresentava la base di partenza per lo sviluppo del suo metodo e la stesura della sua più famosa opera, a cui lo scienziato lavorò per tutta la vita e che fu data alle stampe poco prima della sua morte. I disordini rivoluzionari lo costrinsero ad interrompere la stesura del libro per un periodo e la stessa opera fu smarrita. Fu poi ritrovata nel 1795, grazie all'aiuto di Navier, amico di Fourier e membro dell'*Académie des Sciences*.

Nello stesso anno Fourier, grazie alle sue doti oratorie, più e più volte dimostrate, nonché alla sua affermata reputazione di insegnante e studioso nella società provinciale filogiacobina di Auxerre, ricoprì importanti incarichi politici. Tra questi una carica equivalente ad un odierno prefetto presso il Ministero dell'Interno.

Durante il Terrore il suo rapporto con i giacobini si increspò quando mostrò indignazione verso Laplanche, il rappresentante popolare di Orleans; fu giudicato dalla corte parigina e da Robespierre stesso, condannato ad essere recluso e, successivamente, ghigliottinato. Dopo qualche periodo di prigionia fu però rilasciato, a seguito di una manifestazione popolare in suo favore da parte dei cittadini di Auxerre.

Una volta libero, nel 1794, anno in cui era stata appena fondata l'*École Normale*, Fourier vi diventò allievo, in rappresentanza del distretto di St. Florentin, e si trasferì nella capitale francese. Purtroppo l'*École Normale* chiuse i battenti a metà del 1795. Questo non impedì a Fourier di distinguersi e farsi apprezzare per la sua attitudine alla scienza; il corso a cui era particolarmente interessato era quello di geometria descrittiva impartito da Monge. Lo stesso Monge propose a Fourier di tenere un corso di matematica di base per gli studenti della Scuola.

Grazie alla stima di Monge, ma anche degli illustri Laplace e Lagrange, appena conclusa l'esperienza all'*École Normale*, ne iniziò una nuova presso l'*École Polytechnique*. Qui non gli fu affidata una cattedra ma fece da supporto al docente titolare. Si occupò principalmente di approfondimento e potenziamento; il livello degli studenti era abbastanza elevato da consentirgli di illustrare il metodo da lui proposto per la risoluzione delle equazioni sottoposto all'*Académie*; un altro aspetto degno di nota è legato all'importanza che Fourier diede al collegamento tra i principi scientifici e la loro origine storica.

Nel 1798 il generale Bonaparte dava il via alla spedizione in Egitto e affidava a Monge e Berthollet il compito di aggregare un gruppo di scienziati da portare nella terra dei faraoni, affinché costituissero un Istituto, l'*Institut d'Égypte*, basato sullo stesso sistema organizzativo dell'*Institut de France*. Fourier, reclutato da Monge, accettò con entusiasmo unendosi alla campagna.

In Egitto Fourier ricoprì un ruolo centrale in campo scientifico, fu nominato *secrétaire perpétuel* durante la prima assemblea dell'Istituto e fu molto prolifico nell'ambito della ricerca matematica ma anche dal punto di vista applicativo proponendo, tra le altre cose,

anche dei sistemi di irrigazione ad energia eolica. Allo stesso tempo partecipò attivamente e con grande coinvolgimento nelle azioni politico-amministrative.

L'Istituto si sciolse dopo l'ultima assemblea, tenutasi il 21 Marzo 1801. L'esperienza egiziana segnò profondamente Fourier, non solo dal punto di vista scientifico, ma anche nella sfera personale. In modo particolare, proprio il clima del Paese nordafricano ha segnato profondamente Fourier: pare che lo scienziato si convinse di aver bisogno di vivere in condizioni di temperatura estremamente alta. Il ritorno in Francia fu quindi difficile da affrontare, tanto che Fourier rimaneva segregato in casa durante la stagione invernale e, durante quella estiva, uscisse di casa coperto da pesanti indumenti.

La sua carriera politica non si concluse perché a partire dal 2 gennaio 1801 fino al 1815 ricoprì la carica di Prefetto dell'Isère. Anche qui lasciò delle tracce indelebili e riuscì a realizzare due progetti ambiziosi ed impossibili per quanti ci avevano provato prima di lui: la bonifica delle paludi di Bourgoin e la costruzione di una arteria stradale di collegamento tra Grenoble e Torino.

Durante il periodo in cui Napoleone fu esiliato all'Elba, Fourier rimase fedele ai Borboni, pur considerando la Restaurazione un evento profondamente negativo. D'altro canto Napoleone, appena tornato in Francia ed in procinto di riprendere il potere, incontrò Fourier in una locanda situata sulla via per Lione e gli propose di diventare il nuovo Prefetto del Rodano. Lo scienziato accettò ma l'incarico terminò in concomitanza della battaglia di Waterloo, allo scadere dei "100 Giorni".

Durante la Seconda Restaurazione lo scienziato francese valutò l'ipotesi di lasciare la Francia ma alla fine, grazie alla proposta di de Chabrol, allora Prefetto della Senna, assunse la direzione di un ufficio statistico in quella stessa prefettura.

Fu costretto a subire una serie di ritorsioni, a causa del suo appoggio a Bonaparte, da parte della restaurata monarchia. Ad esempio, gli fu negata la ratifica dell'elezione come membro dell'*Académie des Sciences* nel 1816. La ratifica fu ottenuta soltanto l'11 maggio del 1817. Nel 1826 prese il posto di Lemonley all'*Académie Française* e nel 1827 prese il posto di Laplace come Presidente del Consiglio di Specializzazione dell'*École Polytechnique*. Muore il 16 maggio del 1830.

3. Il tema del calore al centro delle opere di Fourier

I più importanti contributi scientifici e le principali opere di Fourier gravitano intorno al tema centrale del calore, il cui interesse è stato certamente amplificato dalla sua ossessione verso il calore estremo.

Nel 1807 Fourier scrisse e sottopose prima all'attenzione di Biot e Poisson, poi a quella dell'*Académie des Sciences*, un'opera intitolata "*Mémoire sur la propagation de la Chaleur dans les corps solides*", in cui affronta lo studio di sistemi conduttori di calore con l'utilizzo delle equazioni alle derivate parziali. L'*Académie des Sciences*, pur riconoscendone l'originalità, non si pronunciò sul lavoro ma propose a Fourier di presentarne una versione revisionata. La nuova versione, datata 1812, fu subito apprezzata e vinse il premio accademico.

3.1. La stima dell'età del pianeta Terra

Una delle problematiche affrontate dallo scienziato in quest'opera è quella del calcolo dell'età della Terra; il pianeta era considerato come un corpo conduttivo in fase di raffreddamento. La formula ottenuta è la seguente:

$$\tau = \frac{(T_i - T_f)^2}{\pi \Gamma^2 k} \quad (1)$$

La suddetta relazione esprime il tempo τ , necessario per passare da una determinata temperatura iniziale T_i ad una temperatura finale T_f . Il termine Γ , invece, indica il gradiente di temperatura superficiale e k la costante di conduttività (Fourier, 1808).

Il tempo indicato con τ coinciderà quindi con l'età del pianeta. Adottare i parametri corretti era tutt'altro che semplice: da un lato la temperatura finale, che coincideva alla temperatura del pianeta ai tempi di Fourier, poteva essere determinata partendo da osservazioni e misure; d'altro canto la temperatura iniziale, ovvero la temperatura raggiunta dal pianeta Terra al momento della sua creazione, non si poteva determinare con altrettanta semplicità. Si pensa che Fourier affiancò alla sua teoria i risultati ottenuti sperimentalmente da Buffon, il quale stava eseguendo esperimenti utilizzando il ferro. Inoltre, il valore adottato da Fourier per la costante k è proprio quello relativo al ferro. I risultati ottenuti assegnavano alla Terra un'età di 74047 anni. Il valore non è certo preciso, però si discosta molto da quello imposto dalla Chiesa, pari a circa 6000 anni (Terra creata nel 4004 a.C.).

È bene sottolineare che, a quel tempo, il clero aveva un'influenza pesantissima sulla società. Alcuni anni dopo, il calcolo fu perfezionato da Lord Kelvin che, utilizzando parametri determinati con maggiore precisione, ottenne un valore di circa 100 milioni di anni (Deparis, 2001).

3.2. Fourier definisce le basi per lo studio dell'Effetto Serra

Lo scienziato francese scrisse poi, nel 1824, un'altra importante opera, intitolata "*Mémoire sur les températures du globe terrestre et des espaces planétaires*", in cui esprime un primo approccio allo studio della temperatura del pianeta dal punto di vista scientifico (Grinevald, 1992).

Fourier introduce il concetto, oggi di cruciale importanza, del bilancio radiativo. Le componenti da lui considerate sono le seguenti (Pierrehumbert, 2004):

1. il calore assorbito dalla Terra nell'atto della sua formazione;
2. la radiazione proveniente dalle stelle;
3. la radiazione solare.

Lo studio del primo dei tre fattori è trattato in una parte consistente dell'opera. Fourier si basa su dirette osservazioni e, assume, come nel caso del calcolo dell'età della Terra, che la Terra sia un corpo in fase di raffreddamento da una temperatura iniziale molto calda. Di conseguenza suppone che la terra abbia un *core* caldo capace di generare un flusso di calore verso la superficie.

Descrive quindi il fenomeno quantitativamente tramite un gradiente medio di temperatura per il flusso geotermico pari a 1°C di aumento, ogni 30-40 metri di incremento della profondità. Conclude però che la temperatura superficiale viene influenzata dal flusso geotermico in maniera marginale.

Nel caso del secondo fattore Fourier parte dalla considerazione che i moti atmosferici ed oceanici possano trasportare calore verso le regioni polari; questo meccanismo di trasporto fu stimato con precisione soltanto negli anni '70 del secolo scorso. Fourier, con i mezzi dell'epoca, dedusse che quella componente potesse essere trascurata, così come la componente dovuta agli scambi con l'interno del pianeta. Su queste basi immaginò che la temperatura polare durante i mesi in cui l'esposizione alla radiazione solare è nulla dovesse essere simile a quella degli spazi interplanetari e che dipendesse dalla radiazione proveniente dalle stelle. Molto più avanti si scoprì che questa assunzione non era corretta. La temperatura delle regioni polari è molto più alta di quella di tali spazi interplanetari e dipende fortemente dal trasporto di calore per mezzo di oceani ed atmosfera.

Per il terzo fattore, cioè la radiazione solare, Fourier dedusse che, in primis, l'ineguaglianza dell'esposizione solare delle varie zone del globo terrestre produce la diversità dei climi. Allo stesso tempo però intuisce che l'atmosfera ha un comportamento analogo a quello mostrato da De Saussure nei suoi esperimenti. Tali esperimenti prevedevano l'uso di una scatola isolata termicamente, sormontata da un triplo vetro ed avente la base di colore nero. L'obiettivo era mostrare il riscaldamento, maggiore rispetto a quello dell'ambiente esterno, dovuto alla radiazione solare ed alla confinamento di una parte di essa nella scatola.

Fourier assume l'esistenza di due tipi di calore: il "*calore luminoso*" ed il "*calore oscuro*". In particolare, deduce che il calore trasmesso dalla radiazione solare all'interno della scatola fosse inizialmente "*calore luminoso*" ma, una volta penetrato nella scatola esso agisse riscaldando l'aria all'interno e le pareti, perdendo così le proprietà di "*calore luminoso*". A questo punto il calore residuo all'interno del contenitore, secondo Fourier, acquisiva le proprietà di "*calore oscuro*" e non era più capace di fuoriuscire dalla scatola (Dufresne, 2006; Bard, 2004; Fourier, 1827)

Fourier intuì quindi che una parte della radiazione solare, nello specifico la radiazione infrarossa, non faceva parte dello spettro visibile. Allo stesso tempo la scatola mostrava un comportamento opaco rispetto a tali frequenze di radiazione.

Il concetto espresso da Fourier fu fortemente innovativo e pionieristico: riuscì a comprendere l'esistenza della radiazione infrarossa ed a porre le basi per la comprensione dell'effetto serra, intuendo il comportamento semi-opaco dell'atmosfera terrestre rispetto a specifiche componenti dello spettro di radiazione. È inoltre importante sottolineare che entrambi i concetti fisici non erano stati ancora scoperti.

3.3. La legge della conduzione del calore e la Serie di Fourier

Un ulteriore rilevante contributo dovuto a Fourier è la legge per la conduzione del calore, definita di seguito:

$$dQ = -k \frac{dT}{dl} dS dt \quad (2)$$

dove il termine dQ è la quantità infinitesima del calore che, nell'intervallo temporale dt , attraversa l'elemento di superficie dS di spessore dl , k è la conducibilità termica e dT/dl rappresenta il gradiente di temperatura. Il segno meno indica proprio che la conduzione avviene in verso opposto rispetto a quello del gradiente di temperatura.

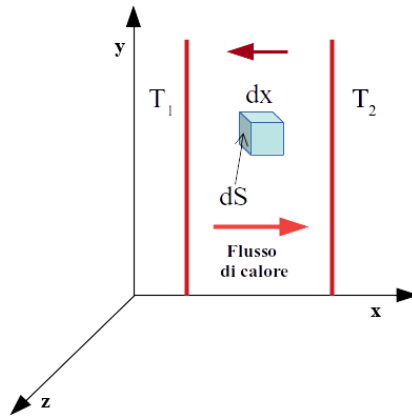


Figura 1: Schematizzazione del sistema considerato da Fourier. Il flusso di calore viaggia in verso opposto al gradiente di temperatura. Nel caso rappresentato si sta considerando che T_1 e T_2 siano costanti, con $T_1 > T_2$.

Per semplicità si considera la direzione lungo l'asse x ottenendo così la seguente relazione:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho \frac{c}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3)$$

dove ρ e c indicano rispettivamente la densità e la conducibilità termica del solido. Fourier, a riguardo, realizzò un esperimento molto particolare. Prese un grosso anello d'ancora portandone un punto (il punto O) all'incandescenza, poi lo tagliò riducendolo ad un barretta di spessore trascurabile (si veda Figura 2).

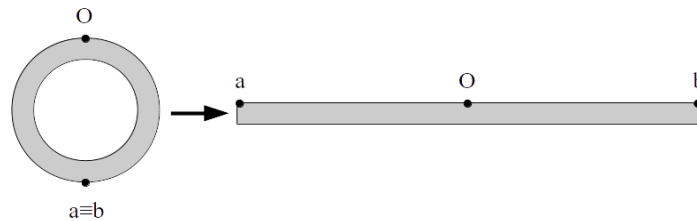


Figura 2: Schematizzazione del sistema investigato da Fourier.

A questo punto fece varie misure e valutò l'evoluzione della temperatura. Immaginando che inizialmente fosse il punto centrale ad essere il più caldo, notò che la distribuzione delle temperature assumeva valori sempre più bassi, simmetricamente rispetto al punto

O, mentre si spostava verso gli estremi a e b. Tale situazione può essere schematizzata come in Figura 3.

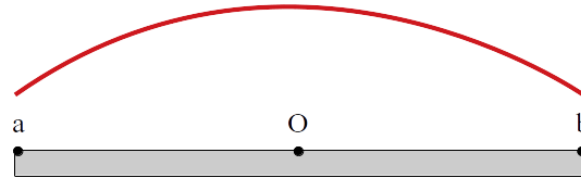


Figura 3: Esempio di distribuzione della temperatura nel caso considerato da Fourier.

A questo punto Fourier pensò di poter rappresentare la funzione con una curva qualunque, scegliendo inizialmente un arco di senoide e correggendo successivamente la curva con la somma di infinite altre sinusoidi di periodo maggiore, in modo che la funzione approssimasse, con buon grado di precisione, la funzione descritta dalla temperatura. Nasce così lo sviluppo in Serie di Fourier (Fourier, 2009; Grattan-Guinness, 1972). Una data funzione f può essere espressa, mediante tale metodo, come segue:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_f t) + b_n \sin(n\omega_f t)] \quad (4)$$

dove $\omega_f = \frac{2\pi}{T}$ rappresenta la pulsazione fondamentale relativa ad una funzione di periodo T ; a_n e b_n rappresentano i coefficienti di Fourier:

$$a_n = \frac{2}{T} \int f(t) \cos(n\omega_f t) dt \quad (5)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int f(t) \sin(n\omega_f t) dt \quad (6)$$

La serie di Fourier, fin dal momento della sua formulazione, ha rappresentato un concetto di assoluta originalità: uno strumento che permette di rappresentare un segnale non periodico attraverso la somma di più funzioni periodiche. Ad esempio, uno dei quesiti che la matematica di quel periodo storico non era ancora capace di risolvere era quello della definizione della funzione gradino, ovvero quella che mostra il “salto” da 1 a 0, attraverso un’unica funzione matematica. In questo quadro di riferimento Fourier riuscì a scoprire un metodo per rappresentare la suddetta funzione tramite una somma, idealmente infinita, di funzioni continue: le funzioni seno e coseno (Stewart, 2011).

L’invenzione di Fourier trova moltissime applicazioni ancora oggi, soprattutto nel campo dell’analisi dei segnali. Considerando la funzione gradino, si può notare che quest’ultima ripetuta periodicamente nel tempo rappresenti un’onda quadra. Immaginando quindi di avere un segnale che possa essere rappresentato proprio da un’onda quadra, sarà possibile scriverlo matematicamente, con buona approssimazione, come somma di sinusoidi, aventi ampiezza e periodo diversi, dette armoniche. Inoltre, sarà possibile scomporre il segnale nelle sue armoniche, trasportarlo, come nel caso dei segnali radio, e ricomporlo,

una volta giunto a destinazione, uguale a stesso oppure dopo averlo filtrato e privato delle componenti indesiderate, come ad esempio quelle legate al rumore. Nella figura 4 viene riportato un segnale composto da un'onda quadra messo a confronto con le sue rappresentazioni mediante serie di Fourier. In particolare, da sinistra verso destra si riportano gli esempi di rappresentazioni di Fourier che includono somme di diverso numero di armoniche. Più precisamente, nel primo caso è stata considerata solo l'armonica fondamentale, nel secondo caso la somma delle prime 3 armoniche dispari, e nel terzo caso la somma delle prime 20 armoniche dispari. Si nota che quante più sono le armoniche considerate nella somma, tanto più risulterà precisa l'approssimazione del segnale originario.

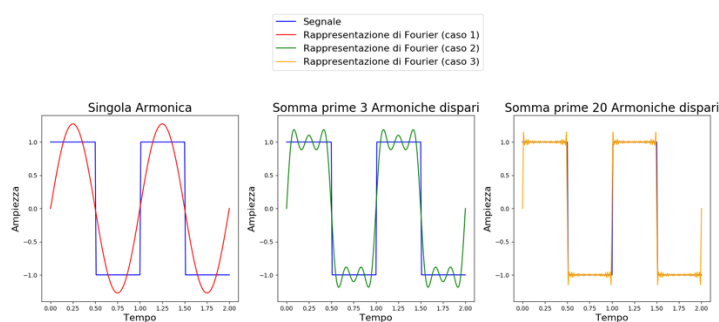


Figura 4: Segnale composto da un'onda quadra messo a confronto con le sue rappresentazioni mediante serie di Fourier. Nel primo caso è stata considerata solo l'armonica fondamentale, nel secondo caso la somma delle prime 3 armoniche dispari, e nel terzo caso la somma delle prime 20 armoniche dispari.

4. Conclusioni

Si evince dai paragrafi precedenti come l'interesse esasperato e le singolari convinzioni ed ossessioni di Fourier verso il calore estremo abbiano fortemente condizionato ed indirizzato i suoi temi di ricerca verso il calore, le temperature ed i fenomeni di conduzione. La sua mente era talmente soggiogata da questa forma di ossessione al punto che, chi aveva frequentato la sua abitazione, affermava che la stessa fosse paragonabile al deserto del Sahara. Questo però non è stato di certo un limite per lui, al contrario l'ha reso un pioniere indiscusso nei campi di fondamentale interesse per le scienze matematiche, fisiche e non solo. Basti ripensare ai contributi citati in questo lavoro, come ad esempio, le basi da lui poste per lo studio dell'effetto serra che al giorno d'oggi è uno dei temi di maggiore interesse per gli scienziati. Anche l'equazione della conduzione del calore rappresenta un contributo di cruciale importanza in campo scientifico. Poi ancora, con la serie e con la trasformata, Fourier fornisce strumenti fisico-matematici di grande pregio e di estrema utilità per applicazioni nei più disparati campi.

Bibliografia

Duché, Emily (1871) Une Biographie de Joseph Fourier, "Bulletin de la Société des Sciences Historiques et Naturelles de l'Yonne", France.

Cousin, Victor (1840) *Fragments philosophiques*, “Notes Additionnelles à l’éloge de M. Fourier”, Société Belge de Libraire, Rauman et Comp., Bruxelles.

Missirini, Melchior (1843) *I benefattori dell’umanità ossia vite e ritratti degli uomini d’ogni paese e d’ogni condizione i quali hanno acquistato diritto alla pubblica riconoscenza*, Ersilio Vignozzi e Comp., Firenze.

Blanchard, Jean-Christophe (2003) *Le Collège et École Militaire d’Auxerre, Mémoire de Maîtrise d’Histoire Moderne sous la direction de Madame Christine Lamarre*, Université de Bourgogne, 2003.

Krivine, Hubert (2017) *Histoire de l’âge de la Terre - 5 à 7 de l’Académie des sciences - Cycle Histoire et philosophie des sciences*, France.

Fourier, Jean Baptiste Joseph (1808) *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*, Nouveau Bulletin des sciences par la Société philomatique de Paris, Bernard, France.

Deparis Vincent (20019) *Quel âge a de la Terre?*, Maison des Sciences de l’Homme - Alpes, Grenoble, France.

Arago, François (1883), *Éloge historique de Joseph Fourier, secrétaire perpétuel de l’Académie*, France.

Grinevald, Jacques (19929) *De Carnot à Gaya, l’histoire de l’effet de serre*. La Recherche, France.

Pierrehumbert, Raymond T. (2004) *Greenhouse effect: Fourier’s concept of planetary energy balance is still relevant today*. Nature.

Dufresne, Jean-Louis (2006) *Jean-Baptiste Joseph Fourier et la découverte de l’effet de serre*, La Météorologie.

Bard, Édouard (2004) *Effet de serre et glaciations, une perspective historique*, Greenhouse effect and ice ages: historical perspective. C. R. Geoscience.

Fourier, Jean Baptiste Joseph (1827) *Mémoire sur les températures du globe terrestre et des espaces planétaires*. Mémoires de l’Académie royale des sciences de l’Institut de France.

Fourier, Jean Baptiste Joseph (2009) *The analytical theory of heat*, Cambridge University Press.

Grattan-Guinness, Ivor and Ravetz Jerome (1972) *Joseph Fourier 1768-1830. A survey of his life and work, based on a critical edition of his monograph on the propagation of heat, presented to the Institut de France in 1807*, The MIT Press, Cambridge & London.

Stewart, Ian (2011) *Domare l’infinito. Storia della matematica dagli inizi alla teoria del caos*, Bollati Boringhieri, Torino.

L'indagine delle superfici curve tra matematica pura e applicazioni

Sisto Baldo

Università di Verona

Sunto

La storia della scienza evidenzia costanti sinergie tra la ricerca pura e le applicazioni. In questo breve excursus storico, mostriamo alcuni dei profondi legami tra la cartografia e lo sviluppo della geometria differenziale. Il nostro breve viaggio partirà da Cristoforo Colombo per terminare nell'era spaziale: incontreremo G. Mercatore, T. Harriot, C. F. Gauss, G. Ricci Curbastro, A. Einstein...

Parole Chiave cartografia, triangoli sferici, eccesso sferico, theorema egregium, relatività generale.

1. Introduzione

In questo mio piccolo contributo voglio parlare di storia della matematica...ma soprattutto provare a raccontare una *bella storia*, che illustra come spesso lo sviluppo della matematica e della scienza avvengano in modo tortuoso e inaspettato. E anche quanto sia sfumato il confine tra la ricerca pura e la scienza applicata!

Desidero dunque toccare, in modo certamente lacunoso ma spero divertente, alcuni degli intimi collegamenti tra certe scoperte rivoluzionarie in matematica e in fisica, il progresso nella rappresentazione cartografica della superficie terrestre...e la Storia con la maiuscola.

Non si tratta ovviamente di un contributo tecnico, ma piuttosto della parte più narrativa di una proposta laboratoriale sulla geometria della sfera e delle superfici curve, che ho avuto modo di testare con alcune classi di Scuola Secondaria di secondo grado nell'ambito del Piano Nazionale Lauree Scientifiche.

Questo argomento mi è stato ispirato dall'indubbio fascino delle superfici curve...e dal cinquantenario dello *sbarco sulla Luna*, che abbiamo celebrato lo scorso anno. Potrebbe sembrare un volo pindarico...ma se dimentichiamo per un momento tutte le spinte geopolitiche che le hanno causate (e anche se ce ne ricordiamo!), c'è molto in comune tra la stagione delle *scoperte geografiche del XV-XVI sec.* e la *conquista dello spazio nel XX sec.*

Infatti, fatte salve le fondamentali motivazioni economiche e strategiche (ricerca di nuove rotte commerciali, lotta per l'egemonia in Europa e nel mondo, guerra fredda tra

il blocco occidentale e l'Unione Sovietica), una caratteristica comune alle due stagioni è senza dubbio il desiderio umano di *conoscere e espandere i propri orizzonti*.

Inoltre, cinquecento anni dopo Colombo, la conquista dello spazio e la disponibilità di satelliti artificiali ha migliorato enormemente la nostra capacità di spostarci sul nostro pianeta senza eccessivi errori: portiamo tutti in tasca un *GPS* estremamente affidabile!

2. Buone mappe (e cattive mappe) nei secoli XV-XVII...

Partiamo dal 1492: anche se è ormai assodato che Colombo non è stato il primo europeo ad arrivare in America... si tratta pur sempre di una data fatidica per la storia dell'umanità! Non a caso, il viaggio di Colombo segna la data di esordio convenzionale dell'età moderna.

Come sappiamo, Cristoforo Colombo si basò (forse consapevolmente e per ragioni di convenienza politica) su calcoli errati di Claudio Tolomeo, ripresi tra gli altri da Paolo dal Pozzo Toscanelli...e partì per il suo viaggio verso la Cina e il Giappone immaginando una Terra molto più piccola del reale.

I calunniatissimi “scienziati di corte” di Salamanca, che si opponevano alla spedizione di Colombo, non erano terrapiattisti ignoranti, ma probabilmente conoscevano stime più attendibili del raggio terrestre e dell'estensione dell'Asia! Per sua fortuna, Colombo non però in un viaggio troppo lungo, ma ri-scoprì l'America.

In seguito, la *storia si mosse velocissima*: il viaggio di Vasco da Gama è del 1496-'97, quello di Magellano comincia nel 1519, anno in cui *Carlo V diventa Imperatore*...Prima di abdicare ormai anziano, lo stesso sovrano farà in tempo a vantarsi che sul suo impero non tramonta mai il Sole!

A quel punto, è evidente che gli spagnoli e le potenze marittime loro rivali in Europa avevano un disperato bisogno di *buone mappe*, migliori di quelle derivate da Tolomeo! Ma *mettere su carta la superficie di una sfera è tutt'altro che facile!*

Conosciamo quasi tutti la vecchia storiella dell'esploratore e dell'orso:

Una mattina un esploratore esce dalla sua tenda, percorre 10 Km verso Sud, percorre altri 10 Km verso Est e infine altri 10 Km verso Nord. È un po' sorpreso perché è tornato alla sua tenda...e deve sparare in aria per scacciare un orso che vuole razziare le sue provviste.

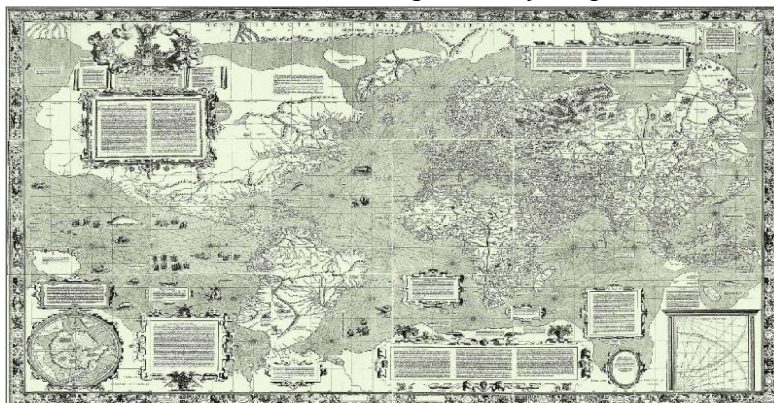
Di che colore è l'orso?

Questo piccolo racconto mostra che la geometria della sfera, necessaria a costruire buone mappe, è molto diversa da quella del piano¹!

Siccome la sfera è un buon modello sia della Terra che della volta celeste, sin dall'epoca

¹ La risposta attesa è che l'orso è bianco perché la tenda si trova al polo nord. In realtà ci sono infiniti altri punti nei dintorni del polo sud a partire dai quali il percorso si chiude (basta che i 10 Km verso est corrispondano ad un numero intero di giri completi, lungo un parallelo alla giusta distanza dal polo)...Ma in Antartide non ci sono orsi!

ellenistica i matematici ne hanno studiato la geometria: per i primi risultati di trigonometria sferica possiamo citare ad esempio *Ipparco da Nicea* (II sec. a.C.), *Menelao da Alessandria* (I-II sec.), *Claudio Tolomeo* (II sec.), *al-Biruni* (XI sec.). L'interesse per questa disciplina passa anche nell'Europa occidentale premoderna: poco prima di Colombo di geometria sferica si occupa ad esempio il matematico, astronomo ed astrologo tedesco *Regiomontano* (Johannes Müller da Königsberg, 1436-1476). Ma uno dei più grandi studiosi di questa disciplina (applicata alle mappe) è il fiammingo *Mercatore* (Geert de Kremer, 1512-1594, latinizzato in Mercator). Nel 1569 Mercatore pubblica una *mappa del mondo conosciuto*, destinata ai naviganti, in cui si ripromette di mantenere gli angoli...e anche le proporzioni (locali) tra le distanze nonché la forma delle terre emerse "*quatenus fieri potest*"...



Nova et Aucta Orbis Terrae Descriptio ad Usum Navigantium Emendate Accommodata

La proiezione usata da Mercatore (Mercator, 1569) ha molte proprietà desiderabili. È infatti *conforme* (conserva gli angoli, e quindi in piccolo le forme) e meridiani e paralleli vi formano un reticolo rettangolare.

Per questo, le rotte che *tagliano i paralleli con angolo costante* (le *Lossodromie*, in inglese *Rhumb Lines*), sono rappresentate sulla carta da segmenti.

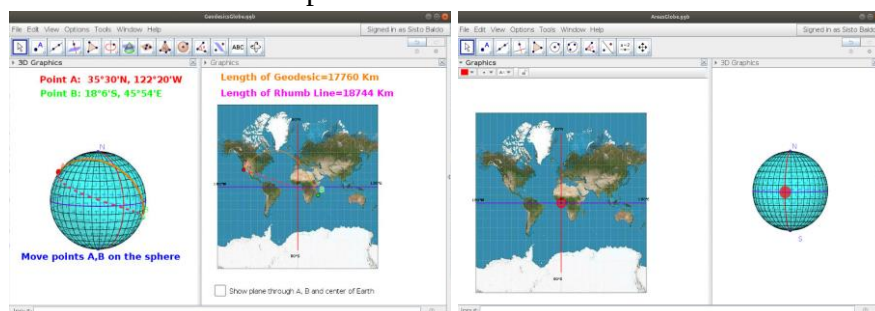
Tali rotte hanno una grande importanza pratica per la navigazione, perché si percorrono seguendo una direzione costante sulla bussola.

Non a caso, la proiezione di Mercatore è tuttora molto utilizzata: Google Maps ne usa una variante nota come *Web Mercator*.

La lossodromia *non rappresenta però il percorso più breve* tra due punti sulla superficie terrestre (chiamato *ortodromia* o *geodetica*): questo si ottiene percorrendo *l'arco di cerchio massimo* che unisce i due punti.

D'altra parte, la proiezione di Mercatore ha anche proprietà *estremamente indesiderabili*: più ci si avvicina ai poli e più le scale devono essere esagerate per compensare l'accorciamento dei paralleli (che sulla mappa sono tutti lunghi quanto l'equatore!). Per questo, avremo necessariamente delle distorsioni delle forme delle terre emerse e delle aree, tanto peggiori quanto più le latitudini aumentano. Ad esempio, un noto effetto psicologico (e geopolitico) della mappa di Mercatore è quello di far sembrare più grandi ed "importanti" i paesi occidentali (mediamente a latitudini piuttosto elevate), rispetto a quelli del sud del mondo che invece si assiepano vicino all'equatore.

Per i ragazzi che seguivano il laboratorio ho preparato un paio di applet GeoGebra in grado di mostrare in modo interattivo le proprietà della mappa di Mercatore e delle curve di minima distanza tra due punti sulla sfera.



Geodetiche sulla sfera <https://www.geogebra.org/m/tqpghn4j>, distorsione delle aree <https://www.geogebra.org/m/ufhp4pvc>

Ma Mercatore e i suoi successori non potevano fare di meglio? Come mai *nessuno ha inventato la carta perfetta*?

C'è un motivo fondamentale: *nessuna carta piana può rappresentare in modo perfetto le distanze* (in proporzione), neanche per una piccola porzione della superficie terrestre. E da quel che scrive in uno dei cartigli della sua mappa, si intuisce che Mercatore ne era perfettamente consapevole!

Per capirne la motivazione matematica, ci serve la semplicissima definizione di triangolo sferico.

Tre punti A , B , C sulla sfera (non allineati, nel senso che non appartengono tutti e tre allo stesso cerchio massimo) identificano un *triangolo sferico*, i cui lati sono i più brevi tra gli archi di cerchio massimo che uniscono a due a due i punti.

Ebbene, il seguente teorema mostra che *i triangoli sferici hanno proprietà molto diverse dai triangoli piani*!

TEOREMA (T. Harriot 1604, A. Girard 1629): Siano α , β , γ gli angoli interni del triangolo sferico ABC , misurati in radianti. Allora $\alpha + \beta + \gamma \geq \pi$. Inoltre,

$$\text{Area}(ABC) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi),$$
 ove R è il raggio della sfera. La quantità $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ si chiama *eccesso sferico del triangolo*.

In un'ipotetica "carta perfetta", che conservi le proporzioni delle distanze, un triangolo sferico sarebbe necessariamente rappresentato da un triangolo piano. Ma siccome la somma degli angoli interni di un triangolo piano è sempre π , *la carta geografica perfetta non può esistere!*: al massimo, potrei sperare di rappresentare accuratamente solo i triangoli di area 0 ...

Questo importante risultato fu scoperto da *Thomas Harriot* nel 1604² e fu pubblicato per

² Thomas Harriot è celebre anche perché nel 1609, precedendo di qualche mese Galileo, realizzò uno

la prima volta da *Albert Girard* nel 1629, ma secondo alcuni studiosi era noto a Regiomontano più di cent'anni prima. Si veda (Girard, 1629) (dove compare per la prima volta la formula per calcolare l'area di un generico poligono sferico) e (Markvorsen, 1996).

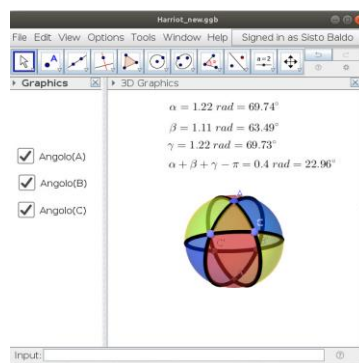
La dimostrazione del teorema è sorprendentemente elementare e può essere compresa senza difficoltà anche da studenti del biennio di scuola superiore!

Consideriamo per prima cosa un (doppio) fuso sferico, costituito da due spicchi di sfera delimitati da due cerchi massimi.



È evidente che l'area del doppio fuso sferico in figura è direttamente proporzionale all'angolo interno α tra gli archi di cerchio massimo. Siccome per $\alpha = \pi$ si ottiene tutta la sfera, l'area del doppio spicchio è $4\alpha R^2$ (ove R è il raggio della sfera).

Consideriamo poi il triangolo sferico T di vertici A, B, C , i tre cerchi massimi che contengono i lati e gli angoli interni α, β, γ . Indichiamo con T' il triangolo antipodale, speculare a T e quindi di area uguale, creato dall'intersezione degli stessi cerchi massimi.



I tre doppi spicchi sferici corrispondenti ad α , β e γ coprono tutta la sfera e si sovrappongono solo su T e T' : i due triangoli vengono coperti 3 volte ciascuno (ossia 2 di troppo). Dunque $4R^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4\pi R^2 + 4Area(T)$, da cui si ricava subito la formula cercata.

Per visualizzare ed illustrare l'ultimo punto ho realizzato l'applet GeoGebra <https://www.geogebra.org/m/enj6fmja> in cui si possono vedere, uno alla volta e insieme, i doppi fusi sferici corrispondenti agli angoli interni del triangolo. È possibile anche spostare i vertici per modificare il triangolo sferico.

3. Gauss, i rilievi dell'Hannover e la nascita della Geometria Differenziale intrinseca

Facciamo ora un salto di circa 200 anni! Con questo, ovviamente, non voglio implicare che in questo lasso di tempo non vi siano stati progressi significativi nella cartografia: al contrario, vi è stato un enorme incremento delle conoscenze geografiche che sono diventate sempre più estese e precise...ed un gran numero di studiosi ha proposto proiezioni diverse da quella di Mercatore (anch'esse conformi, o magari in grado di preservare l'area, oppure create ad hoc per rispondere a particolari necessità...) A partire dal 1818 uno dei massimi matematici di tutti i tempi, *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855), si dedicò intensamente alla cartografia: venne incaricato dei rilievi topografici per la triangolazione del Regno di Hannover, nella Germania settentrionale. Questa attività di Gauss venne ricordata nel verso delle banconote tedesche da 10 DM rimaste in corso fino all'entrata in vigore dell'Euro, dove si vedono i triangoli misurati da Gauss...

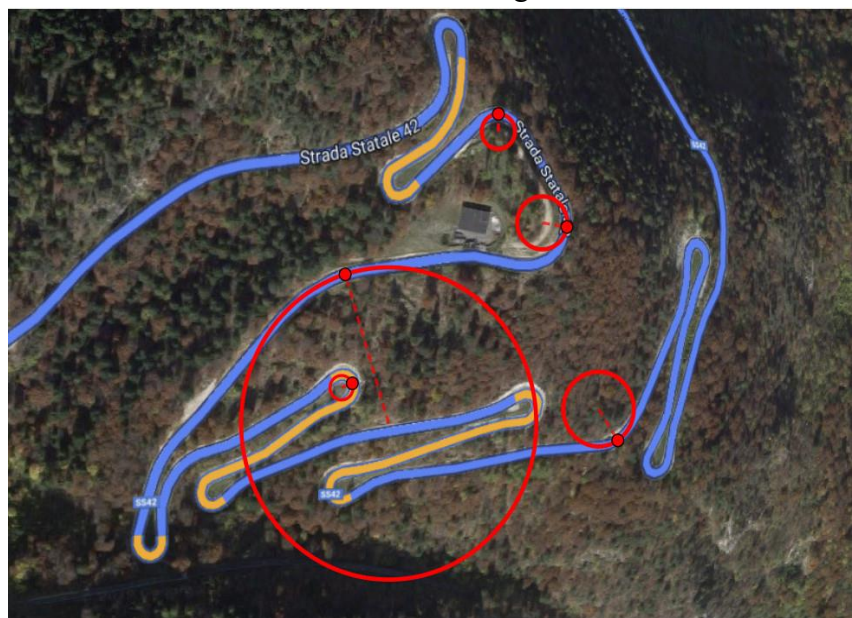


Lo strumento ottico raffigurato nelle banconote, inventato da Gauss e da lui chiamato *Eliotropo*, fu persino l'oggetto di un curioso articolo sul *Gentleman's Magazine*, (Urban, 1822), periodico inglese che descrive le attività topografiche di Gauss e prevede (correttamente!) un futuro uso del suo strumento nelle comunicazioni militari in sostituzione del telegrafo a bracci meccanici.

I rilievi delle colline dell'Hannover contribuirono a *rivoluzionare per sempre lo studio della Geometria*! Infatti nel 1827, ispirato dal suo lavoro topografico, Gauss pubblicò uno dei suoi capolavori, un denso articolo di 50 pagine che *fondava la Geometria Differenziale delle superfici curve* (Gauss, 1827).

Per capire uno dei contributi principali del lavoro di Gauss abbiamo bisogno di alcuni

ingredienti che andiamo ad introdurre. Il primo di questi è il concetto di *curvatura*. Il *raggio di curvatura* di una curva in un punto è il raggio del *cerchio che meglio approssima la curva vicino al punto*. La *curvatura* è il *reciproco del raggio di curvatura*. In figura vediamo i raggi di curvatura in alcuni punti della strada del Passo della Mendola, tra l'alta Val di Non e la Val d'Adige.



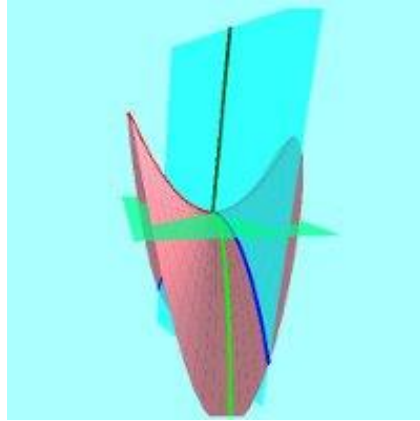
Elaborazione da Google Maps, SS42 della Mendola: Immagini ©2019 Google, Immagini ©2019 Maxar Technologies, Dati Cartografici ©2019

In soldoni, *la curvatura in un punto ci dice di quando dovremmo girare il volante se volessimo percorrere in macchina quel tratto di curva*.

Per una superficie, le cose sono leggermente più complicate: ci serve il concetto di piano normale e di curvatura normale. Fissato un punto P su una superficie liscia, un *piano normale* Π è un qualunque piano che contiene la retta normale alla superficie nel punto P . L'intersezione di questo piano con la superficie è una curva piana (*sezione normale*), la cui curvatura in P si chiama *curvatura normale* (relativa al piano Π , nel punto P). È possibile attribuire un segno alle curvature normali se la superficie è orientata (cioè se si è scelta la direzione positiva della normale).

Considerando ora tutte le curvature normali nel punto P (prese col loro segno), possiamo definire finalmente le curvature principali k_1, k_2 in P : esse sono la più grande e la più piccola delle curvature normali (prese col loro segno). Si può far vedere che corrispondono a due piani normali ortogonali tra loro (Teorema di Meunier).

In figura vediamo una sezione normale (blu) di una superficie, corrispondente al particolare piano normale in azzurro. Le sezioni normali che danno le curvature principali sono quelle disegnate in rosso e in verde chiaro.



Un'animazione interattiva WebGL, che ho realizzato per illustrare questi concetti durante l'attività laboratoriale, è disponibile su http://profs.sci.univr.it/~baldo/tjs/principal_curvatures.html

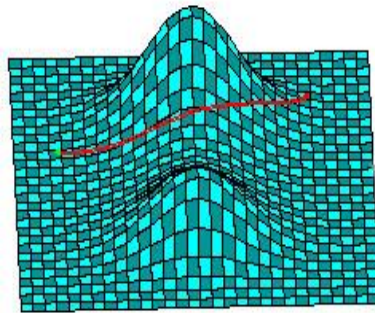
Note le curvature principali, possiamo finalmente definire la *curvatura di Gauss* in P : essa non è altro che il prodotto delle curvature principali,

$$K = k_1 k_2.$$

Analogamente, la *curvatura media* è la media aritmetica delle curvature principali: $H = (k_1 + k_2) / 2$.

Veniamo al secondo ingrediente della ricetta di Gauss: il concetto di distanza intrinseca e di deformazione isometrica di una superficie.

Esattamente come sulla sfera, anche su una superficie generale c'è una nozione *intrinseca* di *distanza*: la distanza tra due punti è la lunghezza della curva più corta (*geodetica*) tra tutte quelle che li congiungono sulla superficie stessa

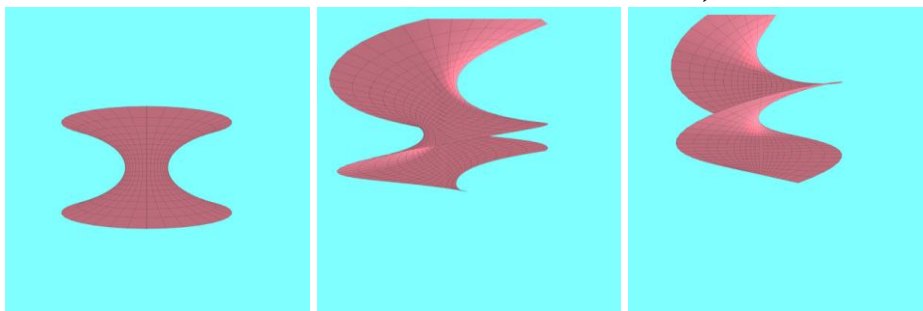


Informalmente, con un'idea diversa (ma che si dimostra equivalente per coppie di punti non troppo lontani), possiamo anche pensare ad una geodetica come alla curva che percorrerebbe una formichina che passeggia sulla superficie andando sempre dritta davanti a sé, senza mai cambiare direzione...

Immaginiamo ora che la superficie sia fatta di un materiale *flessibile ma non elastico* e di “deformarla” dolcemente senza stiracchiarla, in modo la lunghezza delle curve sulla superficie non cambi: una tale operazione si chiama *deformazione isometrica* della superficie, perché non cambia le distanze intrinseche.

Ad esempio, un foglio di carta piano può essere arrotolato a formare un cono o un cilindro senza che cambi la lunghezza locale delle curve disegnate sul foglio.

Un catenoide può essere “srotolato” a formare un elicoide (Animazione disponibile al link <http://profs.sci.univr.it/~baldo/tjs/catenoid.html> Questa particolare deformazione isometrica percorre una famiglia di superfici minime associate: oltre ad essere tutte isometriche, hanno anche curvatura media identicamente nulla).



Un'operazione di questo tipo non cambia le distanze intrinseche...ma è abbastanza chiaro che invece possono succedere cose molto brutte alle curvature principali: in generale, esse possono cambiare radicalmente per effetto di queste deformazioni!

Ma nel lavoro del 1827, Gauss scoprì una proprietà del tutto inaspettata della *curvatura di Gauss*: essa può essere determinata a partire dalle sole distanze intrinseche sulla superficie...e perciò non cambia se deformiamo isometricamente la superficie nello spazio tridimensionale. Con le parole dello stesso Gauss

“Formula itaque art. praec. sponte perducit ad egregium
*THEOREMA. Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem
explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.*”³

Questo risultato è da allora universalmente noto come Theorema Egregium di Gauss.

Il Theorema Egregium, in particolare, dice che *se una superficie può essere rappresentata fedelmente nel piano, allora deve avere curvatura di Gauss nulla in tutti i punti.*

Questo è evidentemente *impossibile per la sfera*, che ha curvatura di Gauss $1/R^2$, e *per l'ellissoide* che ha ovunque curvatura di Gauss positiva. Nel suo lavoro, Gauss cita esplicitamente le applicazioni alla topografia e i suoi rilievi dell'Hannover⁴!

Del resto, il Theorema Egregium è intimamente collegato ad una generalizzazione del Teorema di Harriot sui triangoli sferici, il *Teorema di Gauss-Bonnet (locale)*, che permette di dare una definizione intrinseca alternativa della curvatura di Gauss.

Informalmente, se consideriamo un piccolo triangolo geodetico su una superficie (tanto piccolo da poter considerare costante la curvatura di Gauss dentro il triangolo), allora l'eccesso degli angoli interni del triangolo rispetto a π è uguale al prodotto dell'area del

³ “La formula del paragrafo precedente conduce dunque in modo naturale al seguente notevole
TEOREMA: Se una superficie curva viene ‘dispiegata’ su una qualunque altra superficie, la misura di
curvatura (di Gauss) nei singoli punti rimane invariata”

⁴ Proprio alla fine del lavoro, c'è un'applicazione al triangolo geodetico formato da Hoehagen, Brocken e Inselsberg: tre dei punti della triangolazione determinata da Gauss.

triangolo per la curvatura di Gauss⁵. Siccome in una deformazione isometrica non cambiano né gli angoli né l'area, anche la curvatura di Gauss risulta invariata.

Al di là delle applicazioni cartografiche, ancora più importante (per i matematici) fu il *cambio di paradigma* introdotto da Gauss: una superficie può essere studiata non solo come sottinsieme dello spazio, ma anche attraverso le sue *sole proprietà intrinseche*, cioè dal punto di vista di una formichina che riesca a vederne solo le proprietà locali bidimensionali...e non sia in grado di alzare la testa per vedere cosa succede più lontano e in tre dimensioni.

Questo *punto di vista intrinseco* venne generalizzato da *Bernhard Riemann* (1826-1866) ad oggetti astratti in dimensione superiore. Fu poi sviluppato in modo spettacolare da studiosi quali *Elwin Bruno Christoffel* (1829-1900), *Gregorio Ricci Curbastro* (1853-1925...tuttora la geometria differenziale è nota come “Ricci Calculus” nei paesi anglosassoni), *Tullio Levi Civita* (1873-1941) ed altri. Questi sviluppi ebbero importanti applicazioni in meccanica dei continui, ingegneria e...

4. 1915: nasce la Teoria della Relatività Generale

...nella *teoria della Relatività Generale di Einstein* del 1915⁶.

Alla fine del 1915, Einstein elabora le equazioni di campo della relatività generale: per sua stessa ammissione, non sarebbe riuscito a farlo senza gli sviluppi matematici che abbiamo toccato nel paragrafo precedente...e senza una fitta corrispondenza con Levi-Civita, proseguita a lungo nonostante le difficoltà dovute alla prima guerra mondiale e all'appartenenza a due nazioni in conflitto tra loro! Su questo e sui rapporti tra Einstein, Ricci e Levi Civita si veda ad esempio (Toscano, 2004).

Il 4 novembre di quell'anno (le equazioni di campo non sono ancora state scritte), Einstein parla dei suoi progressi all'Accademia Prussiana delle Scienze di Berlino [Einstein 1915]:

Dem Zauber dieser Theorie wird sich kaum jemand entziehen können, der sie wirklich erfaßt hat: sie bedeutet einen wahren Triumph der durch Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci und Levi-Civiter (sic) begründeten Methode der allgemeinen Differentialkalküls.⁷”

Molto significativo, a mio avviso, è l'uso del termine *Zauber* (magia) per riferirsi alla geometria differenziale!

Nel lavoro in cui finalmente compaiono le equazioni di campo [Einstein 1916] troviamo

⁵ In un triangolo che non sia infinitesimo, questo prodotto deve essere rimpiazzato dall'integrale di superficie della curvatura di Gauss.

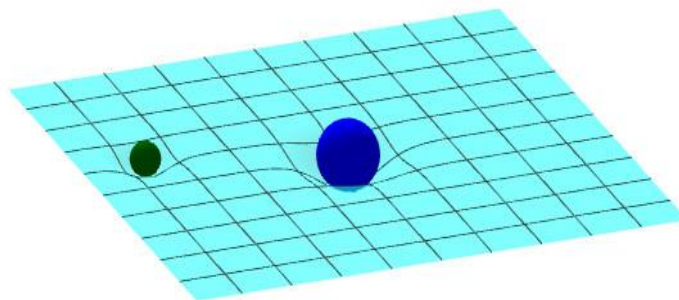
⁶ Con qualche dubbio sulla priorità per le equazioni di campo tra Einstein e David Hilbert

⁷ Nessuno che l'abbia veramente capita può sfuggire alla magia di questa teoria. Perché costituisce un vero trionfo dei metodi del calcolo differenziale in coordinate generali fondato da Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci e Levi Civiter.

un'analogia dichiarazione d'amore verso la geometria differenziale intrinseca:

*Die für die allgemeine Relativitätstheorie nötigen mathematischen Hilfsmittel lagen fertig bereit in dem "absoluten Differentialkalkül", welcher auf den Forschungen von Gauss, Riemann und Christoffel über nichteuklidische Mannigfaltigkeiten ruht und von Ricci und Levi-Civita in ein System gebracht und bereits auf Probleme der theoretischen Physik angewendet wurde.*⁸

Senza entrare nei dettagli, le equazioni di campo di Einstein prevedono che in presenza di masse (o energia), lo spaziotempo da piatto diventi curvo.



Queste previsioni trovarono spettacolare conferma il 29 maggio 1919 grazie alle osservazioni di *Eddington* durante l'eclissi totale di sole che interessò l'emisfero australe.

5. Conclusioni: da Mercatore al GPS...

Potrebbe sembrare che parlando di relatività generale io sia andato fuori tema: nell'immaginario collettivo, si tratta forse di una delle parti più speculative della fisica moderna...

Non proprio: il *GPS del nostro telefono funzionerebbe talmente male da essere inutile se non conoscessimo la Relatività Generale!*

La nostra posizione sulla Terra viene determinata dal sistema GPS calcolando la *distanza dai satelliti visibili*. A questo scopo, i satelliti trasmettono continuamente il *tempo risultante dal loro orologio interno*: questo segnale arriva a noi con un certo *ritardo, proporzionale alla distanza*, perché la velocità della luce è finita. Confrontando con l'ora locale, possiamo risalire alla distanza dei satelliti (che si trovano in posizione nota) e risalire alla nostra posizione. Un risultato accurato richiede *misure delle differenze di tempo con una precisione entro il centinaio di nanosecondi*.

D'altra parte, i satelliti del GPS orbitano ad una velocità di circa $14000 \text{ Km} / \text{h}$. La teoria della Relatività Speciale prevede allora che sui satelliti il tempo vada più lento e gli orologi rimangano indietro, rispetto a quelli terrestri, di qualche microsecondo al

⁸ Gli strumenti matematici necessari alla teoria della relatività generale erano già pronti nel "calcolo differenziale assoluto", che si fonda sulle ricerche di Gauss, Riemann e Christoffel sulle varietà non euclidee e fu elevato a sistema da Ricci e Levi-Civita e subito applicato a problemi di fisica teorica.

giorno.

D'altra parte, nello spazio l'attrazione gravitazionale della Terra è più debole: per la teoria della Relatività Generale *lo spaziotempo sulle orbite dei satelliti ha una curvatura minore...e il tempo scorre più veloce, di qualche decina di microsecondi al giorno.*

Mettendo assieme questi effetti, otteniamo che *gli orologi atomici sui satelliti GPS anticipano di decine di migliaia di nanosecondi al giorno, rispetto a quelli sulla Terra.*

Se non ne tenessimo conto, la posizione determinata dal GPS diventerebbe tanto imprecisa da essere inutile dopo pochi minuti!

Bibliografia

Einstein, Albert, 1915 *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*, in Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften, Berlin, Sitzungsberichte 1915, p. 778-786

Einstein, Albert, 1916 *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik 49, p. 769-822.

Gauss, Carl Friedrich, 1827 *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores. Volume VI, pp. 99–146.

Girard, Albert, 1629 *Invention nouvelle en l'algèbre*, Amsterdam chez Guillaume Iansson Blaeuw

Markvorsen, Steenn, 1997 *Curvature and shape*, 11th Yugoslav Geometrical Seminar (Divčibare, 1996). Zb. Rad. Mat. Inst. Beograd. (N.S.) 6(14) , 55–75.

Mercator, Gerardus, 1569 *Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigantium emendate accomodata*, Gallica BNF <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b7200344k>

Toscano, Fabio, 2004 *Il genio e il gentiluomo*, Milano, Sironi

Urban, Sylvanus (ed.), 1822 *The Heliotrope, a new instrument*, in Gentleman's Magazine, London, vol. XCII part 2, pag. 258

Nota sulle animazioni e sulle figure: Le animazioni che ho realizzato sono tutte liberamente scaricabili e modificabili con licenza Creative Commons CC BY-SA 4.0. Le animazioni WebGL sono rilasciate sotto GPL e sono liberamente scaricabili e modificabili.

Le immagini non direttamente realizzate da me sono, a mia conoscenza, tutte di Dominio Pubblico tranne: (a) La [Proiezione di Mercatore](#) nelle relative animazioni GeoGebra, da Wikimedia Commons e rilasciata sotto CC BY-SA 3.0. (b) Le immagini della banconota da 10 DM con l'effigie di Gauss, [retto](#) e [rovescio](#), da Wikimedia Commons e rilasciate sotto CC BY-SA 4.0. (c) L'immagine per illustrare i raggi di curvatura, elaborata da foto satellitare di Google Maps (i credits sono nella didascalia come da linee guida di Google).

Modelli matematici per la diffusione delle epidemie¹

Mandrone Mario Innocenzo

VicePresidente Associazione Sannio-Irpinia Benevento, Federazione Internazionale Mathesis

Sunto

In questo intervento considereremo la dinamica di popolazioni in presenza di malattie infettive che si propagano per contatto fra individui ammalati e individui sani. Gli effetti delle epidemie, ricorrenti non solo nei secoli passati ma anche nel tempo presente, e gli sforzi che sono stati compiuti per opporvisi, hanno stimolato la messa a punto di un'ampia modellistica, che si propone di migliorare la comprensione dei meccanismi che regolano l'espandersi e l'attenuarsi delle infezioni e di valutare l'efficacia degli interventi di prevenzione e di cura. In questo intervento si propone, ovviamente senza alcuna pretesa di completezza, una attività di modellizzazione basata sulla costruzione di modelli utilizzando strumenti matematici diversi: la tecnica delle equazioni differenziali; la tecnica delle equazioni alle differenze; la tecnica dei processi stocastici. Il fenomeno delle epidemie può essere descritto matematicamente in diversi modi, tutti molto interessanti. Uno di questi -- il modello di Kermack e McKendrick-- noto anche come modello S.I.R. (Suscettibili-Infettivi-Rimossi) utilizza alcune semplici equazioni differenziali che contengono gli elementi essenziali per valutare l'impatto di una epidemia. Si analizzeranno anche i modelli matematici adottati per la gestione della epidemia da Covid-19, rispettivamente dall'Istituto Superiore di Sanità (I.S.S.) e dall'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (I.N.F.N.), modelli che, dal punto di vista della robustezza, vantano un ottimo comportamento.

1. Introduzione

Cenni storici

La conoscenza storica delle epidemie riguarda quasi esclusivamente quelle che hanno interessato la popolazione umana. Essa è corroborata da testimonianze presenti nella storiografia: valga per tutte la descrizione della peste di Atene del 430 a.C. ne «La guerra del Peloponneso» di Tucidide. L'Iliade si apre con il racconto di una pestilenza che colpisce il campo dei guerrieri achei; il De Rerum Natura di Lucrezio si conclude con l'evocazione drammatica della peste di Atene; Boccaccio ambienta il Decameron in una villa di campagna toscana, dove alcuni giovani si sono ritirati per scampare ad un 'epidemia che funestò Firenze nel 1348; Manzoni dedica alcuni intensi capitoli dei Promessi Sposi alla peste di Milano del 1630; Camus ambienta nella città di Orano (Algeria), negli anni intorno al 1940 il suo romanzo «La Peste», e l'elenco potrebbe

¹ "A theory has only the alternative of being right or wrong. A model has a third possibility: it may be right, but irrelevant" (Manfred Eigen)

continuare...E' oggi difficile valutare l'impatto delle numerose epidemie che si sono succedute: solo in epoca recente disponiamo infatti di statistiche attendibili.

La seguente tabella non ha lo scopo di stilare un'improbabile graduatoria della gravità di alcuni episodi, ma piuttosto di far intuire quanto ciascuno di essi possa aver modificato il corso della civiltà. Per valutare l'impatto nei secoli passati di alcune epidemie, ricordiamo che:

1. La cosiddetta peste di Giustiniano (541-542) fu un'epidemia di peste bubbonica che scoppiò nell' Impero Bizantino ma poi si diffuse in tutto il Mediterraneo, impedendo all'imperatore d'Oriente di portare a termine la riconquista delle terre occupate dai barbari.
2. Le prime pandemie di colera scoppiarono in India nel corso dell'Ottocento; la settima pandemia ha avuto inizio in Indonesia nel 1961, si è diffusa in Asia, Africa e Medio Oriente.
3. L'epidemia di tifo del 1847 causò migliaia di morti in Irlanda;
4. La grande peste di Londra (1665-1666), l'ultima di una serie di epidemie di peste bubbonica cominciata nel 1499, uccise circa il 20% dei londinesi. Cominciò ad attenuarsi all'inizio del 1666 per poi placarsi del tutto dopo il grande incendio che nel settembre di quell'anno distrusse la città.

DENOMINAZIONE	DATA	STIMA DEI MORTI
Peste di Giustiniano	542 a. C.	100 milioni
Peste nera	1346-1350 d.C	50 milioni
Peste in Asia	1894-1903 d. C.	10 milioni
Colera	1899-1923 d. C.	1,5 milioni
Influenza spagnola	1918-1920 d. C.	20 milioni
AIDS		40 milioni

La costruzione di modelli matematici atti a descrivere i diversi aspetti del fenomeno epidemico inizia nel Settecento, un secolo nel quale il successo dei modelli nell'area della Fisica Matematica suggerisce di estenderne l'applicazione anche ad altri ambiti:

- a) Nel 1760 Bernoulli modella la dinamica del vaiolo, con l'obiettivo di convincere le autorità ad avviare campagne di prevenzione;
- b) Nel '900 Hammer mette a punto un modello di diffusione del morbillo;
- c) Negli stessi anni Ross costruisce un modello per la diffusione della malaria;
- d) Nel 1925 Kernack e McKendrick costruiscono un modello generale, in cui appare fra l'altro il concetto di «soglia» per l'insorgenza di una epidemia.

2. L'evoluzione della scienza epidemiologica

L'epidemiologia può essere definita come la disciplina che si occupa dello studio delle malattie e dei fenomeni ad esse correlati attraverso l'osservazione della distribuzione e dell'andamento delle patologie nella popolazione, ovvero attraverso l'individuazione dei fattori di rischio che ne possono condizionare l'insorgenza. Già nel V secolo a. C. negli scritti di Ippocrate si ritrovano tracce di concetti epidemiologici. Lo stesso Ippocrate

aveva osservato che alcune patologie umane erano correlate a condizioni ambientali o individuali. Per i successivi 2000 anni le cause delle malattie, pur sottoposte ad attente osservazioni, non furono mai oggetto di indagini analitiche. L'epidemiologia come disciplina autonoma si sviluppa inizialmente nel Regno Unito, dove si conducono i primi studi epidemiologici degni di tale nome. John Graunt pubblicò nel 1662 un'analisi della mortalità e della natalità a Londra, soffermandosi sulle differenze per sesso, età e stagionalità. Inoltre, valutò analiticamente l'entità di una epidemia di peste che colpì la città in quegli anni. Fu uno dei primi studiosi a riconoscere il valore delle statistiche correnti, base di partenza, anche oggi, di molte ricerche epidemiologiche. Due secoli più tardi William Farr (XIX secolo) elaborò un sistema di raccolta dei certificati di morte, imponendo la segnalazione della causa accanto ai dati anagrafici. Ma il primo vero epidemiologo moderno è John Snow, medico inglese che aprì la grande tradizione della medicina preventiva anglosassone svolgendo, in due occasioni, a metà del XIX° secolo, indagini epidemiologiche sul colera quando ancora non ne era noto l'agente etiologico. Arriviamo così all'epidemiologia moderna. Nascono sin dal 1948 i primi trials clinici strutturati (è di questo anno l'articolo sull'efficacia degli antibiotici nel trattamento della tubercolosi) ovvero i primi studi epidemiologici sperimentali che tanto peso avranno per la farmacologia moderna e per le evidenze di efficacia di interventi di natura terapeutica o di tipo diagnostico. Cambia inoltre il campo di azione dell'epidemiologia con i lavori del medico Richard Doll e dello statistico Austin Bradford Hill (1954) che fondano l'epidemiologia delle malattie cronic-degenerative. Gli anni '70 ed '80 vedono invece lo sviluppo dell'epidemiologia ambientale; più recentemente (anni '90), infine, l'epidemiologia si mette al servizio della nuova rivoluzione culturale del mondo medico che fa della medicina basata sulle evidenze il vero cavallo di battaglia. Attualmente l'interesse sulla genetica, in particolare sulla mappatura del genoma, ha spinto parte degli epidemiologi verso una nuova ed interessantissima branca: l'epidemiologia molecolare. In questo periodo l'evoluzione dell'epidemiologia è andata di pari passo con una sempre maggiore applicazione del metodo statistico supportato da capacità di calcolo sempre più potenti rese possibili dai personal computer.

3. Modelli matematici per lo studio delle epidemie

Un modello matematico è la rappresentazione formale di idee o conoscenze relative ad un fenomeno. Questa definizione contiene una descrizione completa delle caratteristiche che deve avere un modello matematico e che possono essere raccolte in tre punti fondamentali, non separabili l'uno dall'altro.

Precisamente:

1. Un modello matematico è la rappresentazione di un fenomeno;
2. Tale rappresentazione non è descrittiva, discorsiva o a parole, ma formale, espressa cioè in linguaggio matematico;
3. Non esiste una via diretta dalla realtà alla matematica.

In altri termini il fenomeno specifico studiato non determina la sua rappresentazione matematica; ciò che invece si fa è di tradurre in formule, idee e conoscenze relative al fenomeno. Un modello per essere funzionale, deve possedere contemporaneamente i seguenti tre requisiti che spesso sono in opposizione tra loro:

1. Generalità : deve descrivere una classe di fenomeni quanto più ampia possibile;
2. Affidabilità: deve descrivere un processo abbastanza accuratamente, in modo che il modello, pur fornendo risultati approssimati, sia abbastanza significativo;
3. Semplicità: deve essere sufficientemente semplice da poter essere risolto matematicamente.

Negli ultimi decenni la modellizzazione matematica delle epidemie è diventata molto importante per riuscire a comprendere le dinamiche di molte malattie infettive volte a confrontare le strategie di controllo e di prevenzione nonché per studiare i possibili effetti dei vari fattori biologici e sociologici nell'espandersi della malattia all'interno di una popolazione. Le variabili fondamentali sono:

1. La modalità di trasmissione;
2. I diversi tempi di incubazione;
3. Le caratteristiche del decorso;
4. Le dinamiche di diffusione tra diversi sottogruppi;
5. I possibili effetti delle vaccinazioni.

Nello studio di un'epidemia il problema fondamentale riguarda le condizioni, le modalità e i meccanismi secondo cui essa può insorgere e propagarsi e i provvedimenti che possono prevenirne o contrastarne la diffusione. I modelli matematici di diffusione delle malattie infettive, sviluppati lungo tutto il corso del ventesimo secolo, si sono dimostrati efficaci nella comprensione dei loro meccanismi di trasmissione e nella pianificazione del controllo di malattie nell'uomo. Si tratta di modelli molto significativi perché hanno tracciato l'itinerario su cui sono fondati anche i modelli matematici più recenti, (quelli che sono conosciuti come modelli di nuova generazione).

Essi sono: modello malthusiano per popolazioni isolate ed omogenee; modello a crescita limitata o modello logistico di Verhulst; modello S.I.R. o modello di Kermack e McKendrick ; modello M.C.M.C. (Markov Chain Monte Carlo) basato sull'utilizzo del metodo Monte Carlo (modello adottato dall' I.S.S. per la gestione dell'epidemia da Covid-19) ; modello S.I.R.D. (Suscettibili, Infetti, Rimossi, Deceduti), utilizzato dal gruppo Covid-Stat dell'I.N.F.N., che non è altro che un modello semplificato e, quindi, soggetto ad alcune limitazioni, rispetto a quello adottato dall'I.S.S. Per lo sviluppo di tali modelli sono in genere necessari:

1. Il tasso di infezione o la velocità di trasmissione, normalmente indicato con β . Il suo reciproco $1/\beta$ è il tempo medio tra i contatti.
2. Il tasso di recupero, normalmente indicato con γ . Il suo reciproco $1/\gamma$ è il tempo infettivo medio.
3. Il tasso di latenza o di incubazione, normalmente indicato con α . Il suo reciproco $1/\alpha$ è il tempo medio di latenza o di incubazione che intercorre da quando un soggetto diventa esposto a quando diventa infettivo.

Inoltre:

1. inserendo il tasso di letalità (CFR) ed il tempo che intercorre tra la diagnosi e il decesso nel modello, si può stimare il numero di morti che produrrà una epidemia nel corso della sua evoluzione.

2. variando il numero di riproduzione effettivo, cioè in genere riducendo il numero di riproduzione di base, si può stimare l'effetto delle misure di contenimento adottate per arginare l'epidemia.

3. inserendo il tasso di ospedalizzazione e i tempi medi di ricovero in ospedale e/o nei reparti di terapia intensiva è possibile stimare se le strutture sanitarie sono sufficienti a reggere l'impatto di una epidemia.

Per analizzare la dinamica delle epidemie, però, è necessario stimare altri parametri quali:

1. età dell'infezione; 2. infettività; 3. frequenza di contatto; 4. periodo di incubazione; 5. periodo infettivo; 6. intervallo seriale, cioè il tempo che intercorre fra la comparsa dei sintomi in un infetto e la comparsa dei sintomi in un individuo infettato dal primo; 7. altri parametri ricavati sul campo.

I modelli epidemiologici che tengono conto di ciò possono essere classificati in modelli:

1. deterministici o stocastici; 2. chiusi o aperti; 3. omogenei o eterogenei; 4. modelli compartimentali.

4. Modelli compartimentali epidemiologici per la descrizione della diffusione delle epidemie

L'applicazione della modellistica matematica alla dinamica delle epidemie è molto utile perché, poter fare delle previsioni sullo sviluppo di un contagio, permette in molti casi di approntare tempestivamente cure e profilassi adeguate e, quindi, consente di salvare vite umane. I modelli matematici sviluppati per descrivere la diffusione delle malattie infettive suddividono la popolazione in compartimenti con determinate caratteristiche.

Tali modelli (detti modelli compartimentali) descrivono la dinamica con cui i singoli individui transitano da una classe all'altra. I primi modelli di questo tipo risalgono al 1927 (W.O. Kermack, A.G. McKendrick, Contributions to the mathematical theory of epidemics, Proc. Roy. Soc. London, Sez A 115 (1927), pp. 700-721). Un modello compartimentale può essere rappresentato mediante grafi, come per esempio, nel modello S.I.R. Il numero di compartimenti che vengono utilizzati dipende dalla tipologia di infezione ed anche dai dati disponibili. Infatti, perché questi modelli siano realmente efficaci, devono essere «tarati» sui dati disponibili. Uno dei primi scienziati ad occuparsi del problema del controllo e della diffusione delle epidemie fu Daniel Bernoulli (1700-1782). Il matematico-fisico francese, servendosi di una argomentazione teorica ispirata al modello di crescita esponenziale, mostrò i possibili vantaggi derivanti da una vaccinazione preventiva che, fino ad allora, era stata considerata pericolosa per la salute. Alla base dell'elaborazione di tali modelli c'è sicuramente l'analisi statistica: la raccolta dei dati su larga scala e la loro elaborazione ha infatti permesso di sviluppare ipotesi sulla

diffusione e sull'evoluzione delle varie malattie che sono caratterizzate da una particolare periodicità.

Modello S.I.R.

Il modello base deterministico per descrivere la dinamica delle malattie infettive o di un'epidemia, è quello proposto da Kermack e McKendrick contenuto in una sequenza di tre articoli pubblicati rispettivamente nel 1927, 1932 e 1933. Nei modelli S.I.R., non considerando la struttura d'età, la popolazione è suddivisa nei seguenti gruppi: 1. Suscettibili: persone sane e suscettibili al contagio; 2. Infetti: persone che hanno contratto la malattia e quindi contagiose; 3. Recuperati o Guariti: persone che, dopo aver contratto la malattia in passato, sono da essa guarite. In particolare essi non sono più né infettivi, né suscettibili o perché guariti, o perché isolati, o anche-nel caso di malattie gravi-perché morti. Il modello in questione studia le tre funzioni:

$$S = S(t) ; I = I(t) ; R = R(t)$$

Il modello si basa essenzialmente sulle seguenti ipotesi:

1. il tempo di incubazione della malattia è sostanzialmente nullo; ossia ogni infetto è immediatamente infettivo;
2. il contagio avviene per contatto diretto;
3. la probabilità di incontro fra due possibili individui della popolazione è costante;
4. ogni individuo malato ha un'uguale probabilità di guarigione per unità di tempo, costante.

A queste aggiungiamo l'ulteriore ipotesi che la popolazione studiata sia molto grande, cosicché si possono ignorare le fluttuazioni casuali e usare, quindi, un modello deterministico. Se, inoltre, la durata della malattia è sufficientemente breve, possiamo anche ritenere che il numero di individui suscettibili, durante il periodo di contagiosità considerato, rimanga costante. Dalle ipotesi del modello segue che:

1. il ritmo relativo $\frac{S'(t)}{S(t)}$ con cui la popolazione suscettibile decresce, a causa del fatto che si ammala, è proporzionale al numero degli infettivi $I(t)$
2. il ritmo relativo $\frac{I'(t)}{I(t)}$ con cui la popolazione degli infettivi varia nel tempo dipende da due contributi: uno proporzionale al numero di persone contagiabili e l'altro proporzionale al numero degli infettivi $I(t)$.
3. La velocità con cui la popolazione dei rimossi (o guariti) $R=R(t)$ aumenta è proporzionale al numero degli infettivi $I(t)$.

Le condizioni iniziali sono: $S(0)>0$, $I(0)>0$, $R(0) = 0$. L'evoluzione della malattia è generalmente formulata sotto forma di equazioni differenziali ordinarie. Il modello S.I.R. così descritto ha validità se si assume che, quando un suscettibile viene contagiato, questo divenga immediatamente infettivo ovvero non si considera alcun periodo di latenza della malattia. Nel caso in cui, invece, sia presente un tempo di incubazione dovrà essere inclusa nel modello una ulteriore classe contenente quegli individui soggetti a latenza. Siamo quindi interessati a risolvere questo sistema completo, cercando unicamente soluzioni che siano positive per S, I, R in quanto altre soluzioni non avrebbero senso

nell'ottica di meccanismi biologici. Il modello proposto è descritto, quindi, dal seguente sistema di equazioni differenziali le cui incognite sono le funzioni $S=S(t)$; $I = I(t)$; $R= R(t)$:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda I(t) * S(t) \\ \frac{dI}{dt} = (\lambda I(t) S(t) - \gamma I(t)) \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) \end{cases}$$

dove λ e γ sono costanti positive che rappresentano rispettivamente il «tasso di rimozione» dalla categoria degli infettivi e il tasso di infezione della malattia. Dalla prima delle equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione della epidemia, cioè da:

$$\frac{dS}{dt} = -\lambda I(t) * S(t)$$

considerato che S , I e γ sono positivi, segue che: $S'(t) < 0$. Pertanto: a) $S(t)$ è una funzione decrescente e limitata inferiormente; b) esiste ed è finito $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = S_{lim}$; c) tale limite soddisfa alle condizioni: $0 < S_{lim} < S_0$.

Sommando membro a membro, si ottiene:

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{d}{dt}(S(t) + I(t) + R(t)) = 0$$

$$S(t) + I(t) + R(t) = cost = N$$

dove N è il totale della popolazione. Ovviamente il valore dei Rimossi $R(t)$ può essere ricavato da $S(t)$ e da $I(t)$ tramite la relazione $R(t)=N-S(t)-I(t)$. Per questo motivo possiamo studiare le soluzioni del sistema nel piano delle fasi S I . Poiché

$$S(t) + I(t) + R(t) = S_0 + I_0 + R_0 = N \quad ed \quad R_0 = 0$$

segue che nel piano delle fasi SI si ottiene: $S + I = S_0 + I_0 = N$

Problema cruciale in una qualunque situazione epidemica è cercare di determinare se, dati λ , γ ed S_0 e il valore iniziale degli infettivi I_0 , l'infezione sia nelle condizioni tali da diffondersi o se resterà un fenomeno ristretto di piccola portata e a quale valore inizierà il suo declino. A tale proposito consideriamo la relazione:

$$\frac{dI}{dt} = (\lambda S(t) - \gamma) * I(t)$$

Da tale relazione segue che

$$\frac{dI}{dt} > 0$$

se e solo se:

$$(\lambda S(t) - \gamma) > 0$$

In particolare:

$$\frac{dI}{dt} > 0 \quad se \quad \lambda S_0 - \gamma > 0 \quad \lambda S_0 > \gamma \quad S_0 > \gamma / \lambda$$

Inoltre si può dimostrare che $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$.

Quindi la funzione è crescente se $S_0 > \gamma/\lambda$; la funzione risulta decrescente se:

$$\frac{dI}{dt} < 0 \quad \text{ovvero per} \quad \lambda S_0 - \gamma < 0 \quad \lambda S_0 < \gamma \quad S_0 < \gamma/\lambda$$

Il che significa che l'epidemia si propagherà per $S_0 > \gamma/\lambda$. Per un valore di $S_0 < \gamma/\lambda$ l'epidemia, invece, si estinguerà. $I(t)$ raggiunge un valore massimo I_{Max} e poi decresce tendendo a zero per $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$$

Il valore massimo si ottiene per:

$$S(t) = \frac{\gamma}{\lambda}$$

Il valore $\frac{1}{\lambda}$ rappresenta, invece, la durata media della malattia. Il rapporto

$$\rho = \frac{\gamma}{\lambda}$$

assume quindi un valore di soglia rispetto al quale si verifica un fenomeno di biforcazione. Il valore:

$$R_0 = \frac{S_0}{\rho} = \frac{S_0}{\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)} = \frac{\lambda}{\gamma} S_0$$

rappresenta il «tasso di riproduttività di base della malattia». Tale valore (R_0), detto anche «tasso netto di riproduzione» è il numero medio di persone che ogni malato può contagiare e che, dato che si misura all'istante iniziale, non tiene conto dell'evoluzione dell'epidemia. Altro parametro fondamentale nella descrizione dell'evoluzione di una epidemia è il tasso di riproduzione variabile col tempo R_t , che invece tiene conto dell'evoluzione della trasmissione del virus (di fatto fotografa a un certo tempo dell'epidemia il numero medio di persone che ognuno può contagiare). R_0 e R_t misurano, di fatto, lo stesso numero. Ciò che cambia è il tempo in cui viene fatta la misura (all'inizio o durante l'epidemia). In pratica R_t è il parametro che gli epidemiologi utilizzano per valutare la diffusione del virus e monitorare l'epidemia. Il valore di R_0 è estremamente utile per caratterizzare l'andamento dell'epidemia. Rispetto a questo tasso possiamo formulare il «teorema di soglia» in questi termini:

- a) Se $R_0 > 1$, l'epidemia si propaga;
- b) Se $R_0 < 1$, l'epidemia si estingue.

Un modo per ridurre il valore R_0 , onde evitare che la malattia si diffonda ulteriormente, se il suo valore è troppo elevato, sarebbe quello di ridurre il numero di suscettibili S_0 , dato che:

$$R_0 = \frac{\lambda}{\gamma} S_0$$

La vaccinazione, ad esempio, è uno dei metodi più efficaci che consentono ciò, ma può avere successo se applicata a comunità stabili e di dimensioni non eccessivamente ampie. Si può intervenire per ridurre il numero dei casi di infezione portando S_0 al di sotto del valore di soglia con una campagna di vaccinazioni. Difatti, se una frazione μ di individui

è vaccinata si ha: $S_0(\mu) \cong (1 - \mu)N$ cioè $S_0 < N$. Se la frazione degli individui vaccinati soddisfa la condizione $\mu > \left(1 - \frac{\gamma}{\lambda N}\right)$, si ha che $S_0 < \frac{\gamma}{\lambda}$ e quindi l'epidemia non si innesca.

Possiamo, inoltre, ricavare interessanti risultati analitici e formulare previsioni sull'andamento dell'epidemia dallo studio della funzione $I = I(S)$, cioè del numero di infettivi in funzione (al variare) dei suscettibili. A tale scopo, partendo dal sistema di equazioni differenziali che traduce matematicamente il modello adottato (SIR), cioè dal sistema:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda I(t) * S(t) \\ \frac{dI}{dt} = (\lambda I(t) S(t) - \gamma I(t)) \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) \end{cases}$$

dividiamo membro a membro la seconda equazione del sistema per la prima. Si ottiene:

$$\frac{dI/dt}{dS/dt} = \frac{dI}{dS} = -\left(\frac{\lambda IS - \gamma I}{\lambda IS}\right) = -\frac{\lambda IS}{\lambda IS} + \frac{\gamma I}{\lambda IS} = -1 + \frac{\gamma}{\lambda S} = \left(-1 + \frac{\rho}{S}\right) \quad I \neq 0$$

Quindi:

$$\frac{dI}{dS} = \left(-1 + \frac{\rho}{S}\right) \quad I \neq 0$$

Questa equazione differenziale si integra per separazione di variabili:

$$dI = \left(-1 + \frac{\rho}{S}\right) dS \quad dI = -dS + \frac{\rho}{S} dS$$

Da cui, integrando:

$$\int dI = - \int dS + \rho \int \frac{dS}{S}$$

Si ottiene così

$$I(S) = -S + \rho * \ln S + c$$

Ricordando che:

$$\rho = \frac{\gamma}{\lambda}$$

si ha:

$$I(S) = -S + \frac{\gamma}{\lambda} * \ln S + c$$

Per calcolare il valore della costante di integrazione, imponiamo le condizioni iniziali (rispetto a un istante iniziale $t = 0$). Si ottiene:

$$I_0 = -S_0 + \frac{\gamma}{\lambda} * \ln S_0 + c$$

Da cui:

$$c = I_0 + S_0 - \frac{\gamma}{\lambda} * \ln S_0$$

In definitiva, otteniamo per $I = I(S)$:

$$I(S) = -S + \frac{\gamma}{\lambda} * \ln S + c \quad I(S) = -S + \frac{\gamma}{\lambda} * \ln S + (I_0 + S_0 - \frac{\gamma}{\lambda} * \ln S_0)$$

Ovvero:

$$I(S) = (I_0 + S_0) - S + \frac{\gamma}{\lambda} * (\ln S - \ln S_0) \quad I(S) = N - S + \frac{\gamma}{\lambda} * \ln \left(\frac{S}{S_0} \right)$$

in quanto:

$$\rho = \frac{\gamma}{\lambda} \quad e \quad N = (I_0 + S_0)$$

Altro risultato particolarmente utile nello studio dell'andamento delle epidemie (facilmente deducibile dalle equazioni differenziali che descrivono il modello SIR) è studiare (nel piano delle fasi) l'andamento della funzione $S = S(R)$, cioè l'andamento dei suscettibili al variare dei rimossi. Si procede analogamente a quanto visto precedentemente. Partendo dal sistema di equazioni differenziali del modello SIR; che qui riscriviamo:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\lambda I(t) * S(t) \\ \frac{dI}{dt} = (\lambda I(t) S(t) - \gamma I(t)) \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) \end{cases}$$

Dividendo membro a membro la prima equazione per la terza, si ha:

$$\frac{dS/dt}{dR/dt} = \frac{dS}{dR} = - \left(\frac{\lambda I S}{\gamma I} \right) = - \frac{\lambda}{\gamma} S = -\sigma S$$

Si ha così:

$$\frac{dS}{dR} = -\sigma S \quad dS = -\sigma S dR \quad \frac{dS}{S} = -\sigma dR$$

Integrando per separazione di variabili:

$$\int \frac{dS}{S} = -\sigma \int dR; \quad \ln S(R) = -\sigma R + k$$

K = costante di integrazione da determinarsi in base alle condizioni iniziali. Poiché per $t = 0$ si ha: $S = S_0$, $R = R_0 = 0$ (nell'istante iniziale non vi sono Rimossi).

Si ottiene così: $K = \ln S_0$. La soluzione della equazione differenziale è, quindi, data da:

$$\ln S(R) = -\sigma R + \ln S_0$$

da cui: $S(R) = S(0) * e^{-\sigma R(t)}$.

Poiché

$$R \leq N \quad \text{segue che:} \quad S(R) = S(0) * e^{-\sigma * R(t)} \geq S(0) * e^{-\sigma * N} > 0$$

$$S(R) \geq S(0) * e^{-\sigma * N} > 0$$

Quindi il valore di S decresce (la funzione $S=S(R)$ è decrescente e positiva) e il suo limite è maggiore o uguale a zero, in quanto:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) \geq S(0) * e^{-\sigma * N} > 0$$

Questo significa che, asintoticamente, la popolazione dei suscettibili non si estingue. Per un tempo $t \rightarrow +\infty$ (ovvero verso il termine della malattia), il valore degli infettivi tende ad estinguersi e possiamo dunque stimare tale valore come:

$$S_\infty - N = \frac{1}{\sigma} * \ln \left(\frac{S_\infty}{S_0} \right)$$

dove $I_{Tot} = N - S_{\infty}$ è il numero totale di coloro che hanno contratto la malattia.

Il modello SIR può essere espanso per ottenere simulazioni più realistiche introducendo compartimenti come M, individui immuni dalla nascita, E, soggetti contagiati ma non ancor infettivi, C, individui portatori sani, che possono contagiare anche se non mostrano sintomi della malattia, e D, soggetti deceduti per la malattia. Inserendo la dinamica vitale nel modello S.I.R. con tasso di natalità ψ e tasso di mortalità μ il numero di riproduzione di base diventa

$$R_0 = \frac{\beta \psi}{\mu(\mu + \gamma)}$$

Nel grafico che segue rappresentiamo l'andamento temporale dei tre compartimenti del modello SIR, con i seguenti valori dei parametri: $N = 1000$; $\beta = 0,004$ ($\beta =$ tasso di rimozione o tasso di contagio o velocità di trasmissione uguale a $\beta = \frac{c}{N}$) con $c =$ il tasso di contatto con cui un suscettibile diventa infetto. Nel modello scelto c si ritiene costante. Gli infetti diventano rimossi con tasso costante uguale a $\gamma = 0,04$ (tasso di rimozione). Valori iniziali: $S_0 = 997$ $I_0 = 3$



Il modello SEIR

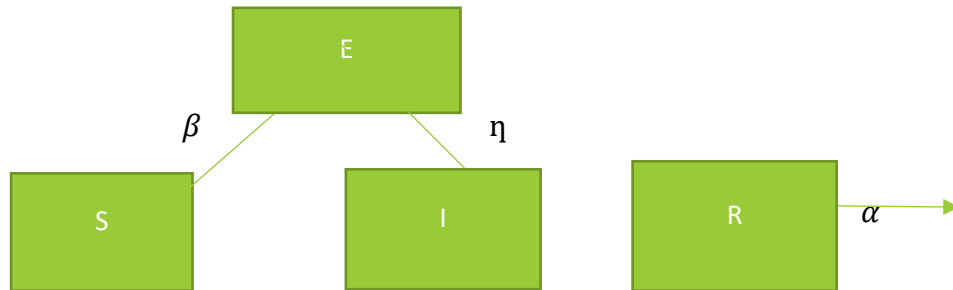
Molte malattie sono caratterizzate dal fatto che un individuo infetto non diventa subito infettivo: il patogeno ha bisogno di un certo tempo per replicarsi e stabilirsi nel nuovo ospite. Questo tempo, che corrisponde a quello durante il quale un individuo è infetto ma non infettivo, si chiama periodo latente. Un altro concetto epidemiologico fondamentale è il periodo di incubazione che corrisponde all'intervallo di tempo tra l'infezione e il manifestarsi dei sintomi. È importante notare che i due periodi, quello di latenza e quello di incubazione, non è detto che coincidano. Per introdurre il periodo latente nel modello SIR, si considera una nuova classe, quella degli "Exposed", o "Esposti", indicata dalla lettera E. Questa classe segue, generalmente, quella dei suscettibili. Il modello SEIR è descritto dal seguente sistema:

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - \beta SI - \mu S \\ E'(t) = \beta SI - (\eta + \mu)E \\ I'(t) = \eta E - (\alpha + \mu)I \\ R'(t) = \alpha I - \mu R \end{cases}$$

dove è stato indicato con η il tasso per persona con cui si diventa infettivi. Notare che $1/\eta$ rappresenta approssimativamente la durata del periodo latente. Inoltre, in questo

modello, la variabile $I(t)$ rappresenta gli individui che sono strettamente infettivi. Le restanti quantità hanno lo stesso significato che nel modello SIR.

Il diagramma di flusso del modello SEIR è rappresentato in Figura:



I punti di equilibrio del sistema si ottengono imponendo le condizioni:

$$\begin{cases} S'(t) = 0 \\ E'(t) = 0 \\ I'(t) = 0 \\ R'(t) = 0 \end{cases}$$

ovvero sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} \Lambda - \beta SI - \mu S = 0 \\ \beta SI - (\eta + \mu)E = 0 \\ \eta E - (\alpha + \mu)I = 0 \\ \alpha I - \mu R = 0 \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene:

1) Se $I = 0$, si ottiene l'equilibrio senza malattia. Difatti :

$$\begin{cases} \Lambda - \mu S = 0 \\ (\eta + \mu)E = 0 \\ \eta E = 0 \\ \mu R = 0 \end{cases}$$

Da cui: $\Lambda - \mu S = 0$, $E = 0$; $R = 0$. Si ha pertanto $(S = \frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0)$

Per ottenere l'equilibrio endemico si ricava E dalla terza equazione del sistema:

$$\begin{aligned} \eta E - (\alpha + \mu)I &= 0 \\ \eta E &= (\alpha + \mu)I \\ E &= \left(\frac{\alpha + \mu}{\eta} \right) * I \end{aligned}$$

Sostituendo nella seconda equazione è possibile ricavare S :

$$S = \frac{(\alpha + \mu) * (\eta + \mu)}{\beta * \eta}$$

Infine, si può ricavare I dalla prima equazione del sistema: $\Lambda - \beta SI - \mu S = 0$, utilizzando l'espressione di S . Si ottiene:

$$\begin{aligned} \Lambda - \mu S &= \beta SI \\ I &= \frac{\Lambda - \mu S}{\beta S} = \frac{\Lambda}{\beta S} - \frac{\mu}{\beta} = \frac{\Lambda \eta}{(\alpha + \mu) * (\eta + \mu)} - \frac{\mu}{\beta} = \frac{\mu}{\beta} * (R_0 - 1) \end{aligned}$$

dove:

$$R_0 = \frac{\Lambda \eta \beta}{\mu * (\alpha + \mu) * (\eta + \mu)}$$

è il “numero riproduttivo di base”. Esso ha lo stesso significato epidemiologico del modello S.I.R. e rappresenta, pertanto, il numero di casi secondari dovuti ad un singolo individuo infettivo in una popolazione in cui sono tutti suscettibili. Dunque, si può dire che il modello S.E.I.R., descritto dal sistema di equazioni:

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - \beta SI - \mu S \\ E'(t) = \beta SI - (\eta + \mu)E \\ I'(t) = \eta E - (\alpha + \mu)I \\ R'(t) = \alpha I - \mu R \end{cases}$$

ha un unico punto di equilibrio di equilibrio senza malattia dato da: $(S = \frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0)$. Se, invece, $R_0 > 1$, il sistema ha anche un unico equilibrio endemico : (S^*, E^*, I^*, R^*) , dove:

$$S^* = \frac{(\alpha + \mu)(\eta + \mu)}{\beta \eta} \quad E^* = \frac{(\alpha + \mu) \eta}{\mu \beta} * (R_0 - 1); \quad I^* = \frac{\mu}{\beta} * (R_0 - 1); \quad R^* = \frac{\alpha}{\beta} * (R_0 - 1)$$

Per il teorema (di globale stabilità)”, possiamo quindi affermare che se $R_0 < 1$ allora l’equilibrio senza malattia E_0 è globalmente asintoticamente stabile. Se $R_0 > 1$ allora l’equilibrio endemico E^* è globalmente asintoticamente stabile.

Il modello SIRD

Il modello SIR può essere facilmente generalizzato al modello SIRD aggiungendo il compartimento relativo ai Deceduti. Incrementando il numero dei compartimenti è possibile ottenere modelli con elevato potere descrittivo (ma anche elevata complessità!). Nel modello SIRD il compartimento «R=Removed» viene suddiviso in due ulteriori compartimenti: «R=Recovered» cioè guariti e «D=Deceased» cioè deceduti. Le sue equazioni sono una semplice estensione del precedente modello

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = -\beta * i(t) * s(t) \\ \frac{di(t)}{dt} = +\beta * i(t) * s(t) - \gamma * i(t) - \mu i(t) \\ \frac{dr(t)}{dt} = +\gamma i(t) \\ \frac{dd(t)}{dt} = +\mu i(t) \end{cases}$$

Un modello particolarmente complesso e sviluppato proprio per modellare le specifiche caratteristiche del virus Sars-CoV-2 è il modello SIDARTHE (G. Giordano et al., Modelling the COVID-19 epidemic and implementation of population-wide interventions in Italy, Nature Medicine, 2020). In questo modello il compartimento degli infetti è suddiviso in 4 compartimenti distinguendo i soggetti asintomatici da quelli che manifestano sintomi e quelli diagnosticati da quelli non diagnosticati (tampone sì/no). Inoltre è stato aggiunto il compartimento dei «malati gravi», quelli ricoverati in terapia intensiva. Naturalmente è possibile immaginare situazioni più complesse, ad esempio che lo stato di infetto non coincida con quello di infettivo, per cui si considera la classe degli

esposti (E), coloro che, pur incubando la malattia, non sono ancora in grado di trasmetterla. Il modello SIR è sostanzialmente adeguato a descrivere una pandemia influenzale, perché la durata dell'incubazione senza contagiosità è breve, e, dato che l'epidemia è causata da un nuovo virus, tutti gli individui sono inizialmente suscettibili. Volendo però studiare l'effetto di strategie (come la vaccinazione) che si rendano disponibili soltanto durante il corso dell'epidemia, anche un breve periodo di incubazione ritarda il decorso dell'epidemia in modo non irrilevante. Pertanto lo schema utilizzato come base della nostra analisi è quello tipico del modello SEIR, strutturato per tener conto delle differenze di età degli individui e della loro collocazione geografica. Inoltre, visto che il periodo d'interesse è relativamente breve (in questo caso qualche mese), il modello non ha componenti demografiche (nascite, morti, altri meccanismi di ricambio di individui quali le migrazioni). È sufficiente supporre che gli individui della popolazione, con le loro caratteristiche di età e collocazione geografica, siano un insieme costante durante lo svolgersi dell'epidemia.

5. Un modello per il controllo della S.A.R.S. (Severe Acute Respiratory Syndrome)

Analizziamo, ora un articolo pubblicato da A. B. Gumel e coautori nel 2004 riguardante un modello per la diffusione della SARS del 2003 in particolare per le città di Toronto, Hong Kong, Singapore e Pechino. Il modello mette in evidenza l'importanza di misure come quarantena e isolamento per il contenimento dell'epidemia data l'assenza di cure, trattamenti o vaccini.

Nel Novembre del 2002 è apparsa per la prima volta in Cina (provincia del Guangdong, Canton) la SARS, acronimo di Severe Acute Respiratory Syndrome. È una forma di polmonite causata da un coronavirus chiamato SARS-CoV. Fu identificata inizialmente dal medico italiano Carlo Urbani, deceduto poi a causa della stessa, e produsse un'epidemia terminata nel Luglio del 2003 e che interessò 32 paesi e regioni causando un totale di 8098 infezioni con 774 morti. Qualche altro caso si è poi ripresentato in Cina tra la fine del 2003 e l'inizio del 2004 senza ulteriori emergenze. Il virus, presumibilmente evoluto da un coronavirus esistente negli animali ma non nell'uomo, si è diffuso rapidamente grazie alla sua alta contagiosità. La trasmissione avviene mediante contatti stretti o ravvicinati con una persona ammalata soprattutto per vie aeree tramite goccioline di saliva emesse tramite tosse, starnuti e respiro, ma anche per contatto con oggetti infetti e per contatto con liquidi organici di pazienti infetti. I sintomi clinici includono febbre, tosse secca e dispnea, spesso accompagnati da positività a polmonite a seguito di radiografia toracica. I sintomi appaiono dopo un periodo di incubazione che varia dai 2 ai 14 giorni. La malattia ha un tasso di mortalità elevato: circa il 15% in media, ma il 50% tra gli anziani. Nel Marzo del 2003 l'OMS (Organizzazione Mondiale della Sanità) ha dichiarato l'emergenza lanciando una campagna globale per combattere la SARS. In assenza di trattamenti o di un vaccino, le misure adottate sono state l'isolamento di individui sintomatici e la quarantena di coloro che erano probabilmente stati esposti al SARS-CoV poiché storicamente efficaci al contenimento di diffusione di malattie

infettive. Queste procedure furono inizialmente poco efficaci a causa di inadeguate precauzioni igieniche (mancanza di dispositivi di protezione come mascherine), mancanza di informazioni sul virus e l'elevatissima vulnerabilità degli operatori sanitari. Successivamente ad una revisione dei protocolli e ad un rigido rispetto di questi ultimi si riuscì a contenere la diffusione della malattia anche negli ospedali e ad eliminare tutti i casi di SARS nel mondo entro Agosto 2003. Il modello studia la dinamica di sei classi, ovvero :1. Suscettibili $S(t)$; 2. asintomatici $E(t)$ 3. individui in quarantena $Q(t)$ 4. sintomatici $I(t)$ 5. isolati $J(t)$ 6. guariti $R(t)$ La popolazione totale è $N = N(t) = S(t) + E(t) + Q(t) + I(t) + J(t) + R(t)$. In particolare con "quarantena" si intende la separazione dalla popolazione di un individuo prima che appaiano i sintomi, mentre "isolamento" si riferisce unicamente agli individui sintomatici. Il modello tiene conto anche della demografia: sia $\mu > 0$ il tasso di morte naturale comune per ogni classe; sia Π il tasso per unità di tempo con cui nuovi suscettibili entrano nella regione. Questo parametro tiene conto di nascite, immigrazione ed emigrazione; sia infine p il tasso per giorno con cui dei turisti, supposti infetti ma asintomatici, entrano nella regione. Notare che questo parametro p viene posto uguale a zero nella formulazione teorica del modello perché il valore stimato è piccolo e si è visto avere un effetto trascurabile, mentre le simulazioni numeriche sono state fatte con $p > 0$. Se l'interazione tra suscettibili e infetti si modella tramite l'incidenza standard si ottiene l'equazione per la dinamica dei suscettibili:

$$S'(t) = \psi - \frac{S * (\beta I + \epsilon_E \beta E + \epsilon_Q \beta Q + \epsilon_J \beta J)}{N} - \mu S$$

Per gli asintomatici si ottiene:

$$E'(t) = p - \frac{S * (\beta I + \epsilon_E \beta E + \epsilon_Q \beta Q + \epsilon_J \beta J)}{N} - (\gamma_1 + K_1 + \mu) E$$

In quarantena:

$$Q'(t) = \gamma_1 E - (K_2 + \mu) Q$$

Sintomatici: L'equazione per la dinamica dei sintomatici è dunque:

$$I'(t) = K_1 E - (\gamma_2 + d_1 + \sigma_1 + \mu) I$$

Isolati:

$$J'(t) = \gamma_2 I + K_2 Q - (d_2 + \sigma_2 + \mu) J$$

Si suppone che $d_1 > d_2$ e $\sigma_2 > \sigma_1$ perché gli individui isolati, e quindi in ospedale, ricevono un trattamento anti-virale migliore, seppur sperimentale o parzialmente efficace, rispetto ai sintomatici.

Guariti:

$$R'(t) = \sigma_1 I + \sigma_2 J - \mu R$$

Si dimostra che per parametri non negativi il modello proposto è ben posto sia matematicamente che epidemiologicamente. Dal modello si ricava il numero riproduttivo di controllo R_c legato a quello di base dal fatto che il numero riproduttivo di base è uguale al numero riproduttivo di controllo, calcolato per $\gamma_1 = 0$, e $\gamma_2 = 0$. In particolare si ha:

$$R_c = \frac{\epsilon_E \beta}{D_1} + \frac{\beta K_1}{D_1 * D_2} + \frac{\epsilon_Q \beta \gamma_1}{D_1 D_4} + \frac{\epsilon_J \beta \gamma_2 K_1}{D_1 D_2 D_3} + \frac{\epsilon_J \beta \gamma_1 K_2}{D_1 D_3 D_4}$$

$$R_0 = \frac{\epsilon_E \beta}{K_1 + \mu} + \frac{\beta K_1}{(K_1 + \mu)(d_1 + \sigma_1 + \mu)}$$

dove:

$$D_1 = \gamma_1 + K_1 + \mu; D_2 = \gamma_2 + d_1 + \sigma_1 + \mu; D_3 = d_2 + \sigma_2 + \mu; D_4 = K_2 + \mu$$

La stima dei parametri è stata fatta sui dati sperimentali disponibili nel 2004.

6. Calcolo di R_0 con periodo infettivo latente e con isolamento dopo la diagnosi

Durante un'epidemia, in genere, il numero di infezioni diagnosticate col tempo, è noto. Nelle prime fasi di un'epidemia, la crescita è esponenziale con un tasso di crescita logaritmico dato da:

$$K = \frac{d(\ln P)}{d t}$$

dove P può essere interpretato come il numero cumulativo di diagnosi (compresi gli individui che si sono ripresi) o il numero attuale di pazienti positivi. Il tasso di crescita logaritmico è lo stesso per entrambe le definizioni. Per stimare R_0 sono necessarie ipotesi sul ritardo tra l'infezione e la diagnosi e il tempo che intercorre tra l'infezione e l'infettività. Un modello più realistico per calcolare il numero di riproduzione di base in un'epidemia in cui vengono assunte misure di contenimento, come l'isolamento dei diagnosticati positivi, bisogna considerare, quindi, anche i seguenti parametri:

- Un individuo è infetto, ma non ha sintomi e non infetta ancora gli altri; entra a far parte quindi del compartimento E (E=esposti). Indichiamo con τ_E la durata dello stato «Esposto»;
- Un individuo è infetto, non ha sintomi ma infetta gli altri. La durata dello stato infettivo latente è τ_I . L'individuo, quindi, infetta altre persone durante questo periodo;
- Se, per prevenire ulteriori infezioni, nelle misure di contenimento viene disposto l'isolamento dopo la diagnosi positiva, allora gli individui isolati, se l'isolamento è efficace, rientrano tra i Rimossi.

In questo caso si può utilizzare un modello S.E.I.R. Se utilizziamo un modello S.E.I.R, R_0 può essere calcolato da:

$$R_0 = 1 + K * (\tau_E + \tau_I) + K^2 * \tau_E * \tau_I$$

Il parametro K può essere determinato considerando l'equazione differenziale per il numero di soggetti esposti n_E e il numero di soggetti infettivi nel periodo di latenza n_I

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} n_E \\ n_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\tau_E & R_0/\tau_I \\ 1/\tau_E & -1/\tau_I \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} n_E \\ n_I \end{pmatrix}$$

K è il più grande autovalore della matrice, dato da :

$$K = \frac{-1 + \sqrt{(1 - 2f)^2 + 4f * (1 - f) * R_0}}{2f * (1 - f) * \tau_I \tau_E}$$

dove il parametro f è dato da :

$$f = \frac{\tau_I}{\tau_E + \tau_I}$$

La definizione del numero di riproduzione netto al tempo t o numero di riproduzione effettivo o numero di riproduzione real-time, chiamato R_t è analoga a quella di R_0 , con la differenza che R_t viene calcolato in un preciso momento. La variazione di R_t nel tempo permette di monitorare l'evoluzione di una epidemia e l'efficacia degli interventi adottati per contenerla. Nel corso di una epidemia il calcolo dell' R_t istantaneo può essere un importante ausilio al processo decisionale sulle misure da prendere per contenerla, anche se l'utilizzo dell' R_t come principale indicatore della gravità dell'epidemia può essere controverso. Sono stati sviluppati vari metodi di calcolo dell' R_t basati per lo più sul modello SEIR dove nel compartimento I (infetti/infettivi) normalmente non si calcolano gli asintomatici, dipendendo questi dal numero di test fatti per rilevarli. Una delle formule più utilizzate, inserita anche in alcuni pacchetti software per l'epidemiologia considera:

$$R_t = \frac{I_t}{\sum_{s=1}^t I_{t-s}}$$

dove I_t è il numero di infezioni avvenute nel giorno t e W_s è l'intervallo di generazione o seriale, cioè la probabilità che ci siano s giorni tra quando un soggetto viene contagiato e quando contagia un nuovo soggetto. Dopo che una persona è stata infettata, la sua infettività dura un certo numero di giorni (in genere: dopo un periodo di latenza, aumenta rapidamente, quindi diminuisce gradualmente), quindi l'intervallo di generazione è una distribuzione di probabilità. Il metodo di calcolo utilizzato dall'Istituto Superiore di Sanità nel corso dell'epidemia di COVID-19 si basa sull'utilizzo di un più complesso metodo Monte Carlo su catene di Markov, che sfrutta quindi un campionamento effettivo della distribuzione di probabilità con un numero sufficientemente alto di input calcolati passo passo (la catena di Markov). Dopo un certo numero di passi, l'algoritmo converge verso la miglior distribuzione descrittiva dell'evoluzione dell'epidemia.

7. Due diversi modelli di calcolo per il calcolo dell'indice R_t

L'ISS, per l'indice R_t , considera esclusivamente le persone sintomatiche, escludendo di fatto tutti i dati derivanti da attività di screening, applicando, quindi, una sottostima del valore effettivo. L'INFN, invece, applica una sovrastima dell'indice, includendo nel proprio modello anche gli asintomatici e i guariti. Entrambi i modelli sono differenti non solo nel tipo di dato che prendono in considerazione, ma anche nell'effettivo algoritmo di calcolo. Il modello adottato dall'Iss per il calcolo dell'indice di contagiosità R_t , si basa sull'utilizzo di un più complesso metodo Monte Carlo, che sfrutta quindi un campionamento effettivo della distribuzione di probabilità. Il metodo in questione si chiama Markov Chain Monte Carlo (MCMC), ovvero metodo Monte Carlo su Catena di Markov. I metodi Monte Carlo si basano su un numero sufficientemente alto di realizzazioni del fenomeno per comprendere in modo computazionale il comportamento della distribuzione; la catena di Markov, invece, definisce una serie di valori calcolati ogni passo, in cui definire la distribuzione. Dopo un certo numero di steps, possiamo sperare che il nostro algoritmo porti ad una convergenza alla distribuzione che stiamo

cercando e da cui si può estrarre il comportamento e i criteri utili. Ovviamente, affinché il processo funzioni, risulta necessario affidarsi ad una determinata funzione di verosimiglianza, che fornisca un metodo per poter aiutare l'algoritmo nella ricerca della corretta distribuzione. Il valore di questa funzione di verosimiglianza viene definita in base ai valori ottenuti nel comportamento del fenomeno in una finestra temporale antecedente. La funzione di verosimiglianza applicata dall'ISS è :

$$L = \prod_{t=1}^T P \left(C_t - I(t); \frac{Imp_t}{R_t} * \sum_{s=1}^t w_s * C_{t-s} \right)$$

Questi valori dipendono, ad esempio, dal numero di casi di persone sintomatiche avvenute in quella finestra temporale. In pratica, l'algoritmo calcola una distribuzione a posteriori e ha quindi anche la necessità di avere un determinata quantità di dati precedenti, migliorando mano a mano che aumentano i dati a disposizione della pandemia e diminuendo la volatilità del valore estrapolato.

Il modello SIRD, adottato dal gruppo Covid-Stat dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, è un modello semplificato rispetto a quello adottato dall'ISS. Il modello SIRD utilizza e cerca di descrivere quattro parametri: numero di persone suscettibili al contagio (S), numero di persone infette (I), numero di persone guarite (R), decessi (D). Come si può notare, i valori presi in considerazione non contengono solo i sintomatici, ma le persone infette in generale, sintomatiche e non. Una volta ottenuti questi dati il calcolo risulta abbastanza semplice. Inizialmente viene definito il rate dei quattro parametri: beta per infezioni, alpha per guarigioni, gamma per decessi, ovvero la loro variazione in un arco temporale di 4 giorni, poi si definisce l'indice di contagiosità R_t come:

$$R_t = \frac{\beta}{\alpha + \gamma}$$

Questo modello, oltre a risultare maggiormente semplificato, presenta alcune limitazioni, ad esempio il numero di persone suscettibili è considerato infinito e non viene considerata la differenza di tempistiche nell'ottenimento dei dati per i quattro parametri. Da un punto di vista della robustezza dei modelli, entrambi possono vantare un ottimo comportamento: il modello sfruttato dall'Iss, infatti si basa su un metodo robusto e testato, così anche per il modello utilizzato dall'INFN che trova ottimi riscontri con confronti dei dati provenienti dalla Cina. Ovviamente, nessuno dei due modelli è perfetto. Entrambi hanno delle limitazioni e si presentano come stime del reale indice di contagiosità, che probabilmente è differente da entrambi i valori forniti.

L'Istituto Superiore di Sanità di fatto applica come detto una sottostima del valore, eliminando quindi i dati degli asintomatici, poiché eccessivamente dipendenti da fattori altamente volatili, come ad esempio la quantità di tamponi effettuati. Questa scelta è atta a garantire una maggiore stabilità del valore, ma a discapito di una più completa stima del fenomeno. L'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, invece, utilizza un modello più completo, ma in questo caso introducendo una maggiore rumorosità dei dati forniti. Non deve, quindi, risultare un problema convivere con questi due valori, ma è essenziale comprenderne le ragioni e i limiti dei loro modelli, in modo da poter analizzare lo stesso

fenomeno da più punti di vista e averne una descrizione più accurata. L'obiettivo, in ogni caso, non cambia: portare il valore R_t a 0.

8. Conclusioni: il nuovo coronavirus : S.A.R.S.-CoV2

Nella metà del Dicembre del 2019 è stato identificato per la prima volta un nuovo ceppo di coronavirus nella città di Wuhan, Cina. Il virus è stato rinominato nuovo coronavirus o SARS-CoV2 poiché condivide circa il 70% del genoma con il SARSCoV. La malattia associata è stata riconosciuta come COVID-19. I sintomi più comuni sono, nei casi lievi, simili a quelli dell'influenza, ovvero febbre, tosse secca, stanchezza e dispnea. I casi più gravi, spesso in pazienti con malattie pregresse, sviluppano polmonite e sindrome acuta respiratoria fino ad arrivare anche al decesso. Il periodo di incubazione, nel caso in cui si sviluppino i sintomi, dipende da persona a persona e si è visto variare dai 2 ai 14 giorni. Si può però essere malati di COVID-19 ed essere asintomatici, ovvero persone infette potrebbero non mostrare mai i sintomi. La trasmissione avviene prevalentemente tramite contatto con un individuo infetto, generalmente attraverso goccioline respiratorie emesse tossendo o starnutendo e che in seguito vengono ispirate. Studi hanno confermato che è possibile infettarsi anche dopo aver toccato superfici od oggetti ove sia presente il virus, portando poi le mani verso la propria bocca o verso il naso o gli occhi. Il virus, infatti, sembra persistere su diverse superfici per ore o giorni. La particolarità di questo virus è che esso sembra trasmettersi anche in occasione di un contatto con un paziente asintomatico o con sintomi lievi. Questa peculiarità ha probabilmente fatto sì che il virus si diffondesse rapidamente in tutto il globo: pertanto, l'OMS ha dichiarato l'11 Marzo 2020 quella che è nota come Pandemia. I primi casi di coronavirus in Italia riguardavano due turisti cinesi che sono risultati positivi il 31 Gennaio 2020 mentre si trovavano a Roma. Successivamente, il 21 Febbraio, è stato individuato un focolaio a Codogno, nella provincia di Lodi. Il giorno seguente è stata istituita la zona rossa, che comprendeva 11 municipalità del nord Italia, e che prevedeva il lockdown e il divieto di ogni spostamento da e per i territori soggetti a restrizione, nonché all'interno dei territori stessi, al fine di contenere l'emergenza.

Un modello proposto per studiare il caso italiano è il S.I.D.A.R.T.H.E.. La popolazione è suddivisa in Suscettibili S (non infetti), Infetti I (asintomatici e senza diagnosi), Diagnostici D (asintomatici infetti individuati), malati A (dall'inglese "Ailing", (sintomatici infetti ma senza diagnosi), Riconosciuti R (sintomatici infetti con diagnosi), in pericolo di vita T (dall'inglese Threatened), (infetti con sintomi gravi, con diagnosi), guariti H ("Healed"), e i deceduti E ("Extinct"). Il modello non considera la possibilità di tornare suscettibili dopo la guarigione, nonostante sembri essersi verificato qualche caso, poiché il tasso di reinfezione è trascurabile. Notare che il modello non tiene conto della ridotta disponibilità e della mancanza di risorse mediche dovute al fatto che il sistema sanitario possa raggiungere o anche superare la propria capacità.

Molte sono le analogie con il virus della SARS, tra cui il fatto che i due virus condividono circa il 70% del genoma, inoltre i sintomi e le modalità di trasmissione tramite contatto

sono molto simili. Vi sono però delle differenze importanti tra i due virus di cui tenere conto. In primo luogo, in base a quanto detto nei paragrafi precedenti, una buona parte degli infetti non mostra sintomi evidenti e questo significa che mentre i malati di SARS sono facilmente individuabili perché mostrano sintomi chiari e forti, i malati di COVID-19 sono difficilmente rintracciabili. Inoltre, mentre la trasmissione del SARS-CoV avviene tramite pazienti sintomatici, quella del SARS-CoV2 sembra avvenire anche tramite asintomatici o persone con sintomi lievi. Questo significa che non è possibile formulare un modello matematico senza considerare la classe degli asintomatici. Infine, un'importante differenza è nel numero di contagi e di decessi per le due malattie: non sono per nulla paragonabili. Infatti, mentre per la SARS si parla di epidemia, per il COVID-19 si parla di pandemia. L'OMS ha contato per l'epidemia di SARS un totale di 8096 infetti e 774 decessi in tutto il mondo e per la pandemia di COVID-19 (con riferimento al 27 Giugno 2020) un numero di casi pari a 9.653.048 ed un numero di decessi pari a 491.128. I dati aggiornati quotidianamente sono reperibili sul sito ufficiale dell'Organizzazione Mondiale della Sanità al link:

<https://www.who.int/emergencies/diseases/novelcoronavirus-2019/situation-reports>

Bibliografia

- [1] Martcheva, M. (2015). An introduction to mathematical epidemiology (Vol. 61). New York: Springer.
- [2] Wiggins, S. (2003). Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos (Vol. 2). Springer Science & Business Media.
- [3] Zhao, S., & Chen, H. (2020). Modeling the epidemic dynamics and control of COVID-19 outbreak in China. *Quantitative Biology*, 1-9.
- [4] Giordano, G., Blanchini, F., Bruno, R., Colaneri, P., Di Filippo, A., Di Matteo, A., & Colaneri, M. (2020). Modelling the COVID-19 epidemic and implementation of population-wide interventions in Italy. *Nature medicine*, 1-6.
- [5] World Health Organization. (2020), Coronavirus disease (COVID-19): situation report, 159.
- [6] Herbert W. Hethcote, The Mathematics of Infectious Diseases, *SIAM Review*, Vol. 42, No. 4, pp.599-653, 2000.
- [7] R. Pastor-Satorras, A. Vespignani, Epidemic Spreading in Scale-Free Networks, *Physical Review Letters* 86, No. 14, 2001.
- [8] Matt J. Keeling, Ken T. D. Eames, Networks and epidemic models, *J. R. Soc. Interface* 2, 295-307, 2005.
- [9] V. Capasso, Mathematical Structures of Epidemic Systems, *Lecture Notes in Biomathematics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [10] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, 2002.

Quale Geometria nella Scuola di oggi?

Analisi storica e questioni didattiche¹

Ferdinando Casolaro* Renata Santarossa**

*Mathesis Napoli; ferdinando.casolaro@unina.it

** Mathesis Napoli; santarossa.renata@gmail.com

Sunto: Si presenta una sintesi storica del dibattito - tra i didattici della matematica nel XX secolo - sui limiti all'evoluzione dell'insegnamento della Geometria nelle scuole secondarie. Dal Modello euclideo alla Geometria Affine, attraverso il concetto di spazio vettoriale, si pone l'accento sull'esigenza di proporre alle nuove generazioni un Modello adeguato all'evoluzione della Fisica, ma applicato anche all'Economia e, in generale, alla Comunicazione negli ultimi 150 anni.

Parole Chiave: Geometria, Spazio vettoriale, Trasformazioni geometriche, Prodotto scalare e vettoriale

Abstract: It presents a historical summary of the debate - among mathematics didactics in the twentieth century - on the limits to the evolution of the teaching of geometry in secondary schools. From the Euclidean Model to Affine Geometry, through the concept of vector space, the accent is placed on the need to propose to the new generations a Model suitable for the evolution of Physics, but also applied to Economics and, in general, to Communication, over the past 150 years.

Keywords: Geometry, Vector space, Scalar and vector product, Geometric transformations

1. Introduzione

Come è stato sottolineato dagli organizzatori del II Congresso, dopo il primo che si è svolto nel 2019 a Diamante, la Federazione Italiana Mathesis è nata dall'esigenza di difendere lo statuto dell'associazione Mathesis, che dal 2017 è stata sottoposta ad una gestione personalizzata, alla totale mancanza di trasparenza dell'operato del Consiglio Nazionale, nonché la ripetuta violazione dello statuto.

¹ Dedicato alla memoria del prof. Giuseppe Manuppella.

La sezione di Napoli, che era stata addirittura cancellata dai canali di comunicazione (sito nazionale e rivista ufficiale) dell'associazione, ha contribuito in modo determinante alla nascita della Federazione ma, nello stesso tempo, non ha tralasciato in alcun modo la funzione di "Centro Operativo" per la diffusione della cultura matematica e dell'informazione sull'evoluzione del mondo fisico, temi essenziali per l'educazione scientifica degli studenti delle scuole di ogni ordine e grado.

Con l'intesa di tre sezioni, non lontane geograficamente (Castellammare di Stabia, Napoli, Pescara), si sono svolte significative attività per la Formazione e l'aggiornamento all'insegnamento: Matematica e Fisica a Castellammare di Stabia (Na) per i docenti del secondo Ciclo di Istruzione, Matematica e Scienze nella cittadina di Pizzoferrato (Ch) per i docenti del Primo Ciclo di Istruzione.

Inoltre, ancora nel periodo 2017-2019, la sezione di Napoli ha organizzato altri eventi al Dipartimento di Architettura dell'Università di Napoli Federico II; tra i più significativi un Convegno sull'insegnamento dell'Informatica nella Scuola di ogni ordine e grado, un Convegno "Matematica&Architettura&Natura" ed un Corso di Formazione per "L'insegnamento della Fisica nella Scuola secondaria di secondo grado", le cui risultanze sono rispettivamente pubblicate in due volumi distribuiti ai partecipanti delle attività e divulgati via on-line a centinaia di docenti che ne hanno fatto richiesta da tutta Italia.

Ai Corsi di Formazione, Scuole Estive annuali, corsi intensivi studiati per incontrare nuove esigenze di approfondimento nelle attività scientifiche e interdisciplinari, hanno partecipato docenti provenienti da ogni parte del territorio nazionale.

Le tematiche affrontate sono state raccolte e pubblicate in sei volumi, tre per il Primo Ciclo e tre per il secondo Ciclo (uno per ogni anno e per ogni Ciclo), a cura dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV) il cui Presidente, prof. Giuseppe Manuppella, oltre alla produzione editoriale in collaborazione con i due autori di questo lavoro, si è prodigato con grande generosità - e senza alcun compenso - a divulgare tutte le attività svolte dalle tre sezioni gemellate.

Durante gli incontri si è cercato di affrontare i temi essenziali - in parte anche recepiti dalle Indicazioni Nazionali - che sono alla base di una modernizzazione dell'insegnamento della Matematica e della Fisica.

Ovviamente l'argomento "Geometria" è stato centrale, in quanto abbiamo potuto constatare come essa abbia perduto la sua funzione propulsiva per l'educazione alla logica, anche perché negli ultimi 150 anni l'evoluzione del mondo fisico ha dimostrato che il modello euclideo non è sufficiente per rappresentarlo.

Nei paragrafi che seguono si propone una discussione, anche attraverso citazioni storiche, su come recuperare questo settore fondamentale della Formazione. Riteniamo che vadano conservate le linee fondamentali del Modello euclideo, ma con la sostituzione di qualche dimostrazione di teoremi macchinosi che spesso sono proprietà evidenti. con gli elementi essenziali di geometria proiettiva e di geometrie non euclidee, argomenti questi appena citati nelle indicazioni ministeriali e nelle linee guida (Casolaro, Rotunno 2015).

).

2. La critica dalla fine del XIX secolo alla Riforma Gentile del 1923

Nel settembre 1898 si svolse a Torino “Il primo Convegno italiano dei Professori di Matematica”, presieduto da Enrico D’Ovidio ² dove, tra l’altro, si discusse sull’utilizzazione del modello euclideo in Geometria che si metteva in discussione come “non unico” modello da proporre nell’insegnamento (Casolaro, Cirillo 2019). Siamo alla fine del XX secolo ed erano già noti:

- la teoria del matematico tedesco Felix Klein (1849-1925) che nel 1872 aveva pubblicato il “Programma di Erlangen”, dove individuava il nocciolo unificante delle varie geometrie nel concetto di «Gruppo di Trasformazioni» (Casolaro 1997 in Cundari 1997).

- i risultati di Ricci e Levi-Civita che nel 1885 avevano pubblicato l’algebra tensoriale che Einstein utilizzò per il suo Modello di Geometria-Spazio curvo per la Teoria della Relatività Generale (Casolaro F. 1993) (Casolaro F. Pisano R. 2011).

Tre anni dopo (1901), il Presidente della Mathesis Giovanni Frattini³, Professore di Geometria Proiettiva e Descrittiva all’Istituto Tecnico di Roma organizzò un Congresso nazionale Mathesis a Livorno dal tema: “I cambiamenti da introdurre nell’insegnamento universitario per ottenere buoni insegnanti di Matematica”. In questa circostanza Frattini portò la discussione su quale Geometria si dovesse insegnare e pose l’accento sull’esigenza di ampliare il modello euclideo con i primi cenni di Geometria Proiettiva in tutti gli indirizzi della Scuola, in quanto “la missione della Mathesis deve essere quella di volgere i progressi della Scienza a beneficio della Scuola” (Casolaro, Cirillo 2019).

Tale convinzione fu manifestata nei primi due decenni del XX secolo da importanti matematici, in particolare Roberto Bonola⁴ e Gino Loria⁵. Pertanto, nel primo ventennio del XX secolo, era prioritaria l’esigenza di un insegnamento della Geometria che tenesse conto degli sviluppi della Matematica e della Fisica dell’ultimo secolo (Loria 1921) (Casolaro, Prosperi 2011).

Questo processo fu bloccato dagli eventi politici degli anni ‘Venti’ del XX secolo, in particolare con la Riforma Gentile del 1923, di cui Benito Mussolini nell’articolo su “La

²Enrico D’Ovidio (Campobasso, 1843 - Torino, 1933) ha posto le basi della scuola italiana di geometria algebrica. Dal 1872 insegnò algebra e geometria analitica all’Università di Torino, di cui fu rettore dal 1880 al 1885. Ebbe come allievi Giuseppe Peano e Corrado Segre.

³Giovanni Frattini (Roma 1852 - 1925), Professore di Geometria Proiettiva e Descrittiva nella Scuola secondaria, è stato Presidente Mathesis nel periodo 1900-1902. Matematico di larghe vedute i cui interessi andavano oltre la Geometria; in particolare è noto per i suoi contributi alla teoria dei gruppi con un lemma che condusse alla definizione del cosiddetto “Sottogruppo di Frattini”,

⁴Roberto Bonola (Bologna 1874 - ivi 1911), che discusse la tesi con Federigo Enriques (1871-1946), è l’autore di uno dei maggiori trattati di Geometrie non euclidee noti in letteratura “La geometria non euclidea”. L’opera anastatica, pubblicata nel 1906, è stata tradotta in varie lingue.

⁵Gino Loria (Mantova 1862-Genova 1954) è stato Professore di Algebra e Geometria analitica all’Università di Genova, insegnamento che nel 1935 dovette abbandonare a seguito della promulgazione delle Leggi razziali fasciste, in quanto ebreo. È autore di un esauriente trattato di Geometria Descrittiva, oltre a vari contributi nella divulgazione della Storia della Matematica. Nel 1998 è stato scoperto un asteroide a cui è stato dato, in suo onore, il nome “ginoloria”.

Nuova Scuola Italiana” del 23 dicembre 1923, nel Discorso agli universitari fascisti, scriveva:

“Sono cinquanta anni che si dice che la scuola va riformata e la si critica in tutti i modi. Il governo fascista ha bisogno della classe dirigente. Nell’esperienza di questi 14 mesi io ho veduto che la classe dirigente fascista non c’è. Ecco le ragioni profonde della riforma Gentile: di quella che io chiamo il più grande atto rivoluzionario osato dal governo fascista in questi mesi di potere”.

Nei programmi della Riforma Gentile, i cui contenuti non subirono alcuna modifica negli anni 1923-1945, la geometria euclidea era l’unico Modello di geometria per l’insegnamento nelle scuole. Gentile diede impulso allo studio del Latino a discapito delle ore di Matematica e Fisica che furono ridotte da dieci a sei.

Nel 1945 una commissione nominata dai governi delle potenze vincitrici della guerra formulò dei piani di studio per sostituire quelli gentiliani (Casolaro 2014).

3. I tentativi di ampliamento del Modello euclideo dalla seconda metà del XX secolo

Nel 1950 la Comunità Matematica Italiana elaborò nuovi piani di studio, tenendo anche conto delle esperienze maturate in altre nazioni, in particolare in Francia, Inghilterra e Belgio (Morelli 1989). Nel periodo 1950-1990 furono elaborate tre consecutive proposte di modifica della riforma Gentile.

1) 1961-1962: prima modifica alla riforma su temi di “Matematica moderna”. L’anno successivo (1963) fu nominata una commissione UMI-CIIM (“commissione di Frascati” perché si riuniva a Frascati) con il compito di elaborare nuovi programmi di Matematica per i licei.

I programmi di Frascati presentano un primo ampliamento nella trattazione della Geometria, rispetto alla impostazione euclidea:

- per il terzo anno si parla di piano vettoriale geometrico (Casolaro 2002) e di gruppi delle congruenze e delle similitudini del piano (Casolaro 1997 in Cundari 1997).

- per il quarto anno si passa allo spazio vettoriale geometrico e per il quinto anno si parla di spazio vettoriale astratto (Casolaro 2002).

2) 1985: seconda modifica alla riforma dei programmi di matematica: Piano Nazionale per l’Informatica (PNI), promosso nel 1985 dal Ministro della Pubblica Istruzione, Franca Falcucci.

A tal fine fu costituito un comitato ristretto di cui faceva parte, per l’area matematica, Giovanni Prodi⁶.

⁶Giovanni Prodi (Scandiano 1925 - Pisa 2010) è stato un matematico italiano, A partire dagli anni settanta si è occupato di didattica della matematica, nel cui ambito produsse il cosiddetto "Progetto Prodi" che consisteva nell’insegnamento della “matematica come scoperta”. Ha fatto parte della Commissione

L'attuazione del piano ebbe inizio con la formazione di un gruppo di Formatori, con il compito di formare i docenti in attività.

3) 1988: terza modifica alla riforma. Il ministro della Pubblica Istruzione Giovanni Galloni istituì una commissione col compito di procedere alla revisione dei programmi dei primi due anni (e successivamente del triennio) dell'istruzione secondaria di secondo grado. Coordinatore dei lavori fu nominato il sottosegretario alla P.I. Beniamino Brocca, da cui il nome "Commissione Brocca".

I piani di studio Brocca, sempre in riferimento alla Matematica, hanno recepito molte delle indicazioni dei programmi di Frascati e del PNI, in particolare ciò che riguarda la Geometria, e più specificamente la Geometria basata sulle Trasformazioni geometriche (Giovanni Prodi 1982).

Parallelamente ai piani di studio «Brocca», partì un Progetto sulle interrelazioni tra l'insegnamento della Matematica e l'insegnamento del Disegno che teneva conto dell'utilizzo delle nuove tecnologie. Il Progetto aveva come obiettivo:

- per il Disegno, l'utilizzo delle tecniche informatiche (CAD, GET, CABRI',..., oggi Geogebra) che sostituivano la rappresentazione con riga e compasso;
- per la Matematica, l'esigenza di educare i docenti (successivamente gli studenti) alle conoscenze fondamentali della Geometria su cui sono basate le nuove tecniche, cioè la Geometria Proiettiva.

Relativamente alla stesura del percorso di Matematica, fu incaricato uno degli autori di questa nota (Casolaro), le cui risultanze sono in bibliografia (Casolaro 1997 in Cundari 1997) alle pagine 73-78; 85-118; 205-268.

4. Indicazioni emerse dai Nuclei di Ricerca Didattica

Nel V Convegno Nazionale in Didattica della Matematica sull'insegnamento della Geometria, svoltosi nel 1979, emersero le tendenze e le scelte dei Nuclei di Ricerca Didattica che operano in varie Università (Morelli 1989).

Il prof. Alberto Conte⁷, nella sua relazione introduttiva, notava già in quella occasione, con una certa amarezza, che la Geometria nelle scuole medie si insegna sempre di meno. Purtroppo ciò è senz'altro vero, in particolare la Geometria dello spazio - universo tridimensionale che ci circonda - è di fatto esclusa dai programmi. Alle difficoltà nell'affrontare la geometria dello spazio contribuisce sicuramente la mancanza di conoscenze delle tecniche del Disegno: nei licei classici e negli istituti tecnici e

scientifica dell'Unione Matematica Italiana dal 1961 al 1982 e, dal 1967 al 1996, della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica.

⁷Alberto Conte (Asti, 1942) è Professore emerito all'Università di Torino, dove è stato docente ordinario di Geometria Superiore fino al 2012. Senza mai trascurare le tematiche didattiche nell'insegnamento anche della Scuola, è stato Presidente dell'UMI nel periodo 1994-2000, Presidente triennale dell'Accademia delle Scienze di Torino nel periodo 2012-2016. Nel 2000 il Presidente della Repubblica Carlo Azeglio Ciampi lo ha insignito della Medaglia ai benemeriti della scienza e della cultura.

professionali per il commercio non è stato mai previsto lo studio di questa disciplina. Possiamo affermare che la maggior parte dei docenti e, quindi degli studenti, non ha mai visto un'assonometria o una proiezione stereografica.

Con le nuove tendenze affermatesi in quegli anni, si è sviluppata la ricerca delle idee unificanti e delle strutture algebriche come base delle varie teorie.

L'obiettivo principale nello studio della Geometria è stato individuato nella scoperta della struttura di Spazio vettoriale insita nel piano euclideo (Casolaro, 2002).

In particolare, il matematico francese Jean Dieudonné (1906-1992), proponeva di insegnare la "Geometria" partendo dall'assioma unico:

"Il piano è uno spazio vettoriale di dimensione due, dotato di prodotto scalare commutativo" (Casolaro, Eugeni 1996).

Pertanto, la convinzione che maturava in molti docenti negli anni 'Settanta' e 'Ottanta' è che l'insegnamento della Geometria si debba fondare su due caratteristiche comuni alle trattazioni moderne:

1) Lo studio e l'utilizzo delle Trasformazioni geometriche con la scoperta delle strutture algebriche ad esse collegate: gruppo e spazio vettoriale.

2) La considerazione e l'utilizzo del riferimento cartesiano.

Su una trattazione di questo tipo ancora oggi sono riferimento per molti docenti i testi di Emma Castelnuovo⁸ e "Il metodo matematico" di Lucio Lombardo Radice⁹ scritto con la moglie Lina Mancini Proja, anch'essa matematica.

Il contributo di Emma Castelnuovo alla modernizzazione dell'insegnamento della geometria, negli anni 'Sessanta' e 'Settanta', fu apprezzato anche da Bruno de Finetti¹⁰, il quale aveva fatto in modo che la propria figlia Fulvia avesse come insegnante di Matematica proprio la Castelnuovo, per l'originalità e l'ampiezza delle sue idee sull'esigenza di insegnare una Geometria dinamica e aderente all'evoluzione del mondo reale. A tal proposito Emma Castelnuovo, convinta che la Geometria non dovesse essere astratta ma concreta, così si esprime:

«quando si inizia lo studio della Geometria, si deve attirare l'attenzione sulla realtà che ci circonda: l'area dei campi, i perimetri, la realtà; si deve poter osservare, misurare».

A tal proposito, si legge in (R. Natalini, 2004): *"I testi in commercio non aiutavano i suoi allievi; erano manuali con poche figure, carichi di formule ed esercizi, per cui Emma -*

⁸Emma Castelnuovo (1913-2014), è stata un'insegnante e matematica italiana, figlia del matematico Guido Castelnuovo. Ha dato significativi contributi alla didattica della matematica, rivoluzionando completamente il modo di insegnare la materia.

⁹Lucio Lombardo Radice è stato uno dei maggiori esponenti della Cultura italiana nei decenni successivi al secondo conflitto mondiale. Militante nel Partito Comunista, solo nel 1945 fu ammesso come assistente all'Università di Roma dopo quattro anni di reclusione in quanto oppositore al regime fascista. È stato pedagogista, didatta e scrittore, Collaboratore, in qualità di consulente scientifico, a programmi della Rai, tra i quali è significativo il film in tre puntate "Non ho tempo", incentrato sulla figura di Evariste Galois, nel quale lo stesso Radice recitò nel ruolo del professor Louis Paul Emile Richard, universalmente riconosciuto come maestro di Galois.

¹⁰Bruno de Finetti (Innsbruck 1906, Roma 1985) è stato un matematico, statistico e accademico italiano. È considerato uno dei maggiori esponenti della Teoria del Calcolo delle Probabilità; in particolare si deve a lui la formulazione del concetto di probabilità soggettiva. È stato Presidente nazionale della Mathesis nel periodo 1970-1981.

che aveva deciso di insegnare esclusivamente nella Scuola media - cominciò a scrivere basandosi sulle sue esperienze in classe”.

Dall'esperienza di Emma Castelnuovo sono estratti oggi percorsi di insegnamento che tengono conto della teoria delle ombre che è basata sul concetto di omologia (Casolaro, Rotunno 2019).

5. La letteratura in Europa nel XIX secolo

È opportuno sottolineare che lo stesso Euclide si rese conto dei limiti del trattato “Gli Elementi” che non teneva conto dello spostamento naturale delle figure nel piano e nello spazio, tanto che pubblicò un altro volume - tradotto nel 1915 - “I Fenomeni” che si può considerare il primo Modello dinamico di geometria.

Non ci soffermeremo, per motivi di brevità, sul trattato “I Fenomeni”, ma per comprenderne l'impostazione dinamica basta confrontare la definizione statica di sfera (precisamente ‘superficie sferica’) che troviamo ne “Gli Elementi” con la definizione dinamica de “I Fenomeni”:

La sfera è il luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da un punto fisso detto centro (Elementi).

La sfera è la superficie dello spazio ottenuta dalla rotazione di una circonferenza intorno al proprio diametro (Fenomeni).

Ma le prime discussioni che hanno fatto rumore sui limiti della geometria euclidea si possono evincere dalle opere del matematico Girolamo Saccheri¹¹ che cercò di dimostrare la falsità del V postulato di Euclide, avvalendosi di ipotesi che pensava potessero portare ad una contraddizione.

Anche se non riuscì nel suo obiettivo, perché il postulato delle parallele è indimostrabile, dai suoi tentativi sono nati i primi sistemi di geometria iperbolica ed ellittica, da cui successivamente hanno tratto utilità i matematici che hanno pubblicato sulle geometrie non euclidee. I principali, i cui modelli sono noti in letteratura, sono il tedesco Bernhard Riemann (1826, 1866), il russo Nikolaj Ivanovi Lobacevskij (1792, 1856), il rumeno Janòs Bolyai (1802, 1860) ed il francese Henri Poincaré (1854, 1912), oltre a Carl Friedrich Gauss (1777, 1855) che prima di tutti gli altri, nel 1817, affermò che "non è possibile dimostrare che la Geometria euclidea sia necessaria per lo sviluppo dell'universo fisico; è quindi possibile costruire una altra Geometria applicabile fisicamente" (Casolaro F., Santarossa R. 1997).

In riferimento alla geometria per lo spazio fisico, Riemann nel 1854 concluse la presentazione della sua tesi di dottorato affermando che:

¹¹Giovanni Girolamo Saccheri (Sanremo 1667, Milano 1733) è stato un gesuita, matematico, docente e accademico italiano che mise in discussione la veridicità del V postulato di Euclide. È considerato tra i padri delle geometrie non euclidee

“Lo studio della geometria non si può astrarre dall'evoluzione fisica. In uno spazio in cui la curvatura cambia da un luogo all'altro per la presenza della materia, e da un istante all'altro per il moto della materia, le leggi della geometria euclidea non sono valide”

Per quanto riguarda poi la Geometria Proiettiva, nel 1872 Felix Klein, con “Il programma di Erlangen”, considerava le proprietà geometriche delle figure classiche rispetto a Gruppi di Trasformazioni (Casolaro, 1992).

L'idea di Klein consiste nell'applicazione della teoria dei gruppi (secondo la teoria algebrica di Galois e nella sistemazione data dopo da Jordan) alle teorie geometriche.

In tal modo, Klein presentava una teoria unificatrice che permetteva di classificare le varie geometrie che progredivano indipendentemente una dall'altra (Casolaro F. 1997).

7. Conclusioni

Il processo dell'evoluzione della Didattica della Matematica dal dopoguerra agli albori del terzo millennio (Ministero Gonella 1946 - Ministero Moratti 2003) è andato sempre nella direzione analizzata in questa Presentazione, con i principali matematici-pedagogisti (Lombardo Radice, Mancini Proia, Emma Castelnuovo, Bruno de Finetti, Giovanni Prodi, Francesco Speranza, Aldo Morelli, Bruno Rizzi, ecc...) che, seppur con diverse argomentazioni, erano tutti convinti dell'esigenza di un modello di Geometria più ampio rispetto a quello euclideo.

Negli anni successivi (in particolare con i ministri Moratti-Gelmini-Profumo) si è avuto un ritorno al modello gentiliano.

Premesso che una Comunità Scientifica, che dopo 2300 anni non è in grado di modificare (o aggiungere) nulla al Modello euclideo, rappresenta una Comunità scadente, è giusto ritenere che uno dei i principali motivi per cui questo processo ha trovato ostacoli, sia dovuto alla mancanza di conoscenze delle proposte didattiche descritte nel presente lavoro, nonchè alla volontà accademica-istituzionale di non spostare l'asse culturale della Scuola sulla reale visione dell'universo fisico-geometrico.

Bibliografia

Cundari C. (1997). Atti del Progetto del M.P.I. e del Dipartimento di Progettazione e Rilievo dell'Università "La Sapienza" di Roma: Disegno e Matematica per una didattica finalizzata alle nuove tecnologie (11-15 dicembre 1990; 6-10 maggio 1991; 8-12 dicembre 1991). Pubblicato 1997.

Casolaro F. (1997). Geometria Proiettiva, Omografie, Affinità, Similitudini, Isometrie nelle pagine 73-78; 85-118; 205-268 del volume 'Cundari 1997'.

Loria G. (1921). Storia della Geometria Descrittiva dalle Origini sino ai giorni nostri. Milano, Ulrico Hoepli.

Casolaro F., Eugeni F. (1996). Trasformazioni geometriche che conservano la norma nelle algebre reali doppie. Ratio Matematica n. 1, 1996 - pag. 23-33

F. Casolaro - R. Santarossa: "Geometrie non euclidee e geometria differenziale: note didattiche", Congresso Nazionale Mathesis 1997: "Attività algoritmica e pensiero dialettico nell'insegnamento della Matematica". Caserta, 28-31 ottobre 1997 - pag. 213-219.

Casolaro F. (2002), Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo. Congresso Nazionale Mathesis "La Matematica fra tradizione e innovazione: un confronto europeo". 17-19 ottobre Bergamo 2002 - pag.185-198.

Casolaro F. (2003), Le trasformazioni omologiche nella Storia, nell'Arte, nella Didattica - Atti del Convegno Internazionale "Matematica e Arte: un sorprendente binomio" Vasto, 10-12 aprile 2003; pagg. 129-148.

R. Natalini (2004), Speciale per i cento anni di Emma Castelnuovo: audio dell'intervista di marzo 2004, pubblicato su Lettera Pristem nello stesso anno.

Casolaro F., Prosperi R. (2011) Atti della Scuola Estiva di Terni, 26-30 luglio 2011 La Matematica per la Scuola Secondaria di secondo grado: un contributo per il docente di Matematica". Editore 2C Contact.

Casolaro F., Pisano R. (2011) An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part One) - History Research - Vol. 1, Number 1, December 2011 - pag. 47-60.

Casolaro F. (2014) L'evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola?". Science & Philosophy Divulcation Fascicolo 1, 2014 - Fondazione "Panta Rei" Numero speciale di Ratio Mathematica, pagine

Casolaro F. Rotunno A (2015) "Mathematics and Art: from the pictorial art to the linear transformations". University of Defence - Brno, Czech Republic, ottobre 2015.

Casolaro F. Cirillo F. (2019) “Cinquant’anni di attività della Mathesis tra evoluzione politica e sviluppo scientifico: dal 1959 al 2008” Arte&Scienza, Ed. Universitalia.

Casolaro F. Rotunno A. 2019 “L’ampliamento affine e proiettivo del modello euclideo”. “Matematica&Architettura-Fisica e Natura”. Pubblicazione Aracne 2019, pagg. 106-122.

Un ricordo di Mauro Bernabei

Amedeo Matteucci

Liceo Classico “G. B. Vico”, Chieti

amedeomatteucci.docente@convittogbvico.edu.it

Ho avuto occasione di conoscere Mauro Bernabei quasi vent'anni fa, durante una cena conviviale di colleghi iscritti all'associazione Mathesis. La nostra prima discussione nacque, quasi per caso, dal suo rispondere ad una mia osservazione relativa ad uno dei famosi paradossi di Zenone, probabilmente il più noto, ossia quello di Achille e della tartaruga. Ovviamente l'oggetto del contendere non era la nota risoluzione matematica dello stesso, ma la questione delle motivazioni filosofiche di Zenone nel formulare questo e gli altri suoi paradossi. In poco tempo il discorso iniziò a spaziare su ben altri fronti, dal ruolo dei pitagorici nell'ispirare la filosofia di Platone, al sesto teorema di incompletezza di Gödel, e così via.

In breve, mi resi conto di avere di fronte un interlocutore profondamente erudito e dagli interessi molteplici. Ovviamente non eravamo sempre d'accordo su tutto, e aggiungerei per fortuna, visto che si può avere una discussione intellettuale veramente stimolante solo quando si ha di fronte una persona brillante che metta intelligentemente in discussione quello che si dice e non quando si conversa con un interlocutore che, per insipienza o per disinteresse, si limiti ad annuire. Ad ogni modo, attraverso la conversazione di quella memorabile serata e le altre che avemmo nelle, purtroppo poche, altre occasioni in cui ci incontrammo, si creò un rapporto di amicizia e stima reciproca, probabilmente anche per via delle esperienze in comune che scoprimmo di aver avuto in diversi momenti del nostro percorso di vita, pur se a quasi quarant'anni di distanza. Il diploma nello stesso liceo, il “G. B. Vico” di Chieti, in cui entrambi conseguimmo la maturità classica. Il periodo di lavoro presso l'Osservatorio Astronomico di Collurania in Teramo, entrambi ancora studenti universitari, lui ai tempi del direttore prof. Tempesti, io come tesista sotto la direzione del prof. Tornambè. La laurea in Fisica, lui alla Sapienza, io all'Aquila. Ultima, ma non ultima, esperienza in comune: l'insegnamento nella Scuola secondaria superiore.

Esperienza in comune, ma non comune, perché, il curriculum di insegnante di Mauro Bernabei ha poco di comune. Egli ha, infatti, potuto vantare una serie di incarichi, anche dirigenziali, presso scuole di diversi Paesi. Turchia, Somalia, Brasile, Francia, solo per

citarne alcuni. E, come già detto, non era solo nell'ambito, diciamo professionale, che dispiegava le sue attività. Per esempio, era anche un musicista compositore dilettante. Dilettante non nel senso di poco capace, ma inteso come chi prova genuino diletto intellettuale nel praticare una difficile arte appresa da autodidatta. Questo per sottolineare che numerosi erano i suoi interessi culturali, anche nel campo delle discipline umanistiche. Era un conoscitore di letteratura, lingue antiche, arte e, spesso riusciva a intrecciare conoscenza scientifica ed erudizione umanistica nelle sue attività e nei suoi scritti.

Pochi mesi fa, per il tramite di un amico comune, ricevetti in dono da Mauro Bernabei una copia con dedica della sua traduzione della *Costruzione della meravigliosa tavola dei logaritmi* di Nepero, traduzione da lui pubblicata nel 2019, in occasione del quattrocentesimo anniversario della pubblicazione dell'originale latino. Avevo già avuto modo di apprezzare l'opera quando, anni fa, lui stesso mi fornì una copia elettronica del suddetto lavoro, che aveva da poco ultimato e presentato al Congresso Nazionale della Mathesis. Questa opera di Mauro Bernabei, pubblicata pochi anni prima della sua scomparsa, può essere considerata, non tanto il riassunto di una attività comunque troppo multiforme per essere compendiata in un singolo volume, ma sicuramente un esempio paradigmatico dell'ingegno del compianto professore. Stiamo parlando della traduzione e del commento di un testo latino, attività che, di per sé, costituirebbe l'equivalente del lavoro di una tesi di dottorato in filologia classica.

Nello specifico, il libro contiene la traduzione integrale, con testo latino a fronte, di tutta la *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, scritta, appunto, da John Napier e pubblicata postuma nel 1619. Mauro Bernabei, però, non si è limitato a produrre, per suo diletto personale, l'equivalente di tre anni di intenso lavoro accademico di uno specialista in lingua latina. Il libro citato oltre alla traduzione, abbondantemente commentata da lunghe note a piè di pagina, contiene anche quattro capitoli introduttivi che, sempre a cura del traduttore, costituiscono una vera e propria introduzione propedeutica agli argomenti trattati, delineando in maniera succinta ma chiara e dettagliata, lo stato dell'arte all'inizio dell'epoca moderna su: frazioni e notazioni decimali, progressioni aritmetiche e geometriche, trigonometria piana e trigonometria sferica. Come se ciò ancora non bastasse, il nostro autore ha completato il suo lavoro con un'appendice di ben dieci capitoli. Ogni capitolo di questi, è un vero e proprio articolo monografico che spiega e completa qualcuno degli argomenti trattati nella *Constructio*.

Pertanto, il lettore che, pur interessato alla lettura della *Constructio* tema di non riuscire a seguirne l'esposizione discorsiva e non formale, come era d'uso nei libri di matematica di quei secoli, o abbia qualche perplessità sulla notazione o sulla terminologia utilizzata, troverà nei capitoli di introduzione tutti i prerequisiti per la

lettura e, nei capitoli di complementi, gli strumenti, in notazione moderna, per la sua completa fruizione.

Inoltre, proprio perché i capitoli di introduzione e di approfondimento hanno la forma di brevi articoli indipendenti, possono anche essere letti individualmente, in un ordine diverso da quello di esposizione o, comunque, operando una selezione in base ai propri interessi. Se ci si è arrovellati, per esempio, sull'origine della costante detta di Nepero, su chi sia stato il vero inventore dei logaritmi in base dieci, sui metodi di interpolazione utilizzati all'inizio dell'era moderna, in questo libro si troveranno spunti interessantissimi.

L'erudizione di Mauro Bernabei, anche in campi tra loro molto diversi, evidenziata dall'opera di cui ho appena parlato, mi offre l'occasione per una breve riflessione sul tema della relazione tra discipline scientifiche e discipline umanistiche nella didattica, un tema molto caro allo scomparso professore che stiamo qui ricordando.

Le discipline umanistiche sono spesso caratterizzate, almeno nella scuola secondaria superiore, da un approccio eminentemente storicistico. È noto che al liceo si studia storia dell'arte, invece che arte *tout court*, così come si studia storia della filosofia, e non filosofia, giusto per fare due esempi. Nell'ambito delle scienze matematiche e naturali, non domina affatto, nella prassi didattica, un analogo approccio. Infatti, è altrettanto noto che si studia matematica e fisica, e non storia della matematica o storia della fisica. Ed è bene che sia così, dal momento che un approccio *prevalentemente* storico sarebbe, a mio modesto avviso, poco efficace per insegnare queste discipline.

Questo, però, non significa che chi conosce già parecchia matematica e fisica, e si trovi a dover insegnare a giovani discenti, non possa trarre indubbio giovamento dall'approcciare i testi originali che hanno fatto la storia di queste discipline. Non solo perché, come risaputo, è buona norma sapere più di quanto di debba insegnare, ma anche perché, pur essendo convinto, come ho già detto, che un approccio storicistico sarebbe didatticamente inadeguato all'insegnamento della matematica, sono ugualmente convinto che inserire opportunamente rimandi e contestualizzazioni a problemi, approcci e opere storiche, sia molto utile nella pratica didattica.

Mi si potrebbe ribattere che, a questo fine, sono più che sufficienti i “riquadri” informativi oramai alquanto diffusi nella maggior parte dei manuali scolastici, però, per esperienza personale, so che se non avessi preso in mano la *Géométrie* di Cartesio o i *Principia* di Newton, sarei ancora convinto che il primo abbia inventato coordinate e assi cartesiani, come li intendiamo e usiamo noi, e che il secondo abbia enunciato il secondo principio scrivendo che la forza totale agente su un punto materiale è uguale alla sua massa moltiplicata per la sua accelerazione.

A questo proposito, voglio anche ricordare una conversazione avuta con Mauro Bernabei, sempre durante una cena di iscritti alla Mathesis, in cui gli sottoponevo il testo di una prova congiunta di latino e fisica, che avevo organizzato nel liceo in cui insegnavo all'epoca. In quell'occasione l'arguto professore mi fece notare che la *mutatio motus*, la “mutazione del moto”, di cui parlava Newton nella sua formulazione originale di quello che oggi denominiamo secondo principio della dinamica, non è da intendere come accelerazione, ma come variazione della quantità di moto. Ricordo distintamente il suo sentenziare, quasi ieratico, nel sottolineare il significato di quel termine: “*Motus, sive quantitas motus.*” e, chiarito questo punto, la lettura di un passo, altrimenti ambiguo, diventa facilissima.

Anche quest'ultimo episodio mostra chiaramente che i molteplici interessi e la vasta cultura di Mauro Bernabei non erano finalizzati ad uno sfoggio di erudizione fine a se stesso, ma erano il segno di un fortissimo, nobilissimo e umanissimo desiderio di comprendere il mondo che ci circonda nella sua intricata e bella complessità. Virgilio, autore che il caro professore conosceva e apprezzava, scrisse: *felix qui potuit rerum cognoscere causas*. Questa frase descrive più che bene il nostro Mauro Bernabei.

Le scuole superiori e la cultura oggi

Franco Eugeni

Vi presento una ministoria personale che giustifica il mio interesse per il mondo della scuola e che si conclude con una indicazione culturale finale.

Ho insegnato nelle scuole medie Superiori dal 1961 fino a Novembre del 1963, quando sono stato assunto, nella Università di Modena come Assistente incaricato e Professore incaricato, ho conseguito una abilitazione nel 1964 e successivamente ho vinto il Concorso di Matematica e Fisica nel 1965 e contemporaneamente ho vinto il Concorso da Assistente ordinario, optando per questa ultima carriera.

Sono nato in una famiglia di Insegnanti in quanto i miei genitori, le sorelle e il fratello di mia madre erano insegnanti, una mia nonna e due mie bisnonne erano maestre.

Nei primi anni della mia attività universitaria dal 1963 al 1969 ho preparato per le abilitazioni e i concorsi una media di circa 80 persone l'anno. Successivamente trasferito a L'Aquila, ebbi l'idea con altri colleghi di fare i precorsi per la facoltà di Ingegneria, fummo i primi in Italia, con l'Aquila ho coordinato il V anno degli Istituti Magistrali di L'Aquila, Sulmona, Avezzano per oltre 10 anni.

Ho seguito la formazione in ambito Mathesis specie ai tempi di Bruno Rizzi, del quale ho un ricordo nel cuore per la sua passione per la formazione. Sono diventato Associato con il primo giudizio di idoneità e subito dopo ho vinto il Concorso a Cattedra Universitario del 1984 e sono stato chiamato sulla Cattedra di Analisi Matematica e Geometria Analitica ad Architettura a Pescara. Dopo Pescara sono stato a Roma ad Ingegneria, a Teramo su Storia della Matematica e successivamente su Filosofia della Scienza.

Ho ricoperto la carica di Direttore di Dipartimento, membro del Senato Accademico e Delegato Rettorale per la Didattica per circa 12 anni. Dal 1998 al 2016 nell'ambito dell'Università di Teramo e con l'utilizzo della piattaforma dell'APAV, creata e gestita da Giuseppe Manuppella, Accademia della quale sono stato rifondatore nel 1987 con altri. Tali Master per oltre 10 anni hanno fornito materiale, anche di uso scolastico, ad insegnanti, come una volta si diceva, di ogni ordine e grado, raggiungendo in parecchi di quegli anni anche più di mille iscritti annui. Parallelamente ai Master ho diretto ben 9 corsi biennali polivalenti per l'handicap, tenutisi tra Teramo, L'Aquila e Ascoli Piceno.

Ho seguito quindi, per così dire, la scuola da lontano, sia come Presidente degli esami di stato, che Presidente nelle Abilitazioni e nei Concorsi Nazionali e Regionali fino ai 5 anni successivi al mio pensionamento, sono stato anche Presidente in un Concorso a Preside e

due Concorsi per Ispettore. Questi sono stati i miei legami passati con l'Universo Scuola. Attualmente sto seguendo la scuola attraverso i miei 4 nipoti di anni 20, 18, 17 e il piccolo di anni 10.

La scuola di oggi è diversa dalla scuola di ieri, le offerte formative si sono moltiplicate, i rapporti con gli studenti spesso appaiono conflittuali, alcune famiglie mostrano risentimenti nei confronti della classe docente, forse per essere stati loro stessi non allievi interessati.

Talvolta la funzione docente è da trincea, questo è quanto appare a me dall'esterno. Inoltre, sarebbe opportuno pagare meglio gli insegnanti per l'incredibile lavoro di livello che essi svolgono. Nonostante molti ragazzi si rifiutino di crescere intellettualmente, i docenti sono sempre lì, pronti e pazienti, almeno fino ai limiti dell'umana esasperazione. Recentemente con i colleghi: Giuseppe Manuppella, Renata Santarossa, Luca Nicotra, Antonio Maturo, Ferdinando Casolaro, Alberto Trotta e Antonio Lungo abbiamo approntato e collaboriamo a quattro Riviste telematiche nell'ambito dell'APAV, di ArteScienza e dell'AFSU (Accademia di Filosofia delle Scienze Umane) che sono a disposizione dei Docenti e dei loro allievi più bravi.

1.- Periodico di Matematica (rivista che ha operato dal 1886 al 1918 e poi dal 2019) diretta da Eugeni-Nicotra-Casolaro, rivolta a matematici, Fisici, informatici su www.afsu.it/riviste.

2.- Bollettino dell'AFSU diretta da Eugeni-Nicotra-Maturo, rivista di studi letterari, sociali ed economici, su www.afsu.it/riviste.

3.- Mondo matematico e dintorni, fondata da Giuseppe Manuppella e diretta da Luciana Delli Rocili e Antonio Maturo dedicata alla scuola primaria. Su www.apav.it.

In APAV vi sono anche Ratio Mathematica e Science & Philosophy, riviste dirette da Fabrizio Maturo e da me come onorario, che hanno il rango di Riviste di alto interesse di ricerca, entrambe certificate ANVUR.

4 - ArteScienza, diretta da Luca Nicotra, su www.assculturalearte-scienza.it dedicata appunto a temi di arte e scienza congiunti ma anche a storia contemporanea.

Sono in progetto un sistema di chat e di forum per la partecipazione dei docenti alle attività di dette strutture associative che hanno indubbiamente interessi comuni con la Federazione Mathesis.

In conclusione, è questa l'attività che alcuni di noi, tassando il proprio tempo da pensionati, sta mettendo a disposizione della Comunità intellettuale.

Giochi matematici per la scuola

Il Premio Aldo Morelli nella Storia e nel Cuore

Elisa Savarese

Mathesis di Castellammare di Stabia

1. Introduzione

“Giochi matematici per la scuola” sono dedicati alla memoria del Prof. Aldo Morelli, per molti anni presidente sapiente della sezione Mathesis di Napoli, convinto sostenitore del ruolo formativo, nei processi di apprendimento degli studenti, della geometria e degli aspetti storici della matematica

Questi “Giochi”, al contrario di altri, sono più semplici, perché il loro scopo non è solamente quello di scoprire le “eccellenze *in erba*” che tuttavia, se ci sono, possono in ogni caso emergere. Lo scopo principale è quello di partecipare, rispondendo a quesiti semplici e alla portata anche di allievi meno motivati, perché ***“l’importante non è vincere ma partecipare”***. (La frase originale è “*L’importante nella vita non è solo vincere, ma aver dato il massimo. Vincere senza combattere non è vincere*” pronunciata dal Vescovo Ethelbert Talbot, durante i giochi del 1908).

L’effetto che si produce è non solo di avvicinare i giovani alla Matematica, ma anche le loro famiglie che li accompagnano e partecipano alla premiazione.

2. Aldo Morelli

Il professore Aldo Morelli (1929-2005) è stato il Maestro di tante generazioni di docenti, dalla fine degli anni Cinquanta ad oggi; fu allievo di Carlo Miranda e di Alfredo Franchetta, con i quali ha pubblicato negli anni Sessanta il suo primo volume, “Esercizi di geometria”.

Il professore Aldo Morelli è stato anche il mio Maestro, un Maestro speciale, dal 1958 al 1960 al Liceo Classico di Meta di Sorrento, docente di Matematica e Fisica, nelle classi seconda e terza liceo, all’esame di Stato e successivamente all’Università.

Dal 1985, è stato professore incaricato di Geometria nelle Facoltà di Scienze e di Ingegneria dell’Università “Federico II” di Napoli, contemporaneamente al ruolo di docente di Matematica e Fisica presso il Liceo “G. Galilei” di Napoli; dal 1985 è stato inquadrato come professore associato di Matematiche Complementari presso la facoltà di Scienze della stessa Università.

Il Prof. Aldo Morelli è una figura storica della Società Italiana “Mathesis”. Ebbe il merito della rinascita della sezione napoletana alla fine degli anni Cinquanta. Fu

prima segretario della sezione, poi vicepresidente con Laura Castellano e poi Presidente.

È stato Presidente per oltre un ventennio della Sezione di Napoli. Dal 1993 è stato componente del Consiglio Direttivo Nazionale dove nel periodo 1996-99, con la Presidenza di Silvio Maracchia, ha ricoperto la carica di Vicepresidente, e nel periodo successivo è stato il Consigliere maggiormente legato al successivo Presidente Franco Eugeni.

È andato in pensione dall'anno 2002 ma ha continuato la sua opera di docente con l'insegnamento alle SISS ed ha rappresentato fino ad oggi un punto di riferimento per i giovani laureati e per i docenti di Matematica e Fisica delle scuole della Campania e delle regioni limitrofe, attraverso Seminari e Conferenze che teneva in varie sezioni Mathesis (Salerno, Castellammare, Sorrento, Benevento, Gaeta, Catanzaro, Lamezia, Crotone, Nettuno...relativamente all'ultimo periodo).

Il Prof. Aldo Morelli era sempre disponibile con tutti, divulgava le proprie conoscenze con un entusiasmo che trasmetteva e contagiava senza mai fermarsi. Era una forza della natura! Era una forza nascosta come le forze fondamentali in natura e, dietro un'apparente timidezza ed un'educazione di altri tempi portava avanti la sua missione.

Il prof. Ferdinando Casolaro, uno dei suoi allievi più affezionati era solito affermare che “quella presenza costante nel Dipartimento di Matematica, con sottile ironia, riusciva a sdrammatizzare anche momenti di tensione che spesso si manifestavano nelle varie riunioni!”

Il prof. Morelli, a me docente, diceva spesso: “la velocità della classe è quella dei meno bravi”, di conseguenza, “un docente se vuole una classe di bravi deve recuperare i più deboli”.

Il Prof. Aldo Morelli nella sua vita ha sempre seguito la luminosa strada, che lo ha portato non solo a collaborare con i grandi della matematica italiana, ma anche a spendersi nella formazione e nella crescita culturale dei docenti meno grandi, nella loro giornaliera opera scolastica, con lo spirito di migliorare i saperi di ciascuno di loro, che ascoltava con attenzione per ogni loro problema perché il suo scopo era operare sul singolo docente e far espandere l'interesse e l'amore per la matematica così che potesse diffondersi nelle scuole di ogni ordine e grado.

3. Premio Aldo Morelli

Per onorare la sua memoria, il suo impegno, la sua professionalità, il suo Amore per i giovani, per i docenti e per la Matematica, e per tramandare il suo ricordo a chi non lo ha conosciuto, nel 2006 nasce il «Premio Morelli», un evento d'amore. L'effetto che produce è non solo di avvicinare i giovani alla Matematica, ma anche le loro famiglie che li accompagnano lungo il percorso e partecipano alla premiazione finale.

Il concorso è partito in sordina ma piano piano ha aggregato docenti universitari e non, di grande spessore nel Comitato Scientifico del 2016: Loredana Biacino, Buonanno Rosa, Buono Daniela, Ferdinando Casolaro, Ivano Casolaro, Sara Casolaro, Maria Cocozza, Maria Grazia D'Ambra, Giovanna Della Vecchia, Celia Di Foggia, Antonio Fontana, Maria Luigia Di Viccaro, Massimo Fioroni, Romano Gatto, Giangiacomo Gerla, Ciro Iovino, Serafina Ippolito, Lungo Antonio, Mario Mandrone, Antonio Maturo, Giovanna Mele, Serena Morelli, Tonia Olivello, Luca Paladino, Rosa Porciello, Raffaele Prosperi, Francesco Quagliano, Salvatore Rao, Alessandra Rotunno, Alessio Russo, Renata Santarossa, Salvatore Sessa, Maria Talamo, Loredana Tammaro, Carlo Tosone, Antonia Travaglione, Ilaria Veronesi, Giovanni Vincenzi, Antonio Zitarosa.

Alla prima edizione, nel 2006 parteciparono 2 scuole e 132 alunni ma il coinvolgimento fu totale e l'entusiasmo, alle stelle, riempì il salone della premiazione di gioia e positività preannunciando una partecipazione più ampia per gli anni successivi.

Alla seconda edizione sono coinvolte solo le scuole superiori-biennio e triennio nel 2007 parteciparono 3 scuole e 155 alunni;

nel 2008 -12 scuole con 858 alunni;

nel 2009 -14 scuole con 865 alunni;

nel 2010 -13 scuole con 1059 alunni;

nel 2011- 13 scuole con 1173 alunni;

nel 2012- 23 scuole con 1274 alunni;

nel 2013- 31 scuole con 1474 alunni;

Nel 2014- 28 scuole con 1402 alunni

Nel 2015 coinvolgemmo la scuola primaria e la scuola media e ci fu un'esplosione di partecipazione con tantissime scuole e tantissimi alunni. Nel 2018 parteciparono 56 scuole e 30.000 alunni. Fu costituito il CTS per garantire la corretta formulazione dei quesiti e la verifica a più mani.

Prof. Ciro Iovino e Rosa Porciello organizzatori e anima del Premio Morelli insieme a Ferdinando Casolaro, Salvatore Rao e tanti docenti sono stati sempre presenti nella sala del convegno. Un grazie particolare va a Raffaele Prosperi che con il suo entusiasmo e le sue competenze informatiche ha permesso di evitare lo spostamento dagli istituti. Gli alunni telematicamente risolvono i quesiti, inviano le soluzioni e si forma la graduatoria.

Oggi la partecipazione alla gara si sta estendendo in tutta l'Italia. Il Comitato per i "Giochi matematici per la Scuola", ogni anno invita a partecipare, con un opportuno bando, moltissime realtà scolastiche ed è interessante sapere che i partecipanti, dai 200 circa del 2005, hanno raggiunto nel 2020, la quota di più di trentamila studenti, provenienti da tante e tante scuole, di ogni parte d'Italia e centinaia di docenti delle Scuole di ogni ordine e grado allargandosi a "macchia d'olio".

La selezione avviene nelle scuole e sono questi illuminati docenti che, nella loro attività di volontariato puro, seguono le loro studentesse e i loro studenti, per loro

organizzano un'attività annuale, che ha oramai del poderoso; ciascuno di essi all'interno della propria Scuola, dove nascono queste piccole comunità che sono l'onore e il vanto dell'insegnamento italiano della Matematica, trasmette amore e passione alle nuove generazioni.

Una parte di loro arriva a Castellammare di Stabia per la premiazione.

Si realizza in tal modo il “*sogno del Prof. Morelli*”, che perseguiva l'obiettivo di una crescita culturale che tende e riesce ad avvicinare anche gli studenti meno dotati, alla sacra disciplina della Matematica, cogliendone il bello, il curioso e specialmente quel sottile fascino che la disciplina riesce a produrre.

4. I giochi matematici della scuola

Lo svolgimento dei giochi si articola in tre fasi:

Prima fase: nel mese di febbraio la gara matematica di tipo promozionale, nella quale si auspica la massima affluenza di studenti si svolge presso l'Istituto di appartenenza degli studenti, con la supervisione del referente di istituto.

Seconda fase: nel mese di marzo la gara matematica di selezione si svolge on-line nelle sedi individuate dai referenti delle varie province.

Terza fase: nel mese di maggio si svolge la gara finale per l'individuazione dei vincitori e la gara a squadre degli alunni della Scuola superiore di II grado presso il Liceo Scientifico “F. Severi” di Castellammare di Stabia (NA).

Il premio si rivolge a quattro diverse tipologie di studenti:

- a) alunni della IV e V elementare;
- b) alunni della II e III media (s.s. di primo grado);
- c) allievi del biennio delle superiori (I biennio s.s. di secondo grado);
- d) allievi del triennio delle superiori (II biennio e V anno s.s. di secondo grado)
- e) gara a squadre (4 allievi della scuola secondaria superiore)

Alla prima fase possono partecipare tutti gli studenti delle scuole iscritte al “Premio Aldo Morelli”.

Alla seconda fase, potranno partecipare, per la scuola primaria e secondaria di I grado non più di 10 alunni per scuola; per la scuola secondaria di II grado non più di 5 alunni per scuola.

In ogni caso, nelle situazioni di ex aequo ciascuna scuola troverà criteri interni per individuare gli alunni che parteciperanno alla seconda fase dei “Giochi matematici per la scuola”.

Alla terza e ultima fase sono ammessi:

- il 10% degli alunni partecipanti alla seconda fase;
- il primo classificato di ogni scuola (esclusa dal primo criterio) che abbia un punteggio non inferiore al 40% del punteggio massimo.

A giudizio insindacabile del Comitato Scientifico il numero dei partecipanti potrebbe aumentare in presenza di prove estremamente positive fornite dai partecipanti.

Per la gara a squadre ogni scuola può iscrivere non più di tre squadre di quattro alunni.

Nella terza settimana del mese di maggio, si svolge a Castellammare di Stabia la fase finale, con la Premiazione degli alunni vincitori, all'interno di un Convegno dal titolo «Studenti in cattedra, docenti nei banchi», che vede come relatori gli studenti su temi preparati con i propri insegnanti.

Il desiderio di tutti gli organizzatori è di poter ospitare ancora più docenti e più alunni di tutte le fasce di età per poter incoraggiare i più fragili a credere nel poterla fare, i più timidi ad esprimere nel gioco le potenzialità nascoste, i più bravi a condividere i risultati finali per realizzare che dare la mano ai più lenti è correre tutti verso successi collettivi.

Gli Istituti che intendono partecipare ai giochi sono invitati a versare un contributo di 25 € per ogni tipologia di studenti, sul c/c 17389800 per le scuole non statali e, per le scuole statali, tramite la procedura di giro fondi tra conti di tesoreria: numero di tesoreria Istituto “Don Milani” di Gragnano (NA) (ente gestore contabile) 00313965, riportando nella causale la dicitura: “Premio Aldo Morelli”.

Gli Istituti contribuiscono alle spese: scuola primaria € 25,00, scuola secondaria di I grado € 25,00, biennio scuola secondaria di II grado € 25,00, triennio scuola secondaria di II grado € 25,00, gara a squadra € 25,00.

Il versamento è valido per l'intero Istituto, comprese le sezioni staccate e le sedi coordinate.

I dirigenti scolastici degli Istituti che partecipano alle gare sono invitati a nominare un referente di Istituto, che dovrà curare i rapporti tra l'Istituto e la sezione Mathesis di Castellammare e provvedere all'invio del modulo di partecipazione e della ricevuta del versamento entro, e non oltre, il 14 Dicembre, via e-mail, alla sezione Mathesis di Castellammare di Stabia all'indirizzo mathemare@tin.it e contestualmente comunicazione via SMS al numero 3334985822 (prof. Ciro Iovino) dell'avvenuto inoltro.

5. Premi

Primo classificato triennio

Allo studente: 200 €; Alla scuola: targa di partecipazione

Secondo classificato triennio

Allo studente: 100 €; Alla scuola: targa di partecipazione

Primo classificato biennio

Allo studente: 100 €; Alla scuola: targa di partecipazione

Secondo classificato biennio

Allo studente: 50 €; Alla scuola: targa di partecipazione

Primo classificato scuola media

Allo studente: 50 €; Alla scuola: targa di partecipazione

Secondo classificato scuola media

Allo studente: 25 €; Alla scuola: targa di partecipazione

Primo classificato scuola elementare

Allo studente: 50 €; Alla scuola: targa di partecipazione

Secondo classificato scuola elementare

Allo studente: 25 €; Alla scuola: targa di partecipazione

Alla squadra prima classificata

Agli studenti: 25 € pro capite; Alla scuola: targa di partecipazione

6. Conclusione

Per ogni comunicazione utilizzare il seguente indirizzo e-mail:

mathemare@tin.it

Per informazioni: mathemare@tin.it oppure contattare i Proff.:

Ferdinando Casolaro e-mail: fcasolar@unisannio.it

Ciro Iovino tel. 0818736752, 3334985822 e-mail: ciro.iovino@alice.it

Rosa Porciello tel. 081 8723419, 3492952250 e-mail: rosa.porciello@istruzione.it

Il Covid-19 ci ha fermati ma presto riprenderemo perché aspettiamo il ritorno alla normale scuola in presenza nella quale tutto è più facile e realizzabile. La forza del Premio Morelli è custodita nel cuore dei docenti che sanno infiammare di passione i loro alunni, anche quelli che non hanno fiducia nelle loro potenzialità nascoste.

La passione è energia e l'energia non si distrugge, si diffonde e si trasforma, passa dai docenti agli alunni e si alimenta di nuova linfa e *Amor che a nullo amato amar perdona* porterà il Premio Morelli lontano.

Indice

Antonio Maturo, Renata Santarossa	Prefazione	Pag. 1
Luciano Corso	Presentazione del Congresso	Pag. 3
Carlo Toffalori	Platone matematico	Pag. 7
Laura Ferracuti, Giovanna Guidone	Scommettere su un Casinò	Pag. 17
Bruno Iannamorelli	Un algoritmo della moltiplicazione nascosto in una filastrocca	Pag. 27
Cesare Labianca	Irrazionalità dei radicali	Pag. 33
Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo	Operazioni logiche e probabilità di eventi condizionati	Pag. 39
Cristina Ispas, Mario Innocenzo Mandrone	Prevenire il bullismo e il cyberbullismo tra gli studenti	Pag. 51
Aniello Buonocore	Paradossi della Probabilità condizionata: un possibile uso nella didattica della matematica dell'incerto	Pag. 63
Franco Eugeni	Le equazioni algebriche facili	Pag. 73
Diana Cipressi	La matematica contagiosa	Pag. 83
Pierpaolo Palka, Eula Grilli, Vincenzo Romaguolo, Vincenzo Tartaglia	Entità Geometriche rappresentate su Supporto Digitale tramite la Geometria Orientata	Pag. 95
Andrea Laforgia	Sviluppi e metodi asintotici	Pag. 115

Silvia Benvenuti	In viaggio con i numeri	Pag. 127
Lucia Maddalena, Luca Grilli	Competizioni, gare e didattica della matematica	Pag. 137
Anna Maria Di Poccio	Una matematica da favola	Pag. 149
Liliana Restuccia	Il Principio di Relatività Galileiano in Meccanica Classica	Pag. 161
Maria Teresa Caccamo, Agostino Semprebello, Salvatore Magazù	Joseph Fourier: l'interesse verso il "calore estremo"	Pag. 179
Sisto Baldo	L'indagine delle superfici curve tra matematica pura e applicazioni	Pag. 185
Mario Innocenzo Mandrone	Modelli matematici per la diffusione delle epidemie	Pag. 197
Ferdinando Casolaro, Renata Santarossa	Quale Geometria nella Scuola di oggi? Analisi storica e questioni didattiche	Pag. 217
Amedeo Matteucci	Un ricordo di Mauro Bernabei	Pag. 223
Franco Eugeni	Le scuole superiori e la cultura oggi	Pag. 231
Elisa Savarese	Giochi matematici per la scuola. Il Premio Aldo Morelli nella Storia e nel Cuore	Pag. 233

Istruzioni per gli autori di Quaderni Apav

Chi desidera inviare un articolo per un Quaderno Apav deve seguire i seguenti criteri per il formato:

- (1) L'articolo deve essere in word, carattere Times New Roman, 12 p. Il titolo dell'articolo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 18 p.
- (2) I margini sono di 3 cm sotto, sopra, a destra e a sinistra. L'interlinea è multipla 1,15 p
- (3) L'articolo deve essere diviso in paragrafi numerati, di cui il primo è una introduzione e l'ultimo una conclusione. I paragrafi vanno separati da due interlinee. Il titolo di ogni paragrafo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 14 p.
- (4) Ogni articolo deve avere una lunghezza minima di 6 pagine e non deve superare, di regola, le 14 pagine.
- (5) Dopo l'ultimo paragrafo va inserita la bibliografia. Almeno 4 fra libri e articoli nel formato cognome, nome (anno), titolo dell'articolo, titolo del libro o rivista, editore, città.
- (6) La bibliografia non va numerata. I riferimenti bibliografici nel testo devono avere la forma (cognome dell'autore, anno).
- (7) Non mettere note bibliografiche a piè di pagina. Tutta la bibliografia va messa alla fine.
- (8) I disegni vanno fatti in programmi diversi dal word e salvati in jpg.
- (9) L'articolo deve essere inviato in formato doc o docx ed in formato pdf per il controllo dell'impaginazione e deve avere un numero pari di pagine.

Tutti gli articoli ricevuti saranno esaminati da due revisori che invieranno il loro parere sulla pubblicazione ed eventuali proposte di correzioni.

Gli articoli possono essere inviati ad uno dei seguenti indirizzi email (o meglio ad entrambi):

Antonio Maturo antomato75@gmail.com

Fabio Manuppella fabio-manuppella@gmail.com



Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo

ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola
(Decreto del 24/07/2009 e Direttiva 170/2016)