



ACCADEMIA PICENO APRUTINA DEI VELATI

CORSO DI FORMAZIONE

**L'insegnamento della Fisica
nelle Scuole Secondarie
di secondo grado,
dalla tradizione
all'innovazione**

NAPOLI
1 - 8 - 15 - 22 MARZO
5 - 12 APRILE
3 - 10 MAGGIO
2019

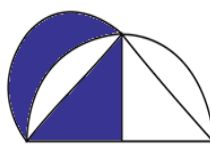
APAV



**Accademia
Piceno - Aprutina
dei Velati in Teramo**

ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola
(Decreto del 24/07/2009 e Direttiva 170/2016)

*Presidente APAV
Giuseppe Manuppella*



Mathesis

Società Italiana di Scienze
Matematiche e Fisiche
Fondata nel 1895

*Presidente sezione di Napoli
Ferdinando Casolaro*

Corso di Formazione

***L'insegnamento della Fisica nelle Scuole Secondarie di
secondo grado, dalla tradizione all'innovazione.***

Direttore del Corso

Renata Santarossa

Curatori del Quaderno

Giuseppe Manuppella

Renata Santarossa

**SEDE: Aula S5.2 - Dipartimento di Architettura Università di
Napoli Federico II**

COPYRIGHT © 2019 TUTTI I DIRITTI RISERVATI

Accademia Piceno Aprutina dei Velati in Teramo
Via del Concilio n.24. Pescara, Italia

Codice Fiscale 92036140678 - P. iva 02184450688
Codice destinatario per fatturazione elettronica: M5UXCR1

Banca Unicredit – Agenzia Pescara Umberto 00760
Codice IBAN: IT 57 K 02008 15408 000104232062
BIC Swift UNCRITM1760

Siti web: www.apav.it – www.eiris.it
Email: apavsegreteria@gmail.com , apavsegreteria@pec.it
Stampato nel mese di maggio 2019 in Pescara

Copertina: Fabio Manuppella
Sito web: www.fabiomanuppella.it, email: fabiomanuppella@gmail.com

Il quaderno è pubblicato sotto la Licenza Creative Commons Attribuzione 3.0 Italia



Indice del volume

Prefazione	Pag V
Presentazione del Corso	Pag VII
Programma del Corso	Pag VII
Quale Geometria per lo spazio fisico? Dal vettore nello spazio piatto al tensore nello spazio curvo secondo il Modello di Minkovschj. <i>Ferdinando Casolaro.</i>	Pag 1
Quale Geometria per la Fisica Classica? La Geometria euclidea in S_2 e in S_3 per la rappresentazione dei fenomeni fisici. <i>Ferdinando Casolaro, Raffaele Prosperi</i>	Pag 17
Risoluzione degli esempi indicati dal MIUR per lo svolgimento delle tracce di Fisica e Matematica, nonché dei quesiti di Matematica e Fisica all'esame di stato 2019. <i>Andrea Lanzillo</i>	Pag 27
L'evoluzione dell'insegnamento della Fisica attraverso le soluzioni di alcuni temi significativi proposti agli esami di Stato PNI e Progetto Brocca <i>Mario Innocenzo Mandrone</i>	Pag 69
La Fisica moderna e le tematiche affrontate nei test ministeriali. Nascita e Storia della Meccanica Quantistica e Teoria della Relatività <i>Ferdinando Di Martino</i>	Pag 169
La Fisica atomica, la Meccanica Quantistica e l'uso del tool MSExcel per l'analisi dei dati e la determinazione di soluzioni numeriche a problemi matematici <i>Ferdinando Di Martino</i>	Pag 191
Relatività ristretta e cenni di relatività generale <i>Ferdinando Di Martino</i>	Pag 231
Modello Standard e bosone di Higgs. <i>Alberto Trotta</i>	Pag 261

Prefazione

Il corso di formazione è rivolto ai docenti di Matematica e Fisica e tratta il tema dell'insegnamento della Fisica nelle scuole secondarie di secondo grado, percorrendo le continue innovazioni che le riforme hanno prodotto sui contenuti dello studio di questa materia.

Questo viaggio didattico invita i docenti a riflettere sullo studio della Fisica a partire dalla risoluzione di problemi del 1983, dei problemi assegnati all'esame di stato riforma Brocca/progetto PNI, fino ad arrivare ai nostri giorni con le prove di simulazione di Fisica e simulazione di Matematica e Fisica.

Mai come in questo particolare periodo storico tale questione è particolarmente sentita sia dagli studenti che si troveranno ad affrontare la maturità scientifica dovendo risolvere un problema di Fisica, sia da parte dei docenti che hanno generalmente apprezzato la Matematica come materia di indirizzo.

Intanto il processo di integrazione dell'Europa si sta compiendo, le richieste della società civile e professionale stanno cambiando; occorre dunque pensare ad una formazione scolastica più ampia, con sollecitazioni di diversa natura culturale, in grado di aiutare i giovani ad orientarsi per trovare il percorso scolastico più rispondente alle loro perplessioni.

E' utile, a questo punto, riassumere brevemente, riforma dopo riforma, con quanta difficoltà gli uomini di scienza del novecento, sostenitori della creazione di una scuola secondaria superiore in cui le materie scientifiche prevalessero sulle altre, hanno conquistato i risultati raggiunti oggi.

Fin dagli anni '70 le grandi trasformazioni verificatesi nella società italiana, il mondo della ricerca, della scienza, del lavoro e la stessa comunità scolastica hanno sollecitato continue revisioni dei programmi e degli ordinamenti della scuola secondaria superiore, coerente appunto con le riforme della scuola secondaria di primo grado e degli accessi universitari.

Nello specifico, per quanto riguarda lo studio della Fisica nella scuola secondaria superiore, la sperimentazione Brocca (1991) ha introdotto una significativa valorizzazione delle scienze sperimentali introducendo il Laboratorio di Fisica e di Chimica in tutti gli indirizzi a prevalente identità scientifica e tecnologica. Ciò ha reso possibile la predisposizione di un nuovo percorso quinquennale ad alta valenza culturale e professionale particolarmente idoneo a porre le basi per professionalità tecniche di elevato livello, da affiancare al tradizionale liceo scientifico, anch'esso peraltro profondamente riveduto. Questo riassetto della scuola secondaria superiore, ai tempi, fu considerata una vera conquista; la prima proposta di legge, dopo la riforma Gentile, in cui furono previste delle ore di studio dedicate alla fisica.

I programmi dell'Istruzione tecnica e dell'Istruzione professionale acquistarono sempre maggior importanza e alcuni anni dopo il '90 divennero di ordinamento. Nei Licei fiorirono progetti autonomamente elaborati dalle scuole che, in seguito, si trasformarono

in Progetti Brocca e, successivamente ed in misura limitata, in Progetti Proteo e Autonomia.

Ricordiamo che già nel 1985 fu varato dal Ministro Falcucci il Piano Nazionale per l'Informatica (PNI), con l'intento di introdurre l'Informatica nelle scuole di ogni ordine e grado. La Commissione per il P.N.I. propose che l'insegnamento delle basi teoriche dell'Informatica, in indirizzi non specialistici, fosse inserito all'interno della Matematica e della Fisica, discipline a cui essa doveva la sua nascita e il suo sviluppo; come infatti scriveva G. Prodi in un articolo: *“Vi sono profonde ragioni di carattere culturale che legano l'informatica ai capitoli più tradizionali della matematica: sono rami che escono da uno stesso tronco”*.

Questo corso intende mettere a confronto l'insegnamento della Fisica nel passaggio dalla tradizione alla innovazione. Il corso si apre con una relazione che attualizza gli intenti di tutti coloro i quali sottolineano la necessità di rinnovare i programmi di Fisica del liceo, in particolare prevedendo contenuti di Fisica contemporanea (Aubrecht, 1989; Gil & Solbes, 1993; Nasello 2000, Ostermann, Moreira 2004). Spesso si sente parlare di introdurre nei percorsi didattici temi fondamentali come la meccanica quantistica e la relatività (Ostermann, Moreira 2000). Analogamente, anche in Matematica occorre sollecitare l'inserimento nei programmi di teorie geometriche che ci possono fornire modelli potenti per descrivere certi aspetti della realtà. In questa relazione sarà illustrato il modello geometrico che deve essere utilizzato per descrivere lo spazio curvo, un modello non euclideo.

Saranno poi presentati problemi di Fisica assegnati all'esame di stato del 1983, del 1991, ma saranno anche presi in considerazione problemi più recenti, nonché le prove di Fisica che il ministero ha pubblicato come simulazione di prova. Quindi si potrà osservare che in qualche modo, ancora oggi, sono attuali gli argomenti oggetto dei temi d'esame di Fisica delle sperimentazioni Brocca del Liceo Scientifico. Tra le varie problematiche che saranno svolte, alcune tratteranno anche argomenti del quarto anno. Infine saranno prese in esame anche le simulazioni di Matematica e Fisica, in linea con il DL 62/17 che prevede la possibilità di una seconda prova che coinvolga più discipline caratterizzanti il corso di studi.

Il Direttore del Corso
Renata Santarossa

Corso di Formazione

L'insegnamento della Fisica nelle Scuole Secondarie di secondo grado, dalla tradizione all' innovazione.

Presentazione del Corso

Questo corso, svolto in collaborazione con i diversi enti di cui in premessa, è destinato ai docenti della Scuola secondaria di secondo grado, anche in vista degli esami di Stato del corrente anno scolastico che prevedono, tra l'altro, dei problemi di Fisica classica e moderna che i maturandi devono risolvere all'interno di più vasti programmi previsti dalle direttive ministeriali.

Il contributo di alcuni docenti dell'Università di Napoli Federico II a questo corso non poteva mancare. Le varie tematiche daranno ulteriori impulsi al contenuto didattico dei programmi di Fisica, di cui i docenti partecipanti faranno certamente tesoro per la loro attività scolastica. Anzi è auspicabile una sempre più forte e aggiornata sinergia tra Scuola e Università per la Formazione dei docenti della Scuola, tenendo conto dei veloci tempi di sviluppo e di avanzamento delle materie scientifiche, tra cui annoverare anche la Fisica.

Salvatore Sessa

Programma del Corso

Venerdì 01 marzo 2019

Ore 14:00 Registrazione e distribuzione materiale didattico.

Aspetti organizzativi a cura del Direttore del Corso **Renata Santarossa**

Ore 15:00-16:30 **Ferdinando Casolaro**, *Quale Geometria per la Fisica moderna? Dal vettore nello spazio piatto al tensore nello spazio curvo secondo il Modello di Minkovschj.*

Ore 16:30-16:40 Pausa

Ore 16:40-18:00 **Raffaele Proserpi**, *Quale Geometria per la Fisica Classica? La Geometria euclidea nel piano e nello spazio euclideo tridimensionale, per la rappresentazione dei fenomeni fisici. Attività laboratoriale con discussione sulle questioni teoriche essenziali.*

Venerdì 08 marzo 2019

Ore 15:00-16:30 **Andrea Lanzillo**, *Risoluzione degli esempi indicati dal Miur per lo svolgimento delle tracce di Matematica all'esame di Stato 2019. Attività laboratoriale con discussione sulle questioni teoriche.*

Ore 16:30-16:40 Pausa

Ore 16:40-18:00 **Andrea Lanzillo**, *Risoluzione del Questionario in otto quesiti di Matematica indicato dal MIUR per l'esame di Stato 2019.*

Venerdì 15 marzo 2019

Ore 15:00-16:30 **Ferdinando Di Martino**, *La Fisica moderna: le tematiche affrontate nei test ministeriali. Nascita e Storia della Meccanica Quantistica e Teoria della Relatività.*

Ore 16:30-16:40 Pausa

Ore 16:40-18:00 **Mario Mandrone**, *Attività laboratoriale con risoluzione di problemi di Fisica, assegnati agli esami di Stato nei decenni precedenti (indirizzo Brocca e PNI) e discussione sulle questioni teoriche (I parte).*

Venerdì 22 marzo 2019

Ore 15:00-16:30 **Ferdinando Di Martino**, *La Fisica atomica, la Meccanica Quantistica e l'uso del Tool MS Excel per l'analisi dei dati e la determinazione di soluzioni numeriche a problemi matematici (I parte).*

Ore 16:30-16:40 Pausa

Ore 16:40-18:00 **Mario Mandrone**, *Attività laboratoriale con risoluzione di problemi di Fisica, assegnati agli esami di Stato nei decenni precedenti (indirizzo Brocca e PNI) e discussione sulle questioni teoriche. (II parte).*

Venerdì 05 aprile 2019

Ore 15:00-16:30 **Ferdinando Di Martino**, *La Fisica atomica, la Meccanica Quantistica e l'uso del Tool MS Excel per l'analisi dei dati e la determinazione di soluzioni numeriche a problemi matematici (II parte).*

Ore 16:30-16:40 Pausa

Ore 16:40-18:00 **Mario Mandrone**, *Attività laboratoriale con risoluzione di problemi di Fisica, assegnati agli esami di Stato e discussione sulle questioni teoriche (III parte).*

Venerdì 12 aprile 2019

Ore 15:00-16:30 **Ferdinando Di Martino**, *Nascita e motivazioni della Relatività Ristretta e sue conseguenze. Cenni alla Relatività Generale ed analisi delle recenti scoperte di Onde Gravitazionali a conferma della teoria generale di Einstein (I parte).*

Ore 16:30-16:40 Pausa

Ore 16:40-18:00 **Ferdinando Di Martino**, *Nascita e motivazioni della Relatività Ristretta e sue conseguenze. Cenni alla Relatività Generale ed analisi delle recenti scoperte di Onde Gravitazionali a conferma della teoria generale di Einstein (II parte).*

Venerdì 03 maggio 2019

Ore 15:00-16:30, **Andrea Lanzillo**, *Risoluzione degli esempi indicati dal Miur per lo svolgimento delle tracce di Matematica e Fisica per l'esame di Stato 2019 e attività laboratoriale con discussione sulle questioni teoriche.*

Ore 16:30-16:40 Pausa

Ore 16:40-18:00 **Andrea Lanzillo**, *Risoluzione del Questionario in otto quesiti di Matematica e Fisica indicato dal MIUR per l'esame di Stato 2019.*

Venerdì 10 maggio 2019

Ore 15:00-16:30, **Andrea Lanzillo**, *Risoluzione del tema di Fisica indicato dal MIUR per l'esame di Stato 2019 e attività laboratoriale con discussione sulle questioni teoriche.*

Ore 16:30-16:40 Pausa

Ore 16:40-18:00 **Andrea Lanzillo**, *Risoluzione del Questionario in otto quesiti di Fisica indicato dal MIUR per l'esame di Stato 2019*

Quale Geometria per lo spazio fisico?

Dal vettore nello spazio piatto al tensore nello spazio curvo secondo il Modello di Minkowschj.

Ferdinando Casolaro¹

¹Università di Napoli Federico II,
Dipartimento di Architettura,
Via Toledo 402, Napoli, Italy
ferdinando.casolaro@unina.it

Sunto. *Il lavoro propone un percorso didattico atto ad introdurre un modello di geometria analitica che, partendo dalla teoria dei vettori nell'ambito dello studio della Fisica, possa giungere alla presentazione di equazioni lineari sulla superficie sferica, analoghe a quelle che rappresentano la retta nel piano ed il piano nello spazio euclideo (muniti di riferimento cartesiano), rispettivamente, come iperpiani di S_2 ed S_3 .*

1. Introduzione.

È opinione comune che la Geometria euclidea sia il modello a cui si riferisce lo studio dello spazio fisico. Del resto, se duemila anni dopo che Euclide ha scritto "Gli elementi", la Geometria euclidea resta ancora uno degli strumenti di logica più forte a disposizione del docente, significa che è realmente un modello quasi perfetto.

Tale concezione va però corretta secondo una revisione moderna che tiene conto dello sviluppo della Fisica nell'ultimo secolo, in quanto lo studio dell'Universo fa ipotizzare uno spazio che potrebbe non essere propriamente piatto.

Nella Fisica Classica lo spazio costituisce un sistema a cui si riferiscono tutti i fenomeni, per cui esso esiste indipendentemente dagli eventi che si verificano.

In linea di principio, la Fisica Classica non esclude la possibilità di evidenziare il moto assoluto di un punto rispetto allo spazio immobile, anche se a tale risultato non si può giungere sulla base di esperimenti di dinamica in conseguenza del principio di relatività galileiana.

La teoria della Relatività ha radicalmente modificato il concetto di spazio mettendo in evidenza che non ha senso, dal punto di vista fisico, l'ammissione dell'esistenza dello spazio in assenza di fenomeni osservabili, per cui non esiste lo spazio assoluto, ma esiste uno spazio le cui proprietà sono relative allo stato di moto dei corpi.

Poiché il moto di un corpo rappresenta la variazione di posizione del corpo istante per istante, cioè nel tempo, *non è possibile concepire uno spazio indipendentemente dal*

tempo, che rappresenta, con opportuni accorgimenti, una quarta dimensione del sistema di riferimento in cui si colloca ogni evento.

Ciò significa che l'Universo fisico non incorpora come modello privilegiato la Geometria euclidea, ma tiene conto di altri modelli; infatti, secondo Einstein, l'Universo piatto (modello euclideo) è un Universo vuoto e privo di materia, in quanto la presenza di materia introduce una curvatura nello spazio.

In questo spazio curvo, i corpi, in assenza di forze non gravitazionali, percorrono la linea più breve (geodetica) in analogia al percorso rettilineo che è valido solo nello spazio piatto. Precisamente, secondo il concetto classico:

- *la materia crea un campo gravitazionale e questo fa deviare i corpi;*

invece secondo Einstein:

- *il campo gravitazionale va interpretato come curvatura dello spazio e tale curvatura determina la sostituzione del concetto di retta con quello di geodetica.*

Per fenomeni che avvengono all'interno del sistema solare, la *Relatività Generale* introduce modifiche lievi ed appena rilevabili rispetto alla teoria newtoniana. Su questa scala lo spazio è leggermente deformato, ma per distanze dell'ordine di miliardi di anni luce, la materia presente nell'Universo incide in maniera rilevante sulla natura dello spazio.

È quindi principalmente sulle grandi distanze che viene a cadere il modello euclideo. Infatti, per formulare la *teoria della relatività generale*, Einstein ha utilizzato un modello di tipo ellittico analogo al modello di *geometria non euclidea di Riemann*.

Del resto, già mezzo secolo prima di Einstein, Riemann (1826-1866), nello strutturare la sua geometria su superfici come *k-varietà* di spazi a dimensione $n > k$, giunse alla conclusione che lo spazio fisico è una varietà tridimensionale a curvatura costante.

Tale congettura si può considerare come un'anticipazione di successivi risultati (in particolare di Levi-Civita e Ricci) che ha portato alla teoria della relatività generale di Einstein.

2. Una breve analisi storica.

Il problema della curvatura dell'Universo non è una questione di oggi. Già nell' VIII – VII secolo a.C., i Caldei – Babilonesi, attratti dal fascino della Volta Celeste, cercavano di approfondire le proprietà dello spazio ed il campo di studio su cui operavano era la sfera (Casolaro F. 2008).

Gli stessi greci, parallelamente allo studio della geometria piana, provavano interesse per la geometria sferica; di ciò si è avuto notizia nel 1885, anno in cui sono stati tradotti due testi "**Sulle Sfere mobili**" ed "**Il sorgere ed il tramontare**", scritti nel III sec. a.C. da un contemporaneo di *Euclide*, *Autolico di Pitane* (sono i due testi più antichi che sono stati trovati intatti).

Quale Geometria per lo spazio fisico?

Nel testo “*Sulla sfera mobile*” Autolico tratta dei cerchi meridiani, dei cerchi massimi e dei paralleli; il libro presuppone dei teoremi di *geometria sferica* che dovevano perciò essere noti ai Greci di quell’epoca.

È significativo, come nel libro *sulle sfere mobili* le proposizioni siano disposte in ordine logico; infatti, ogni proposizione viene prima enunciata in forma generale, poi ripetuta, con esplicito riferimento alla figura e infine viene data la dimostrazione. È questo lo stile usato da Euclide, il quale pure trattò alcune questioni di *Geometria Sferica*, come si trova in uno dei suoi scritti (*I fenomeni*) di cui c’è una traduzione pubblicata nel 1916. Ne “*I fenomeni*” viene definita, per la prima volta, la superficie sferica come *superficie di rotazione di una circonferenza intorno ad un proprio diametro*.

È interessante osservare come *l'autore dell'opera più importante della geometria piana*, abbia studiato le prime proprietà su una superficie sferica.

Il fatto, poi, che questi testi del terzo secolo a.C. siano stati tradotti nel XIX e nel XX secolo, è mia opinione, ma penso ben motivata, che questi risultati potevano avere una loro importanza, seppur di carattere storico, per far comprendere come già nell’antichità si pensasse ad un Universo non euclideo, nel periodo in cui (fine del XIX secolo) due matematici, *Tullio Levi Civita* (1873-1941) e *Gregorio Ricci-Curbastro* (1853-1925) stavano sviluppando “*la teoria dei tensori*”, utilizzata da Einstein, all’inizio del secolo successivo, per lo sviluppo della “Teoria della Relatività”.

Altri matematici che hanno lasciato tracce sulla *Sferica* sono:

- Teodosio di Bitinia (circa 20 a.C.), che raccolse i risultati allora noti di geometria sferica nella sua opera *Sphericae*; ma quest’opera non risultò utile, in quel periodo, ad affrontare *il problema fondamentale dell’astronomia greca, che era quello di determinare l’ora di notte osservando le stelle*.

- Menelao (circa 98 d. C.), che nei suoi studi di trigonometria scrisse il trattato *Sphaerica*, che ci è pervenuto in una versione araba in tre libri (c’era anche un testo greco che, però, è andato smarrito), tradotta da F. Maurolico da Messina (1494-1575). Nel libro I, dedicato alla *geometria sferica*, si trova il concetto di triangolo sferico, cioè della figura formata da tre archi di cerchio massimo di una sfera, ciascuno dei quali è minore di un semicerchio. Lo scopo del libro è quello di provare, per i triangoli sferici, dei teoremi pressoché analoghi a quelli dimostrati da Euclide per i triangoli piani. Così, la somma di due lati di un triangolo sferico è maggiore del terzo lato, la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due retti, lati uguali sottendono angoli uguali. Menelao prova poi un teorema che non ha nessun analogo per i triangoli piani: se gli angoli di un triangolo sferico sono rispettivamente uguali a quelli di un altro, allora i due triangoli sono congruenti. Ci sono anche altri teoremi di congruenza e dei teoremi sui triangoli isosceli. Il libro II della *Sphaerica* è dedicato principalmente all’Astronomia e tocca solo indirettamente la geometria sferica. Il libro III tratta la *trigonometria sferica*.

- Tolomeo (II sec. d. C.): che affronta vari problemi di trigonometria sferica, ma nei suoi lavori non vi è una presentazione sistematica e vengono provati soltanto i teoremi che sono necessari per risolvere specifici problemi astronomici. Tolomeo lavora con triangoli

sferici, ma nel calcolare le corde degli archi, egli pone le basi teoretiche della trigonometria piana (conviene notare che la trigonometria fu creata per applicarla all'Astronomia, e poiché la trigonometria sferica era la più utile per tale scopo, essa fu la prima a essere sviluppata).

In seguito hanno lasciato tracce di geometria e trigonometria sferica gli arabi *al-Battn* (858-929) e *Abu'l Wefa* (940-998), oltre al persiano *Nasir-Eddin* 1201-1274); queste opere non furono note in Europa fino alla metà del XV secolo quando gli studiosi tedeschi *George Peurbach* (Vienna, 1423-1461) ed un suo allievo *Johannes Mller*, noto come *Regiomontano* (1436-1476) iniziarono a tradurre le opere greche ed arabe. In particolare, quest'ultimo, nella sua opera *De triangulis* scritta tra il 1462 e il 1463 e pubblicata postumo nel 1533, raccolse in un sistema organico tutte le conoscenze disponibili di geometria sferica e di trigonometria sferica. Nel frattempo, però, *Johann Werner* (1468-1528) aveva migliorato le idee di Regiomontano nella sua opera *De triangulis Sphaericis* pubblicata nel 1514. In queste opere la trigonometria sferica era assillata dalla necessità di utilizzare una moltitudine di formule; ciò era dovuto al fatto che il Regiomontano e il Werner (ed anche in seguito Copernico) avevano usato soltanto le funzioni seno e coseno. Fu un allievo di *Nicolò Copernico* (1473-1543), *George Joachim Rhaeticus* (1514-1576), che usa per la prima volta tutte e sei le funzioni trigonometriche.

La trigonometria sferica venne ulteriormente sistematizzata ed in parte ampliata da *Francois Viète* (1540-1603), che riesce a dare l'insieme completo delle formule necessarie per *calcolare una parte di un triangolo sferico rettangolo in termini di due altre parti note* ed una regola pratica per ricordare questo insieme di formule che è oggi nota con il nome di regola di *Napier* (*John Napier*, 1550-1617). Nel XVII secolo, nozioni di geometria sferica vengono utilizzate (ed anche ampliate in alcuni scritti) dall'astronomo inglese *Edmund Halley* (1656-1742).

Nel XVIII secolo ha inizio, con *Eulero* (1707-1783), la trattazione moderna della trigonometria sferica tendente a derivare tutta la trigonometria da principi semplici; la generalizzazione delle formule della *trigonometria sferica* e l'interpretazione da un punto di vista superiore della *geometria sferica* è dovuta principalmente a *Gauss* (1777-1855), la cui idea di considerare una superficie curva come spazio in se, ha dato inizio ad uno studio generalizzato di geometrie su superfici curve: le geometrie non euclidee.

In realtà, all'inizio del XVIII secolo, l'interesse era rivolto principalmente alla *geometria proiettiva* e le ricerche sulla geometria non euclidea non attirarono i matematici inglesi, francesi e tedeschi, almeno fino a quando Gauss non si esprime positivamente sulla validità logica di esse e della possibilità di individuare uno spazio fisico che risponda alle sue proprietà.

Ciò avviene intorno al 1818, anno in cui un professore di giurisprudenza Ferdinand Karl Schweikart (1780-1859) inviò a Gauss un promemoria del 1816 in cui distingueva due geometrie: la *geometria euclidea* e la geometria che egli chiamava "*geometria astrale*" in quanto pensava che potesse valere nello spazio stellare.

La teoria geometrica di Schweikart ebbe l'approvazione di Gauss, che, già dal 1813 stava lavorando per lo sviluppo di una geometria che non comprendesse il postulato delle

Quale Geometria per lo spazio fisico?

parallele; in una lettera a Olbers del 1817 egli afferma che non è possibile dimostrare che la geometria euclidea sia necessaria per lo sviluppo dell'universo fisico; è quindi possibile costruire una altra geometria applicabile fisicamente.

I teoremi provati da Gauss nei suoi lavori sono in gran parte simili a quelli che si incontrano nelle opere di *Nikolai Lobatchevsky* (1793-1856) e di *Wolfgang Bolyai* (1775-1856) [1], i due matematici a cui, insieme a *Georg Bernhard Riemann* (1826-1866) [1], si devono i risultati più importanti sulle geometrie non euclidee.

Per la nostra trattazione, faremo riferimento allo sviluppo della *geometria ellittica* (indirizzo metrico-differenziale) di Riemann (1826-1866), di cui la *geometria sferica* è un caso particolare.

3 - Costruzione di uno spazio euclideo.

Cerchiamo di proporre un percorso didattico che, attraverso interrelazioni tra Matematica e Fisica, ci consenta di introdurre nella Scuola Secondaria Superiore concetti che sono oggetto di studio nei corsi universitari di Geometria.

Il percorso ha come obiettivo la comprensione delle proprietà di uno “spazio curvo” partendo dallo studio dello “spazio euclideo” (cosiddetto “spazio piatto”) al fine di analizzare i fenomeni che avvengono nell’Universo; per lo studio di tali fenomeni, le grandezze che i fisici utilizzano in modo forte sono i *vettori*.

La “teoria dei vettori” è alla base del primo ampliamento della *geometria euclidea* in quanto caratterizza la *geometria affine*, il cui gruppo di trasformazioni conserva il parallelismo tra rette (come il gruppo euclideo) ma non conserva l’ampiezza degli angoli.

3.1 - Definizione di vettore e concetto di iperpiano.

In Matematica, un *vettore* è definito come classe di equivalenza di segmenti equipollenti (due segmenti del piano si dicono *equipollenti* se sono congruenti, paralleli ed equiversi). L’equipollenza tra segmenti è una relazione di equivalenza. Una classe di equivalenza v di segmenti equipollenti prende il nome di vettore.

In Fisica, una grandezza si può definire come vettore quando:

- 1) vale la legge del parallelogramma;
- 2) è invariante rispetto ai sistemi di riferimento.

Nel modello euclideo la costruzione di uno spazio a n dimensioni, che indicheremo con S_n , richiede la conoscenza di n vettori linearmente indipendenti (base), in quanto tutti gli altri vettori dello spazio si esprimono come combinazione lineare di essi. In tale contesto i sottospazi di S_n ad $n-1$ dimensione sono detti *iperpiani* che indichiamo con S_{n-1} e si esprimono mediante un’equazione lineare di primo grado a n incognite del tipo:

$$a_0x_0 + a_1x_1 + + a_nx_n + q = 0$$

con $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, q$ numeri reali.

Ad esempio, una retta di un piano (iperpiano di uno spazio S_2) è rappresentata da un'equazione di primo grado a due incognite del tipo $ax + by + c = 0$, dove i coefficienti a, b delle incognite sono le componenti di un vettore ortogonale a tutti i vettori aventi la direzione della retta. Se $A(x_1)$ e $B(x_2)$ sono due punti di S_1 , la *distanza* è definita da:

$$d(a, b) = |x_2 - x_1|$$

Analogamente, un piano dello spazio tridimensionale (iperpiano S_2 di uno spazio S_3) è rappresentato da un'equazione di primo grado a tre incognite del tipo $ax + by + c = 0$, dove i coefficienti a, b, c delle incognite sono le componenti di un vettore ortogonale alla giacitura del piano. Se $A(x_1)$ e $B(x_2)$ sono due punti di S_2 , la *distanza* è definita da:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

In generale, un iperpiano di uno spazio S_n è rappresentato da un'equazione di primo grado ad $n+1$ incognite del tipo

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + q = 0$$

in cui la distanza tra due punti $A(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ e $B(x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n)$ è definita da:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1^1 - x_0^1)^2 + (x_1^2 - x_0^2)^2 + \dots + (x_1^n - x_0^n)^2}.$$

Un sottospazio di S_n ad $n-2$ dimensioni è rappresentato da un sistema lineare di due equazioni di primo grado ad n incognite (intersezione di due iperpiani di S_n) del tipo:

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + q_1 = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + q_2 = 0 \end{cases}$$

in cui la matrice:

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

ha rango $\rho(A) = 2$. Ad esempio, una retta è rappresentata in S_3 da un sistema di due equazioni di primo grado a tre incognite (intersezione di due piani):

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + q_1 = 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z + q_2 = 0 \end{cases}$$

In generale, un sottospazio di S_n ad $n-k$ dimensioni è rappresentato da un sistema lineare di k equazioni ad n incognite del tipo:

[illegible]

in cui la matrice:

$$B \equiv \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & & a_{2n} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ha rango $\rho(B) = k$.

3.2 - Costruzione di S_1

Riferendoci all'Universo che ci circonda, già dalla scuola elementare si caratterizza la retta come “ente geometrico ad una dimensione” (spazio S_1), il piano “ente geometrico a due dimensioni” (spazio S_2) e lo spazio (identificato con lo spazio geometrico che ci circonda) “ente a tre dimensioni” (spazio S_3).

Definiremo in un secondo momento il cosiddetto "*spazio quadridimensionale di Minkowski*" su cui *Einstein* ha sviluppato la Teoria della Relatività.

Dal punto di vista fisico, un vettore non nullo $\vec{u}$, è caratterizzato dal *modulo*, che è un numero reale positivo, da una *direzione* che è un fascio di rette parallele alla retta d'azione del vettore e da un *verso* che indichiamo con i segni più o meno.

Se $\vec{u}$ è un vettore non nullo di S_1 , ogni altro vettore $\vec{v}$ di S_1 , si può esprimere come prodotto del vettore $\vec{u}$ per il numero reale α :

$$\vec{v} = \alpha \vec{u} \quad (3.1)$$

Infatti, in uno spazio ad una dimensione, tutti i vettori hanno la stessa direzione, per cui basta operare solo sul modulo e sul verso (che è individuato dal segno più o meno che precede il modulo); dunque, in S_1 , il numero reale $\alpha = \frac{\bar{v}}{\bar{u}}$ si può identificare come

rapporto tra i numeri reali $|\vec{v}|$ e $|\vec{u}|$, moduli rispettivamente, di $\vec{v}$ e di $\vec{u}$.

Definizione: Due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ del piano si dicono linearmente dipendenti se hanno la stessa direzione. In tal caso, sussiste tra essi la (3.1).

Dalla (3.1) si ha:

$$\alpha \vec{u} + (-1) \vec{v} = \vec{0}$$

cioè: “se due vettori di un piano sono linearmente dipendenti, esiste una combinazione lineare di essi con scalari non nulli che dà il vettore nullo”.

Allora, per ogni coppia di vettori rappresentati da segmenti orientati paralleli, si ha:
 “Fissato un vettore nel piano, ogni altro vettore dello stesso piano si ottiene da esso moltiplicandolo per un numero reale”;

quindi

“due vettori del piano sono linearmente dipendenti se hanno la stessa direzione”.
 Pertanto, il sistema massimo di vettori linearmente indipendenti di uno spazio S_1 è costituito da un solo vettore $\vec{u}$ non nullo; la conoscenza di $\vec{u}$ è sufficiente per la costruzione dello spazio S_1 .

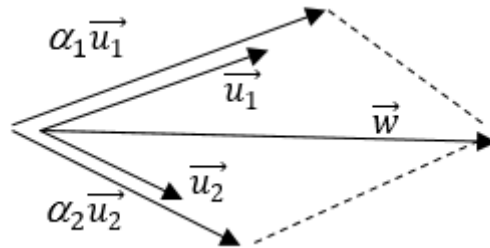
3.3 - Costruzione di S_2

Definizione: Tre vettori $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dello spazio S_3 si dicono linearmente dipendenti se hanno la stessa giacitura, cioè se si possono rappresentare con segmenti orientati sullo stesso piano.

La giacitura individuata da due vettori non paralleli $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ definisce tutti e soli i vettori linearmente dipendenti dal sistema $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

Infatti, se $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ sono due vettori non paralleli e non nulli del piano, un qualsiasi vettore $\vec{w}$, appartenente al piano individuato da $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$, si può decomporre lungo le direzioni di essi, cioè, si può esprimere come somma di due vettori $\alpha_1 \vec{u}_1$, linearmente dipendente da $\vec{u}_1$, ed $\alpha_2 \vec{u}_2$, linearmente dipendente da $\vec{u}_2$ (fig. 3.1).

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 \quad (3.2)$$



che, con $\alpha_3 = -1$ diventa:

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 = \vec{0} \quad (3.3)$$

Le (3.2) e le (3.3), esprimono, relativamente a spazi euclidei bidimensionali e tridimensionali, la classica definizione di sistema di vettori linearmente dipendenti (dell'algebra lineare). Da essa discende immediatamente:

- due vettori di una retta (spazio unidimensionale) sono sempre linearmente dipendenti, quindi un sistema di vettori linearmente indipendenti di una retta è costituito da un solo vettore;

Quale Geometria per lo spazio fisico?

- tre vettori di un piano (spazio bidimensionale) sono sempre linearmente dipendenti, quindi un sistema massimo di vettori linearmente indipendenti del piano è costituito da due vettori.

In generale, n vettori di uno spazio ad $n-1$ dimensioni (spazio S_{n-1}) sono sempre linearmente dipendenti, quindi un sistema massimo di vettori linearmente indipendenti di uno spazio S_{n-1} è costituito da $n-1$ vettori.

Generalizzando la (2.2) e la (2.4) a spazi a n dimensioni ($\forall n > 3$) si ha:

Se n vettori di uno spazio vettoriale S_n sono linearmente dipendenti, esiste un iperpiano S_{n-1} che li contiene. In tal caso, gli n vettori si possono esprimere mediante una combinazione lineare di essi con numeri reali (scalari) non nulli che dà il vettore nullo.

Dalla teoria sui sistemi lineari, sappiamo che sussiste una relazione tra la dipendenza lineare di vettori e il determinante della matrice delle componenti in un ipotetico sistema cartesiano a n dimensioni. Tale relazione che permette di individuare il rango di una matrice attraverso il calcolo del determinante, è espressa dal seguente:

Teorema 4.1: “Se n vettori di uno spazio S_n sono linearmente dipendenti, la matrice costituita dalle componenti degli n vettori ha determinante nullo”:

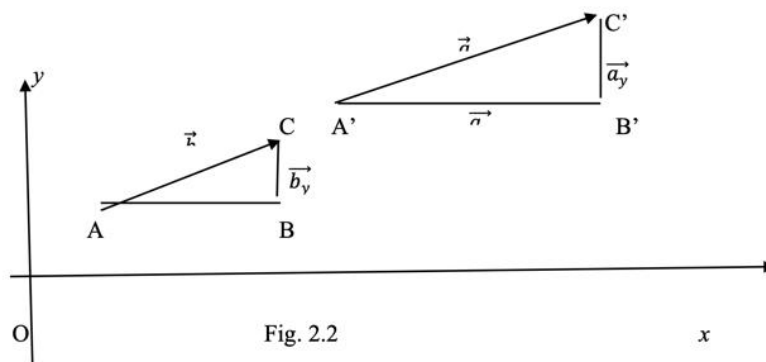
Di tale teorema risulta didatticamente significativa la dimostrazione che segue riferita al caso di $n = 2$. Non riteniamo opportuno proporre nella scuola secondaria la dimostrazione generalizzata ad n qualsiasi che si ottiene per induzione.

Teorema 4.2: “Se due vettori del piano sono linearmente dipendenti, la matrice costituita dalle componenti dei vettori ha determinante nullo”:

Infatti, se $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ e $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ sono due vettori del piano rappresentati dai segmenti orientati $\vec{AC}$ e $\vec{A'C'}$ in fig. 2.2, si vede facilmente che formano con le loro componenti due triangoli simili ABC e $A'B'C'$, per cui risulta di seguito:

$AB : A'B' = AC : A'C'$, cioè: $a_x : a_y = b_x : b_y$

$$a_x b_y = a_y b_x \Rightarrow a_x b_y - a_y b_x = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = 0$$



4. Prodotto scalare tra vettori. Questioni analitiche.

Se $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ e $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ sono due vettori del piano rappresentati da segmenti orientati che formano un angolo α , si definisce prodotto scalare tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ il prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo α :

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha \quad (4.1)$$

In un riferimento cartesiano del piano il prodotto scalare si esprime come somma dei prodotti delle singole componenti:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y \quad (4.2)$$

Tale relazione, considerando la proprietà associativa e le proprietà distributive delle operazioni di uno spazio vettoriale (Casolaro F., Casolaro I. 2009), si può giustificare moltiplicando tra loro i due vettori espressi nella rappresentazione cartesiana:

$$(a_x \vec{i} + a_y \vec{j}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j}) = a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j})$$

da cui, con $\vec{i} \circ \vec{i} = \vec{j} \circ \vec{j} = 1$, $\vec{i} \circ \vec{j} = \vec{j} \circ \vec{i} = 0$, si ha la (4.2).

La (3.2) è alla base del passaggio dallo spazio piatto allo spazio curvo secondo un percorso che di seguito esponiamo mediante l'insegnamento per problemi.

Problema 4.1: In un riferimento cartesiano del piano, sia $P(x, y)$ un punto diverso dall'origine, in modo che il segmento orientato $O\vec{P}$ identifichi il vettore che ha per componenti rispettivamente le coordinate x ed y di P . Se $\vec{n}(a, b)$ è un vettore ortogonale ad $O\vec{P}$ si individui il luogo geometrico dei punti $P(x, y)$ del piano tale che il segmento orientato $O\vec{P}$ sia perpendicolare a $\vec{n}(a, b)$.

La soluzione è conseguenza della definizione di prodotto scalare:

$$\vec{n} \perp O\vec{P} \Rightarrow \vec{n} \circ O\vec{P} = 0, \quad \text{cioè: } ax + by = 0 \quad (4.3)$$

che è l'equazione della retta OP che individua, dunque, il luogo geometrico dei punti $P(x, y)$ del piano tali che il segmento OP è perpendicolare alla direzione del vettore $\vec{n}(a, b)$ come è noto dalle nozioni elementari di geometria analitica sulla retta.

Se "curvassi" questa retta, otterrei un arco, ed il vettore perpendicolare in ogni punto S_3 alla retta tangente all'arco, non avrebbe più direzione costante, e quindi le componenti a e b del vettore $\vec{n}(a, b)$ risulterebbero funzioni delle coordinate del punto nel piano.

Anche per il piano in S_3 , si può fissare un riferimento cartesiano ed un punto $P(x, y, z)$ diverso dall'origine, in modo che il segmento orientato $O\vec{P}$ identifichi il vettore che ha per componenti le coordinate x, y, z di P . In analogia al problema 4.1, si ha:

Problema 4.2: In un riferimento cartesiano dello spazio, sia $P(x, y, z)$ un punto diverso dall'origine, in modo che il segmento orientato $O\vec{P}$ identifichi il vettore che ha per

componenti rispettivamente le coordinate x, y, z di P . Se $\vec{n}(a, b, c)$ è un vettore ortogonale ad $\vec{OP}$, si individui il luogo geometrico dei punti $P(x, y, z)$ di S_3 tale che il segmento orientato $\vec{OP}$ sia perpendicolare a $\vec{n}(a, b, c)$.

Con procedimento analogo al problema 1, si ha:

$$\vec{n} \perp \vec{OP} \Rightarrow \vec{n} \circ \vec{OP} = 0, \quad \text{cioè: } ax + by + cz = 0 \quad (3.4)$$

che è l'equazione del piano perpendicolare alla direzione del vettore $\vec{n}(a, b, c)$.

Anche in questo caso concludo che i vettori perpendicolari al piano in ogni punto, hanno la stessa direzione, per cui le loro componenti differiscono solo per un fattore moltiplicativo. Così di seguito, operando su spazi piatti, di dimensione tre, quattro, ... ecc, i vettori perpendicolari allo spazio hanno tutti la stessa direzione.

Se consideriamo, invece, uno spazio curvo, la direzione del vettore perpendicolare allo spazio cambia in ogni punto, per cui le componenti del vettore normale allo spazio in un punto (al piano tangente la superficie in quel punto) sono funzioni delle coordinate.

5. Modello geometrico in uno spazio a curvatura non nulla.

Considerata una superficie come spazio in sé, vediamo, innanzitutto, come si può costruire su di essa una geometria analoga a quella del piano:

- Ai concetti intuitivi di *punto, piano e retta* associamo rispettivamente i concetti di *punto* stesso, *superficie* e *geodetica*. Ovviamente l'analogo del *segmento rettilineo* sarà *l'arco di geodetica*.

- Alla relazione di *uguaglianza* tra figure, in geometria euclidea:

Due figure piane sono uguali, se possono farsi corrispondere punto per punto in modo che le distanze rettilinee fra le coppie di punti corrispondenti, siano uguali, corrisponde, per la geometria non euclidea:

Due figure su una superficie sono uguali se possono farsi corrispondere punto per punto in modo che le distanze geodetiche fra coppie di punti corrispondenti sono uguali.

- Le proprietà fondamentali dell'uguaglianza fra archi geodetici e angoli, corrispondono ai postulati della congruenza tra segmenti ed angoli (Casolaro F. 2002).

In un discorso di carattere didattico, la generalizzazione di queste proprietà mediante l'intuizione, la si può dare utilizzando come superficie un foglio flessibile ed inestensibile, sì che, se su di esso vi sono figure uguali, con una flessione della superficie possiamo sovrapporre le due figure una sull'altra. *Due superfici applicabili l'una sull'altra con una flessione senza estensione avranno la medesima geometria*; ad esempio, su una superficie cilindrica si avrà una geometria assimilabile a quella di una superficie piana (ovviamente, bisogna definire opportunamente i concetti fondamentali). Se abbiamo una geometria su una superficie sferica, essa sarà diversa da quella del piano, perché è impossibile rendere piana una porzione di sfera senza provocare contrazioni o dilatazioni.

Però, è facile verificare che anche sulla sfera valgono, per figure uguali, proposizioni analoghe ai postulati della congruenza nel piano, in quanto *la sfera può muoversi liberamente su se stessa come il piano*; non valgono le proprietà affini e le proprietà del parallelismo che si avvalgono del V postulato (F. Casolaro 1996).

Quella superficie che si può muovere liberamente su se stessa, come accade per la superficie piana, è caratterizzata da una grandezza costante in ogni suo punto: *la curvatura K*.

La definizione rigorosa di *curvatura* richiede conoscenze che esulano da un'esposizione elementare. Però, come per i concetti di retta e di piano in geometria euclidea, riteniamo che si possa lasciare all'intuito dello studente di immaginare quelle superfici a curvatura zero (*il piano*), a curvatura costante (*la sfera*), a curvatura variabile (*ellissoide, o banale esempio dell'uovo*).

Rimandando alla Bibliografia, la caratterizzazione relativa alla suddivisione delle geometrie in base alla curvatura (non essenziale per il nostro scopo), ci limitiamo a far presente che ci riferiremo ad un modello di geometria di tipo ellittico, analogo a quello di Riemann, che trova applicazione nello spazio fisico. Riemann, riteneva che le proprietà che distinguono lo spazio fisico da altre varietà, possono essere ricavate solo dall'esperienza; di conseguenza, egli pensava che gli assiomi della geometria euclidea potessero essere veri solo approssimativamente per lo spazio fisico e, come Lobacewsky, riteneva che sarebbe stata l'Astronomia a stabilire la geometria che meglio si adatta allo spazio fisico (Casolaro, Santarossa 1997).

Già nel 1854, Riemann, dedusse che lo studio della geometria non si può astrarre dall'evoluzione fisica. In uno spazio in cui la curvatura cambia da un luogo all'altro per la presenza della materia, e da un istante all'altro per il moto della materia, le leggi della geometria euclidea non sono valide. Pertanto, egli riteneva che per determinare la vera natura dello spazio fisico, si dovesse associare fra loro spazio e materia (e di conseguenza il tempo). A tale scopo, così si esprimeva:

"O la realtà sottostante lo spazio forma una varietà discreta, oppure bisognerà cercare il fondamento delle sue relazioni metriche fuori di esso, nelle forze connettive che vi agiscono. Questo ci porta nel dominio di un'altra scienza, quella della fisica, in cui l'oggetto delle nostre ricerche non ci consente di entrare oggi"

Quest'idea, che ha condotto poi alla Teoria della relatività, fu sviluppata da William Clifford (1845-1879) il quale sosteneva che:

"La variazione della curvatura dello spazio sia ciò che accade realmente in quel fenomeno che chiamiamo moto della materia, sia essa pesante o eterea".

6. Modello di Riemann ed estensione della geometria alla Fisica.

Il modello formulato nel 1854 da Riemann (*geometria ellittica*), si può considerare una estensione della geometria differenziale di Gauss.

Quale Geometria per lo spazio fisico?

Riemann voleva dimostrare che gli assiomi di Euclide *sono verità empiriche* (e non verità evidenti) ed adottò l'approccio analitico proprio perché riteneva che *nelle dimostrazioni geometriche si potesse essere indotti ad assumere come verità ciò che è soltanto una nostra percezione, in quanto conosciamo lo spazio solo localmente*; da qui lo studio del comportamento locale dello spazio, cioè l'approccio *metrico-differenziale*.

Del resto, l'ortogonalità tra vettori, per come è stata definita su un iperpiano di uno spazio piatto, non ha significato su una superficie curva; il prodotto scalare tra un vettore normale alla superficie in un suo punto ed un vettore del piano tangente alla superficie in quel punto è un'approssimazione corretta della realtà solo se operiamo in un intorno del punto abbastanza piccolo da poter identificare l'elemento infinitesimo di superficie con una parte infinitesima di piano.

Infatti, sugli elementi lineari, Riemann, definisce la distanza tra due punti, le cui coordinate corrispondenti differiscono solo per degli infinitesimi. Basandosi su alcune ipotesi, egli assume per la distanza un'espressione del tipo:

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx_i dx_j \quad (6.1)$$

in cui le g_{ij} sono funzioni delle coordinate $x_1, x_2, \dots, x_n$ tali che $g_{ij} = g_{ji}$ e l'espressione quadratica a secondo membro è sempre positiva. Dalla (6.1), con:

$$g_{ij} = 0, \forall i \neq j; g_{ji} = 1, \forall i = j,$$

si ottiene:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 \quad (6.2)$$

che rappresenta la distanza nel modello euclideo.

Nella parte finale del suo lavoro, Riemann, applica allo spazio ordinario questi risultati, concludendo che *lo spazio fisico è una varietà a tre dimensioni a curvatura costante*. In questa varietà, la *geometria non si può astrarre dall'evoluzione fisica*.

Riferendoci, ad esempio, ad una *varietà tridimensionale* di uno spazio a quattro dimensioni $\vec{g}(g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}) S_4$, un'equazione lineare in quattro incognite del tipo:

$$g_{11}(x, y, z, t)dx + g_{12}(x, y, z, t)dy + g_{13}(x, y, z, t)dz + g_{14}(x, y, z, t)dt \quad (6.3)$$

ottenuta dal prodotto scalare tra il vettore $\vec{g}(g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14})$ normale alla superficie S_4 ed il vettore $d\vec{s}(dx, dy, dz, dt)$ (spostamento infinitesimo su S_4), individua un iperpiano S_3 dello S_4 , in cui le g_{ij} ($ij = 1, \dots, 4$) sono funzioni delle coordinate (x, y, z, t) analoghe a quelle introdotte da Riemann per la sua geometria non euclidea, in cui la metrica è definita da

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx_i dx_j \quad (6.4)$$

Allo stesso modo, i sistemi:

$$\begin{cases} g_{11}dx + g_{12}dy + g_{13}dz + g_{14}dt = 0 \\ g_{21}dx + g_{22}dy + g_{23}dz + g_{24}dt = 0 \\ g_{31}dx + g_{32}dy + g_{33}dz + g_{34}dt = 0 \end{cases}$$

in cui le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \end{pmatrix}$$

hanno rango $\rho(A_1) = 2$, $\rho(A_2) = 3$, rappresentano, rispettivamente, uno spazio S_2 (analogo al piano euclideo) iperpiano di S_3 , ed uno spazio S_1 (analogo alla retta euclidea) iperpiano di S_2 .

Nell'idea di Einstein, le funzioni, g_{ij} che nelle (6.3) e (6.4) rappresentano i coefficienti delle variabili x, y, z, t , incorporano gli effetti delle masse gravitazionali nello spazio. Tali effetti, provocando una curvatura in ogni punto, sono la causa del cambiamento di direzione del vettore normale alla superficie in quel punto.

Con l'introduzione della coordinata-tempo, si ha poi una più corretta analisi dell'universo, identificato col cosiddetto spazio-tempo quadridimensionale (x, y, z, t) di Minkovsky, in cui l'insieme dei punti-eventi (x, y, z, t) definisce un continuo a quattro dimensioni che rappresenta uno spazio geometrico S_4 (Casolaro F., Pisano R. 2011).

In tale ottica, lo spazio S_3 dei punti (x, y, z) del modello euclideo, visto come sottospazio di S_4 , può essere assimilato ad un iperpiano dello *spazio-tempo di Minkovsky*.

Se analizziamo la struttura dei sottospazi di S_4 , in analogia al modello analitico euclideo, possiamo trarre le seguenti conclusioni:

- per $t = 0$ (ovvero $t = \text{costante}$), si ha l'iperpiano S_3 , che è lo spazio geometrico euclideo tridimensionale, in cui valgono le leggi della cinematica classica;

- se invece è costante una delle coordinate x, y, z , si hanno iperpiani S_3 di S_4 che caratterizzano modelli cinematici relativistici su S_2 , che è l'analogo del piano euclideo.

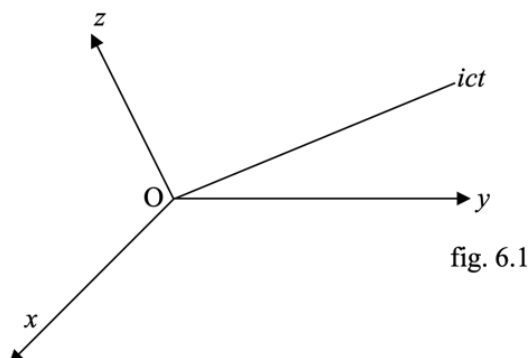
Ad esempio, l'insieme dei punti $P(x, y, 0, t) \equiv P(x, y, t)$ è un S_3 , le cui coordinate (x, y, t) individuano i punti-eventi del piano $S_2(x, y)$ che è prolungato alla cinematica con l'introduzione della coordinata tempo t .

In tale contesto, bisogna tener conto che la metrica è definita da:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \quad (6.5)$$

Quale Geometria per lo spazio fisico?

Tale relazione si può giustificare geometricamente, aggiungendo alla terna reale (O,x,y,z) del riferimento di S_3 , un quarto asse immaginario ortogonale ad S_3 in cui la coordinata tempo è moltiplicata per l'unità immaginaria i e, per uniformità dimensionale, per la velocità della luce c .



Il vettore $d\vec{s}$ ha allora componenti (dx, dy, dz, ict) (fig. 6.1) e quindi la metrica è definita da:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + i^2 c^2 dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2,$$

cioè la (6.5).

Ciò porta a concludere che *la geometria non si può astrarre dall'evoluzione fisica*. Infatti, secondo la concezione classica, la geometria esprime un insieme di proprietà relative al *movimento dei corpi* ed alla *propagazione della luce*, che si ottengono facendo astrazione dal *tempo* e dalle *forze*. Quindi, con un'estensione della geometria alla cinematica (che è la teoria del movimento rispetto allo spazio-tempo) e successivamente alla dinamica (con l'introduzione delle forze) si avranno approssimazioni che ci avvicinano man mano ad un grado più concreto della realtà fisica, che troverà poi un'ulteriore correzione con la teoria della relatività generale. Con tale teoria, Einstein sollevò anche una questione più ampia legata al significato delle g_{ij} il cui uso incorporava gli effetti gravitazionali delle masse nello spazio; infatti, *le geodetiche del suo spazio-tempo sono precisamente le traiettorie degli oggetti che si muovono liberamente (come ad esempio la traiettoria della terra intorno al sole), analogamente alla legge newtoniana che ci fa individuare la retta come traiettoria descritta da un punto, non soggetto a forze, con velocità uniforme*.

Dunque, il modello newtoniano che assegna una legge per il moto libero di un punto e vi aggiunge poi una forza, risulta essere solo un'astrazione nella nuova costruzione della dinamica di Einstein.

Tale concezione sarebbe reale se la materia fosse composta da piccole masse, poste a distanza tale una dall'altra da potersi muovere senza subirne la reciproca influenza; invece *la materia si muove sotto l'influenza di altra materia che, secondo la dinamica newtoniana è la causa delle forze gravitazionali*.

Bibliografia.

Luigi Berzolari (a cura): Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi. Ed. Hoepli.

F. Casolaro 1996: "La Matematica nell'insegnamento della Fisica" - Atti del Convegno Nazionale Mathesis: "Cento anni di matematica". Palombi Editori - Roma, 1995.

Morris Kline 1992: "Storia del pensiero matematico" - Einaudi Editori.

Casolaro F. 1996: "La Matematica nello insegnamento della Fisica". Atti del Convegno Nazionale Mathesis 1995, Roma, pag. 363-368.

Casolaro F. 1997: "Modello geometrico non euclideo per lo spazio fisico", Convegno "Metodi di rappresentazione e incertezza in Architettura", Pescara, 1997 - pag. 103-106.

Casolaro F., Santarossa R. 1997: "Geometrie non euclidee e geometria differenziale: note didattiche", Congresso Nazionale Mathesis Caserta 1997 - pag. 213-219.

Casolaro F. 2002, Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo". Congresso Nazionale Mathesis Bergamo 2002, pag. 185-198.

Casolaro F., Pisano R. 2006: "Riflessioni sulla geometria nella Teoria della relatività", XXVI Congresso Nazionale di Storia della Fisica e Astronomia SISFA, pag. 221-231.

Casolaro F. 2008: "L'evoluzione della Matematica attraverso quattro congetture fondamentali sull'osservazione del mondo fisico". Convegno AIF 2008, pag. 71-83.

Casolaro F., Pisano R. 2011: "An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics", History Research pag. 47-60.

Casolaro F., Pisano R. 2012: "An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics" - History Research, pag. 57-65.

Quale Geometria per la Fisica Classica?

La Geometria euclidea in S_2 e in S_3 per la rappresentazione dei fenomeni fisici.

Ferdinando Casolaro¹

Raffaele Prosperi²

¹Università degli Studi di Napoli
Dipartimento di Architettura
Via Forno Vecchio 12, 80134, Napoli, Italy
ferdinando.casolaro@unina.it

²ITI-LS “Francesco Giordani” Caserta
Dipartimento di Informatica
Via Laviano 18, 81100, Caserta, Italy
raffaeleprosperi@gmail.com

Sunto

La didattica della Fisica nelle scuole secondarie italiane di secondo grado, in particolare nel Primo Biennio, è organizzata utilizzando strumenti matematici non ancora in possesso degli alunni, in quanto nei corsi di Matematica si ritiene debbano essere sviluppati in periodi successivi a quelli di effettivo utilizzo in Fisica.

Questo lavoro contiene alcune proposte su come poter introdurre nei corsi di Matematica in modo pratico e intuitivo concetti e strumenti relativi alla Geometria Euclidea nel piano e nello spazio propedeutici allo studio della Fisica.

Parole chiave: Didattica, Geometria euclidea, Fisica, Trasformazioni geometriche.

1. Introduzione

Nel Primo Biennio, per la didattica della Fisica, è previsto dalle Indicazioni Nazionali un approccio sperimentale alla disciplina, esplorando fenomeni in esperienze di laboratorio per iniziare a costruire il linguaggio della fisica classica, semplificando e modellizzando situazioni reali, risolvendo consapevolmente problemi e rielaborando il percorso in maniera critica proponendo relazioni di sintesi e semplici modellizzazioni. L’impianto teorico e la formalizzazione sono demandate al Secondo Biennio.

Tuttavia, nella maggior parte dei casi al primo biennio la Fisica viene affrontata utilizzando strumenti matematici (come il seno ed il coseno per la scomposizione di forze) in modo meccanico, senza che l’alunno sia in grado di comprenderne una definizione.

Nei paragrafi successivi si presentano alcuni possibili approcci alla comprensione di strumenti matematici e al loro utilizzo nella risoluzione di problemi di Fisica Classica. Dopo un'opportuna fase di osservazione di fenomeni fisici e la rilevazione di grandezze fisiche di interesse nei vari fenomeni, invece che seguire il classico percorso di trasmissione di informazioni senza riferimenti pratici e reali è opportuno presentare in modo elementare gli strumenti necessari in un primo momento solo per una descrizione sintetica del fenomeno; negli anni successivi potranno costituire il modello di base da cui procedere per la risoluzione di problemi più complessi, scelti, come esplicitamente richiesto, tra quelli che appartengono alla sfera di maggior competenza e gradimento dell'alunno.

2. Scomposizione di vettori

La scomposizione di un vettore lungo due direzioni tra loro ortogonali è spesso richiesta per selezionare le componenti con comportamenti ed effetti diversi e prevede che l'alunno abbia compreso, anche praticamente, il concetto di proporzionalità del rapporto tra lati in triangoli simili (come nel caso del piano inclinato) e/o il corrispondente valore del seno e del coseno di un angolo di un triangolo (F. Casolaro 2002).

L'approccio pratico può essere facilmente supportato dall'uso di un software interattivo per algebra, geometria e analisi; molti sono scaricabili gratuitamente, come Geogebra, altri devono essere acquistati.

Con Geogebra, ad esempio, si disegnano due semirette con l'origine in comune (di cui una per comodità visiva parallela all'asse delle x), e una sequenza di segmenti paralleli all'asse y e perpendicolari alla retta orizzontale che in tal modo intersecano l'altra retta formando triangoli rettangoli. Servendosi del foglio di calcolo integrato e delle funzioni di misura di lunghezza di segmenti è immediato far rilevare che il rapporto tra un cateto e l'ipotenusa è costante in ciascun triangolo una volta fissato l'angolo. Facendo variare, ad esempio con uno slider, l'angolo tra le due semirette è possibile leggere gruppi di valori costanti per ciascun angolo. L'alunno comprende immediatamente che il rapporto tra un cateto e l'ipotenusa in un triangolo rettangolo dipende solo dall'angolo formato dal cateto con l'ipotenusa.

Analogamente si può procedere con carta millimetrata e Foglio di Calcolo elettronico (come Excel o altri).

Al termine delle osservazioni l'alunno può costruire una tabella di corrispondenze tra i valori degli angoli e quelle dei rapporti e riportare le coppie di valori su un riferimento cartesiano ortogonale con l'angolo in ascissa e il rapporto in ordinata; tracciando un grafico con il Foglio di calcolo si ottiene un grafico che corrisponde alla funzione seno. Analogamente per il grafico della funzione coseno.

La figura 1 successiva mostra il risultato di un possibile uso di Geogebra per la rilevazione del valore dei rapporti tra cateto e ipotenusa per angoli di 30° e 45° .

Quale Geometria per la Fisica Classica? La Geometria euclidea in S_2 e in S_3 per la rappresentazione dei fenomeni fisici.

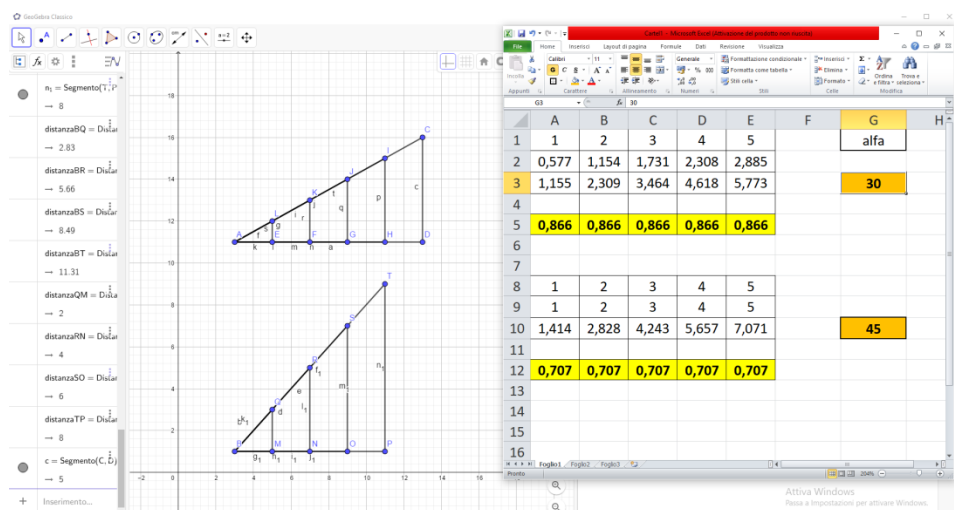


Fig. 1

La figura 2 mostra come può essere ottenuto il grafico delle funzioni seno e coseno con Microsoft Excel; nelle prime tre colonne sono riportati i valori rispettivamente dell'angolo in gradi, del seno (in blu) e del coseno (in rosso). Sono evidenziati i valori del seno degli angoli di 45° e di 60° rilevati precedentemente con il documento prodotto con Geogebra.

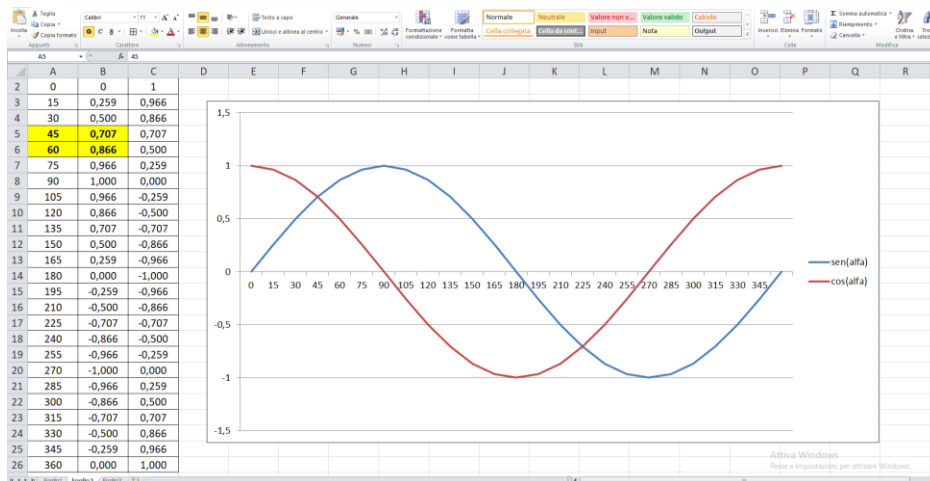


Fig. 2

Un altro approccio alla scomposizione è quello basato sulla similitudine di due triangoli. Nel caso degli ITI, dove l'insegnamento della Matematica e della Fisica non è assegnato ad un unico docente, il percorso didattico dovrebbe essere progettato insieme dai due docenti di Fisica e di Matematica che dovrebbero operare costantemente in parallelo (F. Casolaro, R. Prosperi 2001).

Nei corsi in cui le due figure sono rappresentate dalla stessa persona, il progetto comune e l'avanzamento parallelo delle due discipline dovrebbero risultare automatici.

Inutile dire che le frequenti motivazioni addotte dai docenti di Matematica, che porterebbero a non poter introdurre la similitudine tra triangoli al primo anno in quanto prevista al secondo anno, cozzerebbero contro le varie e frequenti raccomandazioni delle Indicazioni Nazionali e di tutti i documenti successivi relativi alla didattica (F. Casolaro, R. Prosperi 2012).

Del resto, le proprietà dei triangoli simili rientrano nelle Indicazioni nazionali per la Scuola secondaria di Primo grado, seppure solo a livello intuitivo attraverso i concetti di ingrandimento e di riduzione con semplici trasformazioni geometriche (F. Casolaro, 1991).

È opportuno perciò evitare di sprecare inutilmente tempo con tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili, ed affrontare pochi concetti e metodi fondamentali in profondità. Quindi, per un docente di Matematica serio e interessato al miglior apprendimento dei propri alunni è sufficiente limitare al minimo tutta la lunga serie di applicazioni meccaniche su espressioni, radicali, sistemi lineari, scomposizione in fattori e riprendere i concetti sulle trasformazioni geometriche in generale e sulle similitudini in particolare già affrontate dagli alunni nella scuola secondaria di primo grado (F. Casolaro, R. Prosperi 2003).

3. Applicazioni: prodotto scalare e prodotto vettoriale

Le prime applicazioni dirette della scomposizione di forze si hanno nel prodotto scalare e nel prodotto vettoriale (F. Casolaro 1995).

Dalla definizione di Prodotto scalare nel corrispondente calcolo del Lavoro di una forza, partendo dal concetto che una forza perpendicolare alla direzione di spostamento s non compie lavoro, è immediato considerare solo la componente nella direzione di s :

$$\vec{F} \cdot \vec{s} = F_s s = F s \cos(\widehat{Fs})$$

è opportuno determinare la componente della forza nella direzione dello spostamento con uno dei metodi descritti nel paragrafo precedente.

Dalla definizione di Prodotto vettoriale nel calcolo del Momento di una forza, partendo dalla considerazione che solo la componente parallela al braccio non produce momento (basta pensare all'azione che produce l'apertura o la chiusura della porta di una stanza) si rileva che è necessario determinare la componente della forza ortogonale al braccio:

$$\vec{F} \times \vec{s} = F_{\perp} s \hat{k} = F s \sin(\widehat{Fs}) \hat{k}$$

si può determinare la componente della forza ortogonale al braccio con uno dei metodi descritti.

Per determinare il versore $\hat{k}$, si può ragionare in questo modo: si consideri un piano α e si applichi ad esso una forza F ortogonale fino a farlo ruotare alla posizione β , come illustrato nella figura 3 (F. Casolaro, R. Prosperi, 2011); si può pensare all'operazione di apertura di una porta per cui si esercita una forza sulla maniglia perpendicolare alla porta. Il braccio è dato dal vettore tra la maniglia e le cerniere della porta, per cui appartiene al

piano della porta ed è ortogonale alla forza; il piano che contiene la forza $\vec{F}$ e il braccio $\vec{b}$ è parallelo al pavimento. Nel movimento rotatorio che ne deriva, l'unica retta che resta fissa è la retta r (quella che contiene le cerniere della porta), che è perpendicolare al piano individuato dalla forza e dal braccio. Pertanto, il versore $\hat{k}$ della direzione del Momento è un vettore di modulo unitario appartenente alla retta r e diretto in modo che la terna $\vec{F}, \vec{b}, \hat{k}$ sia levogira.

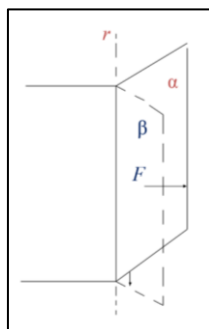


Fig. 3

4. Dall'aritmetica al moto attraverso il piano cartesiano

Già nell'età corrispondente alla frequenza della scuola secondaria di I grado i nostri alunni apprendono i concetti di proporzionalità diretta e proporzionalità inversa e, attraverso la relazione tra il lato e l'area del quadrato, intuiscano quello di proporzionalità quadratica. Tali relazioni vengono rappresentate nel piano cartesiano rispettivamente attraverso la rappresentazione della retta per l'origine, dell'iperbole equilatera relativa agli assi cartesiani e della parabola in forma canonica.

Per consentire agli alunni del primo anno di riprendere e potenziare le competenze sugli argomenti già in loro possesso e di apprenderne di nuovi potrebbe essere utile un percorso che, partendo da semplici problemi di situazione reale della sfera di interesse dell'alunno, egli rilevi coppie di valori corrispondenti, le riporti su un riferimento cartesiano, tracci il corrispondente grafico e osservandolo rilevi le proprietà della relazione tra le grandezze e le variazioni del grafico in corrispondenza di variazioni prefissate. Tramite un foglio di calcolo o un software per grafica interattiva per la geometria e per l'analisi da tabelle di corrispondenza o da punti posizionati sul riferimento si ottengono direttamente i grafici delle relazioni.

Per la proporzionalità diretta si ottiene una retta passante per l'origine.

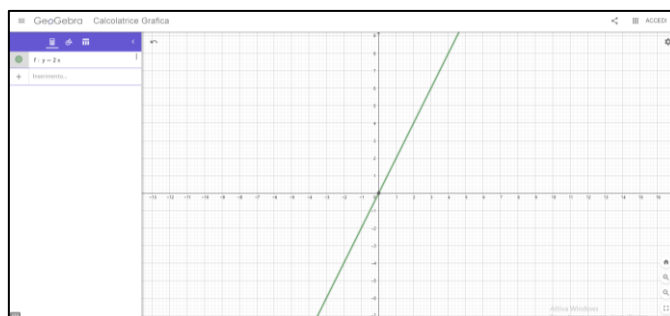


Fig. 4 - Proporzionalità diretta

È molto semplice verificare che se ad un aumento percentuale della variabile indipendente corrisponde un analogo aumento percentuale di quella dipendente, la retta deve necessariamente passare per l'origine degli assi; è immediato anche verificare come, al variare del coefficiente della x (coefficiente angolare), la retta varia la propria inclinazione (F. Casolaro, 2002).

È molto utile anche modificare il problema facendo in modo che la relazione preveda la somma di una quantità costante (intercetta) e che la presenza di tale costante aggiuntiva rende non più verificata la proporzionalità diretta, mantenendo la sola dipendenza lineare. Il grafico corrispondente è sempre quello di una retta, ma non più passante per l'origine, bensì con intersezione non nulla con l'asse delle ordinate; è preferibile anche far notare che tale retta non è altro che una traslazione di quella relativa alla proporzionalità diretta secondo il valore della costante.

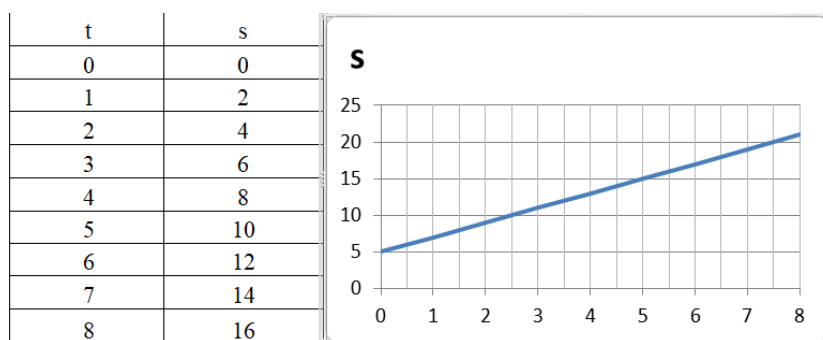


Fig. 5 – Dipendenza lineare

Tali risultati sono una solida base per la discussione della posizione di un punto materiale soggetto a un moto rettilineo uniforme.

Un alunno che, analizzando sperimentalmente in laboratorio il moto di un punto a velocità costante riporta i dati (spazi e tempi) in una tabella e poi su un diagramma cartesiano, si trova davanti ad un grafico di proporzionalità diretta relativo alla posizione del punto in moto rettilineo uniforme con posizione iniziale nulla; analogamente rilevando i valori di velocità di un punto in un moto rettilineo uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla, come il caso della caduta libera di un grave:

$$s = v t \quad v = a t.$$

Un tale confronto permette l'acquisizione di conoscenze e competenze sui moti rettilinei. Analogamente, il grafico di dipendenza lineare corrisponde alla posizione di un punto in un moto rettilineo uniforme con posizione iniziale non nulla o alla velocità in un moto rettilineo uniformemente accelerato con velocità iniziale non nulla (lancio verticale di un grave):

$$s = s_0 + v t \quad v = v_0 + a t .$$

È sufficiente operare una traslazione parallela all'asse x per ottenere proporzionalità diretta; ciò comporta considerare solo le variazioni di posizione o di velocità rispetto a quella iniziale:

$$s - s_0 = v t \quad v - v_0 = a t .$$

Il passaggio all'introduzione della proporzionalità quadratica e della dipendenza quadratica è immediato.

È sufficiente proporre agli alunni un qualsiasi problema in cui le variabili sono in proporzionalità quadratica, come l'area della superficie di un quadrato e la misura del suo lato, per ottenere una tabella di coppie di valori che, rappresentate su un riferimento cartesiano, portano ad ottenere il grafico di un ramo di parabola avente vertice nell'origine. Non è necessario anticipare il concetto di parabola o di curva di secondo grado, è sufficiente l'osservazione dell'andamento con concavità verso l'alto che tende ad aumentare più rapidamente dell'andamento di una retta all'aumentare di x.

Ad esempio, con un Foglio di calcolo, si ottiene la figura 6.

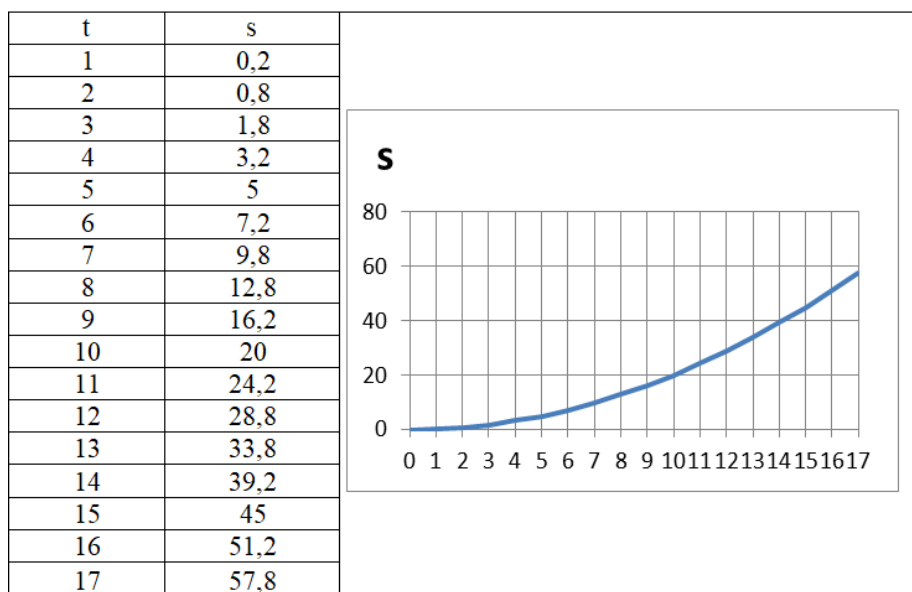


Fig. 6 - Proporzionalità quadratica

Ovviamente, è semplice per un insegnante individuare un gruppo di problemi in cui la rappresentazione grafica della relazione tra due variabili corrisponde ad una parabola, di equazione $y = a x^2$; considerando una qualsiasi delle coppie presenti in tabella, l'alunno può determinare il valore di a.

Allorquando un alunno, al termine di un esperimento o di un'osservazione, verifica che il grafico ha un andamento simile a quello in figura, è in grado di individuare il modello matematico che descrive il fenomeno.

Con Geogebra è, poi, possibile verificare la conseguenza sul grafico di una variazione del coefficiente a ; ciò è possibile servendosi di uno slider o tracciando più grafici, eventualmente anche sovrapposti.

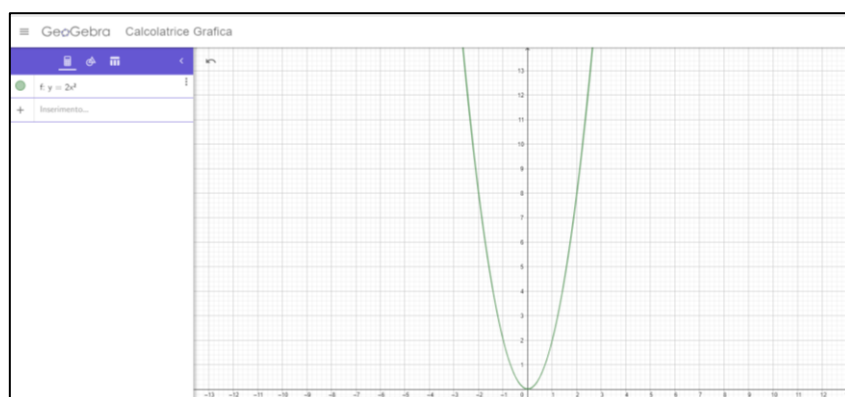


Fig. 7

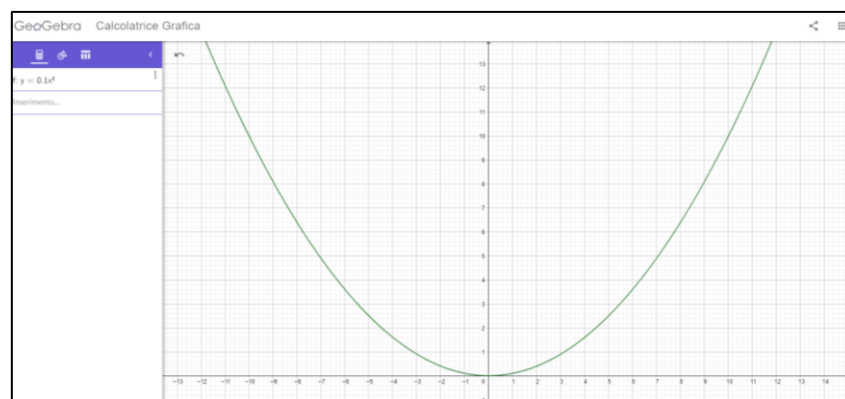


Fig. 8

Servendosi delle funzioni di Geogebra è possibile confrontare la proporzionalità quadratica con la dipendenza quadratica, portando a notare come l'una si ottiene direttamente dall'altra tramite una traslazione parallela all'asse x .

Ad esempio, nel moto rettilineo uniformemente accelerato con velocità iniziale nulla e posizione iniziale nulla nel grafico della posizione si ha una proporzionalità quadratica, ma è sufficiente ipotizzare una posizione iniziale non nulla per avere una dipendenza quadratica senza più proporzionalità (Casolaro, Prosperi 2004):

$$s = \frac{1}{2}at^2 \qquad s = s_0 + \frac{1}{2}at^2$$

Tuttavia, se, sempre con velocità iniziale nulla, si può trasformare l'ultima in proporzionalità quadratica calcolando lo spostamento assoluto, cioè $s - s_0$

$$s - s_0 = \frac{1}{2}at^2.$$

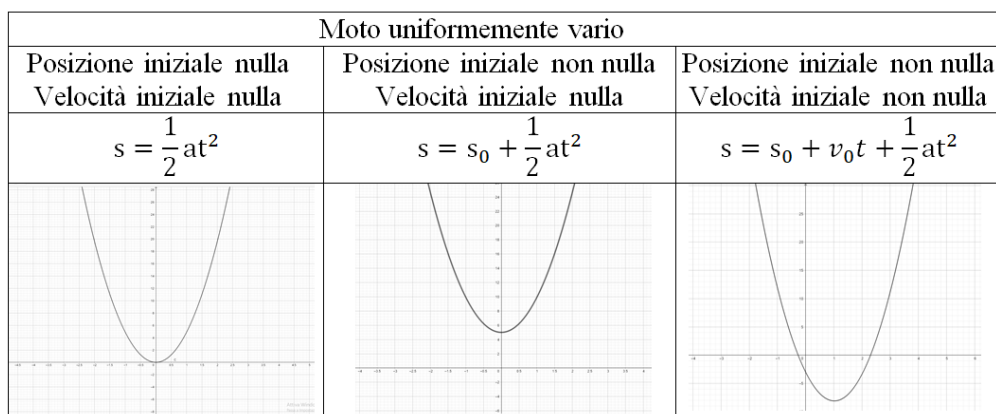


Fig. 9

Ragionamenti del tutto analoghi possono essere effettuati sulla proporzionalità inversa, utilizzando i risultati matematici per rilevare ad esempio il modello che descrive la legge di Boyle per i gas perfetti.

Bibliografia

- F. Casolaro (1991) Atti del Progetto del M.P.I. del Dip. di Progettazione e Rilievo dell'Università "La Sapienza" di Roma (11-15 dicembre 1990; 6 - 10 maggio 1991; 8-12 dicembre 1991): "Disegno e Matematica per una didattica finalizzata alle nuove tecnologie".
- F. Casolaro (1995), "La Matematica nell'insegnamento della Fisica". Atti del Congresso Nazionale Mathesis "Una presenza nella cultura e nell'insegnamento", Roma 20-23 ottobre 1995, pag. 363-368.
- F. Casolaro-R. Prosperi (2001), "La Matematica nelle Scienze applicate". Atti del congresso nazionale Mathesis, Mantova 2001, pag. 173-186.
- F. Casolaro (2002), "Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo". Atti del Congresso Nazionale Mathesis Bergamo, 17-19 ottobre Bergamo 2002, pag.185-198.
- F. Casolaro-R. Prosperi (2003), "Dall'Istituto Tecnico al liceo Tecnologico" Atti del Congresso Nazionale Mathesis, Vico Equense (Na), 03-06 novembre 2003.
- F. Casolaro-R. Prosperi (2004), "Aspetti qualitativi ed interdisciplinari delle funzioni elementari: monotonia e concavità nell'insegnamento della Fisica e delle Scienze

economiche”. Atti del Congresso Nazionale Mathesis, Nettuno (Rm) 18-21 novembre 2004 – pag. 296-302.

F. Casolaro-R. Prosperì (2011). Atti della Scuola Estiva che si è tenuta a Terni nel periodo 26-30 luglio 2011. “La Matematica per la Scuola Secondaria di secondo grado: un contributo per il docente di Matematica” - Editore 2C Contact

F. Casolaro, R. Prosperì (2012) - "Le Scuole di Matematica per la Formazione Docenti" - Atti del Convegno Nazionale organizzato dall'Università “G. D’Annunzio” di Chieti-Pescara nel periodo 24 – 26 maggio 2012.

Risoluzione degli esempi indicati dal MIUR per lo svolgimento delle tracce di Fisica e Matematica, nonché dei quesiti di Matematica e Fisica all’esame di stato 2019

Andrea Lanzillo¹

¹Docente di Matematica e Fisica
Liceo Scientifico Statale
“A. M. De Carlo” – Giugliano (Napoli)
alanzillo@libero.it

Sunto

I cambiamenti che si sono registrati da parte del MIUR con le nuove prove della maturità 2019, hanno indotto il Ministero per l'istruzione a pubblicare alcuni esempi di seconda prova di matematica e fisica per l'esame di stato della scuola secondaria superiore. Di seguito proponiamo le risoluzioni riferite a tutte le simulazioni per il liceo scientifico.

Introduzione

Vogliamo utilizzare alcuni temi presentati all’esame di stato, perchè dal punto di vista didattico bene si prestano per stimolare gradualmente lo sviluppo delle strutture cognitive degli studenti che saranno poi in grado di elaborare in maniera significativa le richieste dei problemi presenti nei Temi scelti. Data l’ampiezza delle conoscenze richieste per affrontare le soluzioni dei problemi e quesiti presenti nei Temi, si tratta di fornire anche delle indicazioni metodologiche risolutive, dando senso e applicazione alle interrelazioni tra tutti i contenuti studiati.

Prerequisiti

Possiamo individuare i seguenti argomenti come presupposti teorici indispensabili per poter affrontare la soluzione del tema di matematica (simulazioni a.s. 2018/2019) che segue.

Analisi: Funzione definita per casi, calcolo di limiti che non richiedano eccessive trasformazioni della funzione, derivata e suoi significati, discontinuità della derivata prima, teoremi di Rolle e Lagrange, studio di una funzione.

Geometria dello spazio: equazione della retta, del piano e della sfera. Numeri direttori della retta, vettore giacitura di un piano.

Calcolo della probabilità: definizione, teorema della probabilità totale, composta e contraria, distribuzione binomiale. Applicazioni a contesti che non richiedano un'analisi eccessiva per la determinazione della strategia risolutiva.

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Fissati due parametri reali $S > 0$, $k > 0$ considera la funzione:

$$f_k(x) = \frac{S}{1 + e^{-kx}}$$

il cui grafico viene indicato con Γ_k

La funzione $f_k(x)$ può essere adoperata per studiare la possibile evoluzione nel tempo di una popolazione che abbia capacità di riprodursi, nell'ipotesi in cui la limitatezza delle risorse disponibili causi l'esistenza di una "soglia di sostenibilità" al di sotto della quale la popolazione è costretta a mantenersi.

- 1 Dimostra che i valori assunti dalla funzione $f_k(x)$ si mantengono all'interno dell'intervallo aperto delimitato inferiormente dal valore 0 e superiormente dal valore S , dove quest'ultimo rappresenta tale soglia di sostenibilità.
- 2 Osservando Γ_k , individua la trasformazione geometrica da applicare a Γ_k per farlo diventare il grafico di una funzione dispari, e determina l'espressione analitica di tale funzione.
- 3 Individua graficamente o analiticamente il valore della x corrispondente alla massima velocità di crescita di una popolazione secondo il modello rappresentato dalla funzione $f_k(x)$; determina quindi, in funzione dei parametri S e k , il valore di tale velocità massima.

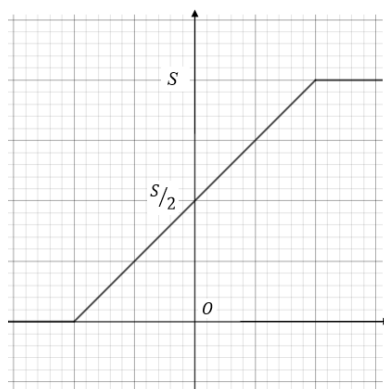
Analisi: Funzione definita per casi, calcolo di limiti che non richiedano eccessive trasformazioni della funzione, derivata e suoi significati, discontinuità della derivata prima, teoremi di Rolle e Lagrange, studio di una funzione.

Geometria dello spazio: equazione della retta, del piano e della sfera. Numeri direttori della retta, vettore giacitura di un piano.

Calcolo della probabilità: definizione, teorema della probabilità totale, composta e contraria, distribuzione binomiale. Applicazioni a contesti che non richiedano un'analisi eccessiva per la determinazione della strategia risolutiva.

Proposta risolutiva

Dovendo effettuare lo studio di una coltura batterica in un ambiente a risorse limitate, puoi pensare, al fine di semplificare i calcoli, di approssimare la funzione $f_k(x)$ con una funzione come $g_k(x)$ il cui grafico è riportato nella figura seguente:



Il valore di $g_k(x)$ passa da 0 a S con una rampa lineare, di pendenza pari alla pendenza di Γ_k nel punto di ascissa 0.

Determina, in funzione dei parametri S e k , l'espressione analitica della funzione $g_k(x)$.

Illustra il procedimento che adoteresti per valutare la accettabilità dell'approssimazione di $f_k(x)$ fornita da $g_k(x)$.

All'aumentare di k , tale approssimazione diventa migliore? Motiva la tua risposta.

Svolgimento del problema 1

Punto 1

Osservato che il dominio della funzione è $\mathbb{R}$, si possono calcolare i limiti agli estremi e osservare che in $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{S}{1+e^{-kx}} = 0$ mentre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S}{1+e^{-kx}} = S$. Calcolata

l'espressione della derivata prima (rispetto a x) si ottiene: $f'_k(x) = \frac{kSe^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2}$ da cui si conclude che il suo segno è positivo $\forall x \in \mathbb{R}$ e quindi la $f_k(x)$ è sempre strettamente crescente, pertanto, essendo continua e limitata e monotona, risulta compresa tra il suo estremo inferiore che è zero e quello superiore che è S .

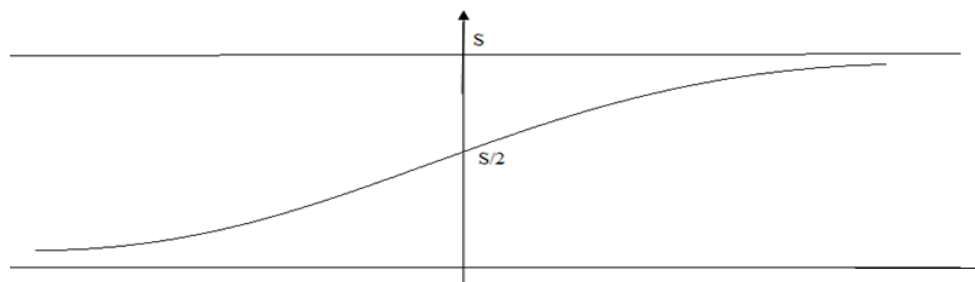
Punto 2

Per osservare Γ_k occorre disegnarlo e pertanto è bene completare lo studio della funzione calcolando le intersezioni con gli assi che si riducono solo a quella con l'asse y $A\left(0, \frac{S}{2}\right)$ e

la derivata seconda che risulta avere la seguente espressione: $f''_k(x) = \frac{k^2Se^{-kx}(e^{-kx}-1)}{(1+e^{-kx})^3}$ il

cui segno è positivo per $x < 0$. La concavità quindi è rivolta verso l'alto a sinistra dell'asse y mentre a destra lo è verso il basso e lo zero si presenta come punto di flesso discendente.

Il grafico è:



Osservando il grafico si nota una simmetria rispetto al punto $A\left(0, \frac{S}{2}\right)$ che si può verificare

anche analiticamente scrivendo l'equazione della simmetria di centro A

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = S - y \end{cases} \text{ e sostituendo in } y = \frac{S}{1+e^{-kx}} \text{ si ottiene: } y' = \frac{Se^{kx'}}{1+e^{kx'}}$$

$$\text{ossia } y = \frac{Se^{kx}}{1+e^{kx}} \text{ e dividendo per } e^{kx} \text{ si ha di nuovo } y = \frac{S}{1+e^{-kx}}.$$

Quindi per avere una funzione dispari è necessario che il grafico sia simmetrico rispetto all'origine e perciò basta spostare il centro di simmetria in basso fino a farlo coincidere

con O. Per questo basta applicare una traslazione $\vec{t}\left(0, \frac{S}{2}\right)$ ad $y = \frac{S}{1+e^{-kx}}$. Dato che

$$\text{le equazioni della traslazione sono } \begin{cases} x' = x \\ y' = y - \frac{S}{2} \end{cases} \text{ sostituendo a } x \text{ e } y \text{ nell'equazione di}$$

precedente e rinominando le variabili x' e y' in x e y si ottiene la funzione:

$$y = S \cdot \frac{1 - e^{-kx}}{1 + e^{-kx}}$$

che è simmetrica rispetto all'origine perché: $y(-x) = S \cdot \frac{1 - e^{-k(-x)}}{1 + e^{-k(-x)}} = S \cdot \frac{1 - e^{kx}}{1 + e^{kx}}$ e dividendo numeratore e denominatore per e^{kx} si ottiene:

$$y(-x) = S \cdot \frac{e^{-kx} - 1}{e^{-kx} + 1} = -S \cdot \frac{1 - e^{-kx}}{1 + e^{-kx}} = -y(x)$$

Punto 3

La velocità di crescita è anche la rapidità con cui varia la funzione $f_k(x)$ e quindi tale velocità è data dalla derivata prima. Per conoscere la velocità massima occorre trovare il massimo della derivata prima, cosa che si può fare considerando il segno della derivata seconda già discusso prima e da cui si evince che il massimo è assunto nel punto $x=0$.

Quindi la velocità massima è data da $y'(0)$ e cioè: $v_{max} = \frac{kS}{4}$

Punto 4

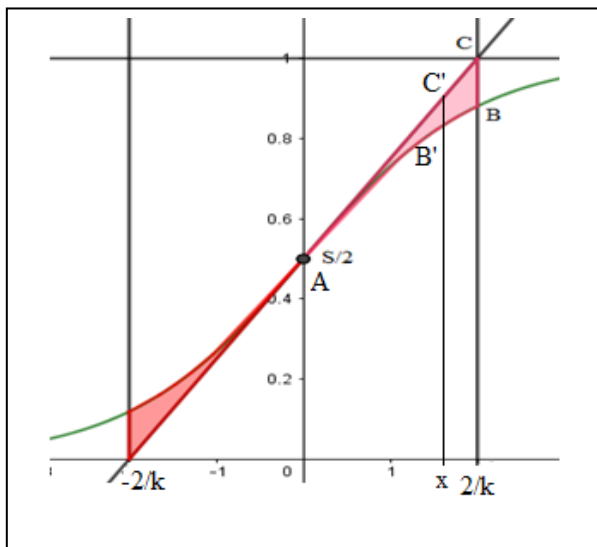
Per determinare il grafico di $g_k(x)$ occorre conoscere l'equazione della retta obliqua presente nel grafico assegnato dal testo. Tale retta ha intercetta pari a $\frac{S}{2}$

e coefficiente angolare pari a $\frac{kS}{4}$ che è proprio il valore della derivata prima nel punto 0.

L'equazione della retta sarà: $y = \frac{kS}{4}x + \frac{S}{2}$ e quindi la $g_k(x)$ avrà le seguenti equazioni:

$$g_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -\frac{2}{k} \\ \frac{kS}{4}x + \frac{S}{2} & \text{se } -\frac{2}{k} < x < \frac{2}{k} \\ S & \text{se } x \geq \frac{2}{k} \end{cases}$$

Punto 5



Per discutere l'accettabilità dell'approssimazione di $f_k(x)$ fornita da $g_k(x)$ osserviamo innanzitutto la simmetria della funzione rispetto al punto $\frac{S}{2}$ che ci consente di studiare la questione solo in $\left[0, \frac{2}{k}\right]$. Continuando, occorre stabilire in quale intervallo tale approssimazione fornisce un errore inferiore a quello assegnato. In figura, il segmento B'C' indica proprio la variazione che si ha nel sostituire a $f_k(x)$ la tangente $g_k(x)$. L'approssimazione richiesta è data dalla funzione $h_k(x) = g_k(x) - f_k(x)$. Essa è continua e derivabile nell'intervallo $\left[0, \frac{2}{k}\right]$ e pertanto in tale intervallo sarà dotata di minimo e di massimo e assumerà tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo. Inoltre è facile verificare che $h_k(x)$ è strettamente crescente.

Infatti risulta: $h'_k(x) = \frac{kS}{4} - \frac{kSe^{-kx}}{(1+e^{-kx})^2} = \frac{kS}{4} \cdot \left(\frac{1-e^{-kx}}{1+e^{-kx}}\right)^2$ che è manifestamente positiva per ogni x , pertanto il minimo sarà assunto per $x=0$ e il massimo per $x = \frac{2}{k}$. Il minimo di $h_k(x)$ è $h_k(0) = 0$ mentre il massimo è $h_k\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{S}{e^2+1}$, quindi l'immagine del dominio di $h_k(x)$ è $\left[0, \frac{S}{e^2+1}\right]$. Perciò, detto E l'errore assegnato, se risulta $E \geq \frac{S}{e^2+1}$ allora l'intervallo in cui è accettabile l'approssimazione è $\left[0, \frac{2}{k}\right]$ (di ampiezza massima) mentre se risulta $0 < E < \frac{S}{e^2+1}$ allora esisterà sicuramente un $\bar{x} \in \left[0, \frac{2}{k}\right]$ tale che $h_k(\bar{x}) = E$ e, stante la stretta crescita di $h_k(x)$, risulterà: $h_k(x) < E \forall x \in [0, \bar{x}]$.

Punto 6

Per rispondere alla domanda occorre considerare il segmento B'C' funzione di k . Risulta $B'C' = \frac{kS}{4}\bar{x} + \frac{S}{2} - \frac{S}{1+e^{-k\bar{x}}}$ e, detta $a(k)$ tale funzione, risulta che la sua derivata è:

$$a'(k) = \frac{\bar{x}S}{4} - \frac{\bar{x}Se^{-k\bar{x}}}{(1+e^{-k\bar{x}})^2} = \frac{\bar{x}S}{4} \cdot \left(\frac{1-e^{-k\bar{x}}}{1+e^{-k\bar{x}}}\right)^2$$

da cui si nota che la funzione è strettamente crescente. Osservato poi che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{kS}{4} \bar{x} + \frac{S}{2} - \frac{S}{1+e^{-k\bar{x}}} = +\infty,$$

si deduce che l'approssimazione peggiora all'aumentare di k , si può anche osservare che essendo $\bar{x} \in \left[0, \frac{2}{k}\right]$ accade che all'aumentare di k l'intervallo si restringe sempre di più fino a diventare di ampiezza nulla.

PROBLEMA 2

Il tuo liceo, nell'ambito dell'alternanza scuola lavoro, ha organizzato per gli studenti del quinto anno un'attività presso lo stabilimento ICE EXPRESS sito nella tua regione. All'arrivo siete stati divisi in vari gruppi. Il tuo, dopo aver visitato lo stabilimento e i laboratori, partecipa ad una riunione legata ai processi di produzione.

Un cliente ha richiesto una fornitura di blocchi di ghiaccio a forma di parallelepipedo a base quadrata, di volume 10 dm^3 , che abbiano il minimo scambio termico con l'ambiente esterno, in modo da resistere più a lungo possibile prima di liquefarsi.

Al tuo gruppo viene richiesto di determinare le caratteristiche geometriche dei blocchi da produrre, sapendo che gli scambi termici tra questi e l'ambiente avvengono attraverso la superficie dei blocchi stessi.

1. Determina il valore del lato b della base quadrata che consente di minimizzare lo scambio termico e il corrispondente valore dell'altezza h , tenendo presente la necessità che il volume sia 10 dm^3 .

Il blocco di ghiaccio al termine del processo produttivo si trova alla temperatura di -18°C . Esso viene posto su un nastro trasportatore che lo porta a un camion frigorifero, attraversando per due minuti un ambiente che viene mantenuto alla temperatura di 10°C ; esso pertanto tende a riscaldarsi, con velocità progressivamente decrescente, in funzione della differenza di temperatura rispetto all'ambiente, e inizia a fondere se lungo il percorso raggiunge la temperatura di 0°C .

2. Scegli, motivando la tua scelta, quale delle seguenti funzioni è più idonea per rappresentare il processo di riscaldamento prima dell'inizio della liquefazione (T_a = temperatura ambiente, T_g = temperatura del ghiaccio all'istante $t = 0$, $T(t)$ = temperatura del ghiaccio all'istante t , dove t è il tempo trascorso dall'inizio del riscaldamento, in minuti):

$$T(t) = (T_a - T_g) \cdot e^{-Kt}$$

$$T(t) = (T_a - T_g) \cdot (1 - e^{-Kt}) + T_g$$

$$T(t) = (T_a - T_g) \cdot e^{Kt} - T_a$$

e determina il valore che deve avere il parametro K perché il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero.

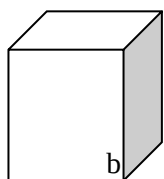
3. Poiché il parametro K varia in funzione di diversi fattori produttivi, c'è un'incertezza del 10% sul suo effettivo valore. Ritieni che questo determini una incertezza del 10% anche sul valore della temperatura T del blocco di ghiaccio all'istante in cui raggiunge il camion frigorifero? Motiva la tua risposta, in modo qualitativo o quantitativo.

L'azienda solitamente adopera, per contenere l'acqua necessaria a produrre un singolo blocco di ghiaccio, un recipiente cilindrico, con raggio della base eguale a 1,5 dm, e altezza eguale a 2 dm.

4. Sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del 9,05%, stabilisci se il suddetto recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto e, in tal caso, a quale altezza dal fondo del recipiente arriverà l'acqua.

Svolgimento del problema 2

Punto 1



Per rispondere al quesito occorre esprimere la superficie totale del parallelepipedo (blocco di ghiaccio) in funzione di b e di h e considerarla funzione di b , si ottiene così la funzione $S(b) = 2b^2 + 4bh$ con $b > 0$. Però bisogna anche imporre che il volume sia di $V = 10 \text{ dm}^3$. Dato che $V = b^2h$ si può ricavare h in funzione di b e si ottiene $h = \frac{V}{b^2}$. Perciò l'area totale del blocco di ghiaccio è $S(b) = 2b^2 + 4\frac{V}{b}$. La derivata prima è $S'(b) = 4b - 4\frac{V}{b^2}$ da cui si ricava che il punto di minimo è $b = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{10}$. L'altezza h corrispondente è $h = \frac{V}{\sqrt[3]{V^2}} = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{10}$. Quindi il parallelepipedo è un cubo di spigolo $\sqrt[3]{10} \text{ dm}$.

Punto 2

La scelta della funzione può essere fatta osservando che $T(0) = T_g$. Si vede subito che solo la seconda soddisfa a questa condizione mentre la prima e legge dà $T(0) = T_a - T_g$ e la terza $-T_g$. Inoltre la velocità di riscaldamento e cioè la rapidità con cui aumenta la temperatura è data dalla derivata seconda della seconda legge che è:

$T''(t) = -k^2(T_a - T_g) \cdot e^{-kt}$ che risulta essere manifestamente negativa e quindi coerente col fatto che il blocco di ghiaccio si riscalda con velocità decrescente. Quindi

$$T(t) = (T_a - T_g) \cdot (1 - e^{-Kt}) + T_g = 28 \cdot (1 - e^{-Kt}) - 18$$

Il blocco non fonderà fintantoché la temperatura $T(t) < 0$. Quindi ricordando che il tempo per percorrere il nastro trasportatore è 2 minuti si ha la disequazione in K :

$$28 \cdot (1 - e^{-2K}) - 18 < 0 \text{ da cui } K < \ln \sqrt{\frac{14}{5}} \text{ minuti}^{-1} \text{ perciò il valore di } K \text{ richiesto deve essere}$$

minore di $\ln \sqrt{\frac{14}{5}} \text{ minuti}^{-1}$ e maggiore di 0 ossia $0 < K < \ln \sqrt{\frac{14}{5}}$. Esistono perciò infiniti valori di K .

Punto 3

L'incertezza sul valore di K si propaga anche sul valore della temperatura del blocco e per stabilire la relazione tra le due variazioni si può differenziare la legge $T(t)$ rispetto a K , si ottiene così:

$$dT = 28te^{-Kt} dK$$

che specificata nell'istante in cui il blocco raggiunge il camion, cioè $t = 2 \text{ minuti}$ diventa:

$$dT = 56e^{-2K} dK$$

e l'errore relativo percentuale sulla temperatura con cui il blocco arriva è dato da:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{T} \cdot 100 &= \frac{56e^{-2K}dK}{28 \cdot (1 - e^{-2K}) - 18} \cdot 100 = \frac{28e^{-2K}dK}{5 - 14e^{-2K}} \cdot 100 \\ &= \frac{28Ke^{-2K}}{5 - 14e^{-2K}} \cdot \left(\frac{dK}{K} \cdot 100\right)\end{aligned}$$

e da qui si può vedere che l'errore percentuale su K non è lo stesso di quello sulla temperatura.

Punto 4

Se il volume aumenta del 9,05% quando l'acqua passa dallo stato liquido a quello solido allora vuol dire che il volume di acqua nel cilindro deve soddisfare alla seguente condizione:

$$V_{ghiaccio} = V_{acqua} + 9,05\% \text{ di } V_{acqua} \text{ da cui } V_{acqua} = \frac{V_{ghiaccio}}{1,0905}$$

Sapendo che $V_{ghiaccio} = 10 \text{ dm}^3$ si ha: $V_{acqua} = \frac{10}{1,0905} = 9,170 \text{ dm}^3$ il volume del cilindro è dato da: $V_{cilindro} = \pi r^2 h = \pi 1,5^2 \cdot 2 = 14,14 \text{ dm}^3$ che essendo maggiore del volume dell'acqua necessaria è sicuramente adatto a contenere la quantità per il blocco di ghiaccio. La distanza d dal fondo del recipiente non è altro che l'altezza del cilindro d'acqua di volume $9,170 \text{ dm}^3$ e perciò:

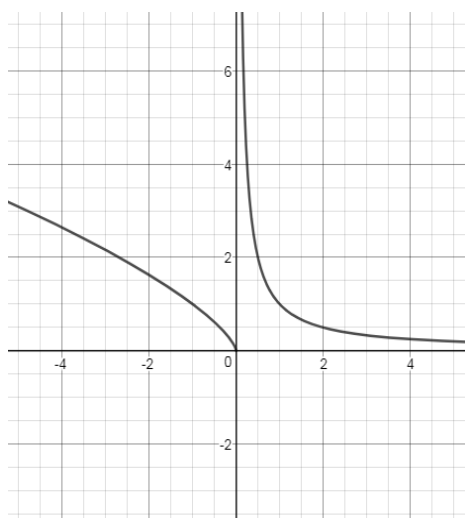


$$d = \frac{9,170}{\pi r^2} = \frac{9,170}{\pi 1,5^2} = 1,297 \text{ dm}$$

QUESTIONARIO

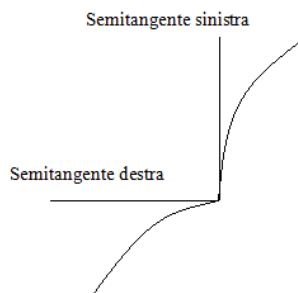
Quesito n°1

In figura è riportato il grafico della funzione $f'(x)$, derivata della funzione $f(x)$. Il grafico presenta un asintoto verticale per $x = 0$. Supponendo che la funzione f sia definita in $\mathbb{R}$, descrivi la derivabilità della funzione nel punto di ascissa nulla e fornisci un grafico probabile della funzione in un intorno di zero.



Svolgimento

La derivata prima nel punto zero non esiste e $f'(x)$ presenta una discontinuità di seconda specie: la derivata sinistra è 0 mentre la destra tende a più infinito quindi il punto 0 è per $f(x)$ un punto angoloso con semitangente sinistra orizzontale e quella destra verticale.



Quesito n°2

Individua il valore di k per cui la tangente nell'origine al grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{x-k}$$

un angolo di $\pi/6$ con l'asse x

Svolgimento

La derivata prima $f'(x)$ ha la seguente espressione: $\frac{-k}{(x-k)^2}$ e $f'(0) = -\frac{1}{k}$, dovendo essere

l'angolo pari a $\pi/6$ si ha $f'(0) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ da cui l'equazione: $-\frac{1}{k} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e cioè $k = -\sqrt{3}$

Quesito n°3

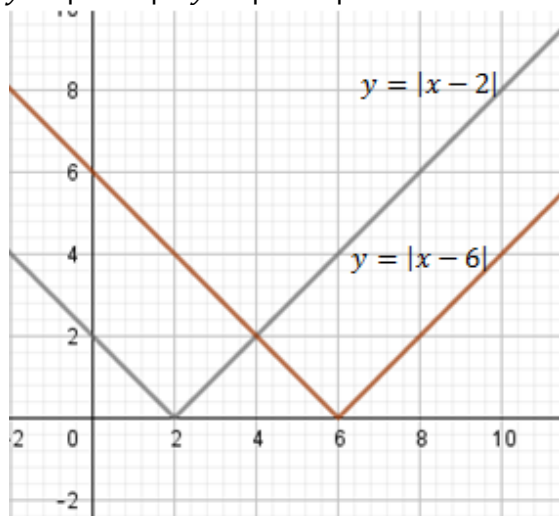
3) Risolvi esclusivamente per via grafica la disequazione:

$$|x-2| > |x-6|$$

Svolgimento

Considero le due rette $y=x-2$ e $y=x-6$ e quindi i grafici delle funzioni:

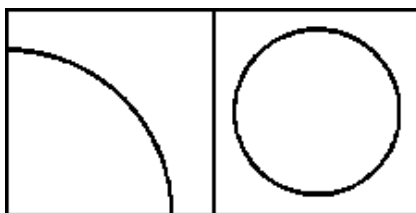
$y = |x-2|$ e $y = |x-6|$



da cui si vede subito che la disequazione è soddisfatta per $x > 4$

Quesito n°4

Il cerchio di raggio R centrato nel vertice in basso a sinistra del quadrato in figura ne ricopre metà della superficie; il cerchio di raggio r centrato nel centro del quadrato ne occupa metà della superficie. Sapendo che i quadrati sono equivalenti, determina il rapporto R/r .



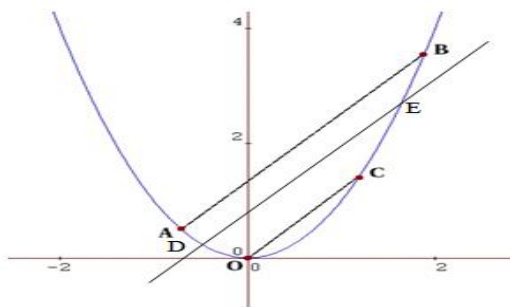
Svolgimento

L'area del cerchio di sinistra è πR^2 mentre quella del cerchio di destra è πr^2 . Detta $2Q$ l'area del quadrato si ha:

$$\frac{\pi R^2}{4} = Q \text{ e } \pi r^2 = Q \text{ da cui } \frac{\pi R^2}{4} = \pi r^2 \text{ e quindi}$$

$$\frac{R^2}{r^2} = 4 \text{ e perciò } \frac{R}{r} = 2$$

Quesito n°5



Presi due punti $A(a, a^2)$ e $B(b, b^2)$ sulla parabola $y = x^2$, traccia la retta OC , parallela alla retta AB e passante per l'origine e per il punto $C(c, c^2)$. Dimostra che $a + b = c$. Tracciata un'altra parallela DE , passante per due punti D ed E appartenenti alla parabola, e mostra che i punti medi delle tre parallele giacciono su una retta.

Svolgimento

Per il teorema di Lagrange applicato alla funzione $y = x^2$ relativamente all'intervallo $[a, b]$ si ha che esiste un punto c' tale che $2c' = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a$; applicando lo stesso teorema

all'intervallo $[0, c]$ risulta anche $2c' = \frac{c^2 - 0}{c - 0} = c$ e quindi anche $c = b + a = a + b$. Lo stesso ragionamento si può applicare ai punti D ed E di una generica retta parallela alle precedenti e quindi si ha $2c' = d + e$ e quindi è anche $c = d + e$. Adesso consideriamo le coordinate dei punti medi:

$M(AB) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a^2+b^2}{2}\right)$; $M(OC) = \left(\frac{c}{2}, \frac{c^2}{2}\right)$; $M(DE) = \left(\frac{d+e}{2}, \frac{d^2+e^2}{2}\right)$ che, alla luce delle relazioni precedenti si possono anche scrivere così:

$M(AB) = \left(\frac{c}{2}, \frac{a^2+b^2}{2}\right)$; $M(OC) = \left(\frac{c}{2}, \frac{c^2}{2}\right)$; $M(DE) = \left(\frac{c}{2}, \frac{d^2+e^2}{2}\right)$ e ciò indica che i punti medi si trovano tutti sulla retta di equazione $x = \frac{c}{2}$ parallela all'asse y .

Quesito n°6

Il grafico della funzione polinomiale cubica $y = f(x)$ intercetta l'asse x nei punti di ascissa 10, 100 e 1000. È sufficiente questa informazione per individuare le coordinate del punto di flesso? Se sì, determinale. Se no, spiega per quale motivo.

Svolgimento

Una funzione polinomiale cubica interseca l'asse delle x in un solo punto o in tre punti, ciò perché un polinomio di terzo grado ammette almeno una radice reale o ne ammette tre (ma non solamente due distinte). Poichè vi sono tre radici reali è possibile determinare l'espressione di $f(x)$ che è:

$f(x)=a(x-10)(x-100)(x-1000)$ individuata a meno della costante reale a diversa da zero. È possibile determinare la derivata prima: $f'(x)=a[(x-100)(x-1000)+(x-10)(x-1000)+(x-10)(x-100)]$, mentre la derivata seconda è: $f''(x)=a[x-1000+x-100+x-1000+x-10+x-100+x-10]=a[6x-2220]$. Studiando il segno si ha $f''(x)>0$ se $x > \frac{2220}{6} = 370$ e quindi il punto di flesso ha ascissa 370 la sua ordinata sarà $f(370)=a(370-10)(370-100)(370-1000)=61236000a$. Quindi le coordinate saranno $(370, 61236000a)$

Da qui si vede che le coordinate dipendono dal parametro a e quindi sono determinate solo se si fissa un valore per tale parametro.

Quesito n°7

Una sfera, il cui centro è il punto $K(1,0,1)$, è tangente al piano π avente equazione $x - 2y + z + 1 = 0$. Qual è il punto di tangenza? Qual è il raggio della sfera?

Svolgimento

Il punto di tangenza si può ottenere intersecando la retta per K e perpendicolare al piano

π col piano stesso. L'equazione della retta è: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$ intersecando col piano

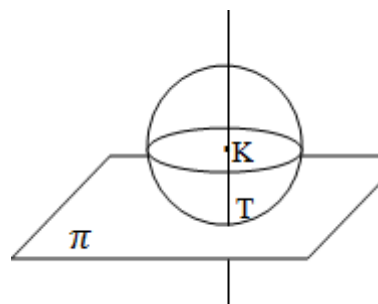
si ha l'equazione:

$(1+t)-2(-2t)+(1+t)+1=0$ da cui $6t=-3$ e cioè $t = -\frac{1}{2}$ e quindi sostituendo nell'equazione

della retta si ha il punto: $T\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ che è anche il punto di tangenza. Il raggio della sfera è la distanza tra il centro K e il punto di tangenza T :

$$R=KT=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + (0-1)^2 + \left(1-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$



Quesito n°8

Se si lancia una moneta 2 volte, la probabilità di ottenere una testa e una croce (in qualsiasi ordine) è pari al 50%. Se la moneta viene lanciata 4 volte, la probabilità di ottenere due teste e due croci, in qualsiasi ordine, è ancora pari al 50%? Motiva la tua risposta.

Svolgimento

Se si lancia una moneta due volte sono possibili le seguenti configurazioni: TT, TC, CT, CC e quindi i casi favorevoli sono due mentre i casi ugualmente possibili sono 4. Pertanto la probabilità è $\frac{2}{4}$ o anche 50%. Se invece la moneta viene lanciata 4 volte allora si hanno

16 casi ugualmente possibili (disposizioni con ripetizione di due oggetti (T o C) su 4 posti (4 lanci)) i casi favorevoli sono le combinazioni di 4 oggetti su due posti (4 lanci su due possibilità: T o C). Cioè, detti 1,2,3,4 i lanci si possono considerare le combinazioni di 4 oggetti su due posti (per esempio testa): (12),(13),(14),(23),(24),(34), lo schema seguente può essere utile:

1 LANCIO	2 LANCIO	3 LANCIO	4 LANCIO
T	T		
T		T	
T			T
	T	T	
	T		T
		T	T

Le caselle vuote conterranno ovviamente C (croce). Quindi i casi favorevoli sono 6 e quelli ugualmente possibili sono 16, per cui la probabilità è $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

Quindi la probabilità non si mantiene ancora al 50% ma risulta più piccola e cioè 37,5%

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Tema di FISICA, simulazione seconda prova scritta per il Liceo Scientifico opzione Scienze Applicate e Liceo Scientifico ad indirizzo Sportivo.

Prerequisiti

Matematica: media, varianza, deviazione standard, errore relativo, covarianza e correlazione. Derivata di una funzione.

Fisica:

Meccanica: principio di conservazione dell'energia, esperimento di Young,

Elettromagnetismo: energia potenziale di un sistema di cariche, densità di corrente elettrica, forza di Lorentz, campo magnetico di un solenoide, induttanza, legge dell'induzione elettromagnetica, irradiazione e intensità di radiazione, valore efficace di una grandezza alternata, effetto Hall.

Relatività: equazioni di Lorentz, legge della dilatazione dei tempi e della contrazione delle lunghezze, legge della composizione relativistica delle velocità, energia cinetica relativistica.

Fisica moderna: effetto fotoelettrico, lunghezza d'onda di De Broglie.

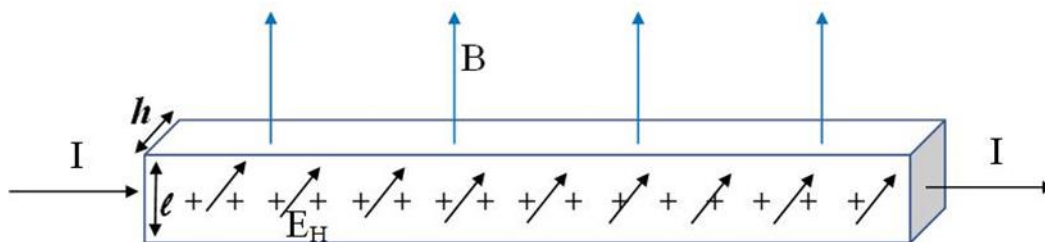
Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Nel laboratorio di fisica l'insegnante ha illustrato l'andamento del campo magnetico generato da una bobina percorsa da corrente utilizzando della limatura di ferro per visualizzarne le linee di forza e uno strumento che ha chiamato "magnetometro ad effetto Hall" per misurarne la intensità in vari punti.

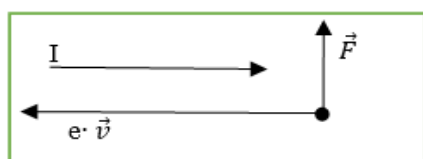
L'effetto Hall, che fu scoperto nel 1879 dal fisico statunitense Edwin Herbert Hall, consente di misurare l'intensità di un campo magnetico a partire dalla misura di una differenza di potenziale ΔV_H detta appunto "di Hall". In rete, oltre a queste informazioni, hai trovato la seguente descrizione schematica di funzionamento dello strumento:

"Una lastrina di rame, di sezione rettangolare $S = l \cdot h$, è percorsa da una corrente elettrica costante I . Se si immerge questa lastrina in un campo magnetico uniforme B diretto come in figura, la faccia anteriore della lastrina si carica positivamente e quella posteriore (non visibile) si carica negativamente. Tra le due facce quindi si genera una differenza di potenziale ΔV_H (la differenza di potenziale di Hall) e tra di esse è presente un campo elettrico (detto campo di Hall) diretto come indicato in figura."

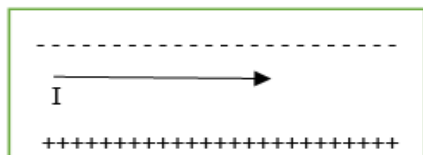


1. Spiega l'origine del campo elettrico e della differenza di potenziale ΔV_H .

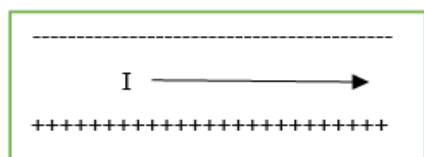
Alla base dell'effetto Hall c'è la forza di Lorentz che è la forza che agisce su una carica in moto quando si trova in un campo magnetico, essa è data dalla legge: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ dove q è l'intensità della carica, v la sua velocità e $\vec{B}$ il campo magnetico. Osservando che una corrente elettrica è un insieme di cariche che hanno una direzione preferenziale per il loro moto e detta v la loro velocità si deduce che se una corrente si trova in un campo magnetico allora le cariche in moto sono soggette alla forza di Lorentz. In particolare si può considerare una lastrina di rame percorsa da corrente e quindi accadrà che gli elettroni in moto saranno soggetti ad una forza come di seguito è indicato:



Gli elettroni sono soggetti ad una forza che li spinge verso l'alto



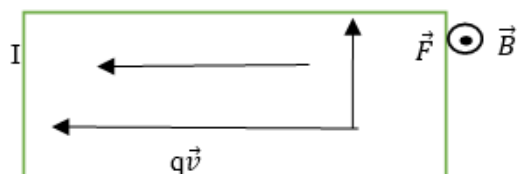
Quindi il bordo inferiore si carica positivamente e quello superiore negativamente



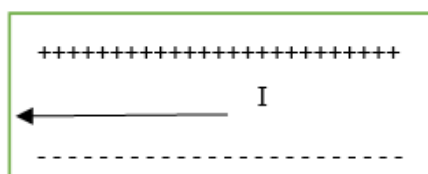
Man mano che gli elettroni si spostano nasce un campo elettrico che si oppone alla forza di Lorentz che sposta gli elettroni

2. L'effetto Hall può essere usato per individuare il segno della carica in moto nei conduttori metallici. Illustra qualitativamente come cambia il fenomeno a seconda del segno delle cariche in moto.

Da quanto detto nella discussione al punto 1 si nota che il verso della forza di Lorentz è orientato verso l'alto e quindi spinge elettroni verso il bordo superiore della piastra. Invece, se le cariche sono positive cambierà il verso della corrente I , che risulterà diretta verso sinistra, e quindi anche il vettore $q\vec{v}$ avrà tale direzione. Perciò la forza di Lorentz sarà orientata ancora verso l'alto ma questa volta spingerà cariche positive verso il bordo superiore che quindi, a differenza di prima, risulta carico positivamente.



Se le cariche che si muovono sono positive allora la corrente è diretta verso sinistra ma la forza è comunque orientata verso l'alto



Quindi il bordo inferiore si carica positivamente e quello superiore negativamente

3. Dimostra l'esistenza di una relazione lineare $\Delta V_H = kB$ tra la differenza di potenziale che si instaura tra le facce della lastrina e l'intensità del campo magnetico B , quando si è raggiunta la condizione di equilibrio tra le forze che agiscono sulle cariche in moto. Nella discussione del punto 1 si è concluso che man mano che le cariche si dispongono

su una faccia nasce un campo elettrico E che, a sua volta, esercita una forza sulle cariche che si oppone a quella di Lorentz. Quando questa forza diventa uguale a quella di Lorentz si interrompe il passaggio di elettroni e rimane stabilita una differenza di potenziale tra i bordi, che è la ddp di Hall ΔV_H . Essa si può determinare applicando la definizione di ddp

$$\Delta V_H = \frac{\text{Lavoro del campo elettrico}}{\text{carica}} = \frac{eEh}{e}$$

e poiché la forza del campo elettrico è uguale a quella di Lorentz risulta $eE=evB$ e perciò:

$$\Delta V_H = \frac{evBh}{e} = Bvh$$

da cui è chiara la relazione lineare richiesta e in particolare è $k=vh$.

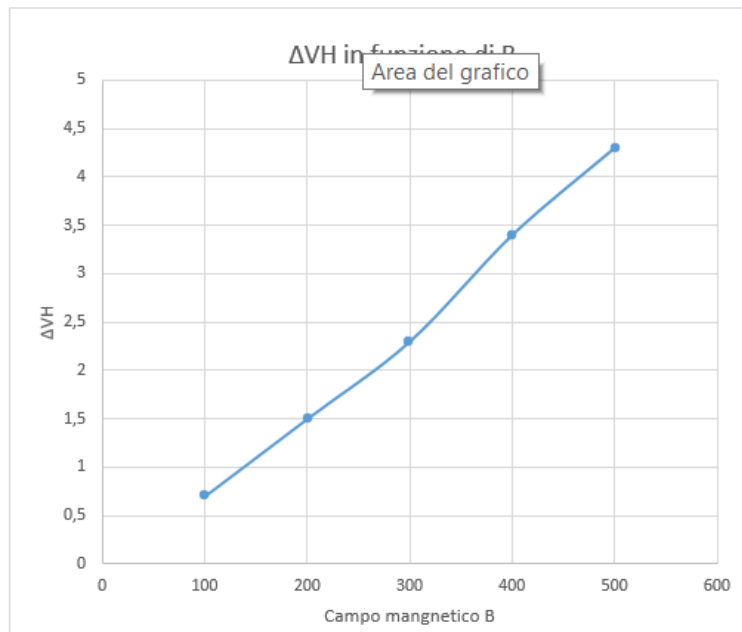
4. Perché il dispositivo possa essere usato come magnetometro, è necessario procedere alla sua taratura, cioè alla misurazione di ΔV_H in presenza di valori noti del campo magnetico. La seguente tabella mostra i dati sperimentali di una taratura effettuata in laboratorio:

$B[\text{mT}]$	100	200	300	400	500
$V_H[10^{-7}]$	0,70	1,5	2,3	3,4	4,3

Mostra che tali dati sono compatibili con una relazione di proporzionalità diretta tra ΔV_H e B , traccia il grafico di taratura e fornisci una stima del valore della costante di proporzionalità k . Come valuteresti l'incertezza della stima effettuata

Per rispondere a questo punto occorre calcolare i rapporti tra le ΔV_H assegnate e le corrispondenti intensità di B , poi si calcola la media dei valori ottenuti e quindi la deviazione standard dalla media dopodiché si determina l'errore relativo. Infine si può calcolare il coefficiente di correlazione lineare per stabilire se i valori assegnati sono abbastanza legati da una relazione lineare. La tabella seguente mostra la determinazione di tali valori e in particolare, per k , si ha il valore di 128,110, una deviazione standard della media pari a 1,99922 un errore relativo sulla media dell'1,58%. Considerando come errore la deviazione standard della media ed esprimendola con una sola cifra significativa si ha un valore pari a 2 per l'errore su k mentre lo stesso valore di k andrà espresso con sole tre cifre significative e quindi sarà $k=128$, l'errore relativo che si commette è $\frac{2}{128} \cdot 100 = 1,5625 \cong 2\%$ che, essendo di molto inferiore al 5%, rende la misura sicuramente accettabile. Inoltre la determinazione del coefficiente di correlazione lineare porta al valore 0,998 che è molto prossimo al valore di riferimento 1 e quindi conferma la relazione lineare diretta tra le due grandezze. Infine il grafico finale mostra che i punti corrispondenti alla tabella si distribuiscono secondo una retta con buona approssimazione.

B [mT]	100	200	300	400	500	300	Media B	
ΔV_H [10-7V]	0,7	1,5	2,3	3,4	4,3	<u>2,44</u>	<u>Media di</u> <u>ΔV_H</u>	
B/ ΔV_H	142, 857 1	133,33 33	130,43 48	117 ,64 71	116,2 791	<u>128,1</u> <u>103</u>	<u>Media di</u> <u>B/ΔV_H</u>	
Scarti dalla media per B/ ΔV_H	14,7 468 7	5,2230 56	2,3245 05	10, 463 2	- 11,83 12			
Quadrato scarti	217,4 7	27,2803 1	5,40332 4	109,4 789	139,97 75	<u>99,92</u> <u>202</u>	<u>Varianza</u> <u>B/ΔV_H</u>	
						<u>9,996</u> <u>1</u>	<u>dev st</u> <u>B/ΔV_H</u>	
						<u>1,999</u> <u>22</u>	<u>dev st</u> <u>dalla</u> <u>media</u> <u>B/ΔV_H</u>	
						<u>1,56%</u>	<u>err</u> <u>relativo</u> <u>B/ΔV_H</u>	
Scarti di B	-200	-100	0	100	200			
Scarti di ΔV_H	-1,74	-0,94	-0,14	0,96	1,86			
Prodotto scarti B e ΔV_H	348	94	0	96	372	<u>182</u>	<u>Media</u> <u>prodotti</u> <u>(covarianz</u> <u>a)</u>	
Quadrato degli scarti di B	4000 0	10000	0	1000 0	40000	20000	Media	<u>141,4214</u> <u>dev</u> <u>st x</u>
Quadrato degli scarti di ΔV_H	3,027 6	0,8836	0,0196	0,921 6	3,4596	1,6624	Media	<u>1,289341</u> <u>dev</u> <u>st y</u>
Coeff. di correlazione	0,998							



5) Dati $h = 0,10\text{cm}$ e $l = 2,0\text{cm}$ e adoperando $9,1 \cdot 10^{-7} \text{ V/T}$ come valore della costante k , ricava il valore della velocità degli elettroni di conduzione del rame (detta anche "velocità di deriva"). A partire da questo valore, e dalla conoscenza del valore della corrente $I = 1,0\text{A}$, come determineresti la densità di carica per unità di volume presente nella lastrina?

Nel punto 3) si è ricavato $k = hv$ e quindi

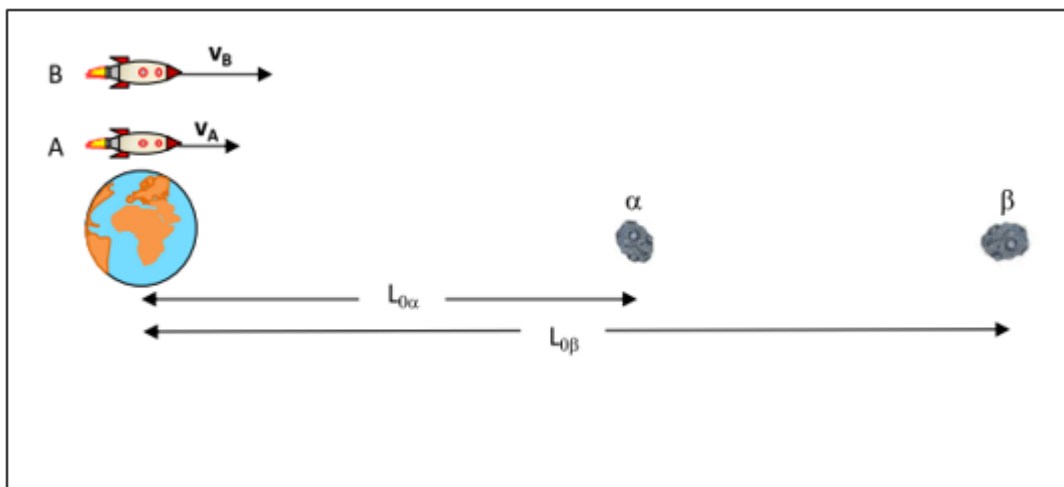
$$v = \frac{k}{h} = \frac{9,1 \cdot 10^{-7}}{0,10 \cdot 10^{-2}} = 9,1 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

Per calcolare il numero di cariche per unità di volume si può osservare che l'intensità di corrente è il flusso della densità di corrente attraverso la sezione del conduttore, vale perciò la relazione seguente: $I = nqSv$, dove I è l'intensità della corrente, n è il numero di cariche per unità di volume, q è l'intensità della carica, S è la sezione del conduttore e v è la velocità di deriva. Perciò la densità di carica per unità di volume è data da:

$$n = \frac{I}{qSv} = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,10 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 9,1 \cdot 10^{-4}} = 3,4 \cdot 10^{26} \text{ elettroni/m}^3$$

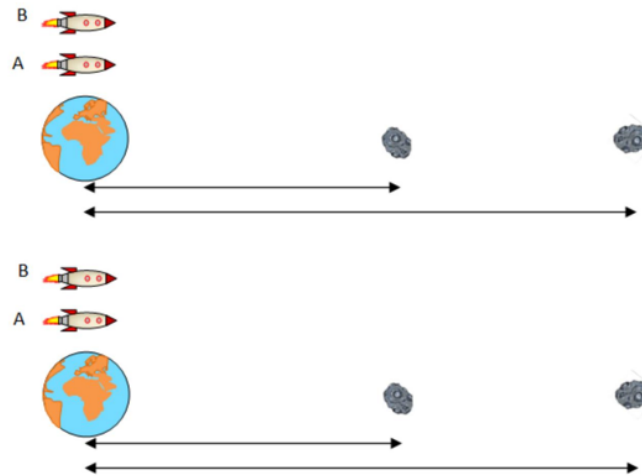
PROBLEMA 2

Due asteroidi, denominati α e β , sono stati individuati a distanze $L_{0\alpha} = 4$ ore luce (pari a $4,317 \cdot 10^{12} \text{ m}$) e $L_{0\beta} = 7,5$ ore luce (pari a $8,094 \cdot 10^{12} \text{ m}$) rispetto alla Terra. I due asteroidi sono allineati con la Terra e la loro velocità rispetto alla Terra è trascurabile. Due astronavi, A e B, partono nello stesso istante verso i due asteroidi per un volo di ricognizione. L'astronave A ha il compito di sorvolare l'asteroide α mentre l'astronave B ha il compito di sorvolare l'asteroide β . Le due astronavi viaggiano a velocità relativistiche con moto rettilineo uniforme. L'astronave B, che deve percorrere una distanza maggiore, utilizza dei propulsori più potenti e viaggia ad una velocità maggiore di quella dell'astronave A. Nel sistema di riferimento della Terra, all'istante iniziale $t = 0$, la situazione è quella rappresentata nella figura seguente:



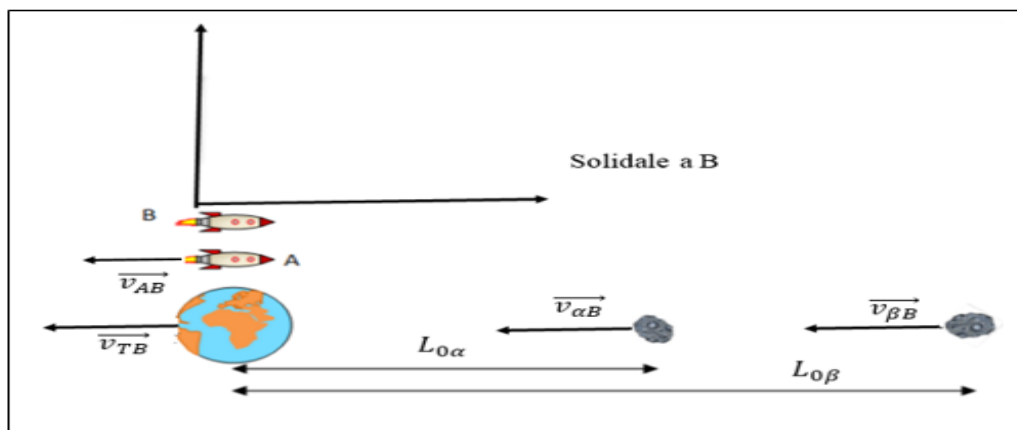
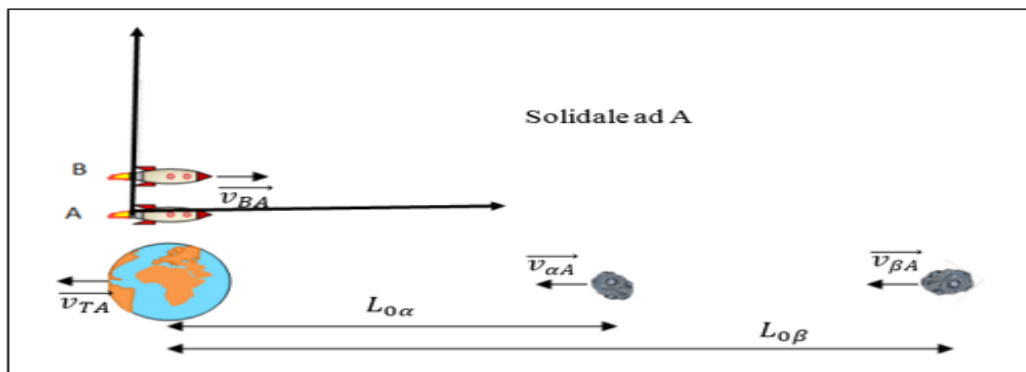
Le due figure seguenti illustrano invece la situazione all'istante $t = 0$ nei sistemi di

referimento dell'astronave A e dell'astronave B.



1. Completa le due figure disegnando su ciascun oggetto un vettore che rappresenti la sua velocità nel sistema di riferimento in esame e scrivendo in corrispondenza di ciascuna distanza la relazione che permette di calcolarla. Spiega cosa cambia nei due sistemi di riferimento A e B rispetto al riferimento della Terra.

2.



Nel sistema di riferimento solidale ad A accade che la terra si sposta verso sinistra con velocità v_{TA} uguale, in modulo, alla velocità v_A . Inoltre, poiché i due asteroidi si

possono ritenere fermi rispetto alla terra, si muoveranno anch'essi come la terra, con la stessa velocità. L'astronave B, invece, si muoverà ancora verso destra ma con una velocità inferiore a V_B . Tutte queste velocità si possono ottenere dalla legge relativistica di composizione delle velocità

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}$$

in cui u è la velocità assoluta, u' quella relativa e v quella di trascinamento.

Considerato assoluto il moto rispetto ad A, di trascinamento quello della terra rispetto ad A e relativo quello rispetto alla terra si ha che le velocità rispetto al sistema di riferimento solidale ad A saranno quelle assolute, quelle rispetto alla terra saranno relative e quella della terra rispetto ad A è di trascinamento.

Per calcolare V_{BA} , la velocità di B nel sistema di riferimento solidale ad A, si può specificare la precedente espressione considerando che V_{TA} , è proprio $-V_A$ e si avrà:

$$V_{BA} = \frac{V_B - V_A}{1 - \frac{V_B V_A}{c^2}} \quad (1)$$

Mentre $V_{AA}=0$ e $V_{TA}=V_{0\alpha}=V_{0\beta} = -V_A$

Se si considera il sistema di riferimento solidale a B bisogna fare un discorso analogo. In questo caso l'asteroide beta si muove verso l'astronave B con una velocità $V_{\beta B} = V_{\alpha B} = V_T = -V_B$, (velocità di trascinamento) mentre l'astronave A avrà una velocità data dalla formula:

$$V_{AB} = \frac{V_A - V_B}{1 - \frac{V_B V_A}{c^2}} \quad (2)$$

dove V_A è la velocità relativa dell'astronave A rispetto alla terra.

Il comandante della missione decide di premiare l'astronauta che per primo raggiungerà l'asteroide che gli è stato assegnato. I due astronauti si accordano di inviare all'altro il tempo di arrivo sull'asteroide obiettivo della propria missione.

2) *Quando l'astronave A raggiunge l'asteroide il suo orologio di bordo indica un tempo $t'_\alpha = 9h 9 min 54$ (pari a $3,299 \cdot 10^4$) e quando l'astronave B raggiunge l'asteroide β , il suo orologio di bordo indica anch'esso il tempo $t'_\beta = 9h 9 min 54s$. Determina la velocità dell'astronave A e quella dell'astronave B (in unità c) rispetto alla terra. Determina anche la velocità relativa tra le due astronavi.*

Il tempo Δt_0 misurato dall'astronave è il tempo proprio mentre il tempo misurato da un osservatore terrestre Δt è quello non proprio, essi sono legati dalla relazione: $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0$. Osservando che

$$\Delta t = \frac{L_{0\alpha}}{v} \text{ e } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

dove v indica la velocità dell'astronave rispetto alla terra, si ha l'equazione:

$$\frac{L_{0\alpha}}{v} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \Delta t_0$$

che risolta, rispetto a v , dà il risultato: $v = \frac{cL_{0\alpha}}{\sqrt{L_{0\alpha}^2 + (c \cdot \Delta t_0)^2}}$ (v è il modulo della velocità)

Sostituendo i valori $c = 3 \cdot 10^8 m/s$, $L_{0\alpha} = 4,317 \cdot 10^{12} m$ e

$$\Delta t_0 = 3,299 \cdot 10^4 s$$

Si ottiene $v=0,3998c$ e perciò $V_A=0,3998c$. Facendo l'identico discorso per B si ottiene: $V_B=0,6331c$

Per calcolare la velocità relativa dell'astronave B rispetto a quella dell'astronave A si può utilizzare la (1) e si ottiene:

$$V_{BA} = \frac{V_B - V_A}{1 - \frac{V_B V_A}{c^2}} = \frac{0,6331c - 0,3998c}{1 - \frac{0,6331c \cdot 0,3998c}{c^2}} = 0,3124c$$

che, in valore assoluto, è uguale alla velocità relativa di A rispetto a B.

Quando l'astronauta A riceve l'informazione sul tempo di arrivo di B sull'asteroide, ritiene di aver vinto e di avere quindi diritto al premio.

3) Dalle trasformazioni di Lorentz o dalle relazioni tra intervalli di tempo misurati in sistemi di riferimento diversi, deduci il tempo t'_β di arrivo di B sull'asteroide come determinato da A e verifica che effettivamente egli giustamente ritiene di aver diritto alla promozione.

Occorre calcolare il tempo di arrivo di B così come calcolato da A. Il tempo proprio è sempre quello misurato dall'orologio di B $\Delta t_0 = 3,299 \cdot 10^4 s$ mentre il tempo non proprio è quello calcolato da A che risulta dato da $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0$ con γ calcolato con la velocità di B rispetto ad A che è $v=0,3124c$.

Risulta $\gamma = 1,0527$ e quindi, secondo A, il tempo impiegato da B per raggiungere l'asteroide è $\Delta t = 1,0527 \cdot 3,299 \cdot 10^4 s = 3,399 \cdot 10^4 s$ e cioè $t'_\beta = 3,473 \cdot 10^4 s$

Pertanto A calcola che B impiega un tempo superiore e deduce perciò di aver diritto alla promozione.

4) Ma anche l'astronauta B ritiene di aver vinto, in base alla sua misura del tempo t'_α impiegato da A. Utilizzando ancora una volta le trasformazioni di Lorentz o le relazioni tra intervalli di tempo misurati in sistemi di riferimento diversi, verifica la giustezza delle conclusioni tratte da B.

Ragionando come nel punto 3) e considerando che la velocità relativa dell'astronave B rispetto ad A ha lo stesso modulo della velocità relativa di A rispetto a B, si può concludere che il fattore γ è lo stesso e quindi B ritiene che A abbia impiegato un tempo $t'_\alpha = 3,473 \cdot 10^4 s$ che è superiore a quello misurato dal proprio orologio.

Il comandante della missione, consultato un testo di relatività, si scusa con i due astronauti e li premia entrambi: ha capito infatti che si è verificata una inversione temporale tra due eventi visti da osservatori diversi, da lui non prevista.

Spiega se questa inversione temporale è possibile, in quali condizioni si può verificare e se, nel caso in esame, è questa la ragione del contenzioso tra i due astronauti.

Gli osservatori in questione sono: astronave A (A), astronave (B) e il comandante (C). I tempi calcolati dal comandante si ottengono moltiplicando il tempo proprio di ciascuna astronave per il rispettivo fattore γ , perciò il tempo misurato dal comandante per l'astronave A è $\Delta t_{CA} = 1,091 \cdot 3,299 \cdot 10^4 = 3,599 \cdot 10^4 s$, mentre quello per

L'astronave B è $\Delta t_{CB} = 1,2919 \cdot 3,299 \cdot 10^4 = 4,262 \cdot 10^4 s$.

La tabella seguente li riassume

	Tempo misurato da A	Tempo misurato da B	Tempo misurato da C
Astronave A	$3,299 \cdot 10^4 s$	$3,473 \cdot 10^4 s$	$3,599 \cdot 10^4 s$
Astronave B	$3,473 \cdot 10^4 s$	$3,299 \cdot 10^4 s$	$4,262 \cdot 10^4 s$

L'inversione temporale si può verificare se un corpo supera la velocità della luce cosa che in questo contesto non si verifica.

QUESTIONARIO

1) In un solenoide cilindrico ideale nel vuoto, costituito da 400 spire e lungo 10,0 cm viene fatta passare una corrente alternata $i(t) = 0,50 \sin(63t) A$. Sull'asse del solenoide è posta una spira circolare, coassiale con il solenoide, in modo che si possa considerare che tutto il campo magnetico uscente dal solenoide attraversi la sezione della spira. La spira ha un raggio di 5,0 cm e una resistenza ohmica di $0,20 \Omega$. Determina il valore massimo della forza elettromotrice indotta nella spira e la corrente indotta che la percorre.

Svolgimento

Il campo magnetico del solenoide ha un modulo B dipendente dal tempo dato da: $B(t) = \mu_0 n i(t)$ e il flusso concatenato con la spira sarà: $\varphi(t) = N \cdot B(t) \cdot A = N \cdot A \cdot \mu_0 n i(t)$, dove N è il numero di spire del solenoide e A è l'area della spira con cui si concatena il campo B(t). La forza elettromotrice indotta è data in modulo da: $\varepsilon(t) = \frac{d\varphi}{dt} = N \cdot A \cdot$

$\mu_0 n \cdot \frac{di}{dt} = \mu_0 \cdot \frac{N^2 \cdot A}{l} \cdot \frac{di}{dt}$, dove l è la lunghezza del solenoide, sostituendo i valori si ha:

$$\varepsilon(t) = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{400^2 \cdot (\pi \cdot 25 \cdot 10^{-4})}{0,1} \cdot 0,50 \cdot 63 \cos(63t) = 0,0199 \cos(63t) \text{ da cui}$$

si vede subito che il massimo valore della forza elettromotrice è $\varepsilon_{max} = 0,0198 V$ e la corrente massima è $I_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{R} = 0,0995 A$, mentre la legge della corrente indotta è

$$I_i(t) = I_{max} \cdot \cos(63t) = 0,0995 \cdot \cos(63t).$$

2) Una lampadina ad incandescenza, alimentata con tensione alternata pari a 220 V, assorbe una potenza elettrica media pari a $1,0 \cdot 10^2 W$ ed emette luce grazie al surriscaldamento di un filamento di tungsteno, con

$$\frac{\text{Potenza luminosa}}{\text{Potenza elettrica}} = 2\%$$

Ipotizzando per semplicità che la lampadina sia una sorgente puntiforme che emette

uniformemente in tutte le direzioni, e che la presenza dell'aria abbia un effetto trascurabile, calcolare ad una distanza = 2,0 dalla lampadina:

- l'intensità media della luce;
- i valori efficaci del campo elettrico e del campo magnetico.

Svolgimento

I passi da seguire possono essere i seguenti: calcolare la potenza luminosa e l'irradiazione e da questo l'intensità massima del campo elettrico e del campo magnetico e poi i valori efficaci.

La potenza luminosa è data da $P_L = \frac{2}{100} \cdot P = 2W$, quindi l'irradiazione

$$E_R = \frac{P_L}{Area} = \frac{2}{\pi \cdot 2^2} = 0,159W/m^2$$

Ed essendo $E_R = \frac{1}{2} \cdot c \epsilon_0 E_0^2$ segue $E_0 = \sqrt{\frac{2E_R}{c \epsilon_0}} = 10,95V/m$, poiché risulta $\frac{E_0}{B_0} = c$ si ha $B_0 =$

$\frac{E_0}{c} = 3,6 \cdot 10^{-8}T$. I valori efficaci si ottengono dividendo per $\sqrt{2}$ i valori massimi e si ottiene così $E_{eff} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} = 0,112V/m$

$$B_{eff} = \frac{B_0}{\sqrt{2}} = 2,55 \cdot 10^{-8}T$$

3) In un tubo a raggi catodici gli elettroni prodotti dal catodo vengono accelerati da una differenza di potenziale di $1,00 \cdot 10^5V$. Sapendo che la distanza tra catodo e anodo è di 20,0cm, determina la velocità degli elettroni (in metri al secondo) in prossimità dell'anodo tenendo conto degli effetti relativistici.

Svolgimento

Il teorema dell'energia cinetica dice che Lavoro=variazione di energia cinetica

Quindi, in questo caso $e \cdot V = E_{cf} - E_{ci} = E_{cf}$ (perché l'elettrone parte da fermo). Ricordando che l'energia cinetica relativistica è data da $E_{cf} = m_0 \cdot c^2 \cdot (\gamma - 1)$ da cui $\gamma = 1 +$

$$\frac{E_{cf}}{m_0 \cdot c^2} = 1 + \frac{e \cdot V}{m_0 \cdot c^2} = 1,195$$

Noto il fattore γ si potrà calcolare la velocità dell'elettrone

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 1,64 \cdot 10^8 m/s.$$

4) Tre cariche puntiformi di valore q sono poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato 1m; dopo aver determinato l'energia potenziale del sistema, stabilisci come essa varia se una delle cariche cambia segno e fornisci la tua interpretazione qualitativa del risultato, con riferimento al cambiamento determinatosi rispetto alla situazione iniziale.

Svolgimento

L'energia potenziale si calcola considerando le coppie di cariche che corrispondono ai tre

lati del triangolo equilatero. L'espressione che dà l'energia potenziale di un sistema discreto di cariche è data da

$$U = \sum_{i,j=1}^n k \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \text{ con } i \neq j \text{ e } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Nel caso in questione diventa: $U = \sum_{i,j=1}^3 k \frac{q^2}{1} = 3kq^2$, essa indica il lavoro che compie il campo elettrico quando le cariche si allontanano l'una dall'altra fino a portarsi a distanza infinita (il sistema si disgrega), poiché l'energia calcolata è positiva, si può dire che il campo elettrico favorisce la disgregazione del sistema. Se una carica cambia segno allora l'energia diventa $U' = kq^2 - kq^2 - kq^2 = -kq^2$, che, essendo negativa indica che il campo elettrico non favorisce la disgregazione del sistema.

5) Dimostra che a un elettrone non relativistico, accelerato da fermo mediante una differenza di potenziale ΔV misurata in volt, si può associare un'onda di de Broglie la cui lunghezza d'onda può essere espressa dalla formula:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1,504}{\Delta V}} \text{ nm}$$

La lunghezza d'onda di De Broglie associata ad una particella di massa m e velocità v è data da $\lambda = \frac{h}{mv}$, dove h è la costante di Planck. Il teorema dell'energia cinetica dice che Lavoro = variazione di energia cinetica e in questo caso $e \cdot \Delta V = E_{cf} - E_{ci} = E_{cf}$, dalla formula dell'energia cinetica $E = \frac{1}{2}mv^2$ si può ricavare la velocità $v = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{m}}$ e quindi la quantità di moto sarà

$$mv = m \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E}{m}} = \sqrt{2 \cdot E \cdot m} = \sqrt{2 \cdot E_{cf} \cdot m} = \sqrt{2 \cdot e \cdot \Delta V \cdot m}$$

$$\begin{aligned} \text{Perciò } \lambda &= \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot e \cdot \Delta V \cdot m}} = \sqrt{\frac{(6,63 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot \Delta V \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}}} = \sqrt{\frac{1,506 \cdot 10^{-18}}{\Delta V}} = \\ &= \sqrt{\frac{1,506}{\Delta V}} \cdot 10^{-9} m = \sqrt{\frac{1,506}{\Delta V}} \text{ nm} \end{aligned}$$

6) Si osserva che illuminando un catodo di argento con luce ultravioletta di lunghezza d'onda $\lambda = 100 \text{ nm}$ occorre applicare un potenziale ritardante di 7,7 V per arrestare completamente i fotoelettroni. Qual è il lavoro di estrazione dell'argento?

Svolgimento

Nell'effetto fotoelettrico vale l'equazione

$$hf = \text{lavoro di estrazione} + \text{energia cinetica dell'elettrone estratto}$$

quindi

lavoro di estrazione = hf – energia cinetica dell'elettrone estratto.

Detto V_r il potenziale ritardante si ha, per definizione, che $e \cdot V_r$ = energia cinetica dell'elettrone estratto.

$$\text{Perciò: lavoro di estrazione} = hf - eV_r = 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot \frac{c}{\lambda} - 1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 7,7 = \\ = 1,989 \cdot 10^{-18} - 1,234 \cdot 10^{-18} = 7,55 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 4,71 \text{ eV}$$

7) Un carro merci di 3000 Kg viene fermato da un respingente formato da sistema combinato di molle; la prima, che ha una costante elastica $K_1 = 1500 \text{ N/m}$, agisce non appena il carro merci viene in contatto con il respingente; la seconda, che ha una costante elastica $K_2 = 3500 \text{ N/m}$, inizia ad agire quando il respingente è compresso di 20 cm. Si osserva che il carro merci si ferma quando il respingente è compresso di 50 cm. Determina la velocità iniziale del carro merci.

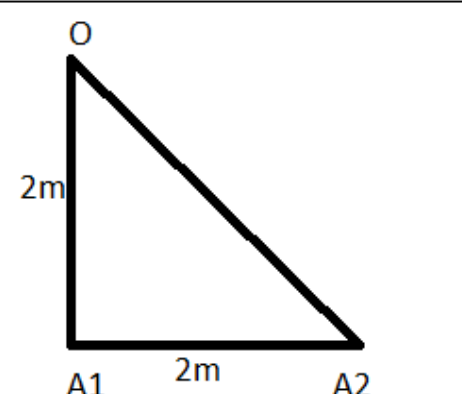
Svolgimento

Il principio di conservazione dell'energia ci dice che $\Delta U + \Delta K = L_a$, poiché non vi sono attriti si può anche scrivere $\Delta U + \Delta K = 0$. Fissando come stato iniziale quello in cui il carro merci inizia a toccare la prima molla e come stato finale quello in cui entrambe le molle sono compresse e il carro è fermo si ha: energia potenziale iniziale $U_i = 0$, energia cinetica finale $K_f = 0$, segue perciò $\Delta U = U_f$ e $\Delta K = -K_i$ dove U_f e K_i indicano l'energia potenziale finale e l'energia cinetica iniziale rispettivamente. Il bilancio dell'energia si può perciò scrivere così: $U_f - K_i = 0$ da cui $K_i = U_f$ e perciò, detta v_i la velocità iniziale del carro si ha:

$$v_i = \sqrt{\frac{2U_f}{m}}, \text{ poiché } U_f = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 x_2^2 = 30 \text{ J} + 437,5 \text{ J} = 467,5 \text{ J} \text{ si ha } v_i = 0,558 \text{ m/s}$$

8) Ti trovi di fronte a due altoparlanti uguali A_1 e A_2 , distanti 2 metri uno dall'altro, che emettono un suono monocromatico; osservi che quando sei equidistante da entrambi gli altoparlanti l'intensità sonora che percepisci ha un minimo e che quando, partendo dalla posizione di uno dei due altoparlanti (ad esempio A_1) ti muovi lungo la retta perpendicolare alla congiungente i due altoparlanti, l'intensità sonora che percepisci è massima quando sei a distanza di 2 metri da A_1 . Determina la lunghezza d'onda del suono emesso dagli altoparlanti.

Nel fenomeno di interferenza si ha un massimo quando la differenza dei cammini è un multiplo pari di mezza lunghezza d'onda.

	Nel fenomeno di interferenza si ha un massimo quando la differenza dei cammini è un multiplo pari di mezza lunghezza d'onda. Nel caso in esame deve essere $OA2 - OA1 = 2k \cdot \frac{\lambda}{2} = k \cdot \lambda$ con k intero Poiché $OA2 = 2\sqrt{2}$ si ha: $2\sqrt{2} - 2 = k \cdot \lambda$ e quindi $\lambda = \frac{2\sqrt{2} - 2}{k} \text{ m}$ e ammettendo che sia il primo massimo si ha $\lambda = 2\sqrt{2} - 2 \text{ m} = 0,828 \text{ m}$
---	---

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8).

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Tema di Matematica e Fisica

Prerequisiti

Matematica: calcolo della derivata, calcolo integrale, definizione di equazione differenziale.

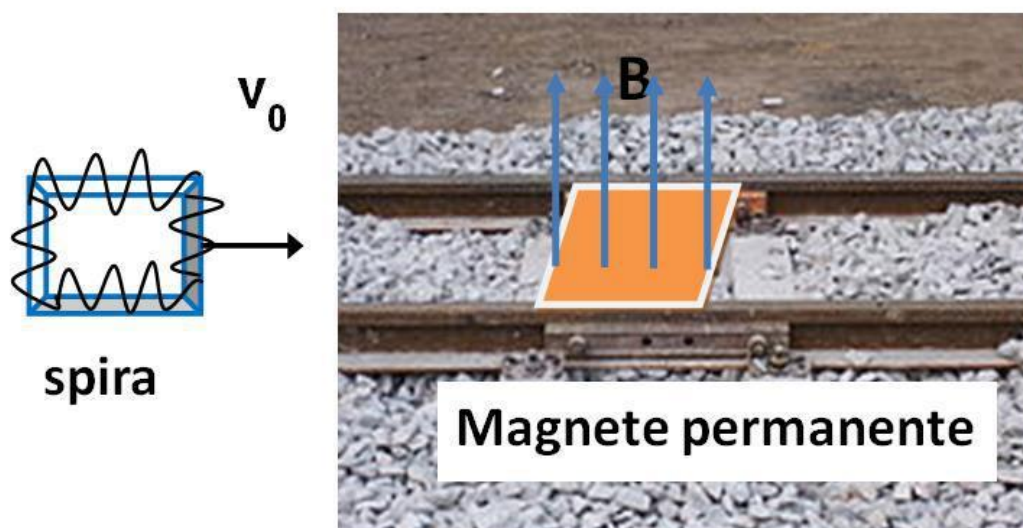
Fisica: definizione di velocità e accelerazione e loro relazione con l'equazione oraria, condizioni iniziali. Lettura di un grafico, rappresentazione grafica di una forza, teorema di conservazione dell'energia, diagramma orario e della velocità. Teorema dell'energia cinetica, moto armonico Legge dell'induzione elettromagnetica, spira in un campo magnetico, energia potenziale elettrica di un sistema di particelle,

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

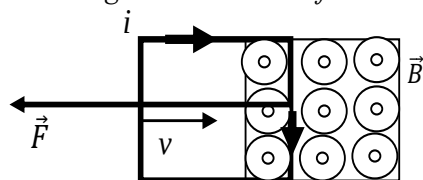
PROBLEMA 1

Hai giocato con il tuo fratellino con un trenino elettrico da lui ricevuto in regalo per il compleanno. Osservandolo, più volte ti sei chiesto quale sia il principio di funzionamento delle varie parti. In particolare hai osservato che quando un vagone viene immesso in un binario morto, nei pressi del respingente finale il vagone subisce un forte rallentamento fino quasi a fermarsi; questo consente al vagone di raggiungere il respingente finale con velocità molto bassa e quindi di colpirlo senza conseguenze. Per capire il funzionamento di questo freno, hai analizzato in dettaglio il binario morto e un vagone; hai notato che sulla parte finale del binario morto è presente un piccolo magnete permanente di forma

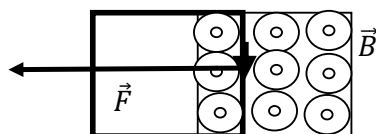
quadrata di lato = 5,0 fissato tra le due rotaie del binario. Inoltre sul fondo del vagone è presente una cornice quadrata di dimensione uguale al magnete su cui è avvolto un filo a formare una spira quadrata di resistenza elettrica = $0,020\Omega$. Analizzando il moto del vagone hai compreso che quando il vagone passa sopra il magnete, anche la spira passa sopra il magnete (come mostrato in figura) e che in questo passaggio il vagone rallenta.



1)
Spiega qualitativamente l'origine della azione frenante dovuta al passaggio della spira sopra al magnete.



Quando la spira entra nel campo magnetico B , prodotto dal magnete permanente e rivolto verso l'alto (quindi uscente dalla pagina), il flusso concatenato con la spira in moto varia e quindi all'interno di questa circolerà una corrente dovuta al fenomeno dell'induzione elettromagnetica (e.i.). Il verso della corrente (corrente indotta) deve essere tale da generare un campo magnetico che si opponga alla causa che l'ha generata e quindi il verso sarà tale da generare un campo indotto perpendicolare al piano della spira e orientato verso l'interno, pertanto il verso della corrente indotta i sarà orario. Il tratto verticale della spira sarà quindi sede di una corrente che fluirà verso il basso e per la legge di Faraday essa sarà soggetta ad una forza data da $\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$ che, per la regola della mano destra, sarà orientata come in figura e perciò, essendo opposta alla velocità, tenderà a rallentare la spira



2) Assumendo che il magnete permanente generi sopra di sé un campo magnetico $= 0,85T$ uniforme, perpendicolare al magnete stesso (e quindi anche alla spira) e trascurando tutti gli effetti di bordo, dimostra che l'equazione del moto della spira durante il passaggio sul magnete è:

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{R} v$$

dove $=50g$ è la massa del vagone.

Per ricavare l'equazione della velocità occorre calcolare l'espressione del modulo della forza $\vec{F}$. Poiché è $\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$ ed essendo la forza perpendicolare al campo risulta che il modulo è

$$F = ilB,$$

dove i è la corrente indotta e poiché, per la legge dell'i.e, risulta

$$i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\varphi_B}{dt}.$$

Poiché la spira si muove con velocità v allora nell'intervallo dt percorrerà uno spazio dato da vdt e quindi l'area che si concatena col campo B è $l \cdot vdt$. Pertanto il flusso è dato da

$$d\varphi_B = Blvdt$$

e perciò

$$\frac{d\varphi_B}{dt} = \frac{Blvdt}{dt} = Blv$$

$$\text{da cui} \quad i = -\frac{Blv}{R}$$

e quindi l'espressione della forza è:

$$F = ilB = -\frac{Blv}{R} \cdot lB = -\frac{B^2 l^2}{R} v.$$

Essendo, per la seconda legge della dinamica, anche

$$F=ma=m\frac{dv}{dt}$$

risulta:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{R} v \quad (1)$$

3) Verifica che l'equazione del moto ha come soluzione $v = v_0 e^{-t/\tau}$ dove v_0 è la velocità del vagone (e quindi della spira) quando entra nel campo del magnete permanente, esprimendo la costante in termini delle altre grandezze presenti nell'equazione del moto e calcolandone il valore numerico.

Risulta:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

quindi, moltiplicando per m, si ottiene il primo membro dell'uguaglianza (1):

$$m\frac{dv}{dt} = -m\frac{v_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

e posto $\tau = \frac{Rm}{B^2 l^2}$, si ha: $\frac{B^2 l^2}{R} = \frac{m}{\tau}$

e perciò il secondo membro della (1) assume la seguente espressione:

$$-\frac{m}{\tau} v = -\frac{m}{\tau} v_0 e^{-t/\tau}$$

che è perciò uguale al primo membro.

Il valore numerico di τ è dato da:

$$\tau = \frac{Rm}{B^2 l^2} = \frac{0,020 \cdot 0,050}{0,85^2 0,05^2} = 0,55s$$

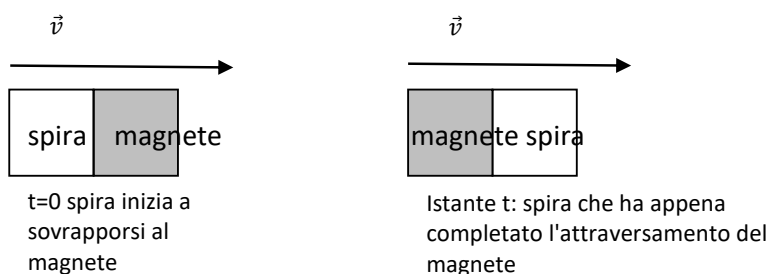
4) Assumendo per la velocità iniziale il valore $v_0 = 0,20 \text{ m/s}$, determina il tempo che la spira impiega ad attraversare completamente il magnete e la velocità che essa ha dopo aver attraversato il magnete.

Sapendo che $v = v_0 e^{-t/\tau}$ e che $ds = v dt$ si ha:

$$s(t) = \int_0^t (v_0 e^{-t/\tau}) dt = -v_0 \cdot \tau \cdot e^{-t/\tau} + v_0 \cdot \tau = v_0 \cdot \tau (1 - e^{-t/\tau})$$

Ora osservo che la spira attraversa il magnete quando anche il secondo lato della spira ha

superato il magnete stesso:



quindi lo spazio percorso dalla spira è $s = 2 \cdot 0,05 \text{ m} = 0,1 \text{ m}$
dall'equazione di $s(t)$ si ha:

$$t = \tau \cdot \ln\left(\frac{v_0 \tau}{v_0 \tau - s}\right) = 0,55 \cdot \ln\left(\frac{0,20 \cdot 0,55}{0,20 \cdot 0,55 - 0,1}\right) = 1,32 \text{ s}$$

e la velocità che ha dopo aver attraversato il magnete sarà:

$$v = 0,2 \cdot 0,55 \left(1 - e^{-\frac{1,32}{0,55}}\right) = 0,1 \text{ m/s}$$

5) Dimostra che se la velocità iniziale v_0 è inferiore ad un valore limite, la spira non riesce a superare il magnete permanente: in queste condizioni il freno agisce come un blocco insormontabile per il vagone. Determina il valore numerico della velocità limite. Dall'equazione $s(t) = v_0 \cdot \tau \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ si nota che $s(t)$ è funzione crescente di t e passando al limite per $t \rightarrow +\infty$ si ha che $s = v_0 \cdot \tau$ e quindi questo è il massimo spazio che la spira potrà percorrere prima di arrestarsi.

Imponendo che $v_0 \cdot \tau < 2L$ si ha $v_0 < \frac{2L}{\tau}$ e quindi la quantità $\frac{2L}{\tau}$ è il valore che separa due stati: quello in cui la spira non riesce a superare il magnete (se $v_0 < \frac{2L}{\tau}$) e quello in cui la spira supera il magnete (se $v_0 > \frac{2L}{\tau}$). Il valore limite è quindi:

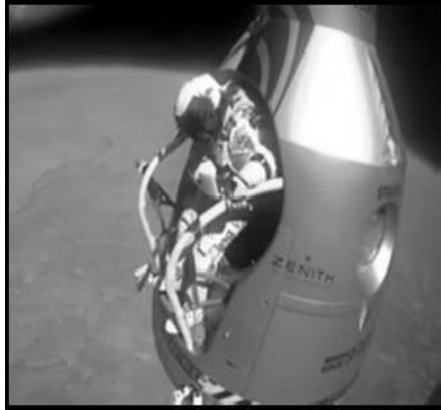
$$v_0 = \frac{2L}{\tau} = \frac{0,1}{0,55} = 0,18 \text{ m/s}.$$

PROBLEMA 2

Il 14 ottobre 2012 Felix Baumgartner ha realizzato un lancio storico ottenendo tre record mondiali:

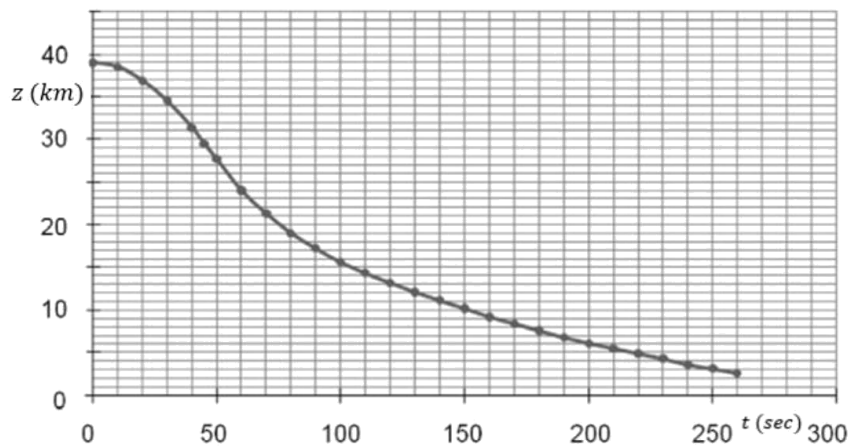
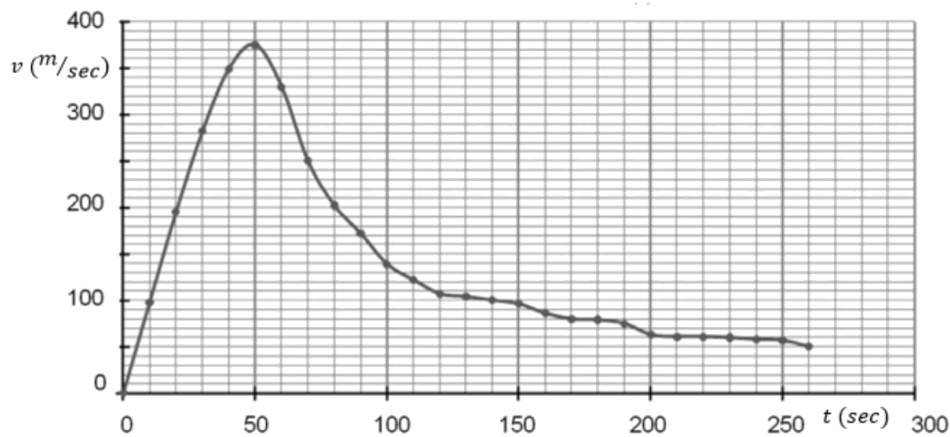
- la maggiore altezza raggiunta da un uomo in una ascesa con un pallone (39045 m);

- il lancio più alto in caduta libera;
- la più alta velocità in caduta libera (1341,9 km/h).



Dopo l'ascesa in un pallone gonfiato a elio, si è lanciato verso la Terra, protetto da una tuta speciale, e ha aperto il suo paracadute dopo 4 minuti e 20 secondi di caduta libera. Il lancio è durato in totale 9 minuti e 3 secondi.

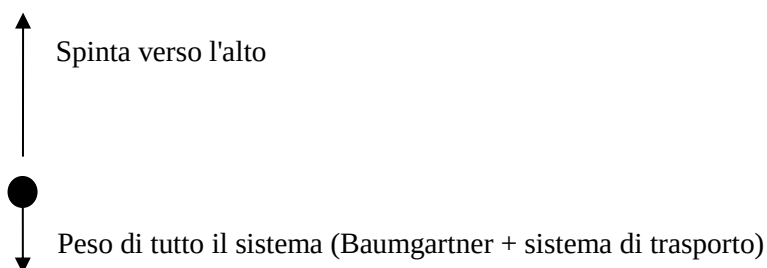
Nelle figure seguenti sono riportati gli andamenti della velocità e della quota di Baumgartner durante il lancio, a partire dall'istante del lancio = 0.



Per realizzare l'ascesa è stato necessario utilizzare un enorme pallone deformabile: ciò per fare in modo che all'aumentare della quota e al diminuire della densità dell'aria il volume del pallone possa aumentare, mantenendo così costante la spinta verso l'alto (spinta di Archimede). Su un giornale veniva riportato *“Per assicurare una velocità d'ascesa sufficiente la spinta verso l'alto era circa doppia di quella necessaria per tenere in equilibrio il sistema. In pratica, aggiungendo alla massa di Baumgartner quella del pallone riempito ad elio, era necessario sollevare una massa di circa 3 tonnellate”*. La massa di Baumgartner e della sua tuta è pari a circa 120 kg.

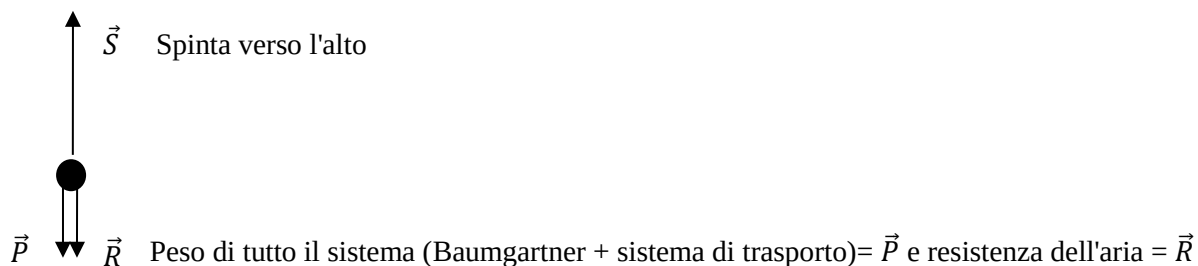
Fase di ascesa

1. Disegna il diagramma delle forze subito dopo il decollo, trascurando la forza di attrito. Non è necessario che il disegno sia in scala, deve però essere coerente con la situazione fisica.



2. Dopo qualche minuto di ascensione il moto può essere considerato rettilineo uniforme. In questa situazione, calcola approssimativamente il valore della forza di attrito con l'aria.

Quando il moto di ascensione diventa rettilineo ed uniforme il diagramma delle forze è:



Quindi in queste condizioni si ha:

$$\vec{S} + \vec{P} + \vec{R} = 0$$

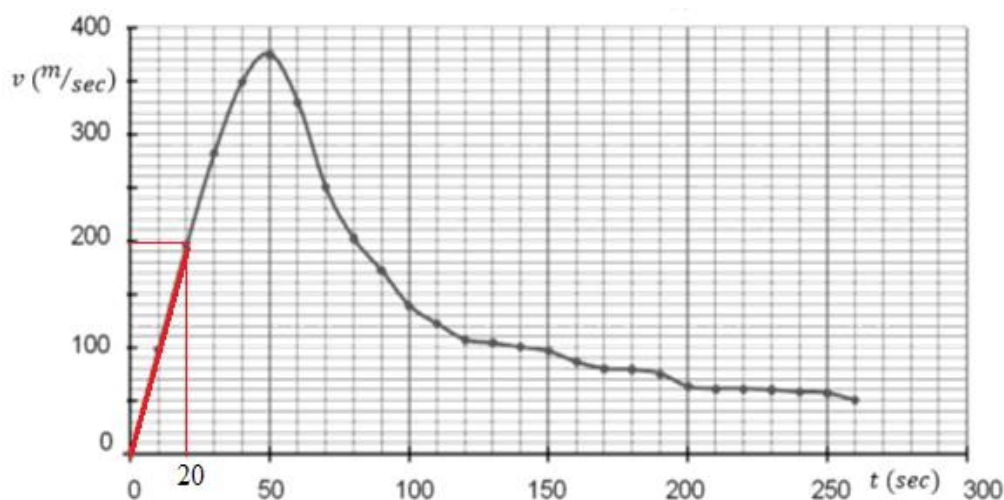
stante l'unidimensionalità del moto si ottiene l'uguaglianza scalare: $S - P - R = 0$ e perciò: $R = S - P$ ed essendo $S = 2P$ per ipotesi, si ha: $R = P = 3000 \cdot 9,8 = 29400 \text{ N}$

Fase di lancio

Scegli un sistema di riferimento e studia la caduta verticale del sistema S costituito da Baumgartner e dalla tuta. In questa fase, si può ritenere trascurabile l'effetto della spinta

di Archimede.

3) Utilizzando i grafici, determina l'accelerazione di S per $t < 20s$ e commenta il risultato ottenuto.



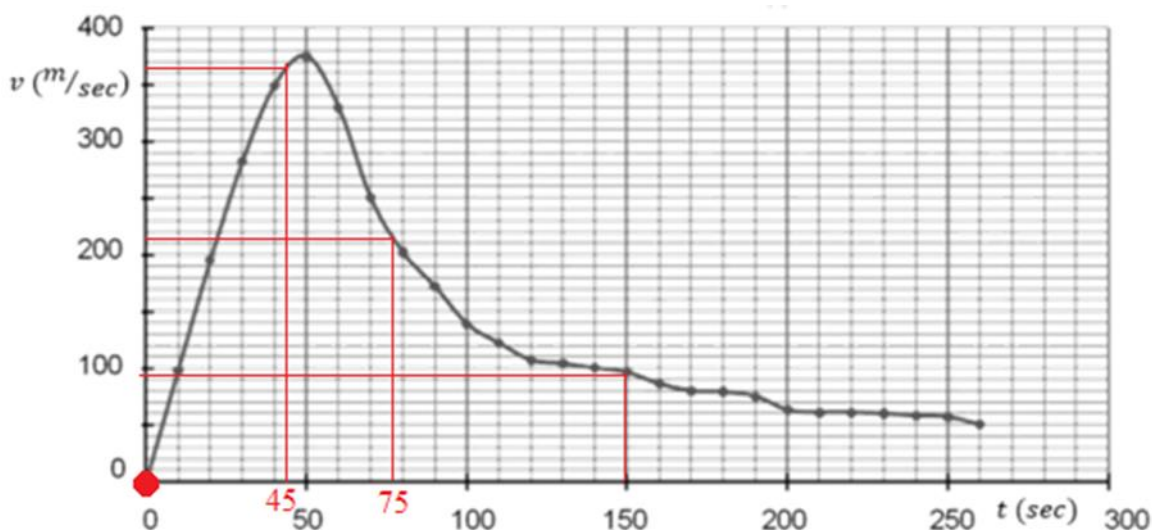
Considerando il grafico della velocità di caduta si osserva che nei primi 20s l'aumento della velocità è pressoché lineare e quindi il moto in questo intervallo si può ritenere uniformemente accelerato con un'accelerazione data da: $\bar{a}([0,20]) = \frac{v(20)-v(0)}{20-0} = \frac{200-0}{20} = 10m/s^2$

4) Il sistema S ha raggiunto velocità supersoniche durante la caduta? Tieni presente la seguente tabella, che riporta la velocità del suono in aria ad altezze diverse:

Altezza (km)	10	20	30	40
Velocità del suono (m/s)	305	297	301	318

Per dare una risposta aggiungo alla tabella altre due righe la prima che dà l'istante in cui il paracadutista raggiunge l'altezza (ricavabile dal secondo grafico assegnato) e l'altra riga che dà la velocità che egli possiede a quella altezza:

Altezza (km)	10	20	30	40
Velocità del suono (m/s)	305	297	301	318
Istante corrispondente all'altezza	150	75	45	0
Velocità a quell'altezza	100	220	360	0



Da questo grafico ricavo le velocità corrispondenti agli istanti trovati nel grafico precedente

Dalla tabella si vede che la velocità del suono viene superata all'altezza di 30Km. (non è comunque l'unico punto in cui viene superata tale velocità, infatti dall'ultimo grafico si vede che essa viene superata anche nell'istante $t=55s$ circa)

5) Calcola la variazione di energia meccanica ΔE_m tra il momento in cui Baumgartner salta e il momento in cui raggiunge la massima velocità; fornisci la tua interpretazione del risultato.

Nell'istante in cui Baumgartner salta, l'altezza della sonda è pressoché costante, questo vuol dire che il sistema sta ruotando attorno alla terra con una velocità centripeta data dalla legge di gravitazione di Newton e quindi c'è energia cinetica oltre all'energia potenziale gravitazionale dovuta, quest'ultima, all'altezza a cui si trova la sonda. Quando il paracadutista raggiunge la massima velocità, esso è dotato ancora di energia cinetica e di energia potenziale. Passando al calcolo si ha che l'energia iniziale E_i è la somma di quella cinetica E_{ci} e quella potenziale U_{gi} iniziali:

$E_i = E_{ci} + U_{gi}$ con $E_{ci} = \frac{1}{2}mv^2$ con m massa di Baumgarten + massa della sua tuta e v data

dalla legge: $G \frac{M_T m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$ da cui: $v^2 = G \frac{M_T}{r} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}}{4 \cdot 10^4}$

(è stata considerata l'altezza massima pari a 40Km)

$$v^2 = 10^9 m^2/s^2$$

e quindi $E_{ci} = \frac{1}{2}mv^2 = E_{ci} = \frac{1}{2} 120 \cdot 10^9 \text{ Joule} = 6 \cdot 10^{10} \text{ Joule}$

Mentre l'energia potenziale è data da

$$U_{gi} = -G \frac{M_T m}{r} = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 120}{4 \cdot 10^4} = -1200,6 \cdot 10^9 = -1,2 \cdot 10^{12} \text{ Joule}$$

e quindi l'energia iniziale è

$$E_i = 6 \cdot 10^{10} - 1,2 \cdot 10^{12} = -1,14 \cdot 10^{12} \text{ Joule.}$$

L'energia finale (alla massima altezza) è data da energia cinetica più energia potenziale:

$$E_f = E_{cf} + U_{gf}$$

e dato che

$$E_{cf} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}120 \cdot 380^2 = 8,66 \cdot 10^6 \text{ Joule}$$

(la velocità massima è stata considerata di 380 m/s sfruttando il grafico), mentre

$$U_{gf} = -G \frac{M_T m}{r} = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 120}{2,8 \cdot 10^4} = -1715 \cdot 10^9 \\ = -1,72 \cdot 10^{12} \text{ Joule}$$

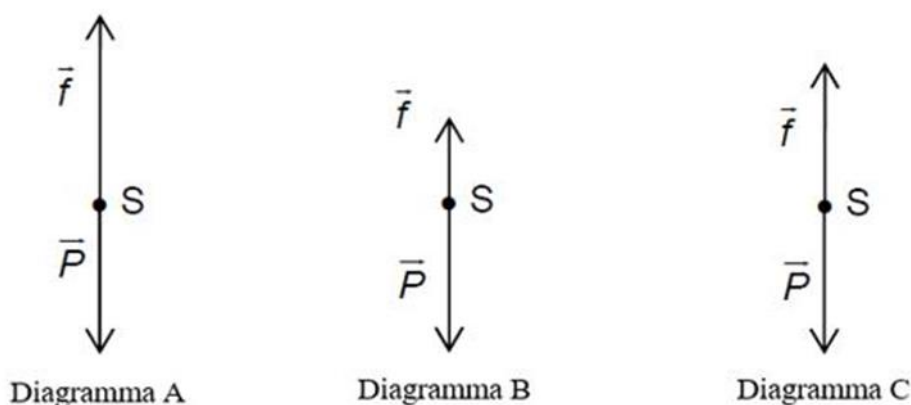
Perciò l'energia finale è data da:

$$E_f = 8,44 \cdot 10^6 - 1,72 \cdot 10^{12} = -1,719 \cdot 10^{12} \text{ Joule}$$

Quindi

$$\Delta E_m = E_f - E_i = -1,719 \cdot 10^{12} - (-1,14 \cdot 10^{12}) = -0,579 \cdot 10^{12} \text{ Joule}$$

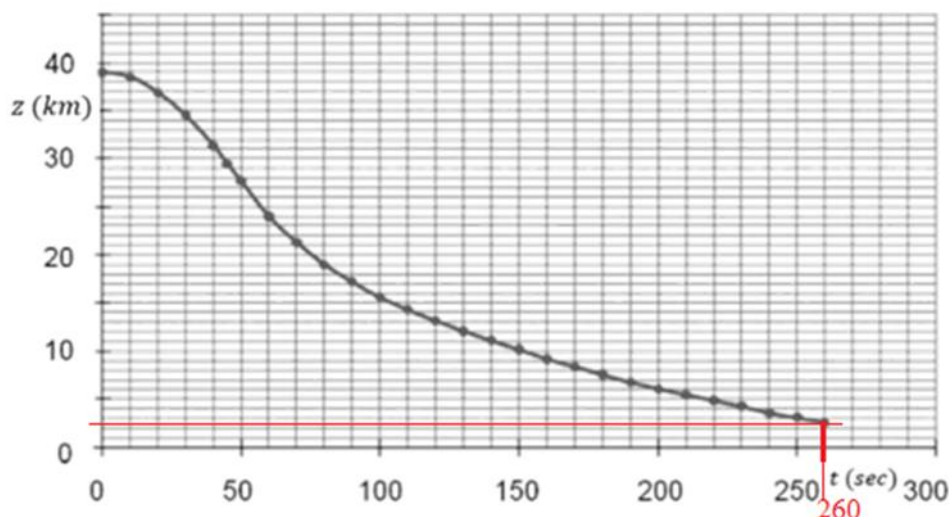
6) Nella figura seguente vengono riportati i diagrammi delle forze applicate al sistema S durante la fase di lancio $\vec{P}$ rappresenta la forza peso, $\vec{f}$ la forza di attrito con l'aria. Poni in corrispondenza i diagrammi con i tre istanti: $t_1 = 40$, $t_2 = 50$, $t_3 = 60$.



Considerando che nei primi istanti del lancio la forza di attrito è molto più piccola della forza peso si può concludere che a $t_1=40s$ corrisponde il diagramma B; poichè la resistenza del mezzo dipende dalla velocità e aumenta all'aumentare di essa allora il diagramma C corrisponde a $t_2=50s$ (massima velocità e forza di attrito uguale alla forza peso) e infine il diagramma A potrebbe corrispondere a $t_3=60s$.

3. Determina a quale altitudine Baumgartner ha aperto il paracadute. Ricordando che il lancio è durato in totale 9 minuti e 3 secondi, calcola la velocità media di discesa dopo l'apertura del paracadute, fino all'arrivo al suolo. Ti appare ragionevole considerare il moto in quest'ultima fase come un moto rettilineo uniforme?

Nell'introduzione al problema si legge che il paracadutista ha aperto il paracadute dopo 4 minuti e 20 secondi e cioè nell'istante $t=260s$ e dal grafico dell'altezza si ricava che l'altezza di apertura del paracadute corrisponde a circa 2,5Km.



La velocità media di discesa richiesta si può calcolare dividendo lo spazio per il tempo, dove per spazio occorre considerare 2,5Km (altezza all'apertura del paracadute) e il tempo invece è quello durante il quale il moto avviene con paracadute aperto e cioè 9 minuti e tre secondi - 260 secondi

cioè $\Delta t = 543 - 260 = 283s$. Quindi il moto di discesa col paracadute dura 283s, perciò la velocità media è data da: $v = \frac{\text{spazio}}{\text{tempo}} = \frac{2500}{283} = 8,83m/s$

4. Per valutare il rischio di traumi derivanti dall'impatto dell'arrivo al suolo, fornisci una stima dell'altezza da cui Baumgartner sarebbe dovuto saltare, senza paracadute, per giungere al suolo con la stessa velocità.

Il moto senza paracadute è del tipo naturalmente accelerato e l'altezza a cui corrisponde una determinata velocità v con la quale si tocca il suolo è data da: $h = \frac{v^2}{2g}$ e in questo caso

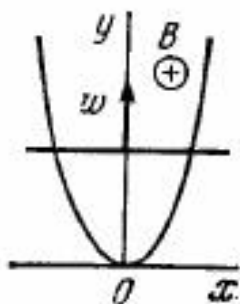
$$\text{si ha: } h = \frac{8,83^2}{2 \cdot 9,8} = 3,98m$$

QUESTIONARIO

Quesito n1

Una spira a forma di parabola di equazione $y = ax^2$ è immersa in un campo magnetico uniforme B perpendicolare al piano xy della parabola. All'istante $t=0$ una barretta inizia a traslare lungo la parabola partendo dal suo vertice con accelerazione costante come indicato in figura. Determinare la forza elettromotrice indotta sulla spira in funzione della y .

Svolgimento



La forza elettromotrice indotta è data da $\varepsilon_i = -\frac{d\varphi(B)}{dt}$, il flusso infinitesimo $d\varphi(B) = B \cdot dA$ dove dA è la variazione di area del segmento parabolico quando la sbarretta si muove secondo l'accelerazione indicata in figura. Adesso calcolo l'area del segmento parabolico. Detta y l'altezza del segmento parabolico (la distanza dalla sbarretta dall'origine) si ha che i punti di intersezione con la parabola hanno ascissa: $\mp \sqrt{\frac{y}{a}}$ e quindi l'area è data da

$$\int_{-\sqrt{\frac{y}{a}}}^{\sqrt{\frac{y}{a}}} (y - ax^2) dx = \frac{4}{3} y \sqrt{\frac{y}{a}} \text{ ed essendo il moto}$$

uniformemente accelerato, l'equazione oraria sarà $y = \frac{1}{2} a' t^2$ con a' accelerazione della sbarretta. Quindi, sostituendo nell'espressione dell'area, si ha

$$A = A(t) = \frac{2}{3} a' \sqrt{\frac{a'}{2a}} t^3 \text{ e perciò } dA = 2a' \sqrt{\frac{a'}{2a}} t^2 dt \text{ e perciò } d\varphi(B) = B \cdot dA = 2Ba' \sqrt{\frac{a'}{2a}} t^2 dt \text{ e}$$

infine

$$\varepsilon_i = -\frac{d\varphi(B)}{dt} = \frac{2Ba' \sqrt{\frac{a'}{2a}} t^2 dt}{dt} = 2Ba' \sqrt{\frac{a'}{2a}} t^2.$$

Per avere ε_i in funzione di y basta osservare che $y = \frac{1}{2} a' t^2$ e quindi che $t^2 = \frac{2y}{a'}$ e perciò

$$\varepsilon_i(y) = 4By\sqrt{a'}$$

Quesito n 2

La posizione di una particella varia con il tempo secondo l'equazione: $x = \alpha t(1 - \beta t)$, dove α e β sono due costanti, con $\beta > 0$.

Determina:

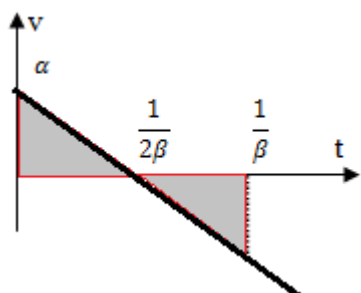
- la velocità e l'accelerazione della particella in funzione del tempo;
- l'intervallo di tempo necessario alla particella, che parte dall'origine, per ritornare nell'origine e lo spazio percorso in questo intervallo di tempo.

Svolgimento

a) La velocità e l'accelerazione si ottengono derivando la $x=x(t)$ e si ottiene così: $v(t) = x'(t) = -2\alpha\beta t + \alpha$ e $a(t) = x''(t) = -2\alpha\beta$

b) La particella si trova nell'origine quando $x(t)=0$ e quindi gli istanti in cui ciò accade si ottengono dall'equazione $\alpha t(1 - \beta t) = 0$ da cui si ottiene $t=0$ e $t=\frac{1}{\beta}>0$. Per calcolare lo spazio percorso si può osservare che l'equazione oraria definisce una parabola di

equazione $x = \alpha t - \alpha \beta t^2$ che interseca l'asse dei t tempi nei punti di ascissa $t_1=0$ e $t_2=\frac{1}{\beta}$, mentre l'equazione della velocità corrisponde ad una retta di equazione $v(t) = -2\alpha\beta t + \alpha$ che sottende un'area che è proprio lo spazio percorso.



I due triangoli in figura sono uguali e simmetrici rispetto al punto $(\frac{1}{2\beta}, 0)$ pertanto l'area della parte evidenziata in grigio è

$$2 \cdot \frac{1}{2\beta} \cdot \alpha = \frac{\alpha}{\beta}$$

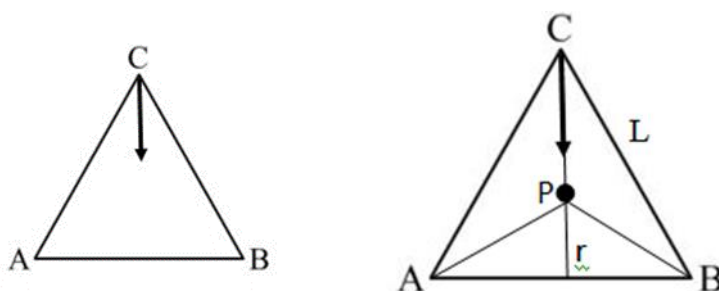
Perciò lo spazio S richiesto è proprio $S = \frac{\alpha}{\beta}$.

Quesito n 3

Tre cariche puntiformi di valore q sono poste ai vertici del triangolo equilatero ABC, i cui lati misurano 1m.

a) Determina l'energia potenziale del sistema.

b) La carica collocata in C viene spostata verso il segmento AB lungo la perpendicolare ad AB; traccia il grafico dell'andamento dell'energia potenziale del sistema in funzione della distanza della carica dal segmento AB.



Svolgimento

a) L'energia potenziale di un sistema di cariche è data da:

$$U_E = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

che in questo caso diventa: $U_E = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{l} = \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0 l}$

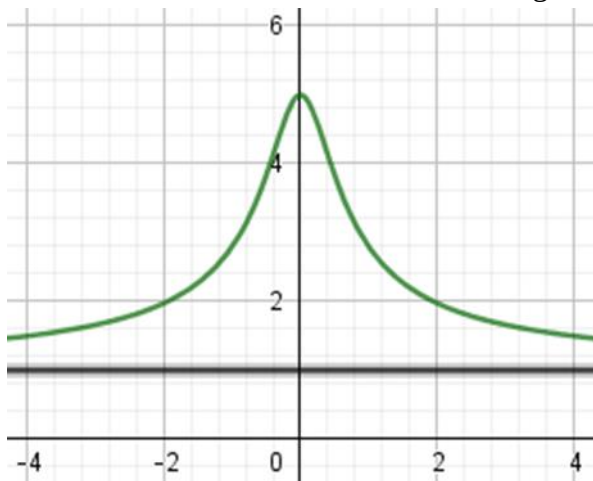
b) Per rispondere a questo punto del quesito si consideri la generica posizione P della carica lungo il segmento di perpendicolare e si osservi che la distanza della carica dalle

altre due è $PB=PA=\sqrt{r^2 + \frac{L^2}{4}}$ e perciò l'energia potenziale assume questa espressione:

$$U_E(r) = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{\sqrt{r^2 + \frac{L^2}{4}}} + \frac{1}{L} \right) \text{ si può osservare che la funzione è pari e che è definita in } \mathbb{R},$$

inoltre a $-\infty$ e $+\infty$ tende a $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L}$ la derivata prima è : $U'_E(r) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{-2r}{\left(r^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{3/2}}$ e si vede

che la funzione ha un massimo in $r=0$. Il grafico è:



Quesito n 4

Un punto materiale si muove nel piano xy secondo la legge oraria:

$$x = a \cdot \sin(\omega t), y = a \cdot (1 - \cos(\omega t))$$

con a e ω costanti positive. Determina la distanza del punto dall'origine al tempo $t = \tau$ e le direzioni dei vettori velocità e accelerazione all'istante $t = 0$.

Svolgimento

Detto P il punto materiale si ha che la distanza dall'origine O è data da:

$$PO = \sqrt{(a \cdot \sin(\omega t))^2 + (a \cdot (1 - \cos(\omega t)))^2} = \sqrt{2a^2 - 2a \cos(\omega t)} \quad \text{e per } t = \tau \text{ la}$$

distanza richiesta è: $d = \sqrt{2a^2 - 2a \cos(\omega \tau)}$. Il vettore velocità nell'istante $t=0$ è $\vec{v}(0) = x'(0)\hat{i} + y'(0)\hat{j}$ mentre il vettore accelerazione è: $\vec{a}(0) = x''(0)\hat{i} + y''(0)\hat{j}$, calcolando le derivate di $x(t)$ e $y(t)$ si ha:

$$x'(t) = a \cdot \omega \cos(\omega t) \text{ e } y'(t) = a \omega \sin(\omega t); x''(t) = -a \cdot \omega^2 \sin(\omega t) \text{ e}$$

$$y''(t) = a \omega^2 \cos(\omega t). \text{ Specificandole in } t=0 \text{ si ha:}$$

$$x'(0) = a \cdot \omega \text{ e } y'(0) = 0; x''(0) = 0 \text{ e } y''(0) = a \omega^2, \text{ quindi i due vettori sono:}$$

$\vec{v}(0) = a \cdot \omega \hat{i}$ e $\vec{a}(0) = a \omega^2 \hat{j}$ e le direzioni sono quella parallela all'asse x per il vettore velocità e parallela all'asse y per il vettore accelerazione.

Quesito n 5

Un elettrone si muove, partendo da fermo, in un campo elettrico uniforme di intensità

$E = 10 \text{KV/cm}$. Descrivi il procedimento che adotteresti per determinare l'istante in cui l'energia cinetica dell'elettrone sarà uguale alla sua energia a riposo.

Svolgimento

Il campo elettrico assegnato è costante quindi la forza a cui l'elettrone è soggetto è pure essa costante per cui il moto della particella è uniformemente accelerato. Il teorema dell'energia cinetica ci dice che la variazione dell'energia cinetica è uguale al lavoro fatto dalla forza che agisce sulla particella e perciò, essendo l'energia cinetica iniziale nulla, si ha che l'energia cinetica finale è uguale proprio alla variazione di energia cinetica e quindi al lavoro fatto dal campo elettrico.

Quindi:

$E_{\text{cin,fin}} = \Delta E_{\text{cinetica}} = L_{\text{campo elettrico}} = eEs$ dove e è il modulo della carica dell'elettrone e s è lo spazio che esso deve percorrere affinché la sua energia cinetica si porti a quella voluta.

D'altra parte, essendo il moto uniformemente accelerato, si ha $s = \frac{1}{2}at^2$ e perciò $E_{\text{cin,fin}} = eE \cdot \frac{1}{2}at^2$. Per calcolare a suppongo che la massa dell'elettrone resti costante durante

l'accelerazione e perciò ricavo che $a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}$ e quindi

$$E_{\text{cin,fin}} = \frac{e^2 E^2}{2m} t^2$$

ricordando che l'energia a riposo è: mc^2 (m è la massa dell'elettrone che è supposta costante) si ha:

$$mc^2 = \frac{e^2 E^2}{2m} t^2 \text{ da cui } t = \frac{mc}{eE} \sqrt{2}$$

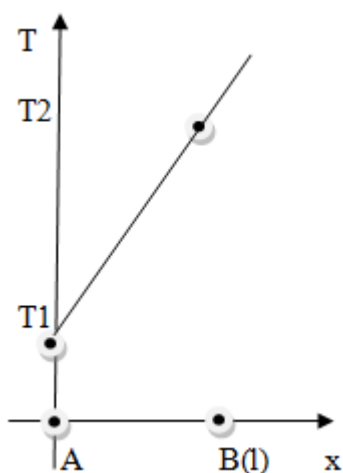
Quesito n6

Quanto tempo impiegherà un'onda sonora a percorrere la distanza l tra i punti A e B se la temperatura dell'aria tra di essi varia linearmente da T_1 a T_2 ? Tieni presente che la velocità di propagazione nell'aria varia in funzione della temperatura secondo la legge:

$$v = a\sqrt{T}$$

dove a è una costante.

Svolgimento



Per trovare la legge della temperatura, fisso un sistema di riferimento in cui sull'asse x riporto la posizione di A e B con A coincidente con l'origine e B con ascissa l , mentre sull'asse delle ordinate riporto le rispettive temperature. In questo sistema di riferimento il grafico della legge della temperatura, che è lineare, passa $A(0, T_1)$ e $B(l, T_2)$ e quindi è la retta che passa per essi e che ha intercetta pari a T_1 e coefficiente angolare pari a $\frac{T_2 - T_1}{l}$, quindi la legge che dà la temperatura è:

$$T = \frac{T_2 - T_1}{l} x + T_1$$

Quindi l'equazione della velocità in funzione della x è data da $v = a\sqrt{\frac{T_2-T_1}{l}x + T_1}$

adesso è necessario esplicitare la dipendenza di v dal tempo, per questo elevo al quadrato e ottengo:

$v^2 = a^2 \left(\frac{T_2-T_1}{l}x + T_1 \right)$ e differenziando

$$2v dv = a^2 \left(\frac{T_2-T_1}{l} dx \right)$$

ma essendo $v = \frac{dx}{dt}$ si ha, dividendo per dt

$$2v \frac{dv}{dt} = a^2 \left(\frac{T_2-T_1}{l} \frac{dx}{dt} \right) = a^2 \left(\frac{T_2-T_1}{l} \cdot v \right)$$

da cui

$$2 \frac{dv}{dt} = a^2 \left(\frac{T_2-T_1}{l} \right)$$

quindi

$$dv = \frac{a^2}{2} \left(\frac{T_2-T_1}{l} \right) dt$$

e integrando da $t=0$ a t di ha:

$$v = \frac{a^2}{2} \left(\frac{T_2-T_1}{l} \right) t + v_0$$

dove v_0 è la velocità nell'istante $t=0$ che è anche quello in cui l'onda si trova nell'origine e perciò $v_0 = a\sqrt{T_1}$. Si vede quindi che il moto è uniformemente vario con accelerazione $a' = \frac{a^2}{2} \left(\frac{T_2-T_1}{l} \right)$ e quindi la sua equazione oraria sarà

$$x = a\sqrt{T_1}t + \frac{1}{2}a't^2$$

Per calcolare il tempo richiesto basta risolvere l'equazione

$$l = a\sqrt{T_1}t + \frac{1}{2}a't^2$$

nell'incognita t che, scritta in forma normale diventa:

$$\frac{1}{2}a't^2 + a\sqrt{T_1}t - l = 0$$

e si nota una permanenza e una variazione per cui sarà accettabile solo la radice positiva. Le soluzioni sono date da:

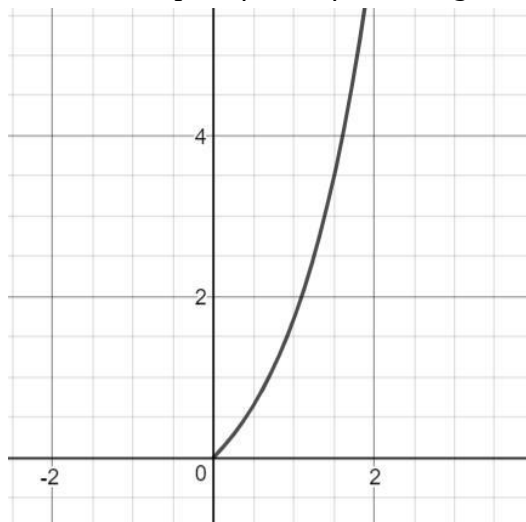
$$t = -\frac{2l}{a(T_2-T_1)}(\sqrt{T_1} \pm \sqrt{T_2})$$

ed è accettabile solo

$$t = -\frac{2l}{a(T_2-T_1)}(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}) = \frac{2l}{a(T_2-T_1)}(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})$$

Quesito n7

Il grafico riportato nella figura seguente potrebbe rappresentare l'andamento della velocità con cui una carica puntiforme si allontana per repulsione elettrostatica da un'altra carica puntiforme, fissa, di eguale segno? Motiva la tua risposta.



Svolgimento

Se sull'asse delle x interpretiamo la distanza tra le cariche e su quello delle y la velocità allora si deduce che la relazione espressa dal grafico è tra la velocità e la distanza tra le due cariche. Detta x_0 la distanza iniziale e x la generica distanza con $x > x_0$ si può osservare che il lavoro per portare una carica da A a B è dato da:

$$L_{AB} = q(V_A - V_B)$$

e, poichè la carica fissa Q è puntiforme si ha:

$$L_{AB} = q \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x_A} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{x_B} \right) = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x_A} - \frac{1}{x_B} \right).$$

Se indichiamo con x_0 la posizione iniziale di A e con x la generica posizione si ha:

$$L_x = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \right).$$

Però il lavoro è anche uguale alla variazione di energia cinetica e quindi

$$L_x = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

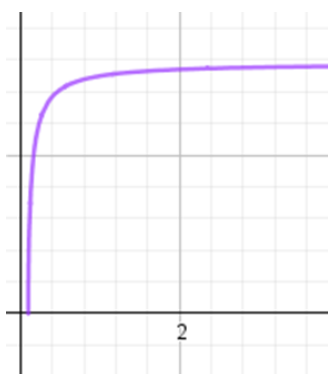
quindi uguagliando si ottiene

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \right)$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{q \cdot Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2}mv_0^2 \right)}$$

che ha un grafico del tipo



Quesito n. 8

Un punto si muove lungo l'asse x secondo la legge:

$$x(t) = a \cdot \sin^2 \left(3t - \frac{\pi}{4} \right)$$

con a costante positiva. Determina:

- l'ampiezza e il periodo di oscillazione;
- l'istante t in cui il punto raggiunge per la prima volta la massima distanza dall'origine.

Svolgimento

a) L'ampiezza del moto è proprio a perché a rappresenta la massima distanza dalla posizione di equilibrio che si ottiene quando la funzione $\sin^2 \left(3t - \frac{\pi}{4} \right)$ raggiunge il suo massimo che è 1. Per determinare il periodo è bene trasformare l'espressione di secondo grado in una di primo grado applicando la formula di bisezione del seno. Si ha così:

$$x(t) = a \cdot \frac{1 - \cos \left(6t - \frac{\pi}{2} \right)}{2} = a \cdot \frac{1 - \cos(6t)}{2}$$

e da qui si vede che il periodo è $T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

b) il punto raggiunge la massima distanza dall'origine quando $x(t) = a$ e quindi negli istanti t in cui è soddisfatta l'equazione $a \cdot \sin^2 \left(3t - \frac{\pi}{4} \right) = a$ o l'equivalente lineare

$$a \cdot \frac{1 - \cos(6t)}{2} = a$$

da qui si vede subito che: $\cos(6t) = -1$ e quindi $6t = \pi + k2\pi$ e cioè $t = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{3}$ e il primo istante si ottiene per $k=0$ e cioè $t = \frac{\pi}{6}$.

Durata massima della prova: 6 ore. È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 350 Art. 18 comma 8). È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana

L’evoluzione dell’insegnamento della Fisica in Italia attraverso le soluzioni di alcuni temi significativi proposti agli esami di stato P.N.I. e Progetto Brocca

Mario Innocenzo Mandrone¹

¹Dipartimento di Scienze e Tecnologie
Università degli Studi del Sannio – Benevento
almavit@libero.it

“Siccome il ferro s’arrugginisce senza l’esercizio e l’acqua si putrefà o nel freddo s’addiaccia, così l’ingegno senza esercizio si guasta”.

(Dal Codice Atlantico di Leonardo da Vinci)

Abstract

È ben noto a tutti che l’insegnamento della Fisica in Italia ha sempre avuto un incerto destino; centrale per il ruolo riconosciuto al sapere scientifico e tecnologico nelle società moderne, ma accessorio rispetto ai valori legati alla formazione culturale di cittadini consapevoli e responsabili. L’apprendimento scientifico, pertanto, ancora oggi non gode di buona salute e in nessun paese al mondo è da considerarsi in linea con le esigenze della società moderna. Il problema è ovviamente complesso, molto più complesso di quanto appaia dal dibattito tra gli addetti ai lavori. Va quindi ripensato l’intero sistema scolastico ed in particolare l’attuale organizzazione dei percorsi formativi nonché le dimensioni formative fondamentali per affrontare le conoscenze, in una visione culturale ampia ed al passo con le recenti ricerche scientifiche. L’insegnamento della fisica in Italia, cristallizzato ormai da decenni di tradizione nella scelta dei contenuti e dei metodi, fu rivitalizzato dalla introduzione della prova scritta obbligatoria negli istituti che sperimentavano il programma di fisica con almeno tre ore settimanali di lezione. Nella prova scritta erano previsti non solo problemi ed esercizi, ma anche saggi brevi, test e relazioni di laboratorio.

Nel presente lavoro si discuterà dell’evoluzione dell’insegnamento della Fisica in Italia mediante la soluzione dei temi più significativi proposti agli esami di stato di Liceo Scientifico sperimentale del progetto Brocca. Nel risolvere tali problemi sono state adottate le strategie di “Problem Solving” che suddividono la risoluzione del tema in tre parti: 1) Analisi del testo; 2) Strategia risolutiva (ovvero la ricerca del modello matematico per un sistema che evolve nel tempo); 3) Analisi dei risultati. Per modello matematico si deve intendere la rappresentazione formale di idee o conoscenze relative ad un fenomeno. Questa definizione contiene una descrizione completa delle caratteristiche che deve avere

un modello matematico e che possono essere raccolte in tre punti fondamentali, non separabili l'uno dall'altro. Precisamente:

- 1) Un modello matematico è la rappresentazione di un fenomeno;
- 2) Tale rappresentazione non è descrittiva, discorsiva o a parole, ma formale, espressa cioè in linguaggio matematico;
- 3) Non esiste una via diretta dalla realtà alla matematica. In altri termini il fenomeno specifico studiato non determina la sua rappresentazione matematica; ciò che invece si fa è di tradurre in formule, idee e conoscenze relative al fenomeno studiato.

L'aspetto più intrigante è dato proprio dal punto 3); infatti la ricerca del modello matematico richiede, ovviamente, una certa abilità di interpretazione dal concettuale al formale.

Nella discussione preliminare dei temi risolti si riporta una tabella in cui saranno presenti le leggi fondamentali afferenti lo specifico problema che si dovrà risolvere, con l'indicazione di quelle leggi che hanno maggior probabilità, ad una analisi preventiva del testo, di avvicinarci alla soluzione del problema in esame. Naturalmente l'approccio indicato per la soluzione dei temi vuole essere una proposta di metodo non unica, ma semplicemente un esempio di "come procedere". Spesso ci si è premurati di completare i problemi con considerazioni di ordine generale sia relative a possibili campi di applicazione, sia relative a modi alternativi di affrontare la soluzione dello stesso problema.

Problemi risolti

1. Esami di stato di Liceo Scientifico Sperimentale-anno 1983- tema n° 3;
2. Esami di stato di Liceo Scientifico Sperimentale-anno 1984- tema n° 1;
3. Esami di stato di Liceo Scientifico Sperimentale-anno 1999- tema n° 1;
4. Esami di stato di Liceo Scientifico Sperimentale-Progetto Brocca anno 2000;
5. Esami di stato di Liceo Scientifico Tecnologico- Corso Sperimentale-Progetto Brocca- anno 2010;
6. Esami di stato di Liceo Scientifico – Indirizzo Scientifico-Tecnologico- Progetto Brocca- anno 2014

1 Introduzione

Le Direzioni Generali del Ministero, resisi conto di quanto grave fosse il problema dell'insegnamento della Fisica in Italia e come fosse urgente intervenire opportunamente, hanno a più riprese, nel corso degli anni, affrontato il problema e non sempre con i risultati sperati. Sono stati istituiti, nel tempo, nell'ambito dei piani nazionali d'aggiornamento, seminari, corsi per l'aggiornamento dei docenti di fisica impegnati nella sperimentazione del Piano Nazionale per l'Informatica e del progetto Brocca nei trienni dei vari istituti con l'obiettivo di favorire l'acquisizione di conoscenze più complete relativamente ai contenuti di fisica moderna, da approfondire negli aspetti didattici, e di abilità operative riguardo all'attività nei laboratori di Fisica e di Informatica.

Inizialmente l'insegnamento della Fisica era abbinato con quello di Chimica. La scelta di mettere insieme fisica e chimica non è però nuova in Italia. La si ritrova infatti prima della riforma Gentile del 1923. La legge Casati del 1859 sulla riforma della scuola secondaria superiore prevedeva, infatti, l'insegnamento di "Elementi di matematica" e "Fisica ed elementi di chimica". L'accoppiamento della fisica con la matematica si ebbe invece con la riforma Gentile ed anche questa scelta generò non pochi problemi didattici, tanto che per cercare di superarli fu attivata una laurea apposita, Matematica e Fisica. L'esistenza di una laurea specifica non fornì i risultati sperati tanto che i corsi universitari furono attivati solo fino al 1962. Molti docenti di Fisica non avevano una laurea specifica, ma i pessimi risultati nell'apprendimento degli studenti non dipendevano solo da questo. All'epoca la metodologia didattica era molto carente. L'attività degli allievi in laboratorio era sconosciuta e l'unica applicazione pratica consisteva in qualche rara esperienza fatta ex-cathedra dal docente. Il luogo in cui si svolgeva l'attività pratica era infatti il gabinetto di fisica e non il laboratorio. Il concetto di laboratorio di fisica come è inteso oggi non esisteva ed anche i gabinetti scientifici, dove si avevano, presentavano grossi problemi nella dotazione di arredi e attrezzature. L'insufficienza delle dotazioni scientifiche persistette anche negli anni che seguirono la ricostruzione dopo l'ultima guerra tanto che in diversi istituti mancavano completamente e negli altri erano appena sufficienti. Nell'anno scolastico 1962/63 vi furono però massicci interventi economici a favore della scuola per cui fu possibile programmare gli acquisti delle attrezzature con lo scopo di assicurare a tutti gli Istituti una dotazione minima. I tempi erano ormai maturi per una sostanziale modifica nella didattica delle materie scientifiche. In campo pedagogico il 1960 può essere considerato un anno di demarcazione per quanto riguarda la didattica della fisica. Negli U.S.A. fu costituito un gruppo di studio, il Physical Science Study Committee (PSSC) incaricato di progettare un corso di fisica per la scuola secondaria superiore in grado di migliorare l'apprendimento degli studenti assegnando molta importanza all'attività di laboratorio. La prima edizione del corso fu disponibile nel 1960 e, dopo un ciclo di sperimentazione, essa fu seguita da altre due edizioni, nel 1965 e nel 1970, con ottimi risultati. Si dette maggiore impulso all'organizzazione di corsi per formazione dei docenti di fisica da destinare alle classi pilota. In queste classi veniva sperimentato l'insegnamento della fisica secondo il metodo proposto dal PSSC. Nel 1968

cominciarono ad essere autorizzate dal Ministero le prime sperimentazioni richieste espressamente dalle scuole, ma mancava una normativa che potesse in qualche modo regolare le tante iniziative. Quest'ultima grave lacuna fu colmata con i Decreti Delegati del 1974, in particolare con gli articoli 2 e 3 del D.P.R. 419, che portarono ad un'esplosione delle richieste di sperimentazioni. Tra il 1980 e il 1983 ebbero origine così i "Progetti assistiti" che venivano messi a disposizione degli Istituti i quali, dopo la necessaria delibera degli Organi collegiali, potevano chiederne la sperimentazione. L'insegnamento della fisica ebbe un nuovo impulso con l'avvio del Piano Nazionale per l'Informatica (PNI) che, presentato dal Ministro Falcucci nel Convegno C.E.E. di Bologna del maggio 1985, aveva lo scopo di introdurre la tecnologia informatica nella scuola italiana, come era già avvenuto nelle Nazioni più avanzate. Furono proposti nuovi programmi di fisica sia per il biennio che per il triennio. I corsi d'aggiornamento, che interessarono circa 24.000 docenti di matematica e fisica, ebbero inizio nella primavera del 1986 e si conclusero nella primavera del 1992.

In questo periodo furono in sperimentazione due programmi di fisica proposti a livello nazionale: quello del Piano Nazionale per l'Informatica e quello del Progetto Brocca. Nel biennio i due programmi erano completamente diversi. Quello del PNI è innovativo prevalentemente nelle scelte metodologiche perché insiste sulla necessità della programmazione didattica, sull'utilizzazione del laboratorio, la risoluzione di problemi di fisica e l'uso del computer nell'attività didattica. Quello Brocca è, invece, un programma integrato di fisica e chimica. Per il triennio le differenze tra i due programmi sono invece limitate poiché il programma Brocca rappresenta solo un'evoluzione dei programmi proposti nel PNI sulla base della sperimentazione effettuata. Il Progetto Brocca è uno studio per la revisione del sistema didattico pubblico italiano effettuato a cavallo fra gli anni '80 e '90, fu istituito nel 1988 da Beniamino Brocca, sottosegretario alla Pubblica Istruzione che coordinò la commissione ministeriale autrice del progetto).

I programmi di fisica degli indirizzi tradizionali erano generalmente costituiti da un elenco di argomenti disposti in maniera sequenziale mentre quelli del PNI e Brocca erano organizzati per temi e gli obiettivi erano indicati in maniera esplicita. Il programma di fisica PNI prevedeva:

quattro temi nel biennio:

1) l'equilibrio ed i processi stazionari; 2) il movimento; 3) la propagazione della luce; 4) l'energia: sue forme, conservazione, trasformazione

sei nel triennio:

1) forze e campi; 2) sistemi di riferimento e relatività; 3) principi di conservazione-processi reversibili ed irreversibili; 4) onde meccaniche ed elettromagnetiche; 5) struttura della materia; 6) l'universo fisico.

Ogni tema è costituito da un insieme di argomenti scelti secondo un criterio di omogeneità per cui, selezionando opportunamente i contenuti ed i metodi in base agli obiettivi programmati, l'insegnante è libero di costruire un percorso didattico adeguato alle attrezzature ed alle esigenze dell'Istituto in cui lavora. Lo stesso tipo di organizzazione

per obiettivi e contenuti caratterizza i programmi di fisica del progetto Brocca, sia nel biennio (insieme a chimica) sia nel triennio dei vari indirizzi.

I temi del programma Brocca per il biennio erano:

- 1) proprietà fisiche dei corpi e loro misura; 2) dai materiali alle sostanze; 3) dalle sostanze alle soluzioni; 4) proprietà elettriche dei corpi, delle sostanze, delle soluzioni; 5) trasformazioni e conservazione della materia; 6) movimento ed energia; 7) energia ed ambiente; 8) la progettazione di un esperimento.

I temi di fisica per il triennio prevedevano:

- 1) fondamenti della meccanica; 2) forze e campi; 3) oscillazioni ed onde; 4) termodinamica e modelli statistici; 5) quanti, materia, radiazione; 6) relatività; 7) universo fisico.

La prima valutazione dei risultati riguardanti il programma di fisica del PNI fu fatta nel marzo 1989 in un convegno tenuto a Rimini e organizzato dal CINECA (Centro Interuniversitario per il Nord-Est di Calcolo Automatico). I problemi derivanti dalla sperimentazione del programma di fisica del PNI furono affrontati per la prima volta in un seminario nazionale organizzato dalla Direzione Classica e tenuto a Salice Terme nel maggio 1991. In tale occasione i numerosi docenti che vi parteciparono chiesero al Ministero un serio impegno per l'aggiornamento non soltanto per la parte metodologica, ma anche per i contenuti. In particolare furono richiesti corsi aventi per oggetto la teoria della relatività, la struttura della materia, l'universo fisico e naturalmente l'attività di laboratorio. L'insegnamento della fisica, cristallizzato da decenni di tradizione nella scelta dei contenuti e nei metodi, fu rivitalizzato dalla introduzione della prova scritta obbligatoria negli Istituti che sperimentavano il programma di fisica del PNI con almeno tre ore settimanali di lezione. L'obiettivo implicito in tale scelta era quello di rendere più facile e rapido il cambiamento che altrimenti avrebbe avuto bisogno di tempi più lunghi. Nella prova scritta erano previsti non solo problemi ed esercizi, ma anche saggi brevi, test e relazioni di laboratorio. La prova scritta viene messa in risalto anche nel progetto Brocca, dove "si ribadisce l'importanza- per consentire un completo procedimento didattico- di disporre, nel corso dell'anno scolastico, di prove scritte anche nelle discipline cosiddette orali". Da evidenziare che sia il programma PNI che quello Brocca prevedevano nel triennio una massiccia introduzione della fisica moderna.

2 Confronto dei programmi di fisica P.N.I. e Brocca

Si riporta la premessa ai programmi Brocca che così recita: "Nell'indirizzo scientifico l'insegnamento della Fisica fornisce un efficace mezzo per conoscere ed interpretare la realtà, proponendo un metodo di ricerca che, avvalendosi dell'attività di laboratorio come

irrinunciabile tappa del processo conoscitivo, consente una buona formalizzazione dei contenuti teorici e l'acquisizione di una metodologia generale di lavoro efficacemente applicabile anche in molti altri campi del sapere ". Ritengo tale premessa fondamentale e condivisibile. Da tale premessa si possono dedurre e declinare alcuni obiettivi irrinunciabili a cui l'insegnamento della Fisica deve tendere:

- 1) riconoscere l'ambito di validità delle leggi scientifiche;
- 2) distinguere la realtà fisica dai modelli costruiti per la sua interpretazione;
- 3) definire i concetti in modo operativo, associandoli per quanto possibile ad apparati di misura;
- 4) scegliere tra diverse schematizzazioni esemplificative la più idonea alla soluzione di un problema reale;
- 5) analizzare fenomeni individuando le variabili che li caratterizzano;
- 6) conoscere, scegliere e gestire strumenti matematici adeguati e interpretarne il significato fisico;
- 7) utilizzare il linguaggio specifico della disciplina;
- 8) comunicare in modo chiaro e sintetico le procedure seguite nelle proprie indagini, i risultati raggiunti e il loro significato;
- 9) inquadrare in un medesimo schema logico situazioni diverse, riconoscendo analogie e differenze, proprietà varianti ed invarianti;
- 10) collegare le conoscenze acquisite con le implicazioni della realtà quotidiana;
- 11) applicare in contesti diversi le conoscenze acquisite;

Passando ai contenuti, attraverso un esame comparato dei temi proposti dai programmi Brocca e dai programmi PNI, si può affermare che sostanzialmente le conoscenze teoriche dei due programmi, sono sovrapponibili benché sistemati in maniera diversa ed anche elencati in maniera dettagliata nei programmi Brocca. Lo svolgimento dei temi, in numero di sei per il PNI e di sette per il Brocca, è previsto in maniera prescrittiva; in entrambi i programmi, il numero degli argomenti da svolgere è da considerarsi eccessivo e a volte dispersivo. Per quanto riguarda gli aspetti metodologici, l'impostazione proposta, sia nella versione PNI che nei programmi Brocca, è certamente condivisibile non solo perché coerente con i più attuali indirizzi pedagogici e didattici ma anche perché mette in risalto la indubbia valenza culturale e formativa delle discipline scientifiche in generale e della fisica in particolare.

Il programma di fisica per il liceo scientifico, proposto nell'ambito della sperimentazione del Piano Nazionale dell'Informatica, prevedeva che l'intero quinto anno fosse dedicato alla fisica moderna ed in particolare alla struttura della materia, alla relatività e all'astrofisica. A fronte di tale ampio spazio previsto per la fisica moderna, vi è una realtà piena di aspetti contraddittori. Come tutti sanno, la fisica moderna ha un impatto notevole sulla nostra vita quotidiana. Di contro essa, ed in particolare la meccanica quantistica, è generalmente assente dagli argomenti di studio effettivamente svolti a scuola.

Chiudiamo queste brevi note storiche elencando alcuni degli obiettivi efficaci che ci si possono porre nell'insegnamento della meccanica quantistica:

1. riconoscere i limiti della fisica classica nello spiegare alcuni particolari effetti (radiazione di corpo nero, effetto fotoelettrico, effetto Compton);
2. capire che principale scopo della meccanica quantistica è la conoscenza dei fenomeni a livello microscopico;
3. riconoscere il dualismo onda-corpuscolo in alcuni specifici fenomeni (diffrazione degli elettroni e dei neutroni, esperienza di Janossy-Naray), acquisire familiarità con le proprietà ondulatorie e corpuscolari dei fotoni e capire che tutte le particelle in moto hanno proprietà ondulatorie (onde di de Broglie);
4. riconoscere quali sono alcune quantità quantizzate (momento angolare, livelli energetici, ecc);
5. spiegare la ragione della stabilità degli atomi, e quindi della materia, e perché la fisica classica conduce alla catastrofica instabilità dell'atomo;
6. Riconoscere che ogni misura nel mondo microscopico implica una interazione fra apparato di misura e sistema studiato che non può essere minore della costante di Planck h ;
7. Desumere da alcuni esperimenti (diffrazione di un fascio di elettroni, osservazioni al microscopio) le relazioni di indeterminazione di Heisenberg;
8. Acquisire familiarità con il formalismo della meccanica quantistica, almeno riconoscendo come lo stato del sistema è descritto da funzioni d'onda e le osservabili misurabili (quantità fisiche) da operatori;
9. Saper distinguere tra la teoria classica, che è deterministica, e quella quantistica, che è probabilistica;

Da notare, infine, che la scoperta dei fenomeni quantistici e la loro rappresentazione, nel quadro di una teoria sufficientemente completa e coerente, da tempo fa parte di una visione scientifica che deve prediligere l'uso di numerose applicazioni pratiche, affinché la presentazione sia adeguata agli studenti della scuola secondaria di secondo grado.

3 I Temi di fisica della Maturità Sperimentale

L'esame di stato per i Licei scientifici che attuano la sperimentazione Brocca ad indirizzo scientifico-tecnologico prevede come seconda prova scritta anche una prova di fisica. Per essere precisi la prova scritta che il candidato deve affrontare richiede lo svolgimento di due soli quesiti scelti tra quelli proposti, dei quali uno di matematica ed uno di fisica. La durata massima della prova è di sei ore. Ora, mentre per lo scritto di matematica lo studente trova numerose pubblicazioni che riportano sia le tracce d'esame sia le proposte di soluzione, per la prova di fisica non esistono testi adeguati che riportino tutte le prove assegnate negli anni precedenti con le relative soluzioni.

Dalla distribuzione degli argomenti trattati nelle prove scritte di fisica si evidenzia che:

1. Sono frequenti (circa il 50%) i problemi per risolvere i quali si arriva alla stesura di un'equazione differenziale. Di regola si tratta di problemi di fisica- matematica sull'analisi di circuiti elettrici;

2. Spesso sono problemi che richiedono l'analisi dinamica circa il comportamento di una particella carica in moto immersa in campi elettrici e/o magnetici;
3. Rari sono i problemi di ottica, quelli sui fenomeni ondulatori e di fisica moderna che richiedono i concetti di interferenza, di fotone, di quantizzazione e di meccanica quantistica.

È comunque una tendenza ministeriale degli ultimi tempi quella di dedicare una maggiore attenzione a tali tipi di problemi.

In genere per gli studenti non è sempre facile la risoluzione quantitativa e qualitativa di un tema di fisica. Infatti esistono numerosi articoli e pubblicazioni inerenti le strategie di risoluzione, proprio perché tutti conoscono le difficoltà che incontrano gli studenti quando si devono cimentare nella risoluzione di un problema di fisica. Sono le strategie del "problem solving". Esse, in sostanza, suddividono la risoluzione di un problema in tre parti:

1. Analisi del testo;
2. Strategia risolutiva:
 - a) ricerca delle variabili da trattare analiticamente e delle loro correlazioni dopo aver individuato l'ambito descrittivo;
 - b) ricerca del modello matematico atto alla risoluzione;
 - c) verbalizzazione del processo di risoluzione matematica per una migliore comprensione di ciò che si sta facendo;
3. Analisi dei risultati:
 - a) verifica dimensionale dei risultati;
 - b) coerenza tra le ipotesi iniziali e il risultato finale;
 - c) sostituzione numerica e analisi dei dati.

L'applicazione del secondo punto, cioè la ricerca del modello matematico per un sistema che evolve nel tempo, richiede una certa abilità concettuale nel saper vedere, dalla traccia assegnata, la variabile funzione del tempo e nello scrivere correttamente la sua derivata temporale con il segno giusto (+ se aumenta; - se diminuisce).

Ciò fatto, risulta scritta l'equazione differenziale, che di solito è del primo ordine del tipo

$$\frac{d x(t)}{d t} + a_0 x(t) = 0$$

che rappresenta l'evoluzione libera di un sistema abbandonato a se stesso, oppure:

$$\frac{d x(t)}{d t} + a_0 x(t) = f(t)$$

che rappresenta l'evoluzione forzata di un sistema.

Più raramente l'equazione differenziale è del secondo ordine del tipo:

$$a \frac{d^2 x}{d t^2} + b \frac{d x(t)}{d t} + c x(t) = 0$$

Oppure:

$$a \frac{d^2 x}{d t^2} + b \frac{d x(t)}{d t} + c x(t) = f(t)$$

nel caso che l'evoluzione del sistema sia forzato. Di queste equazioni si ricercano poi le curve integrali e tra queste quella che soddisfa le condizioni iniziali. Per queste equazioni differenziali lineari esistono o il problema dei valori iniziali (cosiddetto problema di Cauchy) o il problema ai limiti. Mentre il primo problema assicura sempre l'esistenza e l'unicità della soluzione sotto l'ipotesi della continuità dei coefficienti e della $f(x)$, il problema ai limiti non assicura sempre l'esistenza e/o l'unicità della soluzione.

Ma cosa si intende per modello matematico? Un modello matematico è la rappresentazione formale di idee o conoscenze relative ad un fenomeno. Questa definizione contiene una descrizione completa delle caratteristiche che deve avere un modello matematico e che possono essere raccolte in tre punti fondamentali, non separabili l'uno dall'altro. Precisamente:

- a) Un modello matematico è la rappresentazione di un fenomeno;
- b) Tale rappresentazione non è descrittiva o discorsiva, ma formale, espressa cioè in linguaggio matematico;
- c) Non esiste una via diretta dalla realtà alla matematica. In altri termini il fenomeno specifico studiato non determina la sua rappresentazione matematica; ciò che invece si fa è di tradurre in formule, idee e conoscenze relative al fenomeno.

Questa definizione comprende in sé sia quanto affermato dalla scuola positivista di Copenaghen (N. Bohr) sia dalla scuola realista (A. Einstein). Infatti il positivismo spinto della scuola di Copenaghen afferma che la Fisica non descrive la realtà, ma solo quello che possiamo dire della realtà; il realismo einsteiniano invece afferma che la realtà, che esiste già prima che l'osservatore la esamini, è conoscibile proprio attraverso i modelli usati dalla fisica matematica deterministica, anche se non sempre si è capaci di formalizzarli e risolverli. Il motivo del grande successo del modello deterministico classico si basava infatti sulla schematizzazione dei fenomeni e riusciva quindi ad esprimere un'equazione differenziale lineare che ammetteva soluzioni continue e perfettamente derivabili dalle precise e rigorose condizioni iniziali imposte come dato di conoscenza del fenomeno studiato. È da notare che l'avvento della fisica matematica iniziò proprio con lo studio delle equazioni differenziali lineari prese come modello matematico. Queste equazioni differenziali erano soggette a due vincoli assiomatici ben precisi:

- 1) Le variabili in gioco sono considerate continue;
- 2) Le equazioni differenziali del tipo considerato possono descrivere tutti i fenomeni deterministicamente.

Ma non tutti i sistemi rientrano nel tipo “meccanico macroscopico” e quindi il determinismo meccanista di Laplace deve essere sostituito con altri tipi di modelli matematici nei quali si fa uso delle equazioni differenziali di tipo non ordinario, cioè non lineari. Verso la fine dell'800 il programma meccanista entrò in una crisi che assunse connotati sempre più gravi e poi addirittura drammatici. Ci vollero circa 50 anni per

giungere a nuove teorie, capaci di studiare più ampiamente il sistema come quelle dei sistemi dinamici non lineari e del caos deterministico.

Con le teorie della Relatività Speciale e Generale di A. Einstein si mise in discussione tutto l'edificio newtoniano relativo allo spazio, al tempo fisico e alla forma stessa della descrizione matematica dei fenomeni relativi alla gravitazione universale. La crisi provocata poi dalle teorie quantistiche fu ancora più grave perché si sgretolò l'idea stessa di variabilità continua di un fenomeno e la capacità di descrivere totalmente l'evoluzione di un sistema con le sole equazioni differenziali lineari. Con il principio di indeterminazione di Heisenberg, infatti, secondo il quale non è possibile determinare simultaneamente posizione e velocità di una particella, si colpiva al cuore la base di ogni determinismo classico mettendo in crisi la visione illuministica laplaciana e minando alle fondamenta una certezza deterministica che durava da più di tre secoli. La scoperta principale è che regole e leggi perfettamente deterministiche possono produrre un moto completamente caotico e assolutamente imprevedibile. È questa la terza grande rivoluzione scientifica del secolo scorso dopo la teoria della Relatività e la Meccanica Quantistica. Il grande sviluppo della matematica e l'osservazione fisica dei fenomeni ci hanno portato a tre teorie che nascono con l'imposizione di tre limiti ben precisi:

- 1) Il valore limite della velocità della luce: teoria della relatività;
- 2) Il limite invalicabile sulla precisione delle nostre misure: teoria dei quanti;
- 3) Il limite, imposto dalla non linearità dei fenomeni naturali, alla previsione del futuro dei sistemi: decadenza del modello deterministico classico e nascita delle teorie del caos.

Ora io ritengo che queste tre grandi rivoluzioni, che hanno un'importanza culturale enorme e che comunque seguono un ciclo di studi durato più di 300 anni, devono costituire lo studio dei fondamenti della Fisica e della Matematica in un contesto interdisciplinare da svolgere nell'ultimo anno del ciclo scolastico superiore, laddove queste materie devono acquisire almeno le basi delle tematiche moderne in atto.

La portata culturale di queste tre grandi teorie, la teoria della Relatività, la Meccanica Quantistica e le teorie del caos, impone che esse siano patrimonio culturale comune anche perché le implicazioni filosofiche e le conseguenze epistemologiche da esse introdotte hanno cambiato completamente il nostro modo di concepire la realtà e, quindi, la "visione del mondo" che da esse può derivare.

La Meccanica Quantistica, ad esempio, ormai completamente accettata in campo scientifico come potente strumento di calcolo e di previsione, rappresenta sicuramente la più clamorosa rivoluzione culturale e concettuale che ha caratterizzato il secolo scorso. La sua portata, infatti, va ben oltre il già pur vasto ambito scientifico, e investe tutte le sfere delle attività di pensiero umano in quanto modifica profondamente ciò che intendiamo per conoscenza. Sotto questo aspetto può dunque essere considerata di diritto una teoria filosofica. È pertanto increscioso osservare come tale teoria compaia così raramente nel panorama dell'istruzione italiana. Solamente a livello universitario e in un ristrettissimo numero di corsi di laurea (essenzialmente fisica e chimica) viene affrontato

il suo studio. Tale studio, tuttavia, si limita agli spetti puramente tecnici e formali, lasciando poco spazio alle implicazioni filosofiche che la Meccanica Quantistica comporta. A livello di istruzione scolastica superiore, pur comparando nelle Indicazioni Nazionali, il suo studio è praticamente assente, se non grazie all'iniziativa personale di qualche docente. Bisognerebbe, invece, fornire agli alunni un quadro completo degli aspetti fondamentali della Meccanica Quantistica, (oltre ovviamente alla Teoria della Relatività di Einstein), limitando al massimo gli aspetti formali, e sottolineando, nell'ultima parte, in che maniera tale teoria rivoluziona il nostro modo di concepire il mondo e noi stessi.

4.Statistiche degli argomenti delle prove d'esame

Nelle diverse prove, il tema principale resta negli anni l'Elettromagnetismo. Compaiono però anche alcuni argomenti, tratti dal curriculum tradizionalmente svolto in terza e in quarta. Inoltre, vengono proposti anche temi di "fisica moderna". Per avere un quadro più preciso, possiamo analizzare le diverse prove e gli argomenti trattati in ciascuna di esse servendoci di una tabella.

TEMI DI FISICA PROGETTO BROCCA- PER ARGOMENTI

ARGOMENTI	ANNO
Campo magnetico	1995-tema 1; 1996-tema 2; 1998-tema 2; 1999 tema 1; 2002- tema 2; 2004- tema 2; 2008-tema 2
Energia interna e temperatura	1997-tema 1; 1999-tema 1; 1999-tema 2; 2000-tema 2; 2004-tema 1; 2004-tema 2; 2006- tema 2
Energia cinetica	1996-tema1;1997-tema 2; 1998-tema 2; 1999-tema 1; 2000-tema 1; 2006-tema 1; 2008-tema 1
Energia potenziale	1995- tema 2; 1996-tema 1; 1999-tema 1; 2000-tema 1; 2004-tema 1; 2006-tema 1; 2008-tema 1
Flusso del campo magnetico	1997- tema 1; 2002-tema 2
Funzione d'onda	201°-tema 1
Intensità di corrente elettrica	1995-tema 2; 1997-tema 1; 2000-tema 2; 2002-tema 2; 2006-tema 2; 2008-tema 2; 2010-tema 2
Potenza	1995-tema 2; 1997-tema 1; 2002-tema 2; 2004-tema 1; 2006-tema 2; 2010-tema 2
Potenziale elettrico	1995-tema 2; 1996-tema 1; 1997-tema 1; 1999-tema 1; 1999-tema 2; 2000-tema 1; 2002-tema 2; 2004-tema 1; 2006-tema 1; 2006-tema 2; 2008- tema 1; 2010-tema 2
Interferenza	1998-tema 1; 2000-tema 1
Lavoro	1995.tema 2; 1996-tema 1; 1999-tema 2; 2008-tema 1

Moto circolare uniforme	1996-tema 1; 1999-tema 1; 2004-tema 2
Onde	1996-tema 2; 1997-tema 2; 1998-tema 1; 2000-tema 1; 2002-tema 1; 2004-tema 2; 2006-tema 1; 2008-tema 1; 2010-tema 1
Principio di indeterminazione	2000-tema 1; 2010-tema 1
Radioattività	1996-tema 1; 1998-tema 2
Raggi luminosi	1996-tema 2 (2); 1996-tema 2
Relazione onde-particelle	1997-tema 2; 2000-tema 1; 2002-tema 1; 2004-tema 2; 2006-tema 1; 2008-tema 1; 2010-tema 1; 2014-tema 1- 2016 tema 1
Rendimento	1995-tema 2; 2000-tema 2;
Velocità della luce	1998-tema 2

5 Guida alla soluzione dei problemi di fisica

“La scienza è costituita di fatti, così come una casa è costituita di mattoni. Tuttavia, una raccolta di fatti non è più Scienza di quanto un mucchio di mattoni sia una casa”.

.J.Henri Poincaré

Non è possibile dare regole generali per la soluzione dei problemi, ma indicazioni certamente sì. La soluzione di un problema di fisica richiede in genere di collegare due aspetti diversi:

- 1) quello fenomenologico della situazione reale, che può essere descritto qualitativamente con parole del linguaggio comune
- 2) quello del modello matematico, cioè della descrizione quantitativa.

Il collegamento offre in genere molte difficoltà. È necessario quindi sviluppare abilità in tre momenti:

1. La descrizione qualitativa, che consente di rendersi conto della situazione concreta e di valutare, anche grossolanamente, l'evoluzione del fenomeno individuando le grandezze implicate.
2. La formalizzazione, cioè la costruzione di un modello matematico, per rendere quantitativa la descrizione e ottenere risposte complete e soddisfacenti alle domande.
3. L'elaborazione del modello, nella quale è necessario usare l'apparato della matematica.

È evidente che una scarsa preparazione matematica renderà questo momento molto faticoso e potrà impedire il raggiungimento della soluzione. La matematica dovrebbe costituire un aiuto potente e non una difficoltà aggiuntiva.

La risoluzione di ogni problema richiede l'utilizzo di queste tre fasi, anche se ogni volta in misura diversa:

PUNTO 1- la lettura del testo, l'individuazione degli obiettivi e il reperimento dei dati.

Sarà opportuno iniziare con una lettura attenta del testo, cercando di farsi una chiara idea della situazione fenomenologica, cercando di riconoscere bene l'obiettivo cognitivo. In alcuni problemi questa operazione può essere molto facile perché domande e dati sono espliciti; in altri sarà necessaria un'analisi accurata. Bisogna ricordare che i dati non sono solo le quantità assegnate numericamente ma anche le informazioni sul modo in cui si svolge il fenomeno. La ricerca della via per la soluzione di un problema è una fase creativa. Due ingredienti sembrano comunque necessari:

1. il desiderio di risolvere il problema e
2. una sicura conoscenza della disciplina.

Non si deve dimenticare che le relazioni fornite dalla teoria si riferiscono a situazioni ideali che, in genere, sono verificate solo in una realtà con un grado di approssimazione che può variare di volta in volta. Concetti come "assenza di attrito" o "uniformità di un campo" o altro sono astrazioni che in qualche caso potrebbero non essere lecite.

In alcuni problemi queste schematizzazioni vengono assegnate esplicitamente nel testo e possono essere quindi assunte come dati di fatto. In altri problemi devono essere proposte dal solutore e giustificate in base alle informazioni contenute nel testo e alla teoria nota. Facciamo qualche esempio:

- 1) Se vogliamo usare le formule del moto uniforme dovremo essere sicuri che nel nostro problema, se ci sono forze in gioco non facciano lavoro, e questa informazione può non essere detta esplicitamente nel testo del problema.
- 2) Per usare le formule del moto uniformemente accelerato è necessario controllare che le forze siano costanti, e non basta che siano costanti in modulo visto che sono vettori; altrimenti si arriverebbe altrimenti si arriverebbe all'errore di applicare le leggi del moto uniformemente accelerato al moto di una particella carica in un campo magnetico, quando si sa benissimo che il moto è uniforme: accelerato ma uniforme.
- 3) Supponiamo di voler determinare una velocità. Se vogliamo usare la legge di conservazione dell'energia, bisogna essere sicuri che le forze siano conservative oppure valutare se il contributo di quelle non conservative possa essere trascurato. In caso contrario bisognerà rifarsi al teorema dell'energia cinetica, mettendo in conto che ciò richiede il calcolo esplicito del lavoro fatto dalle forze non conservative.

PUNTO 2 – Approssimazioni di tipo matematico

In ogni caso è necessario tener conto di eventuali difficoltà di tipo matematico. Per esempio può darsi che ci si trovi a dover risolvere un'equazione, ma che questa non sia di tipo noto o che non sia risolvibile in termini esatti. Si potrà allora valutare la necessità di trovare una via alternativa che non preveda quella equazione, oppure programmare di risolverla per via numerica. In caso di difficoltà matematiche è possibile a volte sostituire le relazioni che portano alla soluzione con altre più semplici, ma approssimate. Si rinuncia

in questo caso alla soluzione esatta e se ne cerca un'altra più semplice ma valida solo in un campo più ristretto. Dobbiamo cioè sapere che la sostituzione, pur semplificando il procedimento, introduce un errore che deve essere valutato: per la valutazione si devono tenere presenti in relazione ai dati numerici del problema. Dipende dal problema e dalla precisione richiesta per la risposta, se possiamo farlo. È chiaro quindi, in conclusione, che per procedere con sicurezza in questa analisi, sono indispensabili:

- La conoscenza delle leggi fisiche, sia riguardo alla loro espressione algebrica che alle condizioni in cui possono essere applicate;
- La capacità di estrarre dal testo le informazioni necessarie per stabilire tale applicabilità nel problema in esame;
- La capacità di eseguire i passaggi matematici necessari per l'elaborazione.

Terminata con successo questa fase, possiamo dire che il problema è risolto in linea di principio. Rimane solo il compito esecutivo di stendere materialmente il procedimento scelto e determinare gli eventuali valori numerici richiesti.

PUNTO 3. Svolgimento e presentazione della soluzione

Nella stesura della soluzione dovrebbero risaltare i passi che sono stati individuati insieme alla loro concatenazione e alle considerazioni fatte per stabilirne la validità. Bastano in genere poche parole o poche righe che indichino le leggi usate e dimostrino l'esistenza delle condizioni richieste dalla teoria che ne permettono l'uso. È utile anche mantenere il maggior ordine possibile per rendere facile una rilettura.

1. Elaborare algebricamente le relazioni

Una volta stabilita la legge da usare e scritta quindi la relativa formula, bisogna resistere alla tentazione di sostituire alle lettere i valori numerici dei dati e svolgere i calcoli con i numeri. Tutto diventerebbe pesante ed anche inutile.

2. Effettuare controlli dimensionali

L'elaborazione delle relazioni in forma algebrica presenta notevoli vantaggi. Intanto consente un controllo dimensionale. Si dovrà verificare che in ogni somma tutti gli addendi siano omogenei, gli argomenti di funzioni come quelle trigonometriche, logaritmiche ed esponenziali siano numeri puri e il risultato abbia le dimensioni della grandezza cercata.

3. Testare le relazioni su casi particolari

Ottenuta la formula che esprime la grandezza cercata in funzione dei dati è utile metterla alla prova in casi particolari, nei quali il comportamento del sistema fisico è noto almeno qualitativamente e quindi è possibile stimare il valore della grandezza cercata. In questo modo potranno essere rilevate differenze inaccettabili con quanto previsto dalla soluzione trovata.

4. Introdurre eventuali variabili ausiliarie

Nel caso di procedimenti complessi è conveniente usare un simbolo per intendere globalmente una espressione intermedia. L'utilizzo di tali variabili ausiliarie può alleggerire e rendere più chiaro il procedimento. Si consiglia, quindi, di elaborare le

espressioni algebricamente, cercando di trasformarle fino a ottenere le quantità richieste espresse in funzione dei soli dati. Dovranno, quindi, risultare eliminate le grandezze non richieste dal problema e non comprese fra i dati.

5. Presentazione dei risultati

Ottenuta l'espressione finale, si opera la sostituzione dei valori numerici alle lettere, tutti insieme, e con le opportune unità di misura. È conveniente, in questa fase, esprimere i valori numerici in notazione scientifica che permette di separare l'ordine di grandezza, cioè la potenza del 10, dalle cifre significative. Si deve fare attenzione a usare coerentemente unità del Sistema Internazionale (SI). Per ottenere il risultato, i passi da fare sono essenzialmente due, anche se spesso vengono fatti contemporaneamente: 1) la determinazione dell'unità di misura; 2) la determinazione del valore numerico. L'unità di misura del risultato va determinata operando sui simboli delle unità con le ordinarie regole dell'algebra. Possono emergere, sostanzialmente, due tipi di errori: a) mancata conversione di qualche unità a unità del SI. Per esempio mantenere il risultato di un'energia in elettronvolt (eV) o in calorie, quando invece dovrebbero essere espresse in Joule. b) Incoerenza della formula trovata. Per esempio, quando ci si trova a dover sommare due grandezze non omogenee (cosa ovviamente impossibile) o quando le unità di misura del risultato non sono quelle che ci si aspetta.

6. Risultati numerici

Si raccomanda di utilizzare sempre la notazione scientifica. La notazione scientifica può essere usata, oltre che per la sostituzione dei valori numerici nelle formule, anche per scrivere i risultati in modo più chiaro e leggibile, quando il numero di cifre che andrebbero scritte è superiore al numero di cifre significative. Così lasceremo scritto $t = 23,5 \text{ s}$ oppure $L = 0,67 \text{ J}$, ma trasformeremo $T = 0,000000123$ in $T = 1,23 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ e $R = 384.000 \text{ Km}$ in $R = 3,84 \cdot 10^5 \text{ Km}$. È possibile, quindi, dividere, per comodità, lo svolgimento del lavoro nelle seguenti tre parti:

1. Impostazione
2. Risoluzione
3. Controllo

1. Impostazione

a) Si legga attentamente e più volte il testo del problema fino ad arrivare a ripeterlo agevolmente senza aiutarsi con la lettura.

b) Si distinguano e si elenchino tutti i dati forniti esplicitamente dal testo, ricordando che molti dati non vengono forniti perché si suppongono noti (per esempio l'accelerazione di gravità, la densità dell'acqua, il suo calore specifico)

c) Si introduca per i dati e per le incognite un completo e conveniente sistema di simboli. Si faccia attenzione a non usare simboli diversi per la stessa grandezza fisica o lo stesso simbolo per grandezze diverse.

d) Si trasformino tutti i dati forniti nel sistema di unità di misura scelto, preferibilmente il Sistema Internazionale.

2) Risoluzione

Dividiamo ulteriormente questa fase in:

- 1) risoluzione letterale;
- 2) risoluzione numerica.

Risoluzione letterale

Si svolga il problema e si eseguano i vari passaggi usando solo i simboli, mai i valori numerici, sino ad arrivare alla formula risolutiva. Questo per vari motivi tra i quali:

- 1) Sarà molto più agevole rivedere il lavoro svolto;
- 2) Sarà possibile effettuare sulla formula finale il controllo dimensionale, sempre consigliabile;
- 3) Molti calcoli saranno evitati da probabili semplificazioni.

Si individui su quale parte della Fisica verta il problema e si cerchi di ricordare le leggi studiate e le definizioni date e, utilizzando i dati e le incognite, istituire, se possibile, un sistema di equazioni. “Tradurre” i concetti espressi dal testo nel linguaggio comune in relazioni matematiche fra i vari simboli e poi fra i loro valori numerici. Se, per esempio, in un problema sui gravi si legge “a che altezza arriva?”, si deve tradurre con $v_{finale} = 0$ se il corpo è lanciato verticalmente, con $v_{y,finale} = 0$ se lanciato in una direzione qualsiasi. Si tengano presenti tutte le formule che legano le grandezze cercate; non ci si fermi alla prima, magari suggerita maliziosamente dal testo.

Come esempio possiamo considerare il seguente problema: “Due treni si vengono incontro alla velocità di 60 Km/h e distano 100 Km , quando un uccellino si alza dal primo treno e viaggiando alla velocità di 80 Km/h arriva sino al secondo treno, inverte quindi il suo moto tornando al primo, poi di nuovo al secondo e così via sin quando i due treni si incrociano. Quanto spazio percorre in totale l’uccellino?”

Il problema si può risolvere considerando lo spazio totale percorso dall’uccellino come somma dei vari spazi percorsi; cosa possibile, ma oltremodo laboriosa. Si può procedere, però in maniera diversa. Poiché in questo caso si ha:

$$s = v * t$$

dove v è la velocità dell’uccellino e t è il tempo del suo volo che non è altro che il tempo necessario perché i due treni si incontrino, cioè:

$$d = (v_1 + v_2) * t$$

e quindi

$$s = \left(\frac{d}{v_1 + v_2} \right) * t = 66,7 \frac{\text{Km}}{\text{h}}$$

- Si ricorra spesso alle definizioni, ma nella loro formulazione esatta, non in modo intuitivo.

Esempio: Un treno percorre 1 Km alla velocità di 30 Km/h , poi ancora 1 Km alla velocità di 60 Km/h . Qual è la sua velocità media?

Ovviamente non è 45 Km/h ! La definizione è:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

e, quindi, poiché $\Delta s = 2 \text{ Km}$

$$\Delta t = 1/v_1 + 1/v_2 = \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}$$

Si ha:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \Delta s * \left(\frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} \right) = 40 \text{ Km/h}$$

Si cerchi di ricordare altri problemi di argomento simile o che abbiano una qualche analogia. L'esempio seguente chiarisce il consiglio: “Un ciclista viaggia alla velocità di 10 Km/h lungo una strada servita da un certo tipo di autobus. Sapendo che in un'ora ne vede 15 venirgli incontro ed è sorpassato da 10, e sapendo che gli autobus partono dai due capolinea con la stessa frequenza, a che velocità viaggiano gli stessi? E quanti ne partono ogni ora dal capolinea?

E' chiaramente un problema di cinematica e svolto “regolarmente” è senz'altro abbastanza complesso, Ma se si coglie l'analogia coll'effetto Doppler diviene estremamente semplice. Indicando con f_1 la frequenza degli autobus che gli vengono incontro, con f_2 quella degli autobus sorpassati e con c la loro velocità, si ha:

$$f_1 = f * \left(\frac{c}{c - v_0} \right)$$

$$f_2 = f * \left(\frac{c}{c + v_0} \right)$$

Da cui:

$$c = \left(\frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2} \right) * v_0 = 50 \text{ Km/h}$$

ed

$$f = f_1 * \left(\frac{c - v_0}{c} \right) = 12$$

Si raccomanda, inoltre, di:

- Scrivere le unità di misura al singolare, p.e. 3 newton, e con la iniziale minuscola.
- Non punteggiare i simboli riferiti alle unità di misura, p.e. 3cm e non 3 cm. perché si tratta appunto di simboli e non di abbreviazioni

Risultati numerici. Numero di cifre significative

Molto spesso i dati numerici vengono forniti nella forma di un semplice valore numerico, raramente questi valori vengono assegnati nella forma $G = x \pm \Delta x$ con l'indicazione esplicita dell'incertezza. Nel primo caso bisogna ricordare che, per tradizione, si scrivono solo le cifre certe o al massimo una in più. In questo modo l'unità di misura relativa all'ultima cifra fornisce una stima dell'errore assoluto con cui è noto il valore della grandezza, mentre il numero di cifre consente di stimare l'errore relativo. Secondo questa convenzione, se abbiamo ad es. $p = 23,45 \text{ m}$ dobbiamo intendere $p = (23,45 \text{ m} \pm$

$0,005)m$; l'incertezza cade sui mm, le cifre significative sono quattro e l'errore relativo può essere ritenuto di 5 parti su $2 * 10^{-4}$ cioè circa 0,02%.

Per seguire una via ragionevole si può pensare che misure di laboratorio non particolarmente accurate possono dare errori relativi intorno all' 1% e misure buone errori intorno allo 0,1%: in notazione scientifica significa e con la convenzione detta ciò significa conservare due oppure tre cifre decimali. Vogliamo porre l'attenzione sul fatto che il numero di cifre significative del risultato può essere diverso dal numero di cifre significative con cui sono espressi i dati.

Controllo del risultato

Sulla formula finale si faccia sempre l'analisi dimensionale, tenendo presente che la sua rispondenza è condizione necessaria ma non sufficiente per l'esattezza della formula. Questo perché vi sono grandezze adimensionali e perché esistono grandezze diverse che hanno però le stesse dimensioni, come ad esempio il lavoro e il momento di una forza. Si controlli se si è fatto uso di tutti i dati, tenendo presente che, se eccezionalmente sono stati forniti dati in eccesso, ciò probabilmente è dovuto a qualche errore. Si controllino più volte i vari passaggi, ma non nell'ordine già seguito o a lettura, perché sarebbe probabile rifare lo stesso errore, ma rifacendoli in ordine inverso. Si ricorra, se possibile, all'esame di alcuni casi particolari. Nello studio teorico ci si impadronisca degli ordini di grandezza delle varie quantità e si controlli se il risultato finale è plausibile.

In conclusione, non ci si stancherà mai di suggerire di risolvere i problemi prima in termini di formule e, solo quando si è giunti alla formula o alle formule finali, si possono ottenere i valori numerici. Questo modo di procedere consente una doppia verifica sulla correttezza delle modalità di soluzione. In primo luogo, nelle formule finali devono comparire esclusivamente le grandezze fornite nel testo del problema o, al più, alcune grandezze fondamentali non riportate esplicitamente ma che devono essere appannaggio culturale di ogni candidato: l'accelerazione di gravità, La pressione atmosferica, la temperatura ambiente e così via. Si ricordi anche che, quando è possibile e nelle forme dovute, la sostituzione dei valori numerici deve essere fatta tenendo conto delle approssimazioni numeriche che sempre, inevitabilmente, si dovranno affrontare in ogni problema. In secondo luogo, l'analisi dimensionale delle formule finali costituisce uno strumento molto potente di verifica della correttezza della soluzione. Si ricordi, infine, che non sempre il modo di risolvere un problema è univoco e, pertanto, una soluzione "diversa" non significa necessariamente una soluzione "sbagliata".

Prova scritta di Fisica
Esame di stato Liceo Scientifico Sperimentale
Anno 1983 – Tema n° 3

Un fascio di protoni, ciascuno dei quali possiede una energia cinetica E_c , è proiettato in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$.

- a) Nella ipotesi che la direzione del fascio sia perpendicolare a $\vec{B}$, si determini in funzione di B il raggio e il periodo del moto circolare risultante.
- b) Se l'energia dei protoni diventasse doppia, tripla, quadrupla, come varierebbero corrispondentemente gli elementi della traiettoria?
- c) calcolate il periodo e il raggio della traiettoria descritta nel caso particolare in cui $B = 3.00 \cdot 10^{-2} \frac{N}{A \cdot m}$ e l'energia dei protoni sia $4.00 \cdot 10^5 \text{ eV}$. Si ricordi che la massa del protone è $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$ e la carica elementare è $1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
- d) Si descrivano le caratteristiche fondamentali delle macchine acceleratrici di particelle.

Analisi della traccia - considerazioni teoriche - indicazioni per la soluzione

Il tema proposto vuole che si tratti del moto di particelle cariche in un campo magnetico uniforme e delle possibili applicazioni in ambito scientifico e tecnologico. Immaginiamo, pertanto, di far passare una carica q per un punto P di una regione dello spazio con velocità $\vec{v}$ diversa da zero. Se su di essa agisce una forza trasversale deflettente $\vec{F}$, diremo che nel punto P esiste un campo magnetico e definiremo “induzione magnetica” il vettore che soddisfa l'equazione:

$$\vec{F} = q \vec{v} \nabla \vec{B}$$

Tale forza viene conosciuta come “forza di Lorentz”.

Dalla definizione segue, immediatamente:

1. Se la carica è ferma, $\vec{F} = \vec{0}$
2. Se il vettore velocità $\vec{v}$ è un vettore parallelo o antiparallelo a $\vec{B}$, la forza di Lorentz è nulla ($\sin \theta = 0$);
3. La forza $\vec{F}$ assume il valore massimo quando $\vec{v}$ è normale a $\vec{B}$ ($\sin \theta = 1$);
4. Poiché $\vec{F}$ e $\vec{v}$ tra loro perpendicolari, la forza $\vec{F}$ non compie alcun lavoro e non c'è quindi variazione di energia cinetica;
5. l'unico effetto di $\vec{F}$ sulla carica è quello di curvarne la traiettoria

Elenchiamo di seguito le differenze fondamentali tra le forze elettriche e quelle magnetiche agenti sulle particelle cariche:

1. la forza elettrica è sempre parallela o antiparallela alla direzione del campo elettrico, mentre la forza magnetica è perpendicolare al campo magnetico;
2. la forza elettrica agisce su una carica indipendentemente dalla sua velocità, mentre la forza magnetica agisce su una particella carica solo quando essa è in movimento e la forza è proporzionale alla velocità.

3. La forza elettrica compie lavoro spostando una particella carica, mentre la forza magnetica associata ad un campo magnetico costante non compie lavoro spostando una particella.

Quest'ultima affermazione è conseguenza del fatto che quando una carica è in movimento in un campo magnetico costante, la forza magnetica è sempre perpendicolare allo spostamento. Cioè, per un piccolo spostamento $d\vec{s}$ di una particella, il lavoro fatto dalla forza magnetica sulla particella è:

$$dL = \vec{F}_L \times d\vec{s} = (\vec{F}_L \times \vec{v}) dt = 0$$

perché la forza magnetica è un vettore perpendicolare a $\vec{v}$. Da questa relazione e dal teorema dell'energia cinetica si può dedurre che l'energia cinetica di una particella carica non può essere alterata solo da un campo magnetico costante. In altre parole, quando una particella carica si muove con velocità $\vec{v}$, la presenza di un campo magnetico può alterare la direzione del vettore velocità, ma non può modificare il modulo della velocità della particella.

Moto di una particella carica in un campo magnetico uniforme

La forza magnetica che agisce su una particella carica in moto in un campo magnetico è perpendicolare alla velocità della particella. Di conseguenza il lavoro svolto dalla forza magnetica sulla particella è nullo. Consideriamo, ora, il caso particolare di una particella carica positivamente che si muove in un campo magnetico uniforme quando il vettore velocità iniziale della particella è perpendicolare al campo. La particella, in questo caso, si muove lungo una traiettoria circolare il cui piano è perpendicolare al campo magnetico in quanto la forza magnetica (o forza di Lorentz) $\vec{F}_L$ è perpendicolare sia al vettore velocità $\vec{v}$ che al vettore induzione magnetica $\vec{B}$. Pertanto si avrà:

$$|\vec{F}_L| = q \vec{v} \nabla \vec{B} = q v B \sin \alpha = q v B$$

in quanto l'angolo individuato dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{B}$ risulta di 90° . Inoltre il vettore $\vec{F}_L$ è diretto costantemente verso il centro della traiettoria. Pertanto la particella si muove di moto circolare uniforme. Per determinare il raggio della traiettoria possiamo usare la seconda legge di Newton:

$$\sum_1^n \vec{F}_i = \vec{F}_L = m \vec{a}$$

In questo caso si avrà:

$$q v B = m a$$

$$q v B = m \frac{v^2}{r}$$

in quanto:

$$a = a_c = \frac{v^2}{r}$$

Dalla relazione:

$$q v B = m \frac{v^2}{r}$$

è possibile ricavare il raggio della traiettoria, dato da:

$$r = \frac{m v}{q B}$$

Cioè, il raggio della traiettoria è proporzionale alla quantità di moto $m v$ della particella e inversamente proporzionale alla carica della particella e all'intensità del campo magnetico. La velocità angolare della particella risulta uguale a:

$$\omega = \frac{v}{r} = \left(\frac{q B}{m v} \right) * v = \frac{q B}{m}$$

Il periodo del moto (il tempo che la particella impiega per compiere una rivoluzione) è uguale alla lunghezza della circonferenza diviso per la velocità della particella:

$$T = \frac{2 \pi r}{v} = \frac{2 \pi}{\omega} = \frac{2 \pi m}{q B}$$

Questi risultati mostrano che, nel caso in cui il campo magnetico risulti uniforme, la velocità angolare della particella e il periodo del moto circolare non dipendono dalla velocità traslazionale o dal raggio dell'orbita descritta dalla particella. Nel caso in cui una particella carica penetra in un campo magnetico uniforme con una velocità che forma un angolo α con il vettore induzione magnetica $\vec{B}$, la traiettoria descritta sarà un'elica cilindrica.

Se, infine, una carica q si muove con velocità $\vec{v}$ in presenza di un campo elettrico $\vec{E}$ e di un campo magnetico $\vec{B}$, essa subisce sia una forza elettrica data da $q \vec{E}$, sia una forza magnetica $q \vec{v} \nabla \vec{B}$. La forza totale agente sulla particella è quindi:

$$\vec{F} = q \vec{E} + (q \vec{v} \nabla \vec{B}) = q * (\vec{E} + \vec{v} \nabla \vec{B})$$

Numerose sono le applicazioni della forza di Lorentz. Tra queste citiamo:

1. Il selettore di velocità.

In numerosi esperimenti in cui si utilizzano particelle cariche, è importante ottenere particelle che si muovono tutte praticamente con la stessa velocità. Ciò si può ottenere applicando una combinazione di campo elettrico e campo magnetico calibrati in modo tale che l'intensità del campo elettrico agente sulla particella in moto risulti uguale al modulo della forza magnetica agente sulla stessa particella carica. Cioè:

$$q E = q v B$$

Da cui:

$$v = \frac{E}{B}$$

Soltanto quelle particelle che hanno questa velocità non saranno deflesse quando si muoveranno attraverso i campi elettrico e magnetico perpendicolari e passeranno attraverso una piccola apertura alla fine del dispositivo. La forza magnetica esercitata sulle particelle che si muovono a velocità maggiori di questa è più intensa della forza elettrica e queste particelle saranno deflesse verso l'alto. Quelle che si muovono a velocità minori saranno, invece, deflesse verso il basso.

2. Lo spettrometro di massa

Uno spettrometro di massa separa gli ioni secondo il loro rapporto massa/carica. In una versione nota come "spettrometro di massa di Bainbridge", un fascio di ioni prima passa

attraverso un selettore di velocità e poi entra in una seconda regione senza campo elettrico e con un campo magnetico uniforme $\vec{B}_0$ che ha la stessa direzione orientata del campo magnetico del selettore. Entrando nel secondo campo magnetico, gli ioni si muovono lungo una semicirconferenza di raggio r prima di urtare il rivelatore in un punto P .

Dall'equazione:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

si può ricavare il rapporto:

$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0}{v}$$

Poiché:

$$v = \frac{E}{B}$$

Sostituendo in

$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0}{v}$$

si ottiene:

$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0}{v} = \frac{rB_0}{\left(\frac{E}{B}\right)} = \frac{rBB_0}{E}$$

Quindi si può determinare m/q misurando il raggio di curvatura e le intensità note dei campi B, B_0 ed E . Una variante di questa tecnica fu usata da J.J. Thomson (1856-1940) nel 1897 per misurare il rapporto e/m_e per gli elettroni. Dalla dimensione della deflessione e dai valori misurati di B ed E , si può determinare il rapporto carica / massa. I risultati di questo esperimento cruciale hanno portato alla scoperta dell'elettrone come particella fondamentale della natura.

3. Il ciclotrone

Il ciclotrone è importante storicamente perché esso fu il primo acceleratore di particelle a far raggiungere ad essi una velocità altissima. I ciclotroni sono ancora in uso, per esempio, per accelerare ad alte velocità particelle per le applicazioni mediche. Tuttavia, la maggior parte degli acceleratori costruiti di recente e correntemente in uso nella ricerca, non sono ciclotroni. Essi funzionano su un principio diverso e sono generalmente chiamati "sincrotroni". Un ciclotrone può accelerare particelle cariche a velocità altissime usate per bombardare i nuclei atomici e produrre così le reazioni nucleari da studiare. In un ciclotrone le cariche si muovono all'interno di due contenitori semicircolari. Lo ione esce dal ciclotrone con una velocità v data da:

$$v = \frac{qBR}{m}$$

quindi con una energia cinetica K data da:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m}$$

Quando l'energia dello ione in un ciclotrone supera circa 20 MeV , iniziano a giocare un ruolo gli effetti relativistici. Per questa ragione, gli ioni in moto non rimangono in fase con la differenza di potenziale applicata. Alcuni acceleratori risolvono questo problema

modificando la frequenza della differenza di potenziale applicata in modo tale che essa rimanga in fase col moto degli ioni.

Soluzione del problema (si richiama il punto a del testo del problema)

a) Nella ipotesi che la direzione del fascio sia perpendicolare a $\vec{B}$, si determini in funzione di B il raggio e il periodo del moto circolare risultante.

Su una carica q in moto con velocità $\vec{v}$ rispetto a un campo magnetico agisce una forza:

$$\vec{f} = q * (\vec{v} \nabla \vec{B})$$

nota come “forza di Lorentz”, in onore del fisico olandese Hendrick Antoon Lorentz che, con le sue ricerche sull' elettromagnetismo, agevolò l'introduzione della relatività ristretta da parte di Einstein. In particolare, il modulo della forza agente sulla carica q è:

$$f = q v B \sin \alpha$$

dove α è l'angolo formato dal vettore velocità $\vec{v}$ con il campo magnetico.

Se la velocità della carica è perpendicolare al campo magnetico, risulta $\sin \alpha = 1$, per cui tale forza assume il valore massimo:

$$f = q v B$$

La forza è nulla non solo se la velocità è nulla, cioè se la carica è ferma, ma più in generale se la velocità è parallela al campo magnetico, essendo in tal caso:

$$\sin \alpha = 0$$

Inoltre la forza $\vec{f}$, essendo perpendicolare alla velocità, non compie alcun lavoro. Di conseguenza l'energia cinetica non varia durante il moto, cioè la velocità si mantiene costante in modulo. Pertanto, una carica elettrica soggetta solo alle forze di un campo magnetico uniforme, ha velocità in modulo costante, cioè si muove di moto circolare uniforme: il campo magnetico ha come effetto solo quello di incurvare la traiettoria. Per questo motivo la forza magnetica si chiama anche “forza deflettente”. Inoltre, poiché risulta:

$$\vec{f} = q * (\vec{v} \nabla \vec{B})$$

i tre vettori $\vec{f}$, $\vec{v}$ e $\vec{B}$ formano una terna trirettangola. Pertanto, essendo $\vec{f}$ perpendicolare a $\vec{v}$, risulta anche $\vec{a}$ perpendicolare a $\vec{v}$. Quindi l'accelerazione risulta puramente centripeta e, di conseguenza il moto della carica sarà circolare uniforme. Pertanto, quando una carica q viene iniettata in un campo di induzione magnetica con velocità $\vec{v}$ perpendicolare al vettore $\vec{B}$, la forza agente sulla carica sarà data da :

$$f = q v B$$

Quindi la carica acquista un'accelerazione normale alla velocità, cioè centripeta, legata alla forza agente dal secondo principio della dinamica:

$$f = ma$$

Indicando con m la massa della particella carica, possiamo scrivere:

$$q v B = ma$$

da cui:

$$q v B = m \frac{v^2}{r}$$

essendo, in questo caso:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Da tale relazione è possibile ricavare il raggio della traiettoria in funzione delle grandezze note, ottenendo:

$$q B r = m v$$

E, quindi:

$$r = \frac{m v}{q B}$$

Poiché le grandezze al secondo membro della precedente relazione sono tutte costanti, il raggio r della traiettoria non varia. La carica, quindi, si muoverà di moto circolare uniforme nel piano perpendicolare alla direzione del campo magnetico nel punto in cui la carica penetra nel campo. Il valore costante della velocità lungo la traiettoria coincide con la velocità della particella nell'istante in cui la carica stessa penetra nel campo magnetico. Poiché nel moto circolare uniforme il modulo del vettore velocità è dato da:

$$v = \frac{2 \pi r}{T} = 2 \pi r f$$

Si ricava che:

$$\frac{1}{T} = f = \frac{v}{2 \pi r}$$

Cioè:

$$\frac{1}{T} = f = \frac{v}{2 \pi r} = \frac{v}{2 \pi} * \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{v}{2 \pi} * \frac{q B}{m v} = \frac{q B}{2 \pi m}$$

In quanto

$$r = \frac{m v}{q B}$$

Pertanto:

$$T = \frac{2 \pi m}{q B}$$

Da ciò si evince che la frequenza del moto è indipendente dalla velocità. Tale risultato, però, è valido solo per particelle dotate di velocità piccola rispetto alla velocità della luce nel vuoto, cioè nel caso in cui $v \ll c$. Nelle moderne macchine acceleratrici, però, le particelle si muovono con velocità confrontabili con quella della luce. In questo caso la massa non è più costante ma dipende dalla velocità secondo la relazione di Einstein.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Pertanto, la frequenza non è più indipendente dalla velocità. Se, invece, la velocità con cui la carica elettrica viene immessa nel campo magnetico ha una componente $\vec{v}_2$ nella direzione di $\vec{B}$, essa descriverà una traiettoria elicoidale. Difatti, mentre la particella ruota in un piano perpendicolare a $\vec{B}$ per effetto della componente della velocità $\vec{v}$ secondo la normale a $\vec{v}_2$, trasla nella direzione del campo magnetico per effetto della componente $\vec{v}_2$. Il moto di traslazione è rettilineo uniforme in quanto $\vec{B}$ non modifica la componente $\vec{v}_2$. Il moto della particella è perciò la composizione di un moto circolare uniforme in un

piano perpendicolare a $\vec{B}$, con un moto rettilineo uniforme nella direzione del vettore $\vec{B}$. Il moto risultante è, perciò, un moto elicoidale la cui traiettoria è un'elica cilindrica. Dette rispettivamente v_1 e v_2 le componenti della velocità perpendicolare e parallela al campo magnetico, il raggio e il periodo del moto circolare si possono scrivere, come visto precedentemente, così:

$$r = \frac{m v_1}{q B}$$

$$T = \frac{2 \pi m}{q B}$$

mentre l'equazione del moto rettilineo uniforme risulta essere:

$$x(t) = v_2 * t$$

Pertanto, il passo dell'elica si può determinare calcolando la distanza sull'asse x percorsa in un intervallo di tempo pari al periodo T del moto, tempo in cui la particella riprende la sua posizione iniziale sulla circonferenza. Si avrà, pertanto:

$$p = v_2 * T$$

Si richiama, ora, il punto b del problema.

b) Se l'energia dei protoni diventasse doppia, tripla, quadrupla, come varierebbero corrispondentemente gli elementi della traiettoria?

Poiché l'energia cinetica dei protoni è:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

si ottiene:

$$2 E_c = m v^2$$

ovvero

$$v^2 = \frac{2 E_c}{m}$$

e, quindi:

$$v = \sqrt{\frac{2 E_c}{m}}$$

Pertanto il raggio della traiettoria in funzione dell'energia cinetica sarà:

$$r = \frac{m v}{q B} = \frac{m}{q B} * \left(\sqrt{\frac{2 E_c}{m}} \right) = \frac{1}{q B} * \left(\sqrt{2 m^2 E_c} \right) = \frac{\sqrt{2 m E_c}}{q B}$$

Dal che si evince che $r \sim \sqrt{E_c}$, cioè il raggio della traiettoria è proporzionale alla radice quadrata dell'energia cinetica della particella.

Per il punto c del problema, si ha:

c) Calcolare il periodo e il raggio della traiettoria descritta nel caso particolare in cui $B = 3.00 * 10^{-2} \frac{N}{A * m}$ e l'energia dei protoni sia $4.00 * 10^5 \text{ eV}$. Si ricordi che la massa del protone è $1.67 * 10^{-27} \text{ Kg}$ e la carica elementare è $1.60 * 10^{-19} \text{ C}$.

Con i dati numerici a disposizione risulta:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{2 \pi m}{q B} = \frac{2 \pi * 1,67 * 10^{-27} \text{ Kg}}{1,60 * 10^{-19} \text{ C} * 3,00 * 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{A} * \text{m}}} \\
 &= \frac{2 * 3,14 * 1,67 * 10^{-27} \text{ Kg}}{1,60 * 10^{-19} \text{ C} * 3,00 * 10^{-2} \frac{\text{N}}{\text{A} * \text{m}}} \\
 &= \frac{6,28 * 1,67}{1,60 * 3,00 * 10^{-2}} * 10^{-27} * 10^{-21} \text{ s} \sim \frac{10,5}{4,8} * 10^{-6} \text{ s} = 2,19 * 10^{-6} \text{ s}
 \end{aligned}$$

Per calcolare il raggio della traiettoria bisogna trasformare il valore dell'energia cinetica espressa in elettronvolt, nelle unità di misura della energia nel sistema S.I., cioè in joule. Si ottiene:

$$1 \text{ eV} = 1 \text{ e} * 1 \text{ V} = 1,6 * 10^{-19} \text{ C} * 1 \text{ V} = 1,6 * 10^{-19} \text{ C} * \text{V} = 1,6 * 10^{-19} \text{ J}$$

Pertanto l'energia dei protoni in joule vale:

$$E_c = 4,00 * 10^5 \text{ eV} = 4,00 * 10^5 * 1,6 * 10^{-19} \text{ J} = 6,4 * 10^{-13} \text{ J}$$

Quindi il raggio della traiettoria sarà dato da:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{\sqrt{2m E_c}}{q B} = \frac{\sqrt{2 * 1,67 * 10^{-27} * 6,4 * 10^{-13}}}{1,60 * 10^{-19} * 3,00 * 10^{-2}} = \\
 &= \frac{\sqrt{21,4 * 10^{-40}}}{4,80 * 10^{-21}} = \frac{4,63}{4,80} 10^{-20} * 10^{21} = 0,96 * 10 = 9,6 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Infine, per il punto d, si ha:

d) Si descrivano le caratteristiche fondamentali delle macchine acceleratrici di particelle

Gli acceleratori di particelle sono dispositivi utilizzati per portare ad alta energia particelle cariche, cioè per fornire proiettili capaci di penetrare nel campo delle forze nucleari in modo che, interagendo con il nucleo atomico, possono disintegrarlo con produzione di altre particelle. Il metodo più semplice per portare a elevata energia cinetica corpuscoli carichi (protoni, elettroni, deuteri o deutoni (i deuteri o deutoni sono nuclei di idrogeno pesante, chiamato deuterio) e in generale ioni), è quello di accelerarli mediante una notevole d.d.p. Questa tecnica in pratica è però limitata dalle difficoltà di produrre e soprattutto di mantenere altissime tensioni. Quando infatti la d.d.p. è dell'ordine di qualche milione di volt, è necessario risolvere problemi tecnologici, specie di isolamento. Un notevole salto qualitativo nella tecnica degli acceleratori fu realizzato mediante il cosiddetto "ciclotrone", opera del fisico statunitense Ernest Lawrence. Il primo acceleratore di particelle fu costruito da John Cockcroft ed Ernest Walton all'inizio degli anni '30, presso il Cavendish Laboratory di Cambridge. Si trattava, in sostanza, di un acceleratore lineare, capace di aumentare l'energia dei protoni accelerandoli attraverso una differenza di potenziale elettrico di 300 KV, lungo un tubo verticale di qualche metro di altezza. Questo acceleratore fu ben presto migliorato in modo da raggiungere un potenziale d'accelerazione di 800 KV. Fu questa la macchina impiegata nel primo esperimento in cui un elemento (il litio) venne artificialmente trasformato in un altro elemento (l'elio). Gli acceleratori lineari sono quegli acceleratori in cui le particelle

vengono accelerate lungo una linea retta, e non in percorsi circolari o a spirale. Questa categoria include il prototipo pionieristico di John Cockcroft ed Ernest Walton nonché lo SLAC (Stanford Linear Accelerator), un “cannone” elettronico lungo 3 Km.

Citiamo ancora:

- a) “Il Protosincrotrone” (PS) da 28 GeV, il primo impianto a essere stato costruito, che ora è utilizzato quasi esclusivamente come iniettore per gli altri acceleratori;
- b) “Il Superprotosincrotrone” (SPS) da 400 GeV, utilizzato anche per realizzare collisioni tra protoni e antiprotoni;
- c) “Il LEP” (Large Electron- Positron Collider), un grande anello del diametro di 4 Km per produrre collisioni tra elettroni e positroni fino a 100 GeV;
- d) “LHC” (Large Hadron Collider), collisore per adroni, in cui si realizzano urti fra fasci di protoni a un’energia di circa 14 TeV, il più moderno acceleratore del mondo.

Gli adroni sono particelle sensibili alla interazione forte. Tutti gli adroni sono composti di quark. I barioni, che sono particelle nell’accezione più comune del termine, sono tutti composti di tre quark; i mesoni, che sono mediatori di forza, sono tutti composti di una coppia quark- antiquark. Barioni e mesoni sono entrambi membri della famiglia degli adroni.

Da essa si spera potranno venire alcune risposte ai quesiti fondamentali della fisica delle particelle.

I moderni acceleratori possono accelerare le particelle, come gli elettroni e i protoni, fino a fargli raggiungere velocità altissime (prossime a quella della luce) grazie all’intervento di campi elettrici e magnetici. Nei più moderni acceleratori gli elettroni possono essere accelerati fino a raggiungere il 99,999999986 % della velocità della luce nel vuoto. Quando le particelle accelerate sono arrestate o sensibilmente rallentate nelle collisioni, la loro energia cinetica si converte in uno sciame di nuove particelle, così come previsto dalla famosa equazione di Einstein:

$$E = m * c^2$$

In circa mezzo secolo di attività sono state moltissime le scoperte fatte nel centro di Ginevra. Ricorderemo solamente le ricerche compiute da un gruppo di oltre cento scienziati guidati da Carlo Rubbia che hanno portato, sulla base dello studio di un vastissimo numero di collisioni protone- antiprotone realizzato nel Superprotosincrotrone (SPS), all’osservazione dei bosoni W e Z. La scoperta, che costituisce un elemento importante per la teoria dell’interazione elettrodebole, fu annunciata nel 1983 e valse a Rubbia il premio Nobel per la Fisica nel 1984.

L’ 8 agosto 1951 fu istituito l’Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN) con lo scopo precipuo di definire una coerente politica scientifica e di gestire unitariamente i programmi di ricerca nel campo della fisica nucleare e subnucleare. L’ INFN, diretto erede delle “scuole” di Roma e Firenze che negli anni ‘ 30, sotto la guida di Enrico Fermi e Bruno Rossi, rilanciarono la ricerca scientifica italiana, ebbe un ruolo trainante nel risveglio di tutta la ricerca scientifica nazionale e nel rilancio della ricerca all’interno delle Università. Il primo grande impegno del nuovo Istituto fu la costruzione di un sincrotrone per elettroni (allora il più avanzato al mondo) che venne installato nei Laboratori Nazionali di Frascati, realizzati proprio a questo scopo. Negli stessi anni i fisici italiani furono tra i promotori della nascita di un laboratorio europeo, il CERN, creato nel 1953 a Ginevra. I risultati scientifici che si venivano man mano ottenendo, suggerivano la

realizzazione di nuove macchine acceleratrici. Negli anni '60 i laboratori di Frascati svilupparono una via originale per lo studio delle particelle elementari rappresentata dagli Anelli di Accumulazione, che producono collisioni tra particelle di materia e di antimateria. Questa nuova via si rivelò fertilissima, e la successiva realizzazione di macchine di questo tipo presso i principali laboratori di tutto il mondo ha permesso fondamentali scoperte sulla struttura del microcosmo. L'ultimo quarto del secolo scorso è stato caratterizzato da uno straordinario sviluppo della fisica subnucleare, con l'affermazione del cosiddetto "modello standard". Importanti sono stati i contributi dei fisici italiani, sia in campo teorico che sperimentale, per il raggiungimento di questo risultato. Negli anni più recenti nell' INFN si è inoltre rafforzata una linea di ricerca caratterizzata dallo studio di processi generati da raggi cosmici di altissima energia, da neutrini, da onde gravitazionali, da possibili componenti della "materia oscura" o da particelle emesse nei primi istanti dell'universo. Tali ricerche impongono la massima protezione degli strumenti di misura da ogni interferenza, ed hanno portato all'utilizzo di laboratori sotterranei, che impiegano la copertura rocciosa per schermare gli apparati sperimentali dai raggi cosmici. I Laboratori Nazionali del Gran Sasso, realizzati a partire dagli anni '80, e l'European Gravitation Observatory (EGO) sono centri di valenza internazionale ove si affrontano queste nuovissime problematiche. L'INFN ha avuto un ruolo di primo piano fin dalla sua fondazione e continua a confrontarsi da protagonista con le sfide poste dalla conoscenza dei segreti più profondi della natura.

Prova scritta di Fisica
Esame di stato - Liceo Scientifico Sperimentale
Anno 1984 – Tema n° 1

Un circuito elettrico è costituito da una bobina A e da un condensatore C disposti in serie. La bobina A è formata da 1000 spire con resistenza elettrica di $15 \, \Omega$ ed ha un coefficiente di autoinduzione di $10 \, mH$. Il conduttore C ha la capacità di $6 \, \mu F$. Agli estremi del circuito si applica un generatore di tensione alternata con frequenza di $50 \, Hz$ e valore efficace 30 volt.

- a) cosa indicherà un amperometro inserito nel circuito?
- b) quale valore dovrebbe avere la frequenza della tensione alternata perché il valore della impedenza uguagli quello della resistenza?
- c) Si esponga la teoria dei circuiti contenenti resistenza, induttanza e capacità in serie, in corrente alternata.

Analisi della traccia-considerazioni teoriche- indicazioni per la soluzione

Il tema proposto rientra nell'ambito della analisi dei circuiti in corrente alternata. Le richieste del problema non presentano di per sé difficoltà, ma sono relative ad un argomento – i circuiti R-L-C con alimentazione in alternata - che raramente viene affrontato in un corso di Fisica nei Licei Scientifici. Si tratta, infatti, di un argomento alquanto specialistico.

Nel 1831 (quasi contemporaneamente a Henry) Faraday scoprì il fenomeno che oggi chiamiamo della “induzione elettromagnetica”: un campo magnetico variabile nel tempo provoca il passaggio di corrente elettrica. Per analizzare questo importantissimo fenomeno siamo dunque costretti ad abbandonare il terreno dei campi elettrici e magnetici stazionari, per passare ai campi lentamente variabili nel tempo o quasi stazionari. Per discutere la legge dell'induzione elettromagnetica occorre anzitutto un'analisi abbastanza approfondita del concetto di forza elettromotrice. In condizioni stazionarie, la forza totale $\vec{F}$ agente su una carica q è solo funzione del punto. Possiamo scrivere:

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$$

cosicché il vettore $\vec{F}$ determina un campo vettoriale. In generale, nel circuito (e nella zona circostante) sarà presente un campo elettrostatico $\vec{E}_S$, cui corrisponde una forza $\vec{F}_S = e \vec{E}_S$ conservativa. Ma, la forza totale $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ non può essere conservativa. Concludiamo che è necessariamente:

$$\vec{F} = e \vec{E}_S + \vec{F}_{nc}$$

dove $\vec{F}_{nc}$ è una forza non conservativa, funzione del punto, agente nell'interno del generatore, e caratteristica di esso generatore.

La definizione di campo elettrico nelle situazioni non stazionarie

Sembra di poter riassumere le considerazioni che precedono con l'affermazione che su una carica e in generale (lasciando peraltro da parte i campi elettromotori di origine

chimica e meccanica) agiscono due tipi di forze: $\vec{F}_S$ dovuta al campo elettrostatico, che ha come sorgenti le cariche elettriche, ed $\vec{F}_i$ dovuta all'induzione elettromagnetica e perciò indipendente dalle cariche elettriche. Sembra perciò che si possono definire separatamente due campi:

$$\begin{cases} \vec{E}_S = \frac{\vec{F}_S}{e} & (\text{elettrostatico, conservativo}) \\ \vec{E}_i = \frac{\vec{F}_i}{e} & (\text{indotto, non conservativo}) \end{cases}$$

Ma, quello che è possibile effettivamente osservare, anche in linea di principio, è solo la forza totale:

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_i$$

che agisce sulla carica e . La distinzione di $\vec{F}$ in una componente elettrostatica e una componente indotta è possibile solo se si conoscono le cause che generano il campo: è evidente che ciò non si verificherà in generale e che comunque un'analisi delle sorgenti del campo non può essere presupposta nella definizione stessa del campo elettrico. Non ci resta che estendere (anzi mantenere) la definizione di campo elettrico già data in elettrostatica nella forma:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{e}$$

in cui $\vec{F}$ è la forza totale effettivamente agente sulla carica, ossia includere nel campo elettrico $\vec{E}$ sia $\vec{E}_S$ che $\vec{E}_i$:

$$\vec{E} = \vec{E}_S + \vec{E}_i$$

Con questo dobbiamo ammettere che il campo elettrico $\vec{E}$ non è conservativo in generale, ma solo nei casi statici. Più precisamente la relazione valida per i campi statici:

$$\oint \vec{E} * d\vec{l} = 0 \quad (\text{campi statici})$$

va sostituita con la relazione più generale:

$$\oint \vec{E} * d\vec{l} = f = - \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Relazioni e leggi prese in esame

$$i_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt} \quad \text{valore efficace di una corrente alternata}$$

$$i(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad \text{intensità di corrente alternata sinusoidale}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \text{impedenza totale di un circuito RLC - serie}$$

$$P_{\text{eff}} = V_{\text{eff}} * i_{\text{eff}} * \cos \varphi \quad \text{potenza di una corrente alternata; formula di Galileo Ferraris}$$

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Soluzione del problema (si richiama il punto a del testo del problema)

a) Cosa indicherà un amperometro inserito nel circuito?

La misura di una corrente alternata richiede strumenti basati su principi diversi da quelli utilizzabili per la misura di corrente continua. Uno strumento a bobina mobile non riuscirebbe infatti, per la sua inerzia, a seguire le variazioni del verso di percorrenza della corrente alternata. Si deve utilizzare un effetto che dipenda dal quadrato dell'intensità di corrente in modo che non sia sensibile all'alternanza del verso di percorrenza. Gli strumenti di misura in c.a. sfruttano l'effetto termico della corrente, che dipende dal quadrato della intensità di corrente ed è perciò indipendente dal verso della corrente. In generale, ogni strumento di misura di grandezze alternate, come per esempio un amperometro, un voltmetro, ecc... è tarato con correnti note in modo da fornire direttamente il valore efficace della grandezza in esame. L'amperometro a filo caldo utilizza, difatti, l'effetto Joule e fornisce il valore efficace della corrente alternata.

Calcolo del valore efficace di una corrente alternata

L'energia elettrica dissipata per effetto Joule in una resistenza R percorsa da una corrente alternata, in un intervallo infinitesimo di tempo dt , può essere espressa dalla relazione:

$$dL = R i^2(t) dt$$

(valida per una corrente continua) in quanto l'intensità di una c.a. può ritenersi costante in un intervallo infinitesimo di tempo. Per ottenere l'energia L , dissipata in un periodo T , è necessario calcolare il seguente integrale:

$$L = \int_0^T dL = \int_0^T R i(t)^2 dt = \int_0^T R I_0^2 \sin^2(\omega t) dt = R I_0^2 \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = R I_0^2 * \frac{T}{2}$$

che rappresenta l'energia dissipata da una corrente continua di intensità $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ nello stesso tempo T . Per la definizione di valore efficace, risulta quindi che il valore efficace di una corrente alternata sinusoidale risulta di conseguenza:

$$i_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Inoltre risulta che il valore efficace della corrente è espresso dalla relazione:

$$i_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt}$$

In cui l'espressione sotto radice è il valor medio di $i(t)^2$ in un periodo.

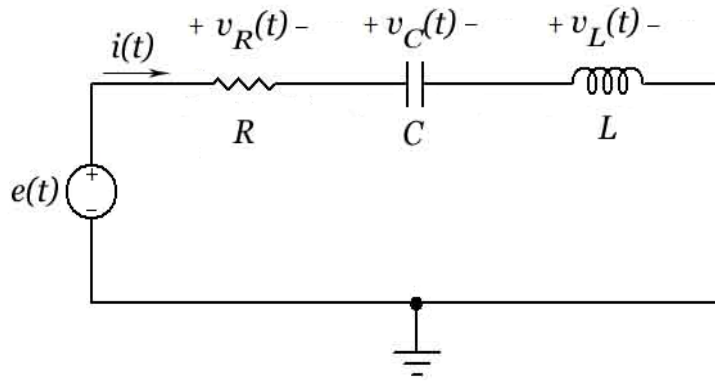
Il valore istantaneo di una corrente alternata può essere misurato con l'oscilloscopio a raggi catodici che permette anche di determinare le altre grandezze caratteristiche, quali la frequenza e il valore di picco. Lo strumento più usato è, però, l'amperometro raddrizzatore, costituito da un amperometro a bobina mobile in serie con un raddrizzatore. La corrente che attraversa lo strumento è variabile, ma unidirezionale. La bobina subisce una deflessione proporzionale al valor medio della corrente pulsata. La taratura è

generalmente fatta in modo che lo strumento fornisca il valore efficace della corrente da misurare.

Si richiama, ora, il punto b del problema.

b) quale valore dovrebbe avere la frequenza della tensione alternata perché il valore della impedenza uguagli quello della resistenza?

Consideriamo il seguente circuito R-L- C serie:



Il circuito è alimentato da una f.e.m. alternata del tipo:

$$e(t) = V_0 \sin \omega t$$

di ampiezza V_0 , periodo T pari a :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

e frequenza

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Si trova che, trascorsa una fase iniziale transitoria, il circuito è attraversato da una corrente di tipo sinusoidale avente la stessa frequenza della f.e.m. espressa dalla relazione:

$$i(t) = I_0 \sin (\omega t - \varphi)$$

L'angolo φ rappresenta lo sfasamento fra la tensione e la corrente e soddisfa la condizione :

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Poiché

$$i(t) = I_0 \sin (\omega t - \varphi)$$

a causa dello sfasamento φ , la corrente assume il valore zero dopo un tempo t per cui :

$$\omega t - \varphi = 0$$

$$\omega t = \varphi$$

$$t = \frac{\varphi}{\omega}$$

Inoltre, il rapporto tra il valore massimo V_0 della f.e.m. e dell'intensità di corrente I_0 è chiamato "resistenza apparente" o "impedenza" e corrisponde alla resistenza R dei circuiti in corrente continua:

$$Z = \frac{V_0}{I_0}$$

con Z dato da:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

Ciò premesso, per l'analisi di un circuito R-L-C alimentato da una tensione alternata espressa da:

$$e(t) = V_0 \sin \omega t$$

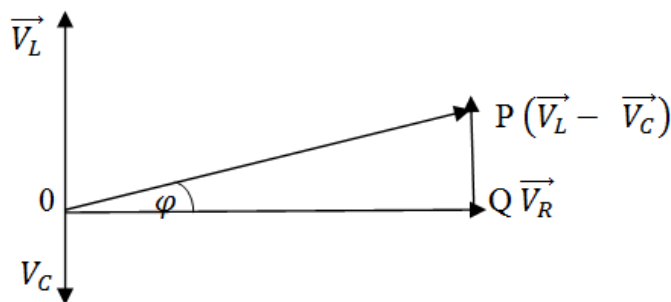
ricorriamo alla rappresentazione vettoriale della corrente e della tensione ai capi di R, L e C. Rappresentiamo in ascisse l'intensità di corrente e la tensione ai capi della resistenza, essendo in fase tra loro, per mezzo dei vettori $\vec{I}_0$ e $\vec{V}_0 = R \vec{I}_0$ rispettivamente. La tensione ai capi dell'induttanza, essendo in anticipo di $\pi/2$ rispetto alla corrente (in termini equivalenti la corrente è in ritardo di $\pi/2$ rispetto alla tensione ai capi dell'induttanza) è rappresentata da un vettore di modulo

$$V_L = X_L I_0 = \omega L I_0$$

orientato secondo il semiasse y positivo. Analogamente, la tensione ai capi del condensatore, essendo in ritardo di $\pi/2$ rispetto alla corrente (in termini equivalenti, la corrente è in anticipo di $\pi/2$ rispetto alla tensione ai capi del condensatore), è rappresentata dal vettore di modulo:

$$V_C = X_C I_0 = \frac{1}{\omega C} I_0$$

orientato secondo il semiasse y negativo. Da quanto detto segue che la rappresentazione vettoriale delle tensioni ai capi di R, L e C di un circuito R-L-C serie, alimentato da una tensione alternata di ampiezza V_0 , è la seguente :



La f.em. che alimenta il circuito è rappresentata dal vettore $\vec{OP}$, di modulo V_0 , somma vettoriale dei vettori $\vec{V}_R$, $\vec{V}_L$, $\vec{V}_C$. Dal triangolo rettangolo OPQ si ricava:

$$OP^2 = OQ^2 + PQ^2$$

Quindi:

$$\begin{aligned} V_0^2 &= (V_R)^2 + (V_L - V_C)^2 \\ V_0^2 &= (R I_0)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 * I_0^2 \\ V_0^2 &= \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right] * I_0^2 \end{aligned}$$

da cui, risolvendo rispetto ad I_0 :

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Inoltre, dallo stesso triangolo rettangolo OPQ , in cui φ è il ritardo della corrente rispetto alla tensione (avendo considerato il caso in cui $\omega L > \frac{1}{\omega C}$), si ricava:

$$\begin{aligned} QP &= OQ * \operatorname{tg} \varphi \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{QP}{OQ} = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) * I_0}{R I_0} = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R} \end{aligned}$$

Se le caratteristiche del circuito sono tali da rendere vera l'uguaglianza:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

la tensione applicata è sempre in fase con la corrente. In tal caso si dice che il circuito è in risonanza ed esso si comporta come un circuito puramente ohmico. Infatti, se è verificata la relazione precedente si ha $Z = R$. Si osservi che in tutti i circuiti in c.a. la tensione alternata applicata è sempre sfasata rispetto alla corrente, tranne che nel circuito puramente ohmico e nel caso della risonanza. Ciò assume particolare importanza agli effetti della potenza efficace di una corrente alternata.

Potenza efficace di una corrente alternata

La potenza di una corrente alternata non può essere calcolata con la relazione $P = V * i$ perché i valori della f.e.m. e della intensità di corrente variano continuamente. La potenza istantanea si può benissimo calcolare moltiplicando tra loro i valori di V ed i assumono nell'istante che si considera. Però, in pratica non è questo che interessa: ciò che interessa è invece la potenza efficace P_{eff} della corrente alternata, il cui valore è quello della potenza di una corrente continua capace di fornire la stessa quantità di energia nello stesso intervallo di tempo. Per calcolare la potenza di una corrente alternata si deve ricorrere alla seguente espressione dimostrata da Galileo Ferraris:

$$P_{eff} = V_{eff} * i_{eff} * \cos \varphi$$

nella quale l'angolo φ è la misura dello sfasamento tra tensione e corrente. E' utile tenere presente come, al tendere di φ a 90° , la potenza tende a zero, anche con valori elevati di V_{eff} e i_{eff} ; in tal caso la corrente si dice swattata e non rende lavoro. Nella tecnica sarà, pertanto, di grande importanza prendere speciali precauzioni affinché si abbia, nei limiti del possibile, ad assumere valori molto bassi. Il prodotto $V_{eff} * i_{eff}$ si dice “*potenza apparente*” di una corrente alternata. In elettrotecnica si preferisce misurare tale potenza in volt-ampere anziché in watt.

Se $\varphi = 0$ (circuito puramente ohmico oppure in condizioni di risonanza) la potenza efficace è massima, essendo in questo caso $\cos \varphi = 1$. Se $\varphi = 90^\circ$ (circuito puramente induttivo o puramente capacitivo) la potenza efficace è nulla, essendo $\cos \varphi = 0$. Se φ ha un valore compreso tra 0° e 90° , la potenza efficace è tanto più elevata quanto più piccolo è lo sfasamento tra tensione e corrente.

Calcolo della potenza di una corrente alternata

Il valore istantaneo della potenza di una corrente alternata è dato dal prodotto:

$$w(t) = f(t) * i(t) = V_0 \sin \omega t * I_0 \sin (\omega t - \varphi)$$

ove φ è l'angolo di fase. In pratica interessa solo il valor medio che la funzione $w(t)$ assume in un periodo. Per calcolare tale valore ricorriamo al teorema del valore medio che afferma:

Data una funzione $y = f(x)$, integrabile nell'intervallo $[a, b]$, si ha:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) * f(x_0)$$

ove $f(x_0)$ è il valore medio della funzione $y = f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$. Da tale teorema si evince, quindi, che il valor medio di una funzione nell'intervallo $[a, b]$ è dato da:

$$f(x_0) = \frac{1}{(b - a)} * \int_a^b f(x) dx$$

Il valor medio della funzione $w(t)$ in un periodo è perciò dato da:

$$\bar{w} = \frac{1}{T} * \int_0^T w(t) dt = \frac{1}{T} * \int_0^T V_0 I_0 \sin \omega t * \sin (\omega t - \varphi) dt$$

Applicando la nota formula di Werner:

$$\sin \alpha * \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{V_0 I_0}{2T} * \int_0^T [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)] dt = \frac{V_0 I_0}{2} \cos \varphi = \frac{V_0 I_0}{\sqrt{2} \sqrt{2}} \cos \varphi \\ &= V_{eff} * i_{eff} * \cos \varphi \end{aligned}$$

in quanto

$$V_{eff} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \quad \text{ed} \quad i_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Soluzione numerica

$$N = 1.000 ; R = 15 \, \Omega ; L = 10 \, mH ; C = 6 \, \mu F ; f = 50 \, Hz ; V_{eff} = 30 \, V$$

Tenendo presente che l'impedenza totale di un circuito R-L-C- serie è data da

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

affinché risulti $Z = R$, cioè il valore dell'impedenza totale del circuito risulti uguale alla resistenza ohmica, deve essere:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

ovvero:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

da cui:

$$\omega^2 L C = 1$$

Pertanto:

$$\omega^2 = \frac{1}{L C}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L C}}$$

Quindi:

$$2\pi f = \frac{1}{\sqrt{L C}}$$

ed infine

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L C}}$$

Sostituendo i valori numerici forniti dal testo:

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L C}} = \frac{1}{2 * 3,14 * \sqrt{10 * 10^{-3} H * 6 * 10^{-6} F}} = \frac{1}{6,28 * \sqrt{6 * 10^{-8}}} Hz \\ &= \frac{10^4}{6,28\sqrt{6}} Hz \cong 650 Hz \end{aligned}$$

In condizione di risonanza avremo che il valore massimo della corrente $I_{0,max}$ è dato da:

$$I_{0,max} = \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{R}$$

Poiché il valore efficace della tensione alternata è 30 V, possiamo dire che il valore di picco della tensione alternata è:

$$V_0 = \sqrt{2} * V_{eff} = \sqrt{2} * 30 V \cong 42,4 V$$

Quindi:

$$I_{0,max} = \frac{V_0}{R} = \frac{42,4 V}{15 \Omega} = 2,83 A$$

Con i dati forniti dal testo si ottiene una I_0 data da:

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \\ &= \frac{42,4}{\sqrt{15^2 + \left(6,28 * 50 * 10 * 10^{-6} - \frac{1}{6,28 * 50 * 6 * 10^{-6}}\right)^2}} \\ &= \frac{42,4}{531} A \cong 79 mA \end{aligned}$$

L'intensità efficace sarà pertanto:

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{79}{\sqrt{2}} mA \cong 56 mA$$

Si ottiene, pertanto, una I_0 notevolmente inferiore rispetto a quella di risonanza, in quanto la frequenza di 50 HZ suggerita nel testo è molto diversa dal valore precedentemente calcolato (650 Hz).

Osservazioni

Nel testo è presente un dato non necessario: il numero di spire ($N=1000$) della bobina. Inoltre, le richieste del problema non presentano di per sé difficoltà, ma sono relative ad un argomento – i circuiti R-L-C con alimentazione in alternata - che molto raramente viene affrontato in un corso di Fisica nei Licei Scientifici. Si tratta, infatti, di un argomento alquanto specialistico.

Si richiama, ora, il punto c del problema.

Questo punto non viene sviluppato in quanto trattasi di questioni teoriche reperibili in qualunque buon testo di Fisica.

Esame di stato di Liceo Scientifico
Indirizzo Scientifico - Tecnologico
Progetto Brocca anno 1999 - Tema n° 1

Si vuole determinare il rapporto e/m tra carica e massa di un elettrone, utilizzando un tubo contenente neon a bassa pressione al cui interno gli elettroni sono emessi per effetto termoelettronico (conosciuto anche come effetto termoionico). Essi hanno una velocità iniziale trascurabile e sono accelerati tra due elettrodi da una differenza di potenziale $\Delta V = 0,78 \text{ kV}$ fino a raggiungere la velocità v . Gli atomi di neon ne rendono visibile la traiettoria interagendo al loro passaggio. Una volta raggiunta la velocità v , gli elettroni entrano in una zona che è sede di un campo magnetico con $B = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ e con un angolo α tra i vettori $\vec{B}$ e $\vec{v}$.

Il candidato:

1. descriva e spieghi l'effetto termoelettronico;
2. spieghi perché gli atomi di neon nel tubo rendono visibile la traiettoria;
3. disegni e commenti la possibile traiettoria di un elettrone tra due elettrodi (prima che risenta del campo magnetico) e poi all'interno del campo magnetico per $\alpha = 90^\circ$ e per $\alpha < 90^\circ$;
4. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare la velocità dell'elettrone in funzione della d.d.p. tra gli elettrodi in un tubo sotto vuoto; calcoli tale velocità ricordando che la carica e la massa dell'elettrone sono $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ e $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$;
5. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare il raggio della traiettoria in funzione della velocità dell'elettrone e dell'induzione magnetica; calcoli il raggio di tale traiettoria sapendo che l'angolo tra i vettori $\vec{B}$ e $\vec{v}$ è $\alpha = 60^\circ$;
6. ricavi e commenti la formula che permette di calcolare il rapporto e/m in funzione dei valori misurabili $\Delta V, B$ e r .

Soluzione del problema (si richiama il punto 1 del testo del problema)

1 Il candidato descriva e spieghi l'effetto termoelettronico

Un filamento di metallo, in una ampolla a vuoto spinto, e portato all'incandescenza, emette elettroni. L'emissione di corpuscoli negativi crea una carica spaziale negativa (nube elettronica). Questo fenomeno fu scoperto da Edison (1834) per filamenti di platino e di carbone, ma si verifica anche per altre sostanze, ed è molto attivo nei metalli. L'effetto termoelettronico o effetto Edison consiste nell'emissione di elettroni liberi da parte di un metallo portato all'incandescenza nel vuoto. Per verificare e studiare sperimentalmente l'effetto Edison si ricorre al diodo di Fleming che consiste in un'ampolla a vuoto spinto nella quale si trova un filamento F di tungsteno che si può portare all'incandescenza mediante una batteria di accensione di 4-5 volt. Per aumentare l'emissione elettronica si può ricoprire il filamento con un sottile strato (monoatomico) di torio o di ossido di bario. Affacciato al filamento è posto un conduttore P detto placca. Fra placca e filamento è inserita una batteria che crea una tensione anodica V_a ad es. 250 volt, e regolabile mediante un dispositivo potenziometrico. Il circuito di placca è interrotto fra filamento e

placca. Se il filamento è spento, il milliamperometro non segna corrente. Se di rende ora incandescente il filamento, chiudendo il circuito del filamento, si osserva che il milliamperometro segnala un passaggio di corrente i_a , dell'ordine dei milliampere, detta corrente anodica, solo se la placca è positiva.

Le leggi dell'effetto termoelettronico

Le leggi sull'emissione termoelettronica furono studiate dal Richardson che sperimentò su diodi con filamenti di sostanze diverse, portati a differenti temperature e facendo variare, entro larghi limiti, la tensione anodica V_a . Le leggi sono le seguenti:

1. La corrente anodica i_a passa solo dalla placca positiva al filamento negativo. L'analisi della corrente anodica, fatta con tubi di forma conveniente, porta a stabilire che questa corrente è dovuta effettivamente ad un flusso di elettroni, perfettamente uguali a quelli che costituiscono i raggi catodici, e che si muovono dal filamento alla placca.
2. la corrente anodica presenta il fenomeno della saturazione.

Per una data temperatura del filamento, la corrente anodica cresce dapprima con l'aumentare della tensione anodica V_a , cioè la placca attira un numero maggiore di elettroni quanto più grande è V_a , ma ad un certo punto ogni aumento di V_a lascia quasi costante l'intensità della corrente. Si dice che si è raggiunta l'intensità di saturazione (i_{sat}); ciò avviene quando tutti gli elettroni emessi da F sono attirati da P.

3. Il valore della corrente di saturazione (i_{sat}) dipende dalla temperatura assoluta del filamento e cresce con essa.

Infatti se si fornisce al filamento maggiore energia termica, più numerosi saranno gli elettroni espulsi. Questa legge è ben rappresentata dalla formula che Richardson trovò per via teorica, in buon accordo coi risultati sperimentali, ove i_{sat} è l'intensità areica di saturazione (intensità per metro quadro di superficie metallica riscaldata e misurata in $\text{ampere}/\text{metro}^2$). A è una costante universale, b un coefficiente caratteristico per ogni tipo di filamento, T la temperatura assoluta ed e la base dei logaritmi naturali;

$$i_{sat} = A T^2 e^{\frac{-b}{T}}$$

Interpretazione elettronica dell'effetto termoelettronico. Lavoro di estrazione

Nel filamento metallico vi sono gli elettroni liberi di conduzione formanti una specie di nube nella quale sono immersi gli ioni positivi del metallo (legame metallico). Riscaldando il filamento mediante effetto Joule, aumenta l'energia cinetica degli elettroni e se questa energia raggiunge un certo valore, gli elettroni riusciranno a lasciare il metallo. Se un elettrone, di carica $-e$ e abbandona la superficie del metallo, esso sarà sottoposto da parte delle altre particelle, di carica complessiva $+e$, ad una forza di attrazione che si oppone al movimento. Se tuttavia l'elettrone riesce a lasciare il metallo, le forze di attrazione, durante il movimento di uscita, compiranno il lavoro $-W_0$ ($W_0 > 0$). Affinché un elettrone possa uscire dal metallo, dunque, occorre comunicargli l'energia W_0 , detto lavoro di estrazione del metallo. Nel caso dell'effetto termoelettronico, questo lavoro è fornito dall'energia termica: maggiore è la temperatura raggiunta dal filamento, maggiore sarà il numero degli elettroni che lasceranno il metallo. Bisogna però tener presente che il lavoro di estrazione aumenta con il numero degli elettroni già usciti; infatti, se il numero di questi è n , la carica totale nel metallo sarà $+ne$ e pertanto l' $(n+1)$ esimo

elettrone subirà l'azione di una forza n volte più grande del primo elettrone uscito dal metallo. All'interno di un metallo gli elettroni di conduzione si muovono disordinatamente come le molecole di un gas. In condizioni normali, nonostante il moto di agitazione termica, gli elettroni non fuoriescono dal metallo in quanto, in prossimità della superficie del metallo, esiste una barriera di potenziale che ne riduce progressivamente l'energia cinetica fino ad annullarla. Dette E_e ed E_i le energie che un elettrone avrebbe rispettivamente all'esterno del metallo, in un punto molto vicino alla superficie, e nell'interno, la differenza :

$$\Delta E = E_e - E_i$$

risulta positiva ed è chiamata “*energia di estrazione*” o “*lavoro di estrazione*” del metallo, in quanto rappresenta l'energia minima che è necessario fornire al metallo perché si abbia emissione di elettroni. Il rapporto

$$\Delta V = \frac{\Delta E}{e}$$

rappresenta l'energia di estrazione per unità di carica e si chiama “*potenziale di estrazione*”. Esso dipende dalla natura del metallo considerato e dalla temperatura alla quale esso si trova. I potenziali di estrazione sono di alcuni volt. Per il rame, ad esempio, il potenziale di estrazione è 4,4 volt. Ciò significa che per produrre l'emissione di elettroni da un pezzo di rame è necessario fornire a ciascun elettrone che viene emesso una quantità di energia almeno pari a 4,4 eV. Uno dei meccanismi con cui è possibile cedere agli elettroni l'energia sufficiente perché si abbia emissione consiste nel riscaldamento del metallo. Si ha così l'effetto termoelettrico, scoperto nel 1883 dall'americano T. A. Edison, che consiste nell'emissione di elettroni da parte di conduttori sufficientemente riscaldati, in pratica portati all'incandescenza. Consideriamo un tubo a vuoto con due elettrodi connessi ai poli di una batteria in serie con un milliamperometro. In condizioni normali, l'amperometro non indica passaggio di corrente elettrica, se, però, il catodo viene riscaldato, ad esempio facendovi passare la corrente di un circuito secondario, si osserva il passaggio di una corrente tanto più intensa quanto più è elevata la temperatura del catodo. Difatti, il numero di elettroni emessi in un certo intervallo di tempo aumenta con l'aumentare della temperatura del metallo. Si dimostra che il numero degli elettroni emessi in un secondo attraverso l'unità di superficie è espresso dalla formula di Richardson- Fermi:

$$N = AT^2 e^{\frac{-\Delta E}{KT}}$$

In cui A è una costante, uguale per tutti i metalli, T è la temperatura assoluta del metallo, ΔE è l'energia di estrazione, K è la costante di Boltzmann ed e è il numero di Nepero. L'effetto termoelettronico è facilmente spiegabile in termini classici. Difatti, aumentando la temperatura, aumenta l'energia cinetica media delle particelle che costituiscono il metallo e quindi degli elettroni. Se l'energia acquisita dagli elettroni a causa dell'aumento di temperatura è sufficiente a vincere l'attrazione elettrostatica da parte del reticolo cristallino, fuoriesce dal metallo. Una volta all'esterno del metallo, gli elettroni si muoveranno verso l'anodo di moto accelerato in quanto su di essi agirà la forza dovuta al campo elettrico generato dalla differenza di potenziale applicata agli elettrodi. Si potrà avere, in questo modo, una corrente elettrica che è possibile rilevare inserendo nel circuito un milliamperometro in serie alla batteria. Si osserva che al crescere di V cresce anche i ,

fino però a un certo valore, chiamato corrente di saturazione. Raggiunto tale valore, la corrente rimane costante, anche se la tensione V continua ad aumentare. La corrente di saturazione a una certa temperatura T del filamento, è data da

$$i_{sat} = e A S T^2 e^{\frac{-\Delta E}{kT}}$$

La più importante applicazione del diodo consiste nel suo impiego come raddrizzatore di corrente. Altre applicazioni: il triodo o valvola termoionica. Una delle più importanti applicazioni del triodo consiste nell'utilizzarlo come amplificatore di corrente o come amplificatore di tensione. Oltre al diodo e al triodo, esistono valvole termoioniche con un maggior numero di elettrodi. Nella tecnica in molte applicazioni le valvole termoioniche sono state sostituite da dispositivi allo stato solido. Nel campo delle alte tensioni e delle elevate potenze, come nel raddrizzamento di corrente alternata a elevata tensione e nella amplificazione delle radiotrasmissioni, sono invece ancora oggi usate le valvole termoioniche. L'oscillografo a raggi catodici: uno strumento di grande importanza nella tecnica moderna, per lo studio non solo dei fenomeni elettrici, ma anche di fenomeni periodici di natura diversa, come, per esempio, la vibrazione di una sorgente sonora e le pulsazioni del cuore, rivelabili sotto forma di impulsi elettrici.

Si richiama ora il punto 2 del testo del problema

2 Il candidato spieghi perché gli atomi di neon nel tubo rendono visibile la traiettoria degli elettroni

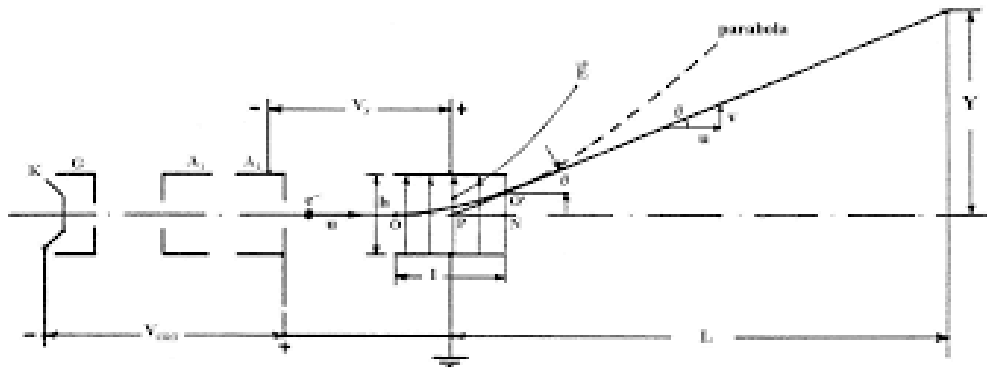
Gli elettroni, accelerati dal campo elettrico presente nel tubo, urtano, nel loro percorso verso l'anodo, gli atomi di neon cedendo loro energia e provocandone l'eccitazione, ovvero il passaggio di un elettrone in un orbitale più energetico; in questa configurazione l'elettrone è instabile e tende a tornare allo stato fondamentale emettendo l'energia in eccesso sotto forma di radiazione elettromagnetica (ovvero di un fotone avente energia e frequenza legate dalla relazione di Planck $\Delta E = h\nu$), corrispondente, per l'atomo di elio, a luce visibile.

Si richiama il punto 3 del testo del problema

3 Il candidato disegni e commenti la possibile traiettoria di un elettrone tra due elettrodi (prima che risenta del campo magnetico) e poi all'interno del campo magnetico per $\alpha = 90^\circ$ e per $\alpha < 90^\circ$.

Consideriamo due conduttori metallici aventi superfici piane e parallele, separate da una certa distanza d . Questi due elettrodi metallici, posti a distanza d , costituiscono un condensatore tra le cui armature è applicata una d.d.p. V . Pertanto l'interno del condensatore è sede di un campo elettrico uniforme dato da $E = V/d$ ove d è la distanza tra le due armature. Un elettrone penetra con velocità v nel campo elettrico uniforme stabilito tra gli elettrodi, all'uscita del condensatore viene intercettato da uno schermo fluorescente S a distanza D dal condensatore. (vedi figura). Se L è la lunghezza delle armature e d la loro distanza, la deflessione totale dell'elettrone sullo schermo è data da:

$$Y = \frac{eV}{dmv^2} * \left(\frac{L^2}{2} + DL \right)$$



Fissato un sistema cartesiano Oxy, come in figura, osserviamo che sull'elettrone, nella regione sede del campo elettrico, agisce la forza $\vec{F}_e = e \vec{E}$, diretta nel verso positivo dell'asse y. L'elettrone si muoverà, pertanto, di moto uniformemente accelerato con accelerazione $\vec{a}$ nella stessa direzione del campo. La legge oraria del moto è pertanto:

$$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

Tenuto conto del fatto che l'asse x è perpendicolare alle linee di forza del campo elettrostatico e che il modulo del vettore accelerazione è:

$$a = e E / m$$

si ottiene l'equazione parametrica della traiettoria dell'elettrone nella regione dove ha sede il campo elettrico;

$$\begin{cases} x = v t \\ y = \frac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$

Poiché

$$a = e E / m$$

Si ottiene

$$\begin{cases} x = v t \\ y = \frac{1}{2} (e E / m) t^2 \end{cases}$$

da cui, eliminando il parametro t, si ottiene l'equazione cartesiana della traiettoria:

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{e E}{m v^2} \right) x^2$$

che rappresenta l'equazione di una parabola. La traiettoria dell'elettrone, all'interno delle armature del condensatore, è pertanto una traiettoria parabolica. La deflessione AB dell'elettrone, all'uscita del campo elettrico, si ottiene, ponendo nell'equazione della traiettoria $x=L$. Si ha, pertanto:

$$AB = y(L) = \frac{1}{2} \left(\frac{e E}{m v^2} \right) L^2$$

All'esterno del condensatore, essendo nulla la risultante delle forze agenti sull'elettrone, esso si muoverà di moto rettilineo uniforme. Pertanto, all'esterno del condensatore, la traiettoria è data dalla retta tangente alla parabola nel punto $x = L$. Il coefficiente angolare di tale retta tangente è dato dalla derivata della funzione $y(x)$ (l'equazione della parabola) calcolata per $x=L$. Si ha, perciò:

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(L)$$

Calcolo la derivata prima della funzione rispetto ad x:

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{e E}{m v^2} \right) x^2$$

$$y'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{e E}{m v^2} \right) * 2x = \left(\frac{e E}{m v^2} \right) x$$

Quindi

$$y'(L) = \left(\frac{e E}{m v^2} \right) L$$

cioè

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(L) = \left(\frac{e E}{m v^2} \right) L$$

Per cui la successiva deflessione BC dell'elettrone è:

$$BC = D * \operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{e E L D}{m v^2} \right)$$

La deflessione totale è:

$$Y = AB + BC = \frac{1}{2} \left(\frac{e E}{m v^2} \right) L^2 + \frac{e E L D}{m v^2} = \frac{e E}{m v^2} \left(\frac{L^2}{2} + D L \right)$$

Ponendo, infine, nella precedente relazione $E = V/d$ (modulo del campo elettrico tra le armature del condensatore), si ottiene:

$$Y = \frac{e V}{m d v^2} \left(\frac{L^2}{2} + D L \right)$$

relazione, dalla quale, misurando Y, è possibile ricavare il rapporto e/m , cioè la carica specifica degli elettroni, solo determinando la loro velocità.

Moto di una carica elettrica in un campo magnetico

Su una carica q in moto con velocità $\vec{v}$ rispetto a un campo magnetico $\vec{B}$, agisce la forza

$$\vec{f} = q (\vec{v} \nabla \vec{B})$$

detta forza di Lorentz, in onore del fisico olandese Hendrik Antoon Lorentz che, con le sue ricerche sull'elettromagnetismo, agevolò l'introduzione della relatività ristretta da parte di Einstein. In particolare, detto α l'angolo formato dal vettore $\vec{v}$ con il campo magnetico $\vec{B}$, il modulo della forza agente sulla carica q è:

$$f = q v B \sin \alpha$$

Tale forza è nulla non solo se la velocità è nulla, cioè se la carica è ferma, ma più in generale se la velocità è parallela al campo magnetico essendo in questo caso $\sin \alpha = 0$. Segue così che un campo magnetico non esercita alcuna forza né su una carica elettrica in quiete, né su una carica elettrica che si muove parallelamente al campo magnetico. Se, invece, la velocità della carica è perpendicolare al campo magnetico, è $\alpha = 90^\circ$ e quindi $\sin \alpha = 1$, per cui la forza assume il valore massimo:

$$f = q v B$$

Poiché

$$\vec{f} = q (\vec{v} \nabla \vec{B})$$

la forza di Lorentz $\vec{f}$ è data dal prodotto vettoriale del vettore velocità $\vec{v}$ della particella e del vettore induzione magnetica $\vec{B}$. Tale forza risulta, quindi, sempre perpendicolare al piano individuato dai due vettori $\vec{v}$ e $\vec{B}$, cioè è sempre perpendicolare sia a $\vec{v}$ che a

$\vec{B}$. Inoltre la forza $\vec{f}$ essendo perpendicolare alla velocità, non compie alcun lavoro; di conseguenza l'energia cinetica non varia durante il moto, cioè la velocità si mantiene costante in modulo. Concludiamo, così, che una carica elettrica soggetta solo alle forze di un campo magnetico uniforme ha velocità in modulo costante, cioè si muove di moto uniforme. Il campo magnetico ha come effetto solo quello di incurvare la traiettoria. Per questo motivo la forza magnetica si chiama anche “forza deflettente”. Come indicato dal testo della prova, supponiamo ora che un elettrone venga iniettato con velocità $\vec{v}$ perpendicolarmente al campo $\vec{B}$, ovvero l'angolo individuato dai due vettori risulti di 90° . Dato che $\vec{B}$ è perpendicolare a $\vec{v}$, l'intensità della forza magnetica, in questo caso, è $f = evB$. Dalla seconda legge della dinamica, poiché l'accelerazione è puramente centripeta $a_c = \frac{v^2}{r}$, si ottiene:

$$evB = ma_c = m \frac{v^2}{r}$$

cioè

$$r = \frac{m v}{e B} = \frac{p}{e B}$$

Le grandezze al secondo membro della precedente relazione sono tutte costanti; pertanto il raggio della traiettoria non varia. Si conclude, quindi, che una carica elettrica, che viene immessa in un campo magnetico uniforme perpendicolarmente alla direzione del campo, si muove di moto circolare uniforme nel piano perpendicolare alla direzione del campo magnetico, nel punto in cui la carica penetra nel campo. Il raggio della traiettoria è determinato dalla quantità di moto delle particelle, dalla loro carica e dall'intensità del campo magnetico. La traiettoria descritta dalla particella è una circonferenza che viene percorsa con velocità in modulo costante. Si tratta, quindi, di un moto circolare uniforme. La velocità angolare di tale moto è data da:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{e B}{m}$$

la corrispondente frequenza è:

$$f = \frac{\omega}{2 \pi} = \frac{q B}{2 \pi m}$$

Si osservi che la frequenza associata al moto circolare non dipende dalla velocità della particella. Tale risultato è valido nel caso in cui si possa trascurare la variazione della massa m con la velocità della particella, cioè per particelle con velocità piccola rispetto a quella della luce. (almeno finché $v \ll c$.) La frequenza calcolata prima è detta “frequenza di ciclotrone”, perché le particelle negli acceleratori chiamati ciclotroni circolano con questa frequenza. Nei moderni acceleratori le particelle si muovono con velocità confrontabili con quella luce; perciò la massa varia con la velocità della particella secondo la relazione:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

la frequenza non è più indipendente dalla velocità.

Nel caso in cui l'elettrone viene lanciato in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ con una generica inclinazione $\alpha < 90$, essa compie una traiettoria elicoidale. La particella, infatti,

mentre ruota in un piano perpendicolare a $\vec{B}$, per effetto della componente della velocità $\vec{v}$ secondo la normale a $\vec{B}$, trasla nella direzione del campo magnetico per effetto della componente della velocità parallela al vettore induzione magnetica $\vec{B}$. Il moto di traslazione è rettilineo uniforme in quanto $\vec{B}$ non modifica tale componente. Il moto della particella è perciò la composizione di un moto circolare uniforme in un piano perpendicolare al campo magnetico con un moto rettilineo uniforme nella direzione di $\vec{B}$. Il moto risultante è perciò un moto elicoidale, la cui traiettoria è un'elica cilindrica. La componente $\vec{v}_n$ della velocità, perpendicolare al campo magnetico $\vec{B}$, genera sulla carica e (elettrone) di massa m , una forza centripeta di intensità:

$$f = e v_n B$$

per cui il raggio R dell'elica è dato da:

$$R = \frac{m v_n}{e B}$$

il passo p

$$p = v_p T$$

dove v_p è la componente della velocità parallela al campo magnetico $\vec{B}$ e T il periodo di rotazione della carica e .

Si richiama il punto 4 del testo del problema

4. Il candidato ricavi e commenti la formula che permette di calcolare la velocità dell'elettrone in funzione della d.d.p. tra gli elettrodi in un tubo sotto vuoto; calcoli tale velocità ricordando che la carica e la massa dell'elettrone sono $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ e $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$

Si può ricavare la velocità dell'elettrone utilizzando le leggi della cinematica ma anche per via dinamica applicando il principio di conservazione dell'energia.

Calcolo della velocità dell'elettrone per via cinematica

Scrivendo solo i moduli delle grandezze vettoriali che intervengono nella soluzione del quesito, in quanto si sa che la direzione del campo elettrostatico è quella che va dal polo positivo al polo negativo e che la direzione della forza colombiana che agisce su una carica negativa (elettrone) va invece, dal catodo all'anodo, si può scrivere:

$$F = e E = \frac{e \Delta V}{d}$$

Per il secondo principio della dinamica

$$ma = \frac{e \Delta V}{d}$$

Da cui:

$$a = \frac{e \Delta V}{m d}$$

dove con d abbiamo indicato la distanza tra gli elettrodi catodo-anodo. Il moto dell'elettrone risulterà, pertanto, uniformemente accelerato. Applicando, quindi, le leggi del moto uniformemente accelerato, si avrà:

$$\begin{cases} d = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2 \\ v = v_0 + a \Delta t \end{cases}$$

Poiché la velocità iniziale dell'elettrone è $v_0 = 0$, si ottiene:

$$\begin{cases} d = \frac{1}{2} a \Delta t^2 \\ v = a \Delta t \end{cases}$$

Ricavando Δt dalla seconda equazione:

$$\Delta t = \frac{v}{a}$$

e, sostituendo tale valore nella prima equazione, si ottiene:

$$d = \frac{1}{2} a \Delta t^2 = \frac{1}{2} a \left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a}$$

Quindi:

$$v^2 = 2 a d$$

ed infine:

$$v = \sqrt{2 a d} = \sqrt{2 \left(\frac{e \Delta V}{m d}\right) d} = \sqrt{\frac{2 e \Delta V}{m}}$$

in quanto l'elettrone si muove nel campo elettrico con accelerazione a data da:

$$a = \frac{e \Delta V}{m d}$$

Calcolo della velocità dell'elettrone per via dinamica

Applichiamo ora il principio di conservazione dell'energia meccanica totale. Si ottiene:

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

Dalle condizioni iniziali del moto: $v_0 = 0$ e $U_f = 0$, segue

$$\frac{1}{2} m v^2 = e \Delta V$$

Da cui segue:

$$v^2 = \frac{2 e \Delta V}{m}$$

infine:

$$v = \sqrt{\frac{2 e \Delta V}{m}}$$

Avendo ricavato la formula che permette di calcolare la velocità dell'elettrone in funzione della d.d.p. tra gli elettrodi in un tubo sotto vuoto, è ora possibile calcolare tale velocità ricordando che la carica e la massa dell'elettrone sono, rispettivamente:

$$e = 1,6 * 10^{-19} \text{ C ed } m = 9,1 * 10^{-31} \text{ Kg}$$

Si sa, inoltre, che gli elettroni emessi per effetto termoionico nel tubo sotto vuoto hanno una velocità iniziale trascurabile e sono accelerati tra i due elettrodi da una differenza di potenziale $\Delta V = 0,78 \text{ kV}$ fino a raggiungere la velocità v . Sostituendo i valori numerici forniti dal testo, si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{2 e \Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 * (1,6 * 10^{-19} C) * (0,78 * 10^3 V)}{9,1 * 10^{-31} Kg}} =$$

$$\sqrt{\frac{(3,2 * 0,78) * 10^{-16} C * V}{9,1 * 10^{-31} Kg}} = \sqrt{\frac{(2,5) * 10^{-16} * 10^{31} C * V}{9,1 Kg}} =$$

$$\sqrt{0,27 * 10^{15}} \frac{m}{s} = 1,66 * 10^7 \frac{m}{s} \cong 1,7 * 10^7 \frac{m}{s} = 1,7 * 10^4 \frac{Km}{s}$$

Confrontiamo, ora, la velocità con cui si muove l'elettrone nel tubo a vuoto spinto con la velocità della luce nel vuoto, calcolando il rapporto:

$$\beta = \frac{v}{c}$$

al fine di stabilire se si tratta di elettroni relativistici o meno. Tale rapporto vale:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{1,7 * 10^7 \frac{m}{s}}{3 * 10^8 \frac{m}{s}} = 0,057 \approx 6\%$$

Poiché la velocità degli elettroni emessi per effetto termoelettronico nel tubo è molto piccola (è appena il 6% circa della velocità della luce) rispetto alla velocità della luce nel vuoto, possiamo ritenere valide, nelle condizioni sperimentali poste, le leggi della meccanica classica in quanto gli effetti relativistici, per piccole velocità, si possono ritenere trascurabili.

Si richiama il punto 5 del testo del problema

5. Si ricavi e si commenti la formula che permette di calcolare il raggio della traiettoria in funzione della velocità dell'elettrone e dell'induzione magnetica; calcoli il raggio di tale traiettoria sapendo che l'angolo tra i vettori $\vec{B}$ e $\vec{v}$ è $\alpha = 60^\circ$.

La forza che agisce su una carica elettrica in moto con velocità $\vec{v}$ in un campo di induzione magnetica $\vec{B}$ è detta forza di Lorentz ed è data da :

$$\vec{F} = -e \vec{v} \nabla \vec{B}$$

il cui modulo è esprimibile dalla relazione:

$$F = |e| v B \sin \alpha$$

Poiché la forza centripeta è pari a:

$$F = m \frac{v^2}{R}$$

si ha:

$$m \frac{v^2}{R} = |e| v B \sin \alpha$$

Da cui, ricavando il raggio della traiettoria R , risulta:

$$R = \frac{m v}{|e| B \sin \alpha}$$

Sostituendo i dati forniti dal testo, si ottiene:

$$R = 0,26 m = 26 cm$$

Infine si richiama il punto 6 del testo del problema

6. Si ricavi e si commenti la formula che permette di calcolare il rapporto e/m in funzione dei valori misurabili $\Delta V, B$ e r .

Il raggio della traiettoria degli elettroni emessi per effetto termoelettronico è dato da:

$$R = \frac{m v}{|e| B \sin \alpha}$$

la velocità degli stessi elettroni è esprimibile in funzione delle grandezze misurabili $\Delta V, B$ ed R tramite la relazione seguente:

$$v = \sqrt{\frac{2|e|\Delta V}{m}}$$

Sostituendo tale relazione nella espressione che dà il raggio della traiettoria, si ottiene:

$$R = \frac{m v}{|e| B \sin \alpha} = \frac{m * \sqrt{\frac{2|e|\Delta V}{m}}}{|e| B \sin \alpha} = \frac{\sqrt{2m\Delta V}}{B \sin \alpha}$$

Quindi, in definitiva:

$$R = \frac{\sqrt{2m\Delta V}}{B \sin \alpha}$$

Elevando al quadrato primo e secondo membro, si ottiene:

$$R^2 = \frac{2 m \Delta V}{|e| B^2 \sin^2 \alpha}$$

Da tale relazione è possibile ricavare il rapporto tra la carica e la massa dell'elettrone, in funzione delle grandezze misurabili $\Delta V, B$ e R . Tale rapporto è dato da:

$$\frac{|e|}{m} = \frac{2 \Delta V}{(R B \sin \alpha)^2}$$

Sostituendo i dati forniti dal testo, si ottiene:

$$\frac{|e|}{m} = 1,7 * 10^{11} \frac{C}{Kg}$$

Il risultato così determinato, si può ritenere compatibile con i dati sperimentali.

**Esame di stato di Liceo Scientifico
Corso sperimentale - Anno 2000
Progetto Brocca**

La prova

Il candidato svolga una breve relazione su uno solo dei seguenti temi, a sua scelta.

Tema 1

Nella prima metà del secolo XX, dopo la scoperta che la radiazione elettromagnetica ha un comportamento duale, ondulatorio e corpuscolare, fu formulata l'ipotesi che anche la materia, considerata composta da particelle, potesse presentare caratteristiche ondulatorie.

Il candidato:

- 1) Spieghi il significato dell'espressione "la radiazione ha un comportamento duale, ondulatorio e corpuscolare" e descriva un esperimento che ha messo in evidenza il comportamento corpuscolare;
- 2) spieghi il significato dell'espressione "fu formulata l'ipotesi che la materia, considerata composta da particelle, potesse presentare caratteristiche ondulatorie" e descriva un esperimento che ha confermato la realtà di questa ipotesi teorica;
- 3) calcoli quanti fotoni emette in un minuto una stazione radio che trasmette musica alla frequenza di 99MHz con una potenza di uscita di 20 kW;
- 4) calcoli la lunghezza d'onda associata ad un elettrone che, con velocità iniziale trascurabile, è stato accelerato tra due elettrodi da una differenza di potenziale di 200V;
- 5) calcoli, in eV, la minima energia cinetica che può avere un elettrone costretto a muoversi in uno spazio unidimensionale lungo 0,1 nm.

Costante di Planck: $h = 6,63 \cdot 10^{-34} J$; massa dell'elettrone: $m = 9,11 \cdot 10^{-31} Kg$;
carica dell'elettrone: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} C$

Considerazioni teoriche- indicazioni per la soluzione - soluzione del tema

Si richiama il punto 1 del testo del problema

1. Il candidato spieghi il significato dell'espressione "la radiazione ha un comportamento duale, ondulatorio e corpuscolare" e descriva un esperimento che ha messo in evidenza il comportamento corpuscolare.

Nei primi anni del '900 la fisica inizia a dividersi in fisica del continuo, quando vengono studiati fenomeni riferiti a oggetti con un numero di particelle elevatissimo, la cui coesione e interdipendenza tra esse fanno sparire qualunque granulosità a livello

macroscopico e fisica del discreto, o fisica quantistica, quando vengono studiati fenomeni riferiti ad oggetti costituiti da particelle elementari distinte le une dalle altre. La difficoltà iniziale sfocia nella scoperta della doppia natura dell'energia. L'intuizione e la scoperta coraggiosa di Planck sulla quantizzazione dei fenomeni relativi all'emissione e all'assorbimento dell'energia che riusciva ad unificare la conoscenza teorica con quella sperimentale, rappresentò, per la maggior parte degli scienziati, (e per lo stesso Planck) una "mostruosità" nel paradigma classico della continuità. Sempre nel XIX secolo, sia per lo studio della teoria cinetica dei gas che dei sistemi macroscopici, è stato utilizzato il metodo statistico, ossia la distribuzione di Maxwell e Boltzmann che consideravano la materia come un insieme di numerosissime particelle puntiformi che seguivano le leggi della dinamica di Newton.

Dopo la scoperta dell'elettrone (1897) da parte di J. Thomson, solo nel 1909, con l'esperimento di Millikan si è potuto misurare la carica elettrica e nel 1911 con il modello atomico di Rutherford, si è evoluta la teoria atomica. Eppure la scoperta di Planck passò tra l'indifferenza generale, e fu necessario attendere fino al 1905; fino a quando, cioè non apparvero i primi tre lavori di Einstein che rappresentarono, anch'essi, una rottura con la tradizione e che fecero entrare la fisica in quella sezione chiamata, appunto, fisica moderna. Einstein cominciò il suo articolo sulla generazione e trasformazione della luce, in cui tratta anche l'effetto fotoelettrico osservando la profonda differenza esistente tra le leggi che governano i corpi materiali (Teoria corpuscolare, Dinamica di Newton) e quelle che governano la radiazione (Teoria Ondulatoria Elettromagnetica di Maxwell). Mentre la teoria di Newton consente la localizzazione dei corpi (coordinate spaziali e quantità di moto e quindi traiettoria, energia), la teoria di Maxwell non consente questa localizzazione e si deve quindi parlare di distribuzione spaziale del fronte d'onda e dell'energia. Nature, quindi, quella corpuscolare e quella ondulatoria, contrastanti ed inconciliabili.

Einstein continuava sostenendo che questa differenza profonda tra le due nature non poteva essere così netta come sembrava a prima vista perché, in effetti, la luce, in alcune manifestazioni rivelava una natura tipicamente corpuscolare, in altre, invece, una natura tipicamente ondulatoria.

Ora, l'ipotesi ondulatoria spiegava compiutamente i fenomeni di interferenza e di diffrazione della radiazione luminosa, e la sua propagazione rettilinea, ed era suffragata dalla teoria del campo elettromagnetico elaborata da Maxwell; l'ipotesi corpuscolare, d'altronde, spiegava compiutamente i fenomeni denominati "effetto Compton" ed "effetto fotoelettrico" in base ai quali si era accertato con assoluta chiarezza che gli elettroni, colpiti da radiazioni luminose, si comportavano come se fossero stati colpiti da particelle materiali aventi una ben determinata energia e quantità di moto, ubbidendo così alle leggi dell'urto meccanico.

Il tentativo di spiegare le leggi empiriche dell'effetto fotoelettrico, consistente nell'emissione di elettroni da parte di superfici metalliche poste in alto vuoto, irradiate con luce violetta o ultravioletta, nell'ambito dell'elettromagnetismo classico, condusse a conclusioni contraddittorie, mentre la soluzione indicata da Einstein, in ambito di campo elettromagnetico quantizzato (ipotesi dei fotoni), ebbe pieno successo: ogni fotone di energia $\epsilon = h\nu$ (h =costante di Planck e ν = frequenza della luce impiegata) che urtava un atomo di un metallo, cedeva all'atomo tutta la sua energia $h\nu$ e se questa era maggiore

del lavoro necessario a strappare un elettrone dall'atomo (w_0 = energia di soglia o di estrazione caratteristica del metallo), l'elettrone veniva espulso con una energia cinetica

$$K = h\nu - w_0$$

Tale relazione è chiamata "equazione fotoelettrica di Einstein" ed afferma il principio di conservazione dell'energia. Storicamente, però, l'affermazione dell'idea di fotone avvenne con la spiegazione dell'effetto Compton (1923 Phys. Review). Quest' effetto consiste in un aumento della lunghezza d' onda dei raggi X diffusi da parte di elementi leggeri e si giustifica proprio considerando i raggi X come i fotoni di Einstein che interagiscono con gli atomi degli elementi leggeri mediante un urto elastico con un elettrone atomico. La dipendenza dell'aumento $\Delta\lambda$ della lunghezza d'onda dei raggi X diffusi dall'angolo di diffusione è data dalla relazione:

$$\Delta\lambda = \lambda_0(1 - \cos \theta)$$

Compton riuscì a derivare questa formula e ad esprimere λ_0 in funzione della massa m_e dell'elettrone di rinculo:

$$\lambda_0 = \frac{h}{m_e c} = 0,024 \text{ \AA}$$

detta "lunghezza d'onda Compton dell'elettrone". Bisogna, però, notare che l'ipotesi dei fotoni non rappresenta un semplice ritorno alla teoria corpuscolare di Newton perché i fotoni non sono pensati come corpuscoli materiali, né la loro energia come energia cinetica; tuttavia ai fotoni si devono attribuire alcune proprietà analoghe a quelle dei corpuscoli materiali e cioè:

1. una quantità di moto avente modulo:

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

direzione e verso coincidente con quello della propagazione. $\left(\lambda = \frac{c}{\nu}\right)$ è la lunghezza d'onda della radiazione secondo la teoria ondulatoria.

2. un'energia:

$$\epsilon = h\nu$$

Numerose esperienze, eseguite con la camera di Wilson, confermano in maniera brillante l'interpretazione di Compton. Così l'effetto fotoelettrico e l'effetto Compton ci danno una prova della natura corpuscolare della radiazione elettromagnetica non meno convincente dell'evidenza della sua natura ondulatoria fornita dalle esperienze di interferenza e di diffrazione. Data l'importanza della nuova visione einsteiniana della natura della luce, giova mettere in evidenza la diversità delle due ipotesi: quella di Planck e quella di Einstein. Mentre Planck fa entrare nella descrizione fisica dei fenomeni la discontinuità che però nulla toglie alla concezione ondulatoria classica della radiazione elettromagnetica, Einstein introduce una concezione del tutto nuova sulla natura stessa della radiazione. Essa, a seconda degli esperimenti, si presenta come un campo continuo o come un campo discontinuo, discreto, formato da "granuli" di energia in moto. Queste due nature non sono nettamente separate ma coesistono. Si ha che, per basse frequenze, predomina il termine ondulatorio, mentre per alte frequenze si ha un predominio del termine corpuscolare. È questo il primo esempio di quel dualismo onda-particella che oggi permea tutta la fisica. Einstein ricevette nel 1921 il premio Nobel per la Fisica per la sua equazione che spiegava, coerentemente agli esperimenti, l'effetto fotoelettrico.

Si richiama il punto 2 del testo del problema

2. Il candidato spieghi il significato dell'espressione *“fu formulata l'ipotesi che la materia, considerata composta da particelle, potesse presentare caratteristiche ondulatorie”* e descriva un esperimento che ha confermato la realtà di questa ipotesi teorica.

La frase citata si riferisce evidentemente all'ipotesi di de Broglie, avanzata da questi nel 1923 e poi argomentata nella tesi di dottorato del 1924. Sul grave ed apparentemente insanabile dualismo onda-corpuscolo così si esprimeva De Broglie: *“l'unico modo di uscirne è quello di ammettere che l'aspetto ondulatorio della luce e il suo aspetto corpuscolare sono due aspetti complementari di una stessa realtà. In questo modo si giunge a una sintesi delle due vecchie teorie rivali, e si possono spiegare contemporaneamente l'interferenza e l'effetto fotoelettrico”*. De Broglie, nel 1924, immaginò che ogni elettrone fosse accompagnato da *“onde pilota”* (la cui natura era tutta da scoprire), localizzate come onde stazionarie lungo le orbite di Bohr. La prima orbita sarebbe occupata da una sola lunghezza d'onda, la seconda da due, la terza da tre e così via. Pertanto la lunghezza d'onda della prima onda deve essere pari alla lunghezza $2\pi r_1$ della prima orbita, quella della seconda onda deve essere pari a $2\pi r_2$, e così via. L' n -sima orbita di raggio r_n contiene n lunghezze d'onda. Quindi:

$$2\pi r_n = n \lambda_n$$

Dalla condizione di quantizzazione di Bohr, segue:

$$mv_n r_n = n \frac{h}{2\pi}$$

si deduce

$$2\pi r_n = n \frac{h}{mv_n}$$

Ora, se si associasse all'elettrone la lunghezza d'onda:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

l'idea di de Broglie avrebbe successo.

De Broglie propose che la lunghezza d'onda di una particella materiale fosse in relazione con la sua quantità di moto nello stesso modo in cui avviene per il fotone. Vale a dire che, per una particella con quantità di moto mv , la lunghezza d'onda λ è data da:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

dove

$$p = mv \quad \text{se } v \ll c$$

Nel caso relativistico, invece, la quantità di moto p è data da:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Tra le relazioni della meccanica ondulatoria una delle principali e, nello stesso tempo, una delle più interessanti è quella secondo la quale la lunghezza d'onda λ dell'onda associata ad un corpuscolo avente quantità di moto $p = mv$, è data proprio da:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

dove h è naturalmente la costante di Planck: risulta evidente che uno sciame di corpuscoli si dirà monocromatico se, per ciascuno di essi, sarà costante la quantità di moto.

Le prime prove sperimentali furono realizzate da Davisson e Germer che ottennero figure di diffrazione operando su sciami di elettroni e da Stern ed Esterman che ripeterono l'esperienza con atomi di idrogeno, mettendo così in evidenza le caratteristiche ondulatorie dell'elettrone. A causa, però, del piccolo valore della costante di Planck h , anche elettroni di bassa energia posseggono lunghezze d'onda molto esigue, paragonabili a quelle dei raggi X. Nel 1927, George Paget Thomson e Clinton Joseph Davisson e Lester Halbert Germer riuscirono a ottenere la diffrazione di elettroni impiegando la tecnica già in uso per i raggi X.

Un fascio di elettroni incide sulla superficie di un cristallo e viene riflesso non solo dallo strato superficiale, ma anche da strati cristallini adiacenti. Il cristallo si comporta come un reticolo di fenditure per la luce. L'esperimento ebbe successo completo; gli elettroni riflessi interferivano formando, su uno schermo fluorescente o su una lastra fotografica, un'inconfondibile figura di diffrazione e la lunghezza d'onda misurata coincideva esattamente con:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Questa equazione non contiene elementi caratteristici dell'elettrone; essa è, quindi, applicabile a qualunque particella e a qualunque corpo. Ma il piccolissimo valore di h e il fatto che p compaia al denominatore fanno sì che le lunghezze d'onda associate ai corpi, che non siano particelle elementari o atomi, siano tanto piccole che è impensabile poter osservare comportamenti ondulatori. Tra i fisici che fondarono e svilupparono in quegli anni la meccanica ondulatoria o quantistica, che dir si voglia, occupano il primo posto per l'importanza dei contributi Heisenberg e Schrodinger.

Si richiama il punto 3 del testo del problema

3. Il candidato calcoli quanti fotoni emette in un minuto una stazione radio che trasmette musica alla frequenza di 99MHz con una potenza di uscita di 20 kW.

Il modello ondulatorio e la teoria classica dell'elettricità e del magnetismo, che erano stati capaci di spiegare la maggior parte delle proprietà note della luce, non furono però in grado di interpretare i risultati di alcuni esperimenti successivi. Il più sorprendente di questi fenomeni è l'effetto fotoelettrico, scoperto da Hertz: quando la luce colpisce la superficie di un metallo, in certe condizioni, vengono emessi elettroni dalla superficie. Gli esperimenti hanno mostrato che l'energia cinetica di un elettrone emesso è indipendente dall'intensità della luce. Questo fenomeno è in contraddizione con la teoria delle onde, la quale prevedeva che un fascio di luce più intenso dovesse cedere più energia all'elettrone. Secondo l'elettromagnetismo classico l'energia della radiazione non dipende dalla lunghezza d'onda. In altri termini, con una sorgente di radiazione abbastanza intensa, si dovrebbe osservare un passaggio di corrente per qualunque valore della lunghezza d'onda. L'esistenza di un effetto di soglia resta inspiegabile. L'effetto

fotoelettrico fu spiegato da Einstein nel 1905 in base all'ipotesi dei quanti di luce, già avanzata in altra forma da Planck cinque anni prima a proposito del problema del corpo nero. Planck aveva proposto di *quantizzare* gli scambi di energia fra radiazione e materia, ipotizzando che essi potessero avvenire soltanto per multipli di un'energia minima, data dal prodotto della costante h (oggi nota come *costante di Planck*) per la frequenza f della radiazione. Einstein estende l'ipotesi di Planck, proponendo di quantizzare la radiazione stessa e di considerarla come composta di *quanti di luce* aventi energia $h f$. Indicheremo questi quanti con il nome di *fotoni*, assegnato loro soltanto in seguito. Ogni fotone ha quindi un'energia:

$$E_f = h f = \frac{h c}{\lambda}$$

Una spiegazione dell'effetto fotoelettrico fu proposta da Einstein nel 1905. In accordo con la teoria di Einstein, l'energia di un fotone è proporzionale alla frequenza dell'onda elettromagnetica: $E_f = h f$, dove $h = 6,63 * 10^{-34} Js$ è la costante di Planck. I fotoni si muovono nel vuoto con la velocità della luce c , con $c = 3,00 * 10^8 m/s$. La luce va, quindi, intesa come caratterizzata da una natura duale: in alcuni casi si comporta come onda ed in altri come particella. Nella descrizione ondulatoria delle onde elettromagnetiche l'intensità della radiazione è proporzionale al quadrato dell'intensità del campo elettrico E , mentre in una descrizione quantizzata (particellare), l'intensità è proporzionale al numero di fotoni N che passano attraverso l'unità di area nell'unità di tempo. Poiché l'energia del singolo fotone è data da:

$$\epsilon = h f$$

l'energia totale è:

$$E_f = N \epsilon = N h f$$

dove N è il numero di fotoni che passano attraverso l'unità di area nell'unità di tempo. Poiché la potenza di uscita è P , l'energia emessa dalla stazione radio è data da:

$$E_e = P * \Delta t$$

Dovendo essere:

$$E_f = E_e$$

si avrà:

$$P \Delta t = N h f$$

Il numero totale di fotoni emessi è:

$$N = \frac{P \Delta t}{h f}$$

Poiché:

$$P = 20 Kw = 20 * 10^3 W = 2 * 10^4 W$$

$$h = 6,63 * 10^{-34} Js$$

$$f = 99 MHz = 99 * 10^6 Hz = 9,9 * 10^7 Hz$$

sostituendo i valori numerici forniti dal tema proposto nella relazione precedentemente ottenuta, cioè:

$$N = \frac{P \Delta t}{h f}$$

si ottiene:

$$N = \frac{(2 * 10^4 \text{ W}) * (60 \text{ s})}{(6,63 * 10^{-34} \text{ Js}) * (9,9 * 10^7 \text{ Hz})} = \frac{12 * 10^5}{65,3 * 10^{-27}} = 0,183 * 10^{32} \\ = 1,83 * 10^{31} \text{ fotoni}$$

Si richiama il punto 4 del testo del problema

4. Il candidato calcoli la lunghezza d'onda associata ad un elettrone che, con velocità iniziale trascurabile, è stato accelerato tra due elettrodi da una differenza di potenziale di 200 V.

Sia nell'effetto fotoelettrico sia nell'effetto Compton, un fotone può comportarsi come una particella con energia e quantità di moto ben definite. Sappiamo anche che, in altre situazioni, la luce evidenzia un comportamento ondulatorio, per esempio quando produce frange di interferenza nell'esperimento della doppia fenditura di Young. I comportamenti della luce, così apparentemente opposti, sono una delle più profonde intuizioni della fisica quantistica. L'effetto Compton è stato spiegato in termini di fotoni nel 1923. Un ulteriore passo significativo è avvenuto nello stesso anno, quando un giovane studente universitario francese Louis de Broglie (1892- 1987), enunciò un'ipotesi particolarmente interessante che lo portò, in seguito, a vincere, nel 1929, il premio Nobel per la Fisica. La sua idea era fondamentalmente la seguente: "Poiché la luce, che normalmente consideriamo come un'onda, può mostrare un comportamento corpuscolare, forse una particella di materia, come un elettrone, può esibire in comportamento ondulatorio." In particolare, de Broglie propose di applicare anche alle particelle la stessa relazione fra lunghezza d'onda e quantità di moto che Compton aveva applicato al fotone:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Perciò, se la quantità di moto di una particella è p , la sua lunghezza d'onda di de Broglie è:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Osserviamo che maggiore è la quantità di moto di una particella, minore è la sua lunghezza d'onda di de Broglie. Ma che senso può avere l'idea di associare una lunghezza d'onda alla materia? Per vedere come ciò sia possibile, calcoliamo la lunghezza d'onda di de Broglie per un oggetto macroscopico, per esempio un oggetto di $0,13 \text{ Kg}$ che si muove con una velocità di 5 m/s . Sostituendo questi valori nella relazione $\lambda = h/p$, si trova che la lunghezza d'onda è pari a:

$$\lambda = 1,0 * 10^{-33} \text{ m}$$

Chiaramente, questa lunghezza d'onda, che è minore del diametro di un atomo di un fattore 10^{23} è troppo piccola per poter essere osservata in un qualsiasi esperimento macroscopico. Perciò l'oggetto in esame potrebbe avere una lunghezza d'onda come quella data dalla relazione di de Broglie e noi potremmo non osservarla mai. Al contrario, consideriamo un elettrone con energia cinetica di $10,0 \text{ eV}$, un'energia normale a livello atomico. Utilizzando la relazione $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ per ricavare la quantità di moto p , troviamo che la lunghezza d'onda di de Broglie, in questo caso, è: $\lambda = 3,88 * 10^{-10} \text{ m} =$

3,88 Å. Questa lunghezza d'onda, che è confrontabile con le dimensioni di un atomo o di una molecola, potrebbe chiaramente essere significativa in questi sistemi. Perciò possiamo non osservare la lunghezza d'onda di de Broglie nei sistemi macroscopici, ma essa è di grande importanza a livello atomico.

Nel 1923, nella discussione della sua tesi di laurea, Louis Victor de Broglie, premio Nobel per la Fisica nel 1929, partendo dalla considerazione che i fotoni presentano caratteristiche sia ondulatorie che corpuscolari, ipotizzò che forse tutte le forme di materia hanno proprietà sia ondulatorie che corpuscolari. Ciò costituì a quel tempo un'idea altamente rivoluzionaria ma priva, allora, di qualsiasi conferma sperimentale. Tuttavia, per poter considerare seriamente l'ipotesi della lunghezza d'onda di De Broglie, bisogna osservarla sperimentalmente. Se le particelle, come per esempio gli elettroni, avessero una lunghezza d'onda confrontabile con le distanze interatomiche, dovrebbe essere possibile produrre figure di diffrazione allo stesso modo con i raggi X. Ciò è effettivamente quello che succede, come hanno dimostrato i fisici americani C.J. Davisson e L.H. Germer che, nel 1928, hanno prodotto figure di diffrazione dalla diffusione di elettroni di bassa energia (circa 54 eV) da parte di un cristallo di nichel. Gli spazi fra i puntini luminosi nella figura di diffrazione degli elettroni permisero a questi ricercatori di determinare la lunghezza d'onda degli elettroni, che confermò esattamente la relazione di De Broglie: $\lambda = h/p$. Figure di diffrazione simili sono state osservate anche con fasci di neutroni, atomi di idrogeno e atomi di elio.

Soluzione del quesito

Alla luce delle precedenti considerazioni, possiamo dire che gli elettroni in moto mostrano un carattere sia ondulatorio che corpuscolare.

La relazione tra energia e quantità di moto per un fotone è:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{hc}{c\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

Da questa equazione vediamo che la lunghezza d'onda del fotone può essere specificata per mezzo della quantità di moto, ossia poiché

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Si ha che la lunghezza d'onda è data da:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

De Broglie suggerì che anche le particelle materiali aventi una quantità di moto p potessero avere proprietà ondulatorie e una corrispondente lunghezza d'onda. Poiché il modulo della quantità di moto di una particella non relativistica di massa m e velocità v è:

$$p = mv$$

la lunghezza d'onda di de Broglie della particella è:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Infine, in analogia con il fotone, de Broglie postulò che le particelle obbedissero alla relazione di Einstein $E = hf$, cosicché la frequenza di una particella è:

$$f = \frac{E}{h}$$

La natura duale della materia appare in queste due ultime relazioni poiché ciascuna contiene sia il concetto di particella (p ed E), sia il concetto di onda (λ ed f). Il fatto che queste relazioni siano state stabilite sperimentalmente per i fotoni rende l'ipotesi di de Broglie molto più facile da accettare. Nel caso in esame la particella penetra tra due elettrodi tra i quali sussiste una differenza di potenziale di 200 V. Tra i due elettrodi, pertanto, si stabilisce un campo elettrostatico E ; tale campo di forza è conservativo e il lavoro fatto dalle forze del campo risulta:

$$L = e * \Delta V$$

Poiché la velocità iniziale dell'elettrone v_0 è trascurabile, l'energia cinetica iniziale

$$K_i \cong 0$$

Applicando il teorema dell'energia cinetica che afferma che il lavoro fatto dalle forze del campo è uguale alla variazione dell'energia cinetica, cioè:

$$L = \Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Poiché la velocità iniziale v_0 dell'elettrone nel penetrare nel campo di forza è trascurabile, risulta che l'energia cinetica iniziale è sostanzialmente nulla, ovvero:

$$K_i \cong 0$$

Si avrà, pertanto, in queste ipotesi:

$$L = \Delta K = K_f = \frac{1}{2}mv^2$$

Quindi:

$$eV = \frac{1}{2}mv^2$$

Da cui:

$$v^2 = \frac{2eV}{m}$$

E, quindi, la velocità acquisita dall'elettrone è:

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = 8,4 * 10^6 \frac{m}{s}$$

La lunghezza d'onda di de Broglie (la cosiddetta "onda pilota" associata alla particella che rappresenta una descrizione duale, ma complementare del comportamento della particella stessa), essendo:

$$eV \ll m_0c^2 = 0,511 \text{ MeV}$$

è data da:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{m_e \sqrt{\frac{2eV}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2m_e e V}}$$

Sostituendo nell'ultima espressione i dati forniti dal quesito, si ottiene:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e e V}} = \frac{6,63 * 10^{-34} \text{ J s}}{\sqrt{2 * (9,11 * 10^{-31} \text{ Kg}) * (1,6 * 10^{-19} \text{ C}) * (2 * 10^2 \text{ V})}}$$

$$\lambda = \frac{6,63 * 10^{-34} \text{ J s}}{\sqrt{2 * (9,11 * 10^{-31} \text{ Kg}) * (1,6 * 10^{-19} \text{ C}) * (2 * 10^2 \text{ V})}}$$

$$\lambda = \frac{6,63 * 10^{-34}}{\sqrt{(2 * 9,11 * 1,6 * 2) * 10^{-48}}} m = \frac{6,63 * 10^{-34}}{\sqrt{58,30 * 10^{-48}}} m$$

$$\lambda = \frac{6,63 * 10^{-34}}{7,635 * 10^{-24}} m = 0,87 * 10^{-34} * 10^{24} m = 0,87 * 10^{-10} m$$

$$\lambda = 0,87 * 10^{-10} m = 0,87 \text{ \AA}$$

Calcoliamo il rapporto

$$\frac{v}{c} = \frac{8,4 * 10^6 \frac{m}{s}}{3,00 * 10^8 \frac{m}{s}} = 0,028$$

tra la velocità dell'elettrone e la velocità della luce nel vuoto. Tale rapporto risulta essere pari a 0,028. Quindi la velocità acquisita dall'elettrone è appena il 2,8% della velocità della luce nel vuoto. Il che giustifica ampiamente l'uso delle relazioni classiche nella soluzione del quesito proposto.

Si richiama, infine, il punto 5 del testo del problema

5. Il candidato calcoli, in eV, la minima energia cinetica che può avere un elettrone costretto a muoversi in uno spazio unidimensionale lungo 0,1 nm.

Considerazioni teoriche

La soluzione della problematica posta richiede la conoscenza del principio di indeterminazione di Heisenberg (1901-1976), formulato nel 1927. Difatti, l'ipotesi di de Broglie, che il moto di una particella con velocità v sia controllata da "onde pilota" con velocità di gruppo v , suggerisce che c'è un limite al di là del quale è impossibile determinare simultaneamente sia la quantità di moto sia la posizione della particella stessa.

Quando si misura la posizione e la velocità di una particella in un certo istante, nelle misure vengono introdotte delle indeterminazioni sperimentali. Secondo la meccanica classica è possibile, in linea di principio, eseguire misure con una incertezza arbitrariamente piccola. La teoria quantistica, tuttavia, prevede che è fondamentalmente impossibile eseguire misure simultanee della posizione e della quantità di moto di una particella con accuratezza infinita. Cioè è fisicamente impossibile misurare contemporaneamente la posizione esatta e la quantità di moto esatta di una particella. Le inevitabili indeterminazioni Δx e Δp_x non sorgono dalle imperfezioni nell'uso degli strumenti di misura, ma piuttosto esse hanno origine dalla struttura quantistica della materia. La natura probabilistica della fisica quantistica impone, quindi, un'importante limitazione nel determinare la posizione e la quantità di moto di una particella. Vale a dire che non si possono misurare simultaneamente con precisione illimitata sia la posizione $\vec{r}$ sia la quantità di moto $\vec{p}$ della particella. Le incertezze sulle componenti di queste quantità sono espresse dalle relazioni:

$$\begin{cases} \Delta x * \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi} \\ \Delta y * \Delta p_y \geq \frac{h}{2\pi} \\ \Delta z * \Delta p_z \geq \frac{h}{2\pi} \end{cases}$$

La forma matematica del principio di indeterminazione afferma che il prodotto delle indeterminazioni della posizione e della quantità di moto sarà sempre maggiore di un certo valore minimo. Questo valore risulta essere uguale a: $\hbar/2$. E' impossibile, pertanto, conoscere sia la posizione, sia la quantità di moto di una particella con una precisione arbitraria in un determinato istante. Come ci si può aspettare, la relazione di indeterminazione ha un impatto trascurabile sui sistemi macroscopici ma è di grande importanza nei sistemi atomici e nucleari. Il principio di indeterminazione di Heisenberg stabilisce anche le tipiche scale di energia a livello atomico e molecolare. Per esempio, se sappiamo che un elettrone è confinato all'interno di un atomo, l'incertezza Δy sulla sua posizione è approssimativamente di 1 Å. Questo implica un'incertezza Δp_y non nulla per la sua quantità di moto, e ciò, a sua volta, implica un'energia cinetica non nulla, anche se il valor medio di p_y è zero.

Un'altra forma del principio di indeterminazione può essere ottenuta considerando che le variabili corrispondenti alla posizione e alla quantità di moto sono la frequenza e il tempo. Poiché la frequenza è correlata con l'energia della particella per mezzo della relazione $E = hf$, il principio di indeterminazione assume l'espressione:

$$\Delta E * \Delta t \geq \hbar/2$$

Questa forma del principio di indeterminazione suggerisce che possiamo violare la conservazione dell'energia per un ammontare ΔE tale da valere soltanto entro un breve intervallo di tempo Δt consistente con la precedente equazione.

Soluzione del quesito

Il quesito vuole che si determini la minima energia cinetica che può avere un elettrone costretto a muoversi in uno spazio unidimensionale lungo 0,1 nm. Pertanto, applicando il principio di indeterminazione di Heisenberg, in uno spazio unidimensionale, avremo:

$$\Delta x * \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi}$$

Da cui si ottiene che l'indeterminazione minima sulla componente x della quantità di moto risulta:

$$\Delta p_x \equiv p_x \equiv p \geq \frac{h}{2\pi \Delta x}$$

Ciò significa che se una particella è confinata in una certa regione dello spazio, a differenza di quanto avviene nella meccanica classica, non può avere energia cinetica nulla, ma deve assumere una energia minima detta "energia di punto zero", che è possibile calcolare applicando, appunto, il principio di indeterminazione. Nel caso in esame tale

energia minima (o energia di punto zero), grazie al principio di indeterminazione di Heisenberg, è data da:

$$\begin{aligned} p &\geq \frac{h}{2\pi \Delta x} \\ mv &\geq \frac{h}{2\pi \Delta x} \\ (mv)^2 &\geq \left(\frac{h}{2\pi \Delta x}\right)^2 \end{aligned}$$

Quindi:

$$v^2 \geq \frac{1}{m^2} * \left(\frac{h}{2\pi \Delta x}\right)^2$$

Il valore minimo della velocità sarà quindi:

$$v = \sqrt{\frac{1}{m^2} * \left(\frac{h}{2\pi \Delta x}\right)^2} = \frac{1}{m} * \frac{h}{2\pi \Delta x}$$

Poiché la quantità di moto (non relativistica) dell'elettrone è:

$$\begin{aligned} p &= mv \\ v &= \frac{p}{m} \\ v^2 &= \left(\frac{p}{m}\right)^2 \end{aligned}$$

La sua energia cinetica è data da:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Pertanto essa è affetta da una indeterminazione non minore di:

$$\Delta K = \frac{\Delta p^2}{2m}$$

Poiché

$$\Delta p = \frac{h}{2\pi \Delta x} = \frac{6,63 * 10^{-34} J * s}{2\pi (1 * 10^{-10} m)} = 1 * 10^{-24} Kg * \frac{m}{s}$$

si avrà che l'energia cinetica dell'elettrone è affetta da una indeterminazione non minore di

$$\Delta K = \frac{\Delta p^2}{2m} = \frac{(1 * 10^{-24} Kg * m/s)^2}{2 * 9,11 * 10^{-31}} = 5 * 10^{-19} J = 3 eV$$

Da notare che, se l'elettrone è costretto a muoversi in uno spazio unidimensionale come indicato dal testo del quesito proposto, l'indeterminazione sulla sua posizione lungo gli assi y e z sarebbe nulla.

Calcolo non relativistico

Possiamo calcolare l'energia minima ricordando che tale energia minima corrisponde alla massima lunghezza d'onda, ovvero al modo vibrazionale fondamentale, di un'onda stazionaria associata alla particella nel moto di un corpo in una buca di potenziale. Indicando con L la larghezza della buca, si ha quindi:

$$\lambda = 2L$$

Pertanto:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2L}$$

Da cui segue infine:

$$E_c = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h^2}{8m_e L^2} = 37,7 \text{ eV}$$

($1 \text{ eV} = 1,60 * 10^{-19} \text{ J}$)

Per giustificare il calcolo classico è sufficiente confrontare l'energia cinetica dell'elettrone con la sua energia a riposo E_0 data da:

$$E_0 = m_e * c^2 = \frac{1,602 * 10^{-13} \text{ J/MeV}}{1,602 * 10^{-13} \text{ J/MeV}} = 0,511 \text{ MeV} = 5,11 * 10^5 \text{ eV}$$

Essendo

$$E_c = 37,7 \text{ eV} \ll E_0 = 5,11 * 10^5 \text{ eV}$$

il calcolo classico risulta pienamente giustificato.

Calcolo relativistico

Riteniamo utile comunque riportare anche il calcolo relativistico. Applicando l'invariante relativistico energia-impulso

$$E^2 - c^2 p^2 = m_e^2 c^4$$

si ottiene, per l'energia totale dell'elettrone (somma dell'energia cinetica e dell'energia a riposo):

$$E = m_e c^2 * \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_e^2 c^2}} = m_e c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{h}{2m_e c L}\right)^2}$$

Da cui l'energia cinetica risulta:

$$E_c = E - m_e c^2 = m_e c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{h}{2m_e c L}\right)^2} - m_e c^2 = m_e c^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{h}{2m_e c L}\right)^2} - 1 \right)$$

Sostituendo i valori numerici forniti dal testo nella espressione che segue, si ottiene che l'energia cinetica minima dell'elettrone risulta pari a:

$$E_c = m_e c^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{h}{2m_e c L}\right)^2} - 1 \right)$$

$$E_c = (9,11 * 10^{-31} \text{ Kg})$$

$$* (3,0 * 10^8 \text{ m/s})^2 \left(\sqrt{1 + \left(\frac{6,63 * 10^{-34} \text{ Js}}{2 * 9,11 * 10^{-31} \text{ Kg} * 3,0 * 10^8 \text{ m/s} * 0,1 * 10^{-9} \text{ m}}\right)^2} - 1 \right)$$

$$E_c = E - m_e c^2 = 37,6 \text{ eV}$$

in accordo con il limite non relativistico.

Esame di stato Liceo Scientifico –Tecnologico - anno 2010
Corso Sperimentale – Progetto Brocca
Tema di Fisica

La prova

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica e alle cifre significative e unità di misura nella presentazione dei risultati numerici.

Primo tema

Nel 1897, dopo oltre sessanta anni dai primi esperimenti di Faraday, modificando la traiettoria dei raggi catodici con campi magnetici, Sir Joseph John Thomson dimostrò che essi erano costituiti da particelle materiali cariche negativamente e per ogni particella riuscì a calcolare il rapporto tra la carica e la massa. Egli chiamò queste particelle *elettroni*.

Il candidato risponda ai seguenti quesiti.

1. Descrivere l'interpretazione ondulatoria del comportamento dell'elettrone, secondo l'ipotesi di Louis De Broglie.
2. Spiegare i concetti fondamentali della meccanica ondulatoria, soffermandosi in particolare sull'interpretazione probabilistica delle funzioni d'onda e sul principio d'indeterminazione.
3. Spiegare il significato dell'espressione "dualismo onda corpuscolo".

Risolva, infine, il seguente problema.

Una cella fotoelettrica emette elettroni, essendo illuminata con una luce di lunghezza d'onda $\lambda = 500$ nm. Sapendo che il lavoro di estrazione della placca fotosensibile è di 2,1 eV, calcolare la minima lunghezza d'onda di De Broglie associata agli elettroni emessi. Si ricordano i seguenti dati approssimati: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg; $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J·s; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Si richiama il punto 1 del problema

- 1) Descrivere l'interpretazione ondulatoria del comportamento dell'elettrone, secondo l'ipotesi di Louis De Broglie.

In analogia al comportamento duale (ondulatorio e corpuscolare) mostrato dalla luce, nel 1923-24 Louis de Broglie (1892-1987), un giovane studente universitario francese, enunciò un'ipotesi particolarmente interessante che lo portò, in seguito, a vincere il

premio Nobel per la Fisica. Nel 1923, nella discussione della sua tesi di dottorato, Louis Victor de Broglie avanzò l'ipotesi che, poiché i fotoni presentano sia caratteristiche ondulatorie che corpuscolari, anche la materia potrebbe avere una doppia natura (ondulatoria e corpuscolare). Ciò costituì un'idea altamente rivoluzionaria ma senza alcuna conferma sperimentale. De Broglie concludeva la sua tesi di dottorato in questo modo: *“L'unico modo di uscirne è quello di ammettere che l'aspetto ondulatorio della luce e il suo aspetto corpuscolare sono due aspetti complementari di una stessa realtà..... (omissis). Si giunge così a una sintesi delle due vecchie teorie rivali, e si possono spiegare contemporaneamente l'interferenza e l'effetto fotoelettrico. Ma se questo è vero per la luce non si può supporre che lo sia altrettanto per la materia? Ma siccome non si può disgiungere un fotone dall'onda che gli è unita, si potrà pensare che anche i corpuscoli di materia siano sempre associati ad un'onda. È questa la questione capitale che dobbiamo trattare.”* In queste ultime proposizioni è già contenuta la grande idea di De Broglie: le onde di materia; idea, peraltro, priva di un approfondito sviluppo matematico.

Facendo appello al principio di simmetria, lo stesso De Broglie ipotizzò che un fascio di particelle presentano le stesse proprietà della luce. Quindi, ad ogni particella materiale, avente quantità di moto $p = mv$, deve essere associata un'onda avente lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

dove h è la costante di Planck. La λ così trovata è detta “lunghezza d'onda di De Broglie” della particella.

La previsione di De Broglie sull'esistenza delle onde di materia fu verificata sperimentalmente per la prima volta nel 1927 da C. J. Davisson e L. H. Germer che ottennero figure di diffrazione operando su sciami di elettroni e da Stern ed Esterman che ripeterono l'esperienza con atomi di idrogeno. L'ipotesi di de Broglie è fondamentale perché aprì la strada ai successivi sviluppi della meccanica ondulatoria.

“Concepita l'idea rivoluzionaria che il moto delle particelle fosse guidato da misteriose onde pilota, De Broglie fu troppo lento nell'elaborare una rigorosa teoria matematica del fenomeno e nel 1926, circa un anno dopo la sua pubblicazione, apparve un articolo di un fisico austriaco Erwin Schrodinger, che scrisse un'equazione generale per le onde di De Broglie e ne dimostrò la validità per tutti i tipi di moto elettronico”. L'articolo cui accenna Gamow in questa presentazione di Schrodinger si trova nel testo *“Trent'anni che sconvolsero la fisica. La storia della teoria dei quanti, Zanichelli, Bologna, 1966”*, dello stesso G. Gamow, è da considerarsi la prima opera di meccanica ondulatoria.

L'equazione trovata da Schrödinger è molto simile alle note equazioni relative alla propagazione delle onde luminose anche se non era chiaro, e per alcuni anni non lo divenne, il significato della funzione Ψ che appariva in tale equazione. Alla comprensione della funzione Ψ aveva dato un contributo fondamentale Heisenberg, soprattutto in alcuni lavori comparsi nel 1926-27 pressoché contemporaneamente allo scritto di meccanica ondulatoria di Schrödinger.

I lavori di Heisenberg e di Schrödinger, se pur impostati e condotti in modo completamente diversi, raggiungevano i medesimi risultati, pur apparendo in Heisenberg un'osservazione in più che si sarebbe rivelata in seguito di eccezionale importanza: il principio di indeterminazione. L'aspetto qualitativo di tale principio così veniva descritto dallo stesso Heisenberg nel suo testo dal titolo *“Natura e fisica moderna”*: *“Non si possono conoscere con precisione, contemporaneamente, i due elementi determinanti insieme il moto di una particella elementare- cioè la sua posizione e la sua velocità. Non si può mai sapere contemporaneamente dove essa è, e in quale direzione e con quale velocità essa si muove. Quando si compie un esperimento che determina con precisione dove si trova la particella in quell'istante, il suo movimento viene talmente perturbato, che non si può più trovare di nuovo la particella nelle vicinanze di quel punto. Viceversa una misurazione precisa della velocità cancella del tutto l'immagine del punto”*.

Da tutto ciò scaturiva che era necessario rinunciare nel campo atomico al tradizionale concetto di traiettoria. Fu solo dopo l'introduzione del principio di indeterminazione che l'equazione di Schrödinger assunse un più immediato significato fisico (passo tratto da G. Gamow - Trent'anni che sconvolsero la fisica): *“le funzioni d'onda di De Broglie e Schrödinger, o piuttosto il quadrato dei loro valori assoluti, determinano la probabilità che la particella si trovi in una parte dello spazio piuttosto che in un'altra, e che si muova con una velocità piuttosto che con un'altra”*.

Allo scopo di chiarire il significato che qui si attribuisce alla parola probabilità riportiamo ancora quanto scrive Gamow sempre nel volume dal titolo *“Trent'anni che sconvolsero la fisica”*: deve essere chiaro che la parola *“probabilità”* usata in questo frangente ha un significato molto diverso da quello che le attribuiamo nella fisica classica e nella nostra esperienza quotidiana..... il comportamento delle molecole di un gas viene infatti descritto sulla base della probabilità statistica solo a causa dell'incompletezza dei dati sulle molecole del gas; se noi conoscessimo le esatte posizioni e le esatte velocità di tutte le molecole del gas, saremmo infatti in grado di prevedere, in tutti i minimi particolari, qualunque fenomeno interno alla massa del gas. Il principio di indeterminazione distrugge dalle fondamenta questo modo di pensare; noi non possiamo prevedere i movimenti delle singole particelle perché siamo nell'impossibilità di conoscerne le condizioni iniziali. Ottenere una misura certa tanto della posizione quanto della velocità di una particella nel mondo atomico è impossibile in sede teorica”.

Riportiamo, infine, un giudizio di Planck del 1929 sul principio di indeterminazione che è possibile leggere in *“La conoscenza del mondo fisico”* il cui autore è lo stesso Planck. *“Questa relazione di indeterminazione di Heisenberg è per la meccanica classica qualcosa di assolutamente inaudito. Si è sempre saputo che ogni misurazione è gravata da una certa incertezza; ma si era sempre ammesso che con opportuni perfezionamenti dei metodi di misura si sarebbe potuto aumentare la precisione senza alcun limite. Ora invece bisogna porre per principio un limite alla precisione delle misurazioni, e lo straordinario è che questo limite non si riferisce alle singole grandezze, posizione e velocità, ma alla loro combinazione. Ogni grandezza di per sé può, in linea di principio,*

essere misurata con quanta precisione si vuole, ma sempre solo a spese della precisione dell'altra.”.

Tra i fisici che fondarono e svilupparono in quegli anni la meccanica ondulatoria, o quantistica, che dir si voglia, occupano il primo posto per l'importanza dei contributi Heisenberg, Schrödinger e De Broglie, il quale associò ad ogni particella materiale, avente quantità di moto $p = mv$, un'onda la cui lunghezza d'onda è data da:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

dove h è la costante di Planck.

Tale relazione ingloba la relazione di Einstein $E = hf$ per i fotoni.

Infatti, per i fotoni vale la relazione:

$$p = \frac{E}{c}$$

Quindi, per essi si ha una lunghezza d'onda data da:

$$\lambda = \frac{h}{p} = h * \frac{c}{E}$$

Pertanto si ottiene:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = hf$$

Inoltre la stessa relazione di De Broglie spiega la stabilità dell'atomo di Bohr: infatti, secondo l'interpretazione ondulatoria non bisogna modellizzare l'elettrone dell'atomo di idrogeno come una particella che segue un'orbita circolare, ma come un'onda stazionaria presente attorno al nucleo dell'atomo. Essendo stazionaria, l'onda si mantiene invariata per un tempo indefinito. Sulla base del modello atomico di Rutherford non era possibile conciliare la stabilità tipica dei sistemi atomici con i principi classici della meccanica e dell'elettrodinamica. Infatti secondo la meccanica newtoniana nessun sistema di cariche puntiformi ammette una configurazione di equilibrio stabile e ogni movimento di elettroni intorno al nucleo causerebbe, in base all'elettrodinamica di Maxwell, una dissipazione di energia per irraggiamento e conseguentemente una contrazione continua del sistema fino a ridurlo a dimensioni molto minori di quelle dell'atomo.

“Una limitazione essenziale delle teorie classiche era già stata rivelata da Planck nel 1900 con la scoperta del quanto universale d'azione, che, in particolare modo per merito di Einstein, aveva trovato applicazione molto promettenti nella spiegazione dei calori specifici e delle reazioni fotochimiche. Indipendentemente dai nuovi dati sulla struttura dell'atomo, vi era perciò un convincimento diffuso che i concetti quantistici avrebbero potuto avere un peso decisivo nella soluzione di tutto il problema della costituzione atomica della materia” - così si esprimeva Bohr nel testo *“I quanti e la vita”*.

L'esperienza di Franck ed Hertz costituì una mirabile conferma della teoria di Bohr. Essa provò in modo definitivo che il sistema atomico può assorbire dall'esterno solo quantità determinate e discontinue di energia. Non solo quindi l'aspetto quantistico è determinante nella fase in cui l'energia viene emessa dall'atomo ma anche in quella nella quale l'atomo

immagazzina, per così dire, energia dall'esterno. Lo scoppio della prima guerra mondiale rallentò alquanto i lavori dei fisici. Di quegli anni sono da ricordare:

1. I lavori di Sommerfeld che trasformò le orbite di Bohr (circolari) in orbite ellittiche situandole, per gli atomi con più elettroni, in piani diversi;
2. Il principio di corrispondenza di Bohr;
3. Le idee di Pauli che, fin da allora, pose le basi di quel "principio di esclusione" che trovò una stesura definitiva nel 1925 e nel quale si asserisce che non possono esistere in un atomo due o più elettroni nelle identiche condizioni fisiche.

Servendosi del principio di Pauli, Bohr e i suoi collaboratori riuscirono a costruire i modelli dei vari atomi dall'idrogeno all'uranio. In questo lavoro essi utilizzarono il sistema di Mendeleyeff, gli studi di spettroscopia e le proprietà chimiche. Si giunse così nel 1927 ad una visione abbastanza completa delle molteplici proprietà degli elementi. *"Ma ci sono casi in cui la leggi della Meccanica non riescono a descrivere il movimento dei corpuscoli. Il primo caso è quello in cui la propagazione dell'onda è ristretta in una regione dello spazio le cui dimensioni sono le stesse della lunghezza d'onda. È quello che accade per gli elettroni nell'interno dell'atomo. L'onda associata all'elettrone deve essere un'onda stazionaria. La teoria mostra che queste onde stazionarie non possono avere che certe lunghezze d'onda ben definite, alle quali corrispondono energie pure ben definite del loro elettrone, e queste energie ben definite corrispondono ai movimenti quantificati, introdotti da Bohr nella teoria. In tal modo si spiega come questi movimenti siano i soli possibili all'elettrone vincolato a muoversi nell'atomo. C'è un secondo caso in cui il movimento dell'elettrone non deve seguire le leggi classiche della Meccanica: quello in cui la sua onda urta contro degli ostacoli durante la sua propagazione".* (Heisenberg - Natura e fisica moderna,...)

Come sappiamo le onde stazionarie non irradiano energia. La teoria delle onde stazionarie chiarisce e prova anche il postulato stesso di Bohr. Le idee di De Broglie portarono in breve tempo i fisici ad accettare una posizione in base alla quale si riconosce alla materia, ed in particolare all'elettrone, una duplice natura: corpuscolare ed ondulatoria. In fisica atomica e nucleare il concetto classico e tradizionale di traiettoria perde inevitabilmente ogni valore. Il concetto di traiettoria, nel mondo atomico, cioè in fisica atomica e nucleare, perde di significato perché è impossibile conoscere contemporaneamente posizione e velocità di una particella con la precisione voluta. Si possono bensì eseguire esperimenti che ci permettono di stabilire con grande precisione la posizione di una particella ma, per compiere questa misurazione, dobbiamo esporre la particella a una forte azione esterna, sì che ne segue una grande indeterminazione della sua velocità. Dalle osservazioni precedenti segue anche una valutazione ben diversa da quella che aveva caratterizzato tutta la fisica classica, sulla possibilità stessa della conoscenza scientifica. *"Mentre in origine lo scopo di ogni indagine scientifica era quello di descrivere possibilmente la natura come essa sarebbe di per sé, vale a dire senza il nostro intervento e senza la nostra osservazione, ora noi comprendiamo che proprio questo scopo è irraggiungibile. Nella fisica atomica non è possibile astrarre in alcuna maniera dalle modificazioni che ogni osservazione produce sull'oggetto osservato".* Così si esprimeva W. Heisenberg in

“Mutamenti nelle basi della scienza”, Torino - Boringhieri, 1969. A questo punto viene spontaneo chiedersi: dei due modelli proposti (quello ondulatorio e quello corpuscolare) quale rappresenta “la realtà? Si hanno quattro possibilità:

1. sono ambedue necessari;
2. nessuno dei due è necessario;
3. è necessario solo il modello corpuscolare;
4. è necessario solo il modello ondulatorio.

Il punto di vista per il quale ambedue i modelli sono necessari è, ancora oggi, il più convincente ed alla sua origine si trova una relazione svolta da Bohr ad un congresso di fisica del 1927 tenuto a Como. Tra l'altro egli sostenne che: *“a causa delle relazioni di indeterminazione i due momenti non possono mai contraddirsi perché più si cerca di precisare un modello, più l'altro diventa indistinto. I due aspetti corpuscolare e ondulatorio non entrano in conflitto perché non si presentano mai contemporaneamente; quanto più nette sono in un fenomeno le proprietà corpuscolari di un elettrone tanto più sfumate, evanescenti sono le sue proprietà ondulatorie”*. (Gliozzi, Storia della Fisica). Tale posizione peraltro, non è unica. Difatti molti filosofi della fisica hanno pensato che l'argomento della complementarità è insoddisfacente perché le rappresentazioni corpuscolari ed ondulatorie sono soltanto artifici matematici e non descrizioni della realtà. Resta comunque il fatto che, allo stato attuale delle nostre conoscenze, all'elettrone debbono essere attribuite caratteristiche sia ondulatorie che corpuscolari.

Si richiama il punto 2 del problema

2. Spiegare i concetti fondamentali della meccanica ondulatoria, soffermandosi in particolare sull'interpretazione probabilistica delle funzioni d'onda e sul principio d'indeterminazione.

Una delle crisi più profonde e più ricche di sviluppi nell'evoluzione della fisica si è manifestata tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento. Alla fine dell'Ottocento, l'interpretazione dei fenomeni fisici del mondo macroscopico era compendiata nelle classiche equazioni di Newton che regolavano i fenomeni meccanici in senso stretto e quelli acustici e termici (che ai primi si riducevano attraverso le teorie statistiche e cinetiche) e in quelle di Maxwell (che regolavano i fenomeni elettrici, magnetici e ottici). Sembrò così di aver trovato, con la riduzione dei numerosi e molteplici fenomeni fisici a questi due gruppi fondamentali, un inquadramento teorico pienamente soddisfacente. La distinzione tra natura ondulatoria o di campo della radiazione elettromagnetica e natura corpuscolare della materia appariva netta ed indiscutibile. La prima si manifestava chiaramente nei fenomeni di diffrazione e interferenza; la seconda nella possibilità di descrivere il moto di una particella materiale in un campo di forze assegnato attribuendo ad essa in ogni istante una posizione e una velocità determinata. Fu solo tra la fine dell'800 e l'inizio del '900 che i fisici si resero conto dell'esistenza di alcuni fenomeni che era impossibile inquadrare nello schema delle leggi classiche suddette e che invalidavano in qualche modo la distinzione precedentemente ammessa tra campo e

particella. Storicamente i problemi che misero in luce i limiti di validità delle leggi classiche furono quello della modalità di emissione e assorbimento di radiazione da parte della materia, in particolare lo spettro di emissione del corpo nero, e quello della costituzione e struttura degli atomi. Uno spettro rappresenta un insieme di radiazioni, emesse o assorbite dagli atomi o dalle molecole, distribuite ed espresse in funzione delle lunghezze d'onda o delle frequenze. Lo spettro riguardante la regione del visibile, ossia delle radiazioni corrispondenti all'intervallo di lunghezze d'onda compreso tra 0,4 e 0,8 μm nel vuoto. Gli spettri, di solito, vengono classificati in:

1. Spettri di emissione;
2. Spettri di assorbimento

A loro volta, sia quelli dell'uno sia quelli dell'altro tipo, si dividono in:

1. Spettri continui;
2. Spettri di righe;
3. Spettri di bande

Lo spettro di emissione si ha quando le radiazioni ottiche emesse da una sorgente opportunamente eccitata vengono direttamente disperse nelle componenti monocromatiche mediante uno spettroscopio, chiamato anche spettrometro se munito di una scala graduata da utilizzare per la misura della lunghezza d'onda della radiazione. Indipendentemente dalla loro natura chimica, sia i solidi che i liquidi, allorché vengono portati alla stessa temperatura, emettono la stessa radiazione luminosa. L'aspetto fondamentale è che i corpi chimicamente diversi, portati alla stessa temperatura, sono praticamente caratterizzati dallo stesso spettro della luce emessa. Lo spettro di assorbimento, invece, si ottiene interponendo, sul cammino della radiazione in grado di originare uno spettro continuo, una sostanza, in genere un gas o un vapore, che assorbe, in corrispondenza di certe lunghezze d'onda più o meno estese, alcune componenti che l'attraversano. Confrontando gli spettri in emissione e in assorbimento, forniti da una stessa sostanza allo stato aeriforme, si nota una corrispondenza, rilevata per la prima volta da Kirchhoff, comunemente chiamata *“principio di inversione dello spettro: ogni sostanza aeriforme è capace di assorbire quelle radiazioni che nelle stesse condizioni fisiche è anche capace di emettere”*. Cioè, a righe brillanti in emissione corrispondono in assorbimento righe scure localizzate sullo sfondo dello spettro luminoso continuo. Talvolta, per individuare le righe spettrali si utilizza, in luogo della frequenza o della lunghezza d'onda, la cosiddetta “frequenza spettroscopica o numero d'onda”, che rappresenta il numero delle lunghezze d'onda contenuto nell'unità di lunghezza. Se $\tilde{\nu}$ è il numero d'onda e λ è la lunghezza d'onda, si ha perciò:

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda}$$

Si preferisce ricorrere al numero d'onda $\tilde{\nu}$ per una migliore precisione operativa, in quanto la determinazione sperimentale della frequenza $\nu = c/\lambda$ è affetta dall'errore sia sulla misura di λ sia sulla misura della velocità della luce. In conclusione, la fisica classica, sviluppatasi a partire da Galileo e codificata da Newton nella seconda metà del 1600 per quel che riguarda la Meccanica e da Maxwell nella seconda metà del 1800 per

quel che concerne la radiazione, era in grado di spiegare gran parte degli eventi osservabili. Solo un ristretto numero di fenomeni non trovava spiegazione in questo impianto teorico. In realtà, oggi è noto che ciò era dovuto al fatto che venivano osservati solo gli eventi del mondo macroscopico e tralasciati, per limiti strumentali, quelli del mondo, per così dire microscopico. In questa cornice, non trovavano una spiegazione alcuni fatti sperimentali. Innanzitutto non era possibile descrivere la radiazione di corpo nero in modo consistente con i risultati sperimentali. Detto in altri termini, il problema del corpo nero, se trattato con teorie classiche, porta a risultati assurdi. È noto che i corpi solidi e i liquidi a qualsiasi temperatura emettono una radiazione a spettro continuo che, per temperature non troppo alte, è invisibile (raggi infrarossi o calore raggiante) mentre a temperature di alcuni centinaia di gradi diviene visibile (incandescenza). Se sul corpo incide della radiazione, questa in generale verrà in parte riflessa e in parte assorbita. Si dice “*potere assorbente* $a(\nu, T)$ ” del corpo il rapporto tra l’energia da esso assorbita in un dato intervallo di tempo, di frequenza e su un dato elemento di superficie e la corrispondente energia della radiazione incidente. È evidente che il potere assorbente è sempre minore o uguale ad uno:

$$a(\nu, T) \leq 1$$

Quando il corpo assorbe tutta la radiazione incidente qualunque sia la frequenza e la temperatura T , allora è sempre $a(\nu, T, x) = 1$ e il corpo si dice nero. Come è noto, ogni corpo portato a temperatura abbastanza elevata emette radiazioni termiche, luminose e ultraviolette. In particolare, se la sostanza considerata è allo stato solido o liquido essa origina uno spettro continuo, formato da una successione ininterrotta di frequenze comprese in un determinato intervallo di valori. Entro certi limiti, le caratteristiche della radiazione elettromagnetica emessa dal corpo dipendono dalla temperatura, dalla natura e dalla geometria della sorgente radiante. Consideriamo ora un oggetto che possa comportarsi come un corpo nero che, essendo un perfetto assorbente, non riflette le radiazioni, in particolare quelle luminose, che riceve. Mentre in condizioni normali il corpo appare nero, quando la temperatura aumenta esso può diventare visibile. Per esempio, il Sole viene considerato un tipico corpo nero, in quanto non riflette le radiazioni che lo colpiscono ed emette solo onde elettromagnetiche di produzione propria. Se riscaldiamo un corpo nero a una temperatura sufficientemente elevata, esso emette delle radiazioni la cui curva di distribuzione spettrale non dipende più dalla sua forma, dalla sua natura, né da altre proprietà specifiche del corpo, bensì solo dalla temperatura assoluta. Ovvero, un corpo nero (ad es. un cubo metallico cavo) ha uno spettro di radiazione ben definito dipendente dalla sola temperatura. Un approccio strettamente fenomenologico al problema delineato aveva prodotto alcune leggi di dipendenza molto importanti. La prima, in ordine di tempo, è la legge di Stefan che lega l’energia emessa per unità di tempo e di superficie (W) alla temperatura attraverso la costante di Stefan-Boltzman (σ):

$$W = \sigma * T^4 \quad \text{con } \sigma = 5,67 * 10^{-8} W * m^{-2} * K^{-4}$$

Lo spettro dell'energia emessa dal corpo nero per unità di volume e di frequenza $u(\nu, T)$ fu calcolato da Rayleigh e Jeans in anni diversi (il primo nel 1900, il secondo nel 1905) e seguendo ragionamenti diversi, ma giungendo entrambi ad affermare che:

$$u(\nu, T) = \nu^2 * \frac{K T}{c^3}$$

dove K è la costante di Boltzmann.

Essa riproduce abbastanza bene i risultati sperimentali per piccoli valori della frequenza. È però in totale disaccordo per valori della frequenza sufficientemente alti (maggiori del punto di massimo della curva sperimentale del potere emissivo del corpo nero per una data temperatura). Inoltre è in contrasto con l'esperienza in quanto prevede che, a qualsiasi temperatura, un corpo nero emetta di più alle alte frequenze (radiazioni blu) che alle basse frequenze (rosso). Ovviamente, poi, la legge di Rayleigh e Jeans è teoricamente assurda in quanto l'energia totale irraggiata nell'unità di tempo risulta infinita per qualsiasi valore della temperatura T . Difatti:

$$U(T) = \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \int_0^{\infty} \nu^2 * \frac{K T}{c^3} d\nu = \frac{K T}{c^3} \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu = \infty$$

Tale risultato è evidentemente errato.

In questo contesto si inserisce il lavoro rivoluzionario di Planck, il quale, partendo proprio dall'indipendenza dell'emissione dalla natura del corpo nero, pensò di sostituire le pareti reali con un insieme di oscillatori armonici per i quali era nota la legge di emissione. Il 14 dicembre 1900 Max Planck, professore dell'Università di Berlino, presentò all'Accademia delle Scienze un lavoro dal titolo "*Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung*" il parametro T , la relazione di Planck:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi^2}{c^3} * \left(\frac{h\nu^3}{e^{h\nu/KT} - 1} \right) \quad 1)$$

riusciva infatti a interpretare perfettamente l'andamento sperimentale delle curve che rappresentano la potenza emessa per unità di superficie da un corpo nero in funzione della frequenza per diversi valori della temperatura. La radianza spettrale $S(\lambda)$, data da:

$$S(\lambda) = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} * \frac{1}{e^{h\nu/KT} - 1}$$

riproduceva brillantemente i risultati sperimentali sull'intero campo di lunghezze d'onda a tutte le temperature. La funzione che esprime tale radianza in funzione della lunghezza d'onda è detta "*legge dell'irraggiamento di Planck*".

La funzione di distribuzione spettrale $P(\nu, T)$ presenta un massimo per la frequenza ν_m proporzionale alla temperatura assoluta. Per spiegare l'emissione di energia Planck suppose che gli atomi, allorché eccitati, si comportano come tanti oscillatori che irradiano energia non con continuità, bensì per salti caratterizzati da un piccolo valore che non poteva essere reso nullo. L'idea di Planck, integrata e generalizzata alcuni anni dopo da Einstein, è basata sul fatto che la radiazione emessa dal corpo nero è costituita da una serie discontinua di atti elementari, a ognuno dei quali è associata una specie di pacchetto

di energia quantitativamente proporzionale alla frequenza della radiazione, mediante la costante universale h , detta costante di Planck, il cui valore oggi accettato, è:

$$h = 6,626 * 10^{-27} \text{ erg} * \text{sec} = 4,136 * 10^{-15} \text{ eV} * \text{sec}$$

Storicamente Planck pervenne dapprima (ottobre 1900) alla relazione 1) come formula di interpolazione tra la distribuzione spettrale del corpo nero a basse frequenze, che è correttamente descritta dalla formula di Rayleigh e Jeans:

$$u(\nu, T) = \frac{K T}{c^3} * \nu^2$$

e quella proposta da Wien:

$$u(\nu, T) = b \nu^3 * e^{-\nu/T}$$

che risultava in accordo con i dati sperimentali per alte frequenze.

Concludendo, l'ipotesi nuova rispetto alla fisica classica introdotta da Planck nella deduzione della sua formula è essenzialmente la seguente: tutte le volte che da parte della materia avviene un processo di emissione o di assorbimento di radiazione, tale processo si manifesta come una successione di atti elementari, in ognuno dei quali la quantità di energia emessa o assorbita è sempre la stessa e precisamente tale quantità è legata alla frequenza della radiazione dalla relazione:

$$\varepsilon = h\nu$$

essendo h una costante universale. Per questo, nel 1918, Planck ricevette il premio Nobel per la Fisica. Questa scoperta aprì un nuovo mondo di investigazioni scientifiche. I contributi più caratteristici e sicuramente più decisivi per la genesi, prima, e per l'affermarsi poi della teoria quantistica sono senza dubbio il problema del corpo nero risolto da Planck e l'interpretazione dell'effetto fotoelettrico dovuto a Einstein. Si tratta delle prime teorie che hanno contribuito ad associare al campo elettromagnetico una struttura a quanti. Questa realtà, che oggi sembra del tutto ovvia e naturale, era invece all'inizio del secolo scorso decisamente rivoluzionaria. Il crollo delle teorie classiche provocato dai principi quantistici hanno sicuramente creato una nuova immagine della scienza e, in un certo qual modo, della natura. Per opera di Planck, Einstein, Bohr, de Broglie, Heisenberg, Schrodinger, Born, Dirac, la struttura atomica della materia, i quanti di energia, il principio di indeterminazione, il rifiuto di una pura logica casuale, il dualismo onda-corpuscolo, il principio di complementarità, hanno invaso la fisica. Anche se lo strano mondo dei quanti molto spesso sfugge a una prima interpretazione del senso comune, i risultati sperimentali riguardanti i fenomeni molecolari, atomici e nucleari, nonché molti altri direttamente connessi con le particelle elementari, sono sempre in perfetta corrispondenza con i concetti fondamentali della teoria quantistica. Un fenomeno che fu osservato parecchio tempo dopo (1923), ma che mette particolarmente in evidenza l'esistenza dei fotoni è il cosiddetto "effetto Compton", da Compton appunto scoperto e successivamente interpretato. Esso riguarda la diffusione dei raggi X e γ da parte di gas, liquidi e solidi. Se un sottile pennello di raggi X di lunghezza d'onda λ attraversa una sostanza (per esempio un pezzo di carbone) da questa si irradiano in tutte le direzioni i raggi X diffusi (oltre a questi esistono anche i raggi X di fluorescenza di cui non ci occuperemo). Se si raccolgono e si analizzano con uno spettrografo a cristallo i raggi

diffusi, una identica a quella in una data direzione, formante un angolo θ con la direzione dei raggi primari, si constata che i raggi diffusi hanno una lunghezza d'onda λ' lievemente maggiore di λ . Alla radiazione diffusa con effetto Compton è generalmente mescolata anche radiazione diffusa senza cambiamento di lunghezza d'onda. Quindi lo spettro che si ottiene mostra due righe vicinissime, una identica a quella che si otterrebbe analizzando i raggi incidenti, l'altra spostata verso le lunghezze d'onda maggiori. La variazione di lunghezza d'onda è indipendente dalla natura della sostanza diffondente; dipende invece dall'angolo θ secondo la legge:

$$\lambda' - \lambda = 0,024 (1 - \cos \theta) \text{ \AA}$$

Essa è quindi massima per la radiazione diffusa all'indietro ($\theta=180^\circ$) e ammonta allora a 0,048 Å. La teoria elettromagnetica classica è assolutamente incapace di spiegare la presenza della riga spostata. Secondo la teoria dei fotoni, invece, la diffusione è dovuta al fatto che i fotoni della radiazione incidente urtano nel corpo diffondente contro gli elettroni in esso contenuti e ne vengono deviati, alcuni in una direzione, altri in un'altra. La rivoluzione quantistica avvenne in pochissimi anni, e molti scienziati faticarono ad accettare le nuove scoperte, anche perché non fu disponibile subito una teoria unificante, che permettesse una corretta interpretazione e catalogazione dei fenomeni. Alla ricerca di una “matematizzazione” di questi modelli quantistici contribuirono in modo determinante due scienziati, E. Schrödinger (1887-1961) e W. Heisenberg (1901-1976), i quali nel 1926 proposero due approcci differenti al problema. Il primo generalizzò l'idea di De Broglie sulle “onde pilota” degli elettroni e degli atomi tramite la soluzione di una particolare equazione, chiamata appunto “equazione di Schrödinger”, mentre il secondo usò una particolare tecnica che in matematica va sotto il nome di “calcolo matriciale”. Ma, la prima descrizione quantistica vera e propria fu la meccanica ondulatoria dell'austriaco E. Schrödinger che utilizzò metodi matematici tradizionali impiegati in ottica e in meccanica razionale. La trattazione matematica odierna, invece, è quella elaborata dal tedesco W. Heisenberg (1901-1976) che, partendo da un punto di vista completamente diverso, secondo cui la descrizione della natura a livello dei suoi costituenti ultimi non può essere effettuata dai concetti propri del mondo macroscopico ma solo con formule matematiche in grado di prevederne il comportamento, usò una particolare tecnica che in matematica va sotto il nome di “calcolo matriciale”. La teoria di Heisenberg e quella di Schrödinger sono equivalenti. Come la meccanica relativistica, nata dalla revisione di alcuni concetti relativi allo spazio e al tempo, contiene la meccanica classica, così da una revisione della teoria di Bohr, si sperava di costruire una nuova meccanica che potesse dare risultati conformi all'esperienza nelle applicazioni ai domini microscopici e, nello stesso tempo, tendesse alla fisica classica per quei fenomeni nei quali scompaiono le discontinuità caratterizzate dalla costante di Planck. La via per arrivare a formulare una nuova “meccanica atomica”, successivamente chiamata “meccanica quantistica”, iniziò verso il 1922 mediante due diverse teorie elaborate quasi contemporaneamente. Questi due metodi sono: la meccanica ondulatoria di Schrödinger basata sulla generale ipotesi di de Broglie delle onde materiali e la meccanica delle matrici, sviluppata da alcuni fisici teorici (Born, Jordan, Dirac ecc..) sulla linea delle

prime idee di Heisenberg. In linea di principio, la meccanica quantistica può essere considerata, almeno fino ad oggi, una teoria collaudata e sicura. Le sue applicazioni sono innumerevoli; la precisione dei risultati e la potenza nel prevedere e interpretare nuovi fenomeni sono grandiose. Dalla meccanica quantistica deriva la comprensione razionale della struttura dell'atomo, dei metalli, dei semiconduttori e in genere della materia, la natura del legame chimico e di alcuni processi biologici, la guida più sicura per lo studio della struttura dei nuclei e di molti altri fenomeni prima interpretati solo empiricamente o condizionato da ipotesi ad hoc. Come vedremo, la meccanica quantistica comporta alcune bizzarre novità che provocano un certo disagio logico e concettuale. Innanzitutto, la meccanica quantistica distrugge la tradizionale nozione di causalità. Fino all'avvento della Meccanica Quantistica ogni fenomeno naturale era stato sempre considerato nell'ambito di una rigorosa logica deterministica, connessa al presupposto che ogni evento naturale poteva essere collegato a una causa che lo provoca. L'ideale deterministico, tipico della cultura dell'epoca, fu generalizzato in modo formale da Laplace nell'introduzione della sua opera *“Essai philosophique sur les probabilités: une intelligence che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze da cui è animata la natura e la situazione reciproca degli esseri che la compongono, se per di più fosse abbastanza profonda per sottoporre questi dati all'analisi, potrebbe abbracciare nella stessa formula i moti dei più grandi corpi dell'universo e degli atomi più leggeri, nulla sarebbe incerto per essa e l'avvenire, come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi”*. Questa smisurata facoltà di connessione casuale estrapolata fino alle più piccole unità del mondo atomico deriva in larga misura dal ritenere, in linea di principio, potenzialmente possibile conoscere la posizione e la velocità istantanea di tutte le componenti dell'universo. Nelle teorie classiche il calcolo delle probabilità viene utilizzato solo per dare significato a certe grandezze macroscopiche, senza che il determinismo laplaciano venga concettualmente ripudiato (vedi ad es. lo studio di un sistema termodinamico).

Nella fisica quantistica, invece, il carattere probabilistico assume un ruolo del tutto diverso. Esso nasce dal fatto che le nostre possibilità di analisi sono condizionate da alcuni limiti fondamentali, compendiate nel principio di indeterminazione di Heisenberg. La rigorosa connessione fra le cause (legate ai dati iniziali) e gli effetti (evoluzione del processo nel tempo) viene così messa in crisi, non da imperfezioni dei metodi di misura, bensì da una impossibilità concettuale.

Dobbiamo comunque ricordare che non tutte le idee della meccanica quantistica sono state pienamente condivise dai cultori delle scienze. Alcuni grandi fisici, pur ammettendo l'esattezza delle formule, l'utilità e i successi della meccanica quantistica, hanno sempre considerato con una certa diffidenza e, in qualche caso con una netta opposizione, la logica probabilistica delle nuove teorie. Tra coloro che, pur avendo dato notevoli contributi allo sviluppo della fisica atomica del primo Novecento, rifiutarono di accettare in modo definitivo e completo la teoria quantistica, ricordiamo Einstein, Planck, Schrödinger, de Broglie, Ehrenfest, Lorentz e altri. A proposito di Einstein, le cui convinzioni filosofiche di impronta deterministica non gli permisero di accogliere fra i principi della natura le relazioni di indeterminazione di Heisenberg, molto significativi

sono alcuni brani tratti da un volume scritto da Born (M. Born, *Physics in my generation*, Springer Verlag, New York, 1969).

Nella parte dedicata ad Einstein, commentando le diverse posizioni epistemologiche dei fisici della sua generazione, Born riporta alcune lettere inviategli dallo scienziato di Ulm: *“Non posso sopportare il pensiero che un elettrone esposto a un raggio di luce possa con sua propria e libera decisione scegliere il momento e la direzione secondo cui vuole saltare via. Se fosse così preferirei essere un calzolaio o persino un impiegato di una casa da gioco che un fisico”*. Da questo brano, e ancora più marcatamente da quello che segue, risulta evidente il rifiuto di Einstein di abbandonare la logica deterministica. *“Nel nostro atteggiamento scientifico siamo agli antipodi. Tu credi nel Dio che gioca a dadi, e io in leggi rigorose in un mondo di qualcosa che esiste oggettivamente e che cerco di afferrare in modo fortemente speculativo”*.

Tra i fisici più importanti che, in netta contrapposizione con quelli del gruppo capeggiato da Einstein, considerarono la meccanica quantistica una teoria completa, le cui ipotesi fondamentali, fisiche e matematiche, non possono essere soggette a profondi mutamenti, ricordiamo Bohr, Heisenberg, Born, Pauli, Dirac, Jordan. Questi scienziati, altrettanto brillanti e famosi come i primi sopra elencati, vennero poi identificati come *“quelli della Scuola di Copenaghen”*. La Meccanica Quantistica unifica idee e fatti dapprima non correlati, risolve in maniera soddisfacente molti problemi del mondo atomico e molecolare e soprattutto indica la via per nuove ricerche. Nonostante i molti tentativi, nessuno è riuscito fino ad oggi a sostituire la meccanica quantistica con un'altra teoria più coerente nella logica e più concreta nei risultati. Gli eventi quantistici non garantiscono certezze, ma, al contrario della meccanica newtoniana, offrono solo una distribuzione di probabilità. I principi fondamentali della meccanica quantistica sono:

1. Ipotesi di De Broglie: Dualismo onda- corpuscolo: ad ogni particella elementare è associata un'onda, cioè la particella presenta sia un carattere ondulatorio che corpuscolare.
2. Principio di complementarità: è impossibile osservare contemporaneamente il comportamento corpuscolare e ondulatorio della particella.
3. Principio di indeterminazione di Heisenberg;
4. Principio di corrispondenza;

La meccanica ondulatoria è una particolare formalizzazione della meccanica quantistica presentata nel 1926 da Erwin Schrödinger. Secondo tale teoria, ogni sistema fisico microscopico è descritto da una funzione complessa delle tre coordinate spaziali (x, y, z) e del tempo t, detta funzione d'onda $\Psi(x, y, z, t)$. L'equazione che descrive la propagazione di una tale funzione d'onda, in approssimazione non relativistica, è detta *“equazione di Schrödinger”*. Vediamo a quali proprietà fondamentali devono soddisfare le funzioni d'onda associate a una particella, per essere adatte a interpretare i fatti sperimentali. Le onde di cui si parla sono onde di probabilità. Imponiamo la condizione che tale probabilità w sia proporzionale all'ampiezza dell'onda, ovvero:

$$dw \approx |\Psi(x, y, z, t)|^2 dV = \Psi(x, y, z, t)^* * \Psi(x, y, z, t) dV$$

relazione che esprime, appunto, la probabilità di trovare la particella nel volumetto dV .

Lo stesso Schrödinger non seppe dare una precisa interpretazione fisica della funzione d'onda, pensata inizialmente come onda di materia, ipotesi subito abbandonata. Fu Max Born a proporre, nel 1926, l'interpretazione probabilistica, attualmente accettata: il quadrato del modulo della funzione d'onda:

$$|\Psi(x, y, z, t)|^2 = P(x, y, z, t)$$

determina la probabilità di trovare la particella nel punto $P(x, y, z)$ all'istante t . La relazione di proporzionalità nell'equazione precedente diviene una relazione di uguaglianza se si impone (dove possibile) la condizione di normalizzazione, ovvero:

$$\int |\Psi(x, y, z, t)|^2 dV = 1$$

esteso al volume V , normalizzando la Ψ mediante un opportuno fattore.

Inoltre imponremo che le $\Psi(\vec{r}, t)$ siano funzioni continue con derivate parziali prime continue in ogni punto dello spazio.

Per spiegare, poi, i risultati dell'interferenza delle onde materiali bisogna imporre che, per tali funzioni d'onda, valga il principio di sovrapposizione. Questa proprietà, che viene riscontrata normalmente in elettromagnetismo (si pensi alla luce), può essere descritta affermando che se due funzioni d'onda $\Psi_1(\vec{r}, t)$ e $\Psi_2(\vec{r}, t)$ sono valide descrizioni di una particella, lo è anche la loro combinazione lineare: $c_1 \Psi_1(\vec{r}, t) + c_2 \Psi_2(\vec{r}, t)$, con c_1 e c_2 numeri complessi. La teoria dell'equazione di Schrödinger riguarda un'equazione d'onda che deve descrivere le onde materiali associate a una particella secondo l'ipotesi di Louis de Broglie. La funzione d'onda è una funzione a valori complessi della posizione e del tempo. In base a quanto detto precedentemente, l'equazione della quale essa è soluzione, dovrà essere lineare; in particolare, se a una definita funzione d'onda $\Psi(\vec{r}, t)$ corrisponde un definito stato di moto della particella, anche la funzione

$$e^{i\chi} * \Psi(\vec{r}, t)$$

dove χ è una costante reale arbitraria, descriverà lo stesso stato. Nel seguito per semplicità tratteremo il caso di un problema unidimensionale. Consideriamo, quindi, una particella libera di massa m , in moto lungo l'asse x con una quantità di moto p . La sua energia sarà

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

Per le note relazioni di Planck e de Broglie la relazione precedente diventa:

$$\frac{h}{2\pi} \omega = \frac{hK^2}{4m}$$

Se ipotizziamo che la $\Psi(x, t)$, come onda piana, abbia la seguente espressione matematica:

$$\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$$

derivando rispetto al tempo, otteniamo:

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -i\omega \Psi(x, t)$$

Se deriviamo due volte rispetto alla direzione del moto x , otteniamo:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} = -K^2 \Psi(x, t)$$

Pertanto:

$$i \frac{h}{2\pi} * \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = - \frac{h^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2}$$

che è proprio l'equazione di Schrödinger cui deve soddisfare la funzione d'onda di particelle libere non relativistiche. Essa corrisponde a quella che in meccanica classica si direbbe l'equazione del moto a potenziale costante. In presenza di un potenziale si ottiene, aggiungendo al termine cinetico nella equazione precedente, l'energia potenziale $U(x, t)$, si ha:

$$i \frac{h}{2\pi} * \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = - \frac{h^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x, t) * \Psi(x, t)$$

Se consideriamo un volume infinitesimo dV centrato nel punto $P(x, y, z)$, la quantità $|\Psi(x, y, z, t)|^2 dV$ fornisce la probabilità che l'elettrone all'istante t si trovi nel volumetto dV . Secondo la meccanica ondulatoria, le probabilità calcolate a partire dalla formula precedente sono le informazioni più dettagliate che, in linea di principio, è possibile ottenere sul sistema fisico quantistico in esame. La meccanica ondulatoria abbandona quindi il determinismo tipico della fisica classica: in generale, bisogna rinunciare all'idea di prevedere in dettaglio l'evoluzione di un sistema fisico o il risultato di una misura sperimentale. Invece, la teoria permette di calcolare con quale probabilità avranno luogo le possibili evoluzioni di uno stesso stato fisico, oppure con quali probabilità, eseguendo un esperimento, otterremo uno dei risultati possibili piuttosto che un altro. Per una particella quantistica, avere caratteristiche ondulatorie significa essere “*un'onda di probabilità*” con cui si può calcolare con precisione solo la probabilità che la particella sia in una posizione particolare o abbia una velocità determinata, ma che non fornisce la misura diretta di quelle grandezze.

La funzione d'onda è, quindi, uno strumento matematico che descrive la probabilità di trovare la particella in uno stato particolare. La meccanica ondulatoria si sviluppò, inizialmente, come un algoritmo matematico, operante su una grandezza $\Psi(x, y, z, t)$ del tutto astratta, soddisfacente l'equazione caratteristica delle onde. Più tardi Schrödinger cercò di dare un significato fisico a Ψ , ma fu Max Born (1892-1970) a suggerire l'interpretazione più ragionevole e ancora oggi accettata.

Alla luce del principio di indeterminazione di Heisenberg, Born affermò che la funzione d'onda Ψ , soluzione dell'equazione di Schrödinger, permette di calcolare la probabilità di trovare la particella descritta in uno stato piuttosto che in un altro. L'ipotesi di De Broglie nel 1924 e la meccanica di Schrödinger nel 1926 eliminarono il modello meccanico, fecero giustamente perdere significato fisico al concetto meccanico di orbita di un elettrone atomico ed espressero risultati solo sulle grandezze effettivamente osservabili. Parallelamente alla meccanica ondulatoria, Heisenberg portò alle estreme conseguenze la critica a un qualunque modello geometrico e meccanico, sviluppando una meccanica basata soltanto su relazioni dirette tra grandezze osservabili, quali le frequenze e le intensità delle righe spettrali emesse dai sistemi eccitati, senza l'intervento di alcun modello. La nuova teoria, partita da un'idea di Heisenberg e sviluppata poi anche da Born e Jordan prende il nome di “meccanica quantistica”. L'impossibilità di un modello

meccanico fu messa in luce in modo indubitabile da Heisenberg quando formulò il suo principio di indeterminazione; è tale principio che non dà realtà, per esempio, all'orbita di un elettrone atomico. Dal momento che, sia la meccanica ondulatoria sia la meccanica quantistica, per vie diverse, eliminano il modello meccanico della teoria di Bohr, ci si deve aspettare che i loro risultati siano in accordo reciproco. Così è infatti. Lo stesso Schrodinger dimostrò che i due metodi sono rigorosamente equivalenti. Per questa ragione spesso le espressioni meccanica ondulatoria e meccanica quantistica vengono usate come sinonimi.

Un'altra differenza tra la meccanica classica e quella quantistica è espressa dal principio di indeterminazione di Heisenberg proposto nel 1927 dal fisico tedesco Werner Heisenberg. Esso afferma che non si possono misurare simultaneamente con precisione illimitata valori della posizione $\vec{r}$ e della quantità di moto $\vec{p}$ di una particella. Mentre nella meccanica classica, in linea di principio è possibile conoscere contemporaneamente e con infinita precisione la posizione e la quantità di moto di una particella, nella meccanica quantistica, invece, l'indeterminazione Δx sulla posizione di una particella e l'indeterminazione Δp sulla sua quantità di moto sono legate dalla relazione:

$$\begin{cases} \Delta x * \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi} \\ \Delta y * \Delta p_y \geq \frac{h}{4\pi} \\ \Delta z * \Delta p_z \geq \frac{h}{4\pi} \end{cases}$$

Così se si fa tendere a zero l'indeterminazione su una delle due grandezze x o p_x , l'indeterminazione sull'altra tende all'infinito. Tra le altre cose, il principio di indeterminazione fornisce una diversa spiegazione del fatto che l'elettrone dell'atomo di idrogeno non può "collassare" sul nucleo: in effetti, un elettrone fermo sul nucleo di un atomo avrebbe un'indeterminazione molto piccola (dell'ordine del diametro del nucleo) sulla posizione e contemporaneamente, essendo fermo, un'indeterminazione nulla sulla quantità di moto. Ma una tale situazione non può avvenire perché è in contraddizione con il principio di Heisenberg. Il principio di indeterminazione di Heisenberg si esprime anche nella forma

$$\Delta E * \Delta t \geq h/4\pi$$

Questa formula ha due possibili interpretazioni:

- la precisione intrinseca ΔE su una misura di energia dipende dalla durata della misura stessa.
- per analizzare fenomeni che avvengono durante intervalli di tempo molto brevi bisogna impiegare energie corrispondentemente grandi.

In questa formulazione si deduce che più lunga è la durata della misura dell'energia di un sistema, più è piccola l'indeterminazione sul valore dell'energia misurata. Al contrario, misurare un intervallo di tempo molto piccolo significa avere grande incertezza sulle energie in gioco. Nel mondo degli atomi dobbiamo rinunciare alla tradizionale idea di traiettoria intesa come una linea geometrica che fornisce istante per istante la posizione

della particella e la velocità. Il principio di indeterminazione, infatti, afferma che non si possono conoscere simultaneamente con precisione infinita la posizione e la velocità di un corpo. In genere, la posizione è nota con un'incertezza non nulla e alla particella è associata un'onda di probabilità. Le stesse considerazioni fatte per la posizione si possono applicare anche alla quantità di moto, e quindi alla velocità delle particelle. Un aspetto particolare dell'indeterminazione quantistica è che, riducendo l'incertezza su una variabile, si aumenta l'incertezza sulla variabile coniugata. Un'altra interpretazione del principio di indeterminazione risiede soprattutto nel significato probabilistico insito nel dualismo onda-corpuscolo. Accettando il principio di indeterminazione, valido nel mondo atomico, crolla in modo definitivo l'approccio puramente deterministico della scienza fisica, sebbene quest'ultimo continui a conservare la sua validità per i fenomeni macroscopici che avvengono quotidianamente sotto i nostri occhi. Pertanto, mentre in meccanica classica è almeno teoricamente possibile pensare ad una misura perfetta, impossibile da realizzare solo per questioni pratiche, questa è invece concettualmente proibita in meccanica quantistica. Questa interpretazione non è stata tuttavia accolta nella cosiddetta "*interpretazione ortodossa o di Copenaghen*" della meccanica quantistica, nella quale si afferma invece che l'indeterminazione non è un limite teorico alle possibilità di misura, bensì è intrinsecamente propria di ogni sistema fisico. È da rilevare inoltre che tale relazione scaturisce dal formalismo ondulatorio (disuguaglianze analoghe sono note anche in ottica classica con il nome di "relazioni di dispersione") per cui non si può propriamente parlare di principio. Strettamente legata all'interpretazione dell'indeterminazione vi è una delle domande più intriganti sulla meccanica quantistica, che ha determinato un dibattito epistemologico tuttora aperto sui fondamenti della teoria stessa e concerne il significato delle probabilità quantistiche che possono essere di natura "*epistemica*", ovvero legate alla possibilità di conoscenza o "*non epistemica*", ovvero proprie del sistema stesso. Nella seconda metà del XX secolo notevoli sviluppi teorici e sperimentali (teoria di Bell e esperimento di Aspect) hanno però permesso di suffragare la natura non epistemica delle probabilità, ovvero di un comportamento aleatorio intrinsecamente insito nella natura stessa.

Si richiama il punto 3 del problema

3. Spiegare il significato dell'espressione "dualismo onda-corpuscolo".

Probabilmente molte delle idee della fisica moderna ci sembrano strane perché le percezioni dirette che riceviamo dal mondo esterno sono limitate. D'altra parte non bisogna dimenticare che i metodi di osservazione dei fenomeni fisici ed i principi su cui questi si basano sono sempre condizionati ed ispirati dall'esperienza della vita quotidiana e non certo da quanto avviene nel mondo infinitamente piccolo degli atomi. Prendiamo in esame alcune delle grandi idee della fisica moderna soffermandoci, in particolare, sul dualismo onda-corpuscolo e sul principio di indeterminazione di Heisenberg. Vediamo come si può conciliare il dualismo onda-corpuscolo, il fatto cioè che le radiazioni elettromagnetiche presentano talvolta carattere ondulatorio e talvolta carattere

corpuscolare. Si tratta di due aspetti complementari e non antitetici di uno stesso ente fisico nel senso che a volte prevale l'aspetto corpuscolare (fenomeni di interazione tra materia e radiazione, in particolare l'effetto fotoelettrico, l'emissione e l'assorbimento della luce, ecc.), altre volte invece prevale quello ondulatorio (fenomeni di interferenza, di diffrazione, ecc.). Occorre dunque associare alle radiazioni elettromagnetiche, luce compresa, sia le grandezze caratteristiche delle onde (per esempio la frequenza, la velocità di fase, la lunghezza d'onda, ecc.) sia le grandezze caratteristiche dei corpuscoli (in particolare la massa, la velocità e quindi la quantità di moto). I due aspetti, quello ondulatorio e quello corpuscolare vengono poi integrati mediante le due equazioni:

$$E = hf; \quad E = mc^2$$

Da queste ultime, tenendo presente che per le radiazioni che si propagano nel vuoto la frequenza f e la quantità di moto p sono, rispettivamente date da:

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad e \quad p = mv$$

si ricava:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

In base all'ultima relazione è facile mostrare come le proprietà corpuscolari prevalgano per le radiazioni di lunghezza d'onda molto piccole (alte frequenze) mentre diventa dominante il carattere ondulatorio per le radiazioni di grande lunghezza d'onda (basse frequenze). L'accordo fra dati sperimentali e previsioni teoriche basate sui modelli quantistici per i fenomeni come l'effetto fotoelettrico e l'effetto Compton offrono un'evidenza estremamente convincente a favore del fatto che quando la luce interagisce con la materia si comporta come se fosse composta di particelle con energia hf e quantità di moto hf/c . Descriviamo quindi la luce in termini di fotoni che hanno energia e quantità di moto che sono parametri del modello a particella. Dobbiamo comunque riconoscere che la luce e le altre onde elettromagnetiche mostrano effetti di interferenza e diffrazione, i quali sono coerenti soltanto con un modello ondulatorio. Qual è, quindi, il modello corretto? La luce è un 'onda o un corpuscolo? Il risultato finale è che dobbiamo accettare ambedue i modelli e ammettere che la vera natura della luce non è descrivibile in termini di un unico riferimento classico. Quindi la luce ha una duplice natura: essa esibisce sia caratteristiche ondulatorie sia corpuscolari. L'aspetto corpuscolare dei fotoni suggerì, nel 1923, al fisico francese Louis de Broglie (1892-1987) ampliò l'idea che anche le particelle materiali avessero carattere ondulatorio. Se, pertanto, ad ogni particella di massa m in moto con una velocità v , e quindi con una quantità di moto $p = mv$, si associa una lunghezza d'onda λ , si ha:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

nota come equazione di De Broglie. L'ipotesi di De Broglie e la relazione $\lambda = \frac{h}{mv}$ così sorprendenti nel contenuto perché in contrasto col modo di ragionare della fisica classica, ma altrettanto semplici nella forma, si dimostrarono in seguito ricche di conseguenze e applicazioni. Anche l'impostazione dei fenomeni atomici che ne seguì, prima in base alla

meccanica ondulatoria e successivamente con la meccanica quantistica, doveva cambiare radicalmente il modo di pensare nei riguardi del mondo fisico. Le conseguenze più importanti si ebbero nel 1927 quando i fisici statunitensi C. Davisson e L. Germer misero in evidenza gli effetti ondulatori delle particelle materiali mediante l'interferenza e la diffrazione di fasci di elettroni. Ad esempio, la lunghezza d'onda di un elettrone accelerato da una differenza di potenziale di 100 V è pari a $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,12 \text{ nm}$. Più tardi altri esperimenti dimostrarono che anche i protoni, i neutroni e altre particelle presentano proprietà ondulatorie. Quindi il dualismo onda-particella si applica oltre che alla luce anche ai corpi materiali. E il principio di complementarità si applica anche alla materia.

1. Il candidato risolva, infine, il seguente problema.

Una cella fotoelettrica emette elettroni, essendo illuminata con una luce di lunghezza d'onda $\lambda = 500 \text{ nm}$. Sapendo che il lavoro di estrazione della placca fotosensibile è di 2,1 eV, calcolare la minima lunghezza d'onda di De Broglie associata agli elettroni emessi. Si ricordano i seguenti dati approssimati: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Soluzione

L'energia dei fotoni che incidono sulla placca fotosensibile è data da:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

Indicando con W_e il lavoro di estrazione della placca fotosensibile, si ha che l'energia cinetica massima degli elettroni emessi per effetto fotoelettrico è data dalla differenza fra l'energia dei fotoni incidenti e il lavoro di estrazione, ovvero:

$$K_{max} = E - W_e$$

Tale energia cinetica massima è anche data da:

$$K_{max} = \frac{p_{max}^2}{2m}$$

ove p_{max}^2 ed m rappresentano, rispettivamente, la quantità di moto massima e la massa dei fotoelettroni.

Dall'equazione precedente possiamo ricavare p_{max} .

Difatti:

$$p_{max}^2 = 2m \cdot K_{max}$$

Quindi:

$$p_{max} = \sqrt{2m \cdot K_{max}}$$

Infine possiamo calcolare la minima lunghezza d'onda λ_{min} richiesta dal problema. Tale lunghezza d'onda è data da:

$$\lambda_{min} = \frac{h}{p_{max}}$$

Soluzione numerica.

L'energia dei fotoni che incidono sulla placca fotosensibile vale:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,63 * 10^{-34} Js) * (3,00 * 10^8 m/s)}{(5,00 * 10^{-7} m)} = 3,98 * 10^{-19} J$$

Dai dati forniti dal testo, il lavoro di estrazione vale:

$$W_e = 2,10 eV = 2,10 eV * (1,60 * 10^{-19} J/eV) = 3,36 * 10^{-19} J$$

Quindi l'energia cinetica massima degli elettroni emessi per effetto fotoelettrico risulta essere:

$$K_{max} = E - W_e = (3,98 * 10^{-19} J - 3,36 * 10^{-19} J) = 6,2 * 10^{-20} J$$

Il corrispondente valore massimo della quantità di moto è dato da:

$$p_{max} = \sqrt{2m * K_{max}} = \sqrt{2 * (9,11 * 10^{-31} Kg) * (6,2 * 10^{-20} Kg m^2/s^2)} \\ = 3,4 * 10^{-25} Kg * \frac{m}{s}$$

La minima lunghezza d'onda richiesta dal problema risulta pertanto essere uguale a:

$$\lambda_{min} = \frac{h}{p_{max}} = \frac{6,63 * 10^{-34} Js}{3,4 * 10^{-25} Kg * \frac{m}{s}} = 2,0 * 10^{-9} Kg * \frac{m^2}{s} * \frac{s}{Kg * m} = 2,0 * 10^{-9} m \\ = 2 nm$$

Metodo alternativo

Al fine di stabilire se utilizzare il formalismo classico oppure adottare quello relativistico nella soluzione del tema proposto per quanto riguarda l'elettrone, confrontiamo preliminarmente l'energia E del fotone incidente con la massa a riposo dell'elettrone.

L'energia del fotone incidente è data da:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6,63 * 10^{-34} Js) * (3,00 * 10^8 m/s)}{(5,00 * 10^{-7} m)} = 3,98 * 10^{-19} J = 2,48 eV$$

L'energia a riposo dell'elettrone è, invece:

$$m_e c^2 = \frac{(9,11 * 10^{-31} kg) * \left(2,998 * 10^8 \frac{m}{s}\right)^2}{1,602 * 10^{-13} \frac{J}{MeV}} = 0,511 MeV = 5,11 * 10^5 eV$$

Il fatto che

$$E \ll m_e c^2$$

ci consente di utilizzare il formalismo classico, come del resto accade sempre nell'ambito dell'effetto fotoelettrico.

Applichiamo, quindi, il principio di conservazione dell'energia. Si avrà, pertanto, che l'energia del fotone in eccesso rispetto all'energia di estrazione dell'elettrone, si ritrova sotto forma di energia cinetica dello stesso:

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = W_e + K_{max}$$

Poiché il lavoro di estrazione W_e e l'energia cinetica massima K_{max} dell'elettrone sono dati da:

$$W_e = eV_0 ;$$

$$K_{max} = \frac{p_{max}^2}{2m_e}$$

si ottiene:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = eV_0 + \frac{p_{max}^2}{2m_e}$$

Da cui si ricava la lunghezza d'onda Compton dell'elettrone:

$$\lambda_{min} = \frac{h}{p_{max}} = \frac{h}{\sqrt{2m_e \left(\frac{hc}{\lambda} - eV_0 \right)}} = 1,98 \text{ nm} \cong 2 \text{ nm}$$

La lunghezza d'onda minima, richiesta dal testo, implica che l'energia in eccesso del fotone si trasformi in energia cinetica dell'elettrone; nel caso reale si otterrà una dispersione della velocità dell'elettrone, e conseguentemente delle lunghezze d'onda a causa delle dispersioni di energia nel reticolo metallico.

Nota conclusiva

Il testo della prova prescrive che il candidato “presti particolare attenzione al corretto uso delle cifre significative nella presentazione dei risultati numerici.” La cosa è abbastanza ovvia; ma la prova stessa fornisce la maggior parte dei dati con una sola cifra significativa. Non ci si può esimere, pertanto, dall'esprimere una netta critica al modo in cui sono presentati i dati nella traccia del tema ministeriale. In particolare le costanti fisiche (indicate come dati approssimati), sono presentate con due o addirittura con una sola cifra significativa. Ciò porterebbe ad imporre tale approssimazione in tutti i calcoli successivi. Tale scelta è assolutamente immotivata vista la precisione con la quale sono note tali costanti. La cosa è ancora più grave considerato che tale imprecisione è presente anche nei precedenti temi d'esame. Pertanto, in prima istanza, nello svolgimento dei temi proposti, abbiamo considerato le grandezze fisiche con una precisione non inferiore all'1%, come di solito avviene nelle Olimpiadi della Fisica. Tutti i risultati ottenuti nella soluzione del problema proposto sono stati, quindi, presentati con tre cifre significative.

Esame di Stato di Liceo Scientifico – Scientifico Tecnologico 2014
Corso Sperimentale – Progetto Brocca
Tema di Fisica

La prova

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica e delle cifre significative nella presentazione dei risultati numerici.

Primo tema

Arthur Compton vinse nel 1927 il premio Nobel per la Fisica per la scoperta dell'effetto che porta il suo nome. Il candidato:

1. descriva l'effetto Compton ed analizzi le equazioni che lo caratterizzano;
2. esponga il concetto di lunghezza d'onda di Compton;
3. si soffermi sul motivo per cui l'effetto in esame è considerato una delle più importanti prove sperimentali dell'interpretazione quantistica delle radiazioni elettromagnetiche;
4. esponga, quindi, cosa si intende per aspetto corpuscolare delle radiazioni elettromagnetiche;
5. risolva infine il seguente problema

Un fotone urta un elettrone libero che ha una velocità iniziale che può essere considerata trascurabile. Dopo l'urto si rileva un fotone diffuso che ha un'energia pari a 101 keV e che presenta un angolo di deviazione dovuto all'effetto Compton di 30°. Ricavare l'energia del fotone incidente e l'energia cinetica dell'elettrone di rimbalzo sempre espresse in eV.

Si ricorda che:

$$1\text{eV} = 1,60 * 10^{-19} \text{ J}$$

$$h = 6,63 * 10^{-34} \text{ Js} \quad (\text{costante di Planck})$$

$$m_0 = 9,11 * 10^{-31} \text{ Kg} \quad (\text{massa a riposo dell'elettrone})$$

$$c = 3,00 * 10^8 \text{ m/s} \quad (\text{velocità della luce nel vuoto})$$

Analisi della traccia ed indicazioni per la soluzione del tema proposto (tema simile si trova anche nelle prove relative all'anno 2002 e 2008)

Si richiama il punto 1 del problema

1. Il candidato descriva l'effetto Compton ed analizzi le equazioni che lo caratterizzano

Alla fine del XX secolo le teorie generali che costituivano i cardini dell'interpretazione fisica dei fenomeni naturali erano la meccanica e la gravitazione di Newton e l'elettromagnetismo di Maxwell. Ma proprio mentre il quadro teorico sembrava aver raggiunto un mirabile livello di semplicità e potenza, nuovi fatti sperimentali vennero a metterne in crisi la completezza. In effetti, agli inizi del '900 ci si rese conto che, applicando la meccanica classica al moto dei costituenti elementari della materia, si ottenevano risultati solo in parziale accordo con i dati sperimentali e, in qualche caso, la teoria risultava del tutto inadeguata. La situazione richiese lo sviluppo di un nuovo formalismo, la meccanica quantistica, conseguenza di una vera rivoluzione nel modo di pensare del fisico rispetto a punti di vista che erano ritenuti ovvi, ma che tali non erano. Una delle grandi idee della meccanica quantistica è quella della quantizzazione.

Storicamente, il primo problema che abbia richiesto l'uso di ipotesi quantistiche, è stato lo spettro dell'irraggiamento termico. Pochi anni dopo che lo studio del corpo nero aveva imposto a Planck, riluttante, il risultato della quantizzazione dell'energia, nel 1905, Einstein, allora giovanissimo, estrasse dallo stesso materiale sperimentale un'idea, se possibile, ancora più rivoluzionaria e cioè il concetto di quanto di radiazione, ciò che più tardi venne chiamato "fotone" da G. N. Lewis e A.H. Compton.

Il ragionamento di Einstein, basato sullo studio delle fluttuazioni dell'energia elettromagnetica, mise in risalto che queste seguono la stessa legge che si ha per un gas di particelle, provando così che la propagazione dell'energia elettromagnetica ha un insospettabile carattere corpuscolare. In un lavoro successivo Einstein mostrerà che l'espressione completa della probabilità di fluttuazione contiene due termini, dei quali uno è dominante per $h\nu/KT \rightarrow \infty$, mentre l'altro è dominante per $h\nu/KT \rightarrow 0$. Quest'ultimo solo si può interpretare come dovuto a un sistema di onde "classiche", in cui l'energia è distribuita con continuità. Nel lavoro del 1905 Einstein prosegue citando altri fatti in appoggio all'idea dei quanti di energia. L'argomento che è rimasto più famoso è la spiegazione della soglia nell'effetto fotoelettrico, insieme con la predizione che il potenziale di arresto V_a doveva essere una funzione lineare della frequenza con un coefficiente angolare indipendente dal materiale considerato:

$$V_a = \frac{h}{e}(\nu - \nu_0)$$

Facendo vedere che la quantizzazione si presenta anche nelle fluttuazioni spontanee dell'energia elettromagnetica, Einstein mostrava che questo carattere discontinuo è altrettanto intrinseco alla natura delle onde quanto quello oscillatorio che si manifesta con la presenza del fattore di frequenza ν . Spetterà più tardi (1924) a Louis De Broglie

scoprire, per intuizione teorica, il principio “*complementare*” e cioè che un carattere ondulatorio si accompagna necessariamente a quello corpuscolare, cosa che fu verificata tre anni dopo sugli elettroni e più tardi anche su corpuscoli “*strutturati*”, come atomi e molecole.

Una delle verifiche più dirette dell'ipotesi dei fotoni è data dall'effetto Compton scoperto da A.H. Compton nel 1923 e subito interpretato, indipendentemente, (dallo scopritore e da P. Debye) in base al carattere corpuscolare delle radiazioni. L'effetto Compton è osservabile mediante il seguente apparato sperimentale: una sorgente di raggi X viene usata per irraggiare un bersaglio di grafite; un apposito rivelatore raccoglie i raggi X diffusi al di là del bersaglio e ne misura la lunghezza d'onda. Si osserva che la lunghezza d'onda λ_0 della frazione più significativa dei raggi X diffusi è maggiore della lunghezza d'onda dei raggi incidenti. La teoria ondulatoria classica della luce fallisce nella spiegazione della diffusione dei raggi X da parte di elettroni. Secondo la teoria classica, difatti, l'onda elettromagnetica incidente di frequenza f_0 avrebbe dovuto avere due effetti:

1. Accelerare gli elettroni nella direzione di propagazione dei raggi X a causa della pressione di radiazione;
2. Il campo elettrico oscillante avrebbe dovuto porre in oscillazione gli elettroni alla frequenza apparente della radiazione così come vista dagli elettroni in moto.

Contrariamente a questa previsione, l'esperimento di Compton mostrò che, a un dato angolo, si osservava soltanto una frequenza di radiazione che era diversa da quella della radiazione incidente. Compton e i suoi collaboratori dedussero che la diffusione dei fotoni dei raggi X da parte degli elettroni si poteva spiegare trattando i fotoni come particelle puntiformi con energia hf e quantità di moto hf/c e assumendo che in un urto l'energia e la quantità di moto del sistema isolato del fotone e dell'elettrone si conservasse. Con ciò, Compton adottava un modello corpuscolare per qualcosa che era ben noto essere un'onda, come fece Einstein nella sua spiegazione dell'effetto fotoelettrico. Nel modello classico, l'elettrone è spinto lungo la direzione di propagazione dei raggi X incidenti dalla pressione di radiazione. Nel modello quantistico, invece, l'elettrone è diffuso di un certo angolo rispetto a questa direzione, come se si trattasse di un urto fra palle di biliardo. In figura è mostrato un fotone X che colpisce un elettrone in quiete e viene diffuso di un angolo φ rispetto alla direzione iniziale.

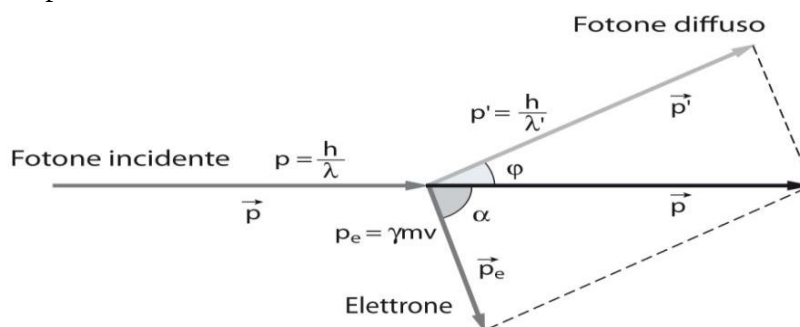


Fig. 1

Per comprendere il comportamento di questo sistema, trattiamo il fotone come una particella, con determinata energia e quantità di moto, che urta un'altra particella (l'elettrone) di massa m_e , inizialmente in quiete. Se assumiamo che l'elettrone sia libero di muoversi, in questo urto si conservano sia l'energia sia la quantità di moto. Perché si conservi l'energia è necessario che l'energia del fotone incidente risulti uguale alla somma dell'energia del fotone diffuso e dell'energia cinetica finale dell'elettrone. Ovvero:

$$hf = hf' + K$$

Osserviamo che, in generale, la frequenza f' del fotone diffuso è minore della frequenza f del fotone incidente, poiché parte dell'energia del fotone incidente si è convertita in energia cinetica dell'elettrone. Poiché la frequenza del fotone diffuso è diminuita, la sua lunghezza d'onda $\lambda' = c/f'$ è aumentata.

L'effetto Compton, scoperto da A.H. Compton nel 1923, consiste in una interazione fra radiazione e particelle cariche nella quale si altera l'impulso della particella insieme alla frequenza e alla direzione della radiazione. Compton lo scoprì nell'interazione fra un fascio di raggi X monocromatici e gli elettroni di un diffusore di grafite, come mostrato in figura 1).

Si constata che una parte della radiazione X diffusa ha una frequenza diminuita, cioè una lunghezza d'onda λ' aumentata rispetto a quella (λ) della radiazione incidente, secondo la legge:

$$\lambda' - \lambda = \text{costante} * (1 - \cos \varphi)$$

dove φ è l'angolo di diffusione. Questo fenomeno è accompagnato da un'emissione di elettroni da parte del diffusore. La teoria classica della diffusione non prevedeva alcun cambiamento della frequenza. Il fenomeno si interpretava, invece, molto facilmente col modello fotonico. Basta per questo supporre che il fotone diffuso con cambiamento di frequenza abbia interagito con un singolo elettrone del diffusore ed applicare le leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto al sistema elettrone + fotone prima e dopo l'interazione.

Che questo è proprio il caso, fu dimostrato più tardi direttamente sperimentando con contatori in coincidenza: uno per rivelare l'elettrone, l'altro per rivelare il fotone diffuso oppure con la camera di Wilson. In entrambi i casi il fotone non si rivela se non occasionalmente, per mezzo di un elettrone emesso in un secondo processo Compton o per effetto fotoelettrico.

I fotoni viaggiano alla velocità della luce, il che significa che tutti gli osservatori li vedono viaggiare alla stessa velocità. Le particelle che hanno una massa a riposo finita non possono mai raggiungere la velocità della luce. Da ciò deduciamo che i fotoni devono avere una massa a riposo nulla. Consideriamo un corpo avente massa a riposo m_0 . Einstein dimostrò che, quando il corpo è in movimento con velocità v , la sua energia totale E è data dalla seguente espressione:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2$$

in quanto la massa relativistica è data da:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Questo è il più famoso risultato della teoria della relatività di Einstein, cioè $E = mc^2$, dove m è la massa relativistica data dalla precedente relazione. Osserviamo che l'energia totale E non si annulla quando la velocità tende a zero, come avviene nella fisica classica. L'energia di un corpo in quiete, cioè la sua "energia a riposo" E_0 è, invece: $E_0 = m_0 c^2$. Difatti, poiché l'energia totale di una particella è data da:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Si ha:

$$E * \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0 c^2 \quad a)$$

Poiché i fotoni viaggiano alla velocità della luce, deve essere $v = c$; pertanto, per $v = c$, si ha: $m_0 c^2 = 0$. Quindi $m_0 = 0$.

Inoltre, i fotoni differiscono dalle particelle comuni per il fatto di avere una quantità di moto finita, anche se non hanno massa. Per capire come ciò sia possibile, osserviamo che l'espressione relativistica della quantità di moto, data da:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

può essere riscritta nel seguente modo:

$$p * \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0 v \quad b)$$

Dividendo membro a membro a) con b), otteniamo:

$$\frac{E * \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{p * \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{m_0 v}$$

Pertanto:

$$\frac{E}{p} = \frac{c^2}{v}$$

Quindi:

$$\frac{p}{E} = \frac{v}{c^2}$$

Poiché il fotone viaggia alla velocità della luce nel vuoto, la sua velocità v deve essere uguale a c . Pertanto, ponendo $v = c$ nella relazione ottenuta precedentemente:

$$\frac{p}{E} = \frac{v}{c^2}$$

si avrà:

$$\frac{p}{E} = \frac{c}{c^2} = \frac{1}{c}$$

Quindi, la quantità di moto del fotone sarà data da:

$$p = \frac{E}{c}$$

Infine, ricordando che

$$E = h\nu \quad e \quad che \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

otteniamo il seguente risultato:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Difatti:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{c} * \nu = \frac{h}{c} * \frac{c}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

Cioè, la quantità di moto di un fotone aumenta con la frequenza e quindi con la sua energia. La quantità di moto di un tipico fotone è piuttosto piccola. Ad esempio, calcoliamo la quantità di moto di un fotone di luce gialla che ha una frequenza di $\nu = 5,25 * 10^{14}$ Hz. Tale quantità di moto risulta uguale a:

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{(6,63 * 10^{-34} Js)(\nu = 5,25 * 10^{14} Hz)}{3,00 * 10^8 m/s} = 1,16 * 10^{-27} Kg * \frac{m}{s}$$

Per quanto piccola sia la quantità di moto di un fotone, essa può avere un impatto significativo se il numero di fotoni è grande. Premesso che l'elettrodinamica classica dimostra che alla propagazione dell'energia elettromagnetica W è associata la propagazione di una quantità di moto data da W/c , avremo come quantità di moto iniziale del fotone un vettore di modulo $h\nu/c$ orientato come il fascio incidente, mentre la quantità di moto iniziale dell'elettrone si può trascurare. Nell'interazione il fotone cede parte della sua energia e del suo impulso all'elettrone. Nello stato finale avremo perciò un elettrone con impulso $\vec{p}$ e un fotone con impulso $h\nu'/c$ in una direzione che forma un angolo φ con la direzione di incidenza.

La conservazione dell'energia va formulata in modo relativistico perché in generale la velocità dell'elettrone non è trascurabile rispetto a c che rappresenta la velocità della luce nel vuoto. Avremo quindi, nello stato iniziale un'energia data da:

$$E_i = h\nu + m_0 c^2$$

mentre, nello stato finale, l'energia sarà:

$$E_f = h\nu' + mc^2 \quad (m > m_0)$$

Il principio di conservazione dell'energia, pertanto, impone, pertanto, che:

$$h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + mc^2$$

La conservazione dell'impulso, inoltre, fornisce l'equazione:

$$p^2 = \frac{h^2}{c^2} (\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos \varphi)$$

Ricordando la relazione relativistica fra massa e quantità di moto data da:

$$p^2 = (m^2 - m_0^2) * c^2$$

si ottiene:

$$\begin{cases} h\nu + m_0 c^2 = h\nu' + mc^2 \\ p^2 = \frac{h^2}{c^2} (\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos \varphi) \\ p^2 = (m^2 - m_0^2) * c^2 \end{cases}$$

Ora, tenendo conto della terza relazione del sistema, la prima e la seconda relazione possono essere riscritte nel modo seguente:

$$\begin{cases} (m - m_0) c^2 = h\nu + m_0 c^2 = h(\nu - \nu') \\ (m - m_0) * (m + m_0) c^2 = \frac{h^2}{c^2} (\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos \varphi) \end{cases}$$

Dividendo membro a membro si ottiene:

$$(m + m_0) = \frac{h}{c^2} * \left(\frac{1}{\nu - \nu'} \right) * (\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos \varphi)$$

Ricavando la massa m dalla prima delle due equazioni del sistema e sostituendo il valore così ottenuto nell'ultima equazione considerata, si ha:

$$\frac{h(\nu - \nu')}{c^2} + 2m_0 = \frac{h}{c^2} * \left(\frac{1}{\nu - \nu'} \right) * (\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos \varphi)$$

dalla quale è facile ottenere:

$$m_0 c^2 = h \left(\frac{\nu \nu'}{\nu - \nu'} \right) (1 - \cos \varphi)$$

ovvero:

$$m_0 c^2 = h \left(\frac{1}{\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu}} \right) (1 - \cos \varphi)$$

e ancora:

$$c \left(\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} \right) = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi)$$

cioè:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi)$$

che è, appunto, la relazione che descrive l'effetto Compton.

Si richiama, ora, il punto 2 del problema

2) Il candidato esponga il concetto di lunghezza d'onda di Compton

La costante λ_c che compare nella relazione che descrive l'effetto Compton si chiama "lunghezza d'onda di Compton" ed è data da:

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$$

Ad esempio, per l'elettrone la lunghezza d'onda di Compton, ha il valore:

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c} = \frac{6,63 * 10^{-34} \text{ J s}}{(9,11 * 10^{-31} \text{ Kg}) \left(3,00 * 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)} = 2,43 * 10^{-12} \text{ m}$$

$$\frac{h}{m_0 c} = 2,426 * 10^{-10} \text{ cm}$$

Dalla relazione che descrive l'effetto Compton:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi)$$

si nota che, se l'angolo di diffusione è pari a 90° , si ottiene:

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} = \lambda_c$$

Pertanto la lunghezza d'onda di Compton λ_c è il valore di $\Delta \lambda = \lambda' - \lambda$ che si ottiene quando l'angolo di diffusione è uguale a 90° . In modo equivalente, i valori matematicamente possibili di $\Delta \lambda$ (con $0 < \varphi < 180$) sono compresi tra 0 e $2 \lambda_c$. Infine se consideriamo un fotone che ha un'energia pari all'energia di riposo di un elettrone, dalla relazione che ne risulta:

$$h * \frac{c}{\lambda} = m_0 c^2$$

otteniamo:

$$\lambda = \frac{h}{m_0 c} = \lambda_c$$

e quindi scopriamo che la lunghezza d'onda di Compton non è altro che la lunghezza d'onda di un fotone avente energia:

$$E = m_0 c^2$$

Il suo ordine di grandezza spiega come mai il fenomeno non è apprezzabile nel campo ottico, anche quando sia realizzata la condizione che $h\nu$ superi l'energia di ionizzazione dell'elettrone. Infatti una diminuzione di lunghezza d'onda dell'ordine di $h/m_0 c$ rappresenta nel campo ottico una variazione relativa dell'ordine di 10^{-6} e come tale rimane mascherata dalla "larghezza naturale" delle righe spettrali, cioè della loro naturale non-monocromaticità, che è appunto di quell'ordine di grandezza. In linea di principio l'effetto Compton si può produrre con particelle cariche anche diverse dall'elettrone, per esempio con protoni. La lunghezza d'onda di Compton per i protoni è però $1/1836$ di quella dell'elettrone. Raggi γ prodotti artificialmente possono avere lunghezze d'onda paragonabili, ma l'esperienza presenta notevoli difficoltà tecniche.

Si richiama, ora, il punto 3 del problema

3) Il candidato si soffermi sul motivo per cui l'effetto in esame è considerato una delle più importanti prove sperimentali dell'interpretazione quantistica delle radiazioni elettromagnetiche.

Nel 1923 A. Compton (1892-1962), studiando la diffusione dei raggi X nei cristalli, mise in evidenza uno strano effetto che da lui prende il nome. La teoria classica prevede che la diffusione avvenga con la stessa lunghezza d'onda della radiazione incidente. Compton notò che per radiazioni di elevata frequenza (fotoni di alta energia) si ha la diffusione anche di una radiazione di frequenza minore di quella incidente.

Egli riuscì a spiegare il fenomeno considerando l'interazione tra fotone ed elettrone come un urto fra particelle, cioè trattando i fotoni come veri e propri corpuscoli e ritenendo validi per essi i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto. Difatti, applicando i criteri relativistici, si trova che un fotone di frequenza ν possiede una quantità di moto o impulso

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Allo stesso modo di una particella, il fotone incidente cede una parte della sua energia all'elettrone ed esce dall'urto con una energia minore. In base alla relazione di Planck $E = h\nu$, questo significa che il fotone diffuso ha una frequenza minore di quella precedente all'urto. Compton misurò la frequenza ν della radiazione diffusa per vari angoli di diffusione e la trovò in accordo con i risultati teorici. L'energia perduta dal fotone viene acquistata dall'elettrone sotto forma di energia cinetica; questo, per lo spostamento che subisce, viene chiamato "elettrone di rinculo". Compton non aveva trovato sperimentalmente questi elettroni di rinculo ma poco tempo dopo altri sperimentatori constatarono la presenza degli elettroni di rinculo e ne misurarono l'energia confermando le previsioni. Nell'effetto Compton una radiazione si comporta, dunque, come costituita da corpuscoli: nell'urto, la quantità di moto del sistema fotone più elettrone si conserva, allo stesso modo del sistema di due particelle materiali. L'effetto Compton rappresenta una delle più importanti prove sperimentali dell'interpretazione quantistica delle radiazioni elettromagnetiche.

Non è naturalmente possibile interpretare l'ipotesi dei fotoni come un puro ritorno a una teoria corpuscolare delle radiazioni, come nello stile di quella di Newton. Da un lato è infatti ovvio che non possiamo rinunciare alle equazioni di Maxwell e alla teoria ondulatoria che ne discende e che, del resto, è imposta da tutte le esperienze d'interferenza. D'altro lato vediamo che lo stesso elemento corpuscolare, cioè il quanto $h\nu$, è legato direttamente a una grandezza come la frequenza che ha significato solo in una teoria ondulatoria.

Evidentemente quello che ci è imposto è una coesistenza dei due aspetti, ondulatorio e corpuscolare, un dualismo che, come si scoprirà più tardi, non è una caratteristica del fotone, ma di qualsiasi particella. Non si è trovato fino ad oggi nessun miglior modo di operare questa sintesi di due elementi così contrastanti se non attribuendo un significato

“probabilistico” a certe grandezze fisiche e precisamente, nel caso presente, ai quadrati dei campi. Se si considera infatti un’onda monocromatica di frequenza ν e si interpreta il rapporto

$$\frac{\rho}{h\nu} = \frac{1}{h\nu} \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right)$$

come numero probabile di fotoni per unità di volume, abbiamo quanto basta per conciliare fra loro l’aspetto ondulatorio e quello corpuscolare. Si deve tuttavia di notare che le probabilità che così si introducono hanno un carattere particolare. Si tratta infatti di quadrati (o somme di quadrati) di grandezze di natura ondulatoria (qui i campi $\vec{E}$ e $\vec{H}$) le quali pertanto sono capaci di interferire fra loro. Soltanto i quadrati dei campi forniscono una probabilità nel senso ordinario, ma non così i campi stessi: si dice che questi forniscono delle “ampiezze di probabilità”, che sono grandezze tipicamente caratteristiche della fisica quantistica.

E’ forse bene sottolineare che questo significato probabilistico dei campi d’onda non ha nulla a che vedere con le fluttuazioni statistiche che i campi possono presentare nel particolare problema del corpo nero e che sono un elemento statistico di tipo ordinario che viene a sovrapporsi a quello quantistico. Con un laser noi oggi possiamo produrre quello che almeno idealmente è un’onda monocromatica persistente limitata a un solo modo vibratorio di una cavità e che perciò rappresenta uno stato oscillatorio perfettamente definito, esente da fluttuazioni statistiche. Non per questo l’espressione:

$$\frac{1}{h\nu} \left(\frac{E^2 + H^2}{8\pi} \right)$$

cessa di rappresentare niente più che una densità numerica probabile di fotoni. Questo è imposto, ovviamente, dal fatto che se la radiazione del laser la facciamo interagire (per esempio ce ne serviamo per produrre un effetto fotoelettrico) ci accorgiamo che l’interazione avviene per fotoni.

Si richiama, ora, il punto 4 del problema

4) Il candidato esponga cosa si intende per aspetto corpuscolare delle radiazioni elettromagnetiche.

L’introduzione del concetto di “atomicità” nel regno dell’energia, che inizialmente sembrava imposta sola dalla necessità di risolvere un’inconsistenza nella descrizione teorica dell’irraggiamento del corpo nero si rivelò presto una delle teorie fondamentali per interpretare numerosi fenomeni per i quali la fisica pre-quantistica non riusciva a fornire una valida spiegazione. Solo cinque anni dopo la prima ipotesi di Planck, il quanto venne riconosciuto, per merito di Einstein, come un’entità fisica reale. Nel primo dei tre famosi articoli pubblicati nel 1905, Einstein introdusse i quanti di luce o fotoni per sviluppare su basi quantistiche l’interazione fra radiazione e materia.

Mentre Planck aveva quantizzato solo l’energia associata alla radiazione uscente dal corpo nero, per Einstein la discontinuità insita nella dottrina dei quanti divenne un

concetto fondamentale, generalizzato a qualsiasi tipo di radiazione. Questa ipotesi, fra le altre conseguenze, permise di interpretare le leggi dell'effetto fotoelettrico. Nel 1887 Hertz aveva scoperto casualmente che, illuminando una placca metallica di zinco con una radiazione ultravioletta, il metallo si caricava elettricamente. Solo dopo che gli elettroni furono riconosciuti, grazie alle misure di Thomson nel 1897, come componenti elementari della materia, si capì che il fenomeno, chiamato poi effetto fotoelettrico, era dovuto all'emissione di elettroni provocata nel metallo da radiazioni elettromagnetiche di frequenza sufficientemente elevata (raggi X, raggi ultravioletti e talvolta anche radiazioni luminose). Però l'effetto fotoelettrico mostrava delle strane proprietà che non potevano essere spiegate nell'ambito della teoria elettromagnetica classica. Allora Einstein, ammettendo che la radiazione elettromagnetica fosse formata da pacchetti di energia, i quanti del campo elettromagnetico, successivamente chiamati fotoni, giunse alla quantizzazione della luce secondo la quale ogni radiazione elettromagnetica può essere considerata, indipendentemente dalla sorgente, come una corrente di quanti (fotoni), ciascuno dei quali possiede energia $E = h\nu$. In questo modo Einstein, in un sol colpo, spiegò agevolmente le leggi dell'effetto fotoelettrico e diede un vigoroso impulso all'idea originale di Planck sui pacchetti d'energia raggianti. Secondo la teoria classica della diffusione, quando un'onda elettromagnetica interagisce con una particella carica, la radiazione diffusa, qualunque sia la sua direzione, deve avere la stessa lunghezza d'onda e, quindi la stessa frequenza della radiazione incidente. Come invece mise in evidenza A.H. Compton (1892-1962; Premio Nobel) nel 1922, la radiazione diffusa presenta una frequenza che dipende dall'angolo di diffusione ed è comunque minore di quella incidente. Questo fenomeno, noto come effetto Compton, rappresenta una delle più importanti prove sperimentali della validità dell'interpretazione quantistica della radiazione elettromagnetica, nonché una conferma delle leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto a livello microscopico.

L'accordo fra dati sperimentali e previsioni teoriche basate sui modelli quantistici per i fenomeni come l'effetto fotoelettrico e l'effetto Compton offrono un'evidenza estremamente convincente a favore del fatto che quando la luce interagisce con la materia si comporta come se fosse composta di particelle dette fotoni con energia $h\nu$ e quantità di moto $h\nu/c$, che sono parametri tipici del modello a particella. D'altra parte la luce e le onde elettromagnetiche mostrano effetti di interferenza e diffrazione, i quali sono coerenti soltanto con un modello ondulatorio.

Qual è il modello corretto? La luce è un'onda o un corpuscolo? Alcuni fenomeni possono essere spiegati meglio, o solamente, con il concetto di fotone, mentre altri sono descritti meglio, o descritti soltanto, con un modello ondulatorio. Il risultato finale è che dobbiamo accettare ambedue i modelli e ammettere che la vera natura della luce e delle onde elettromagnetiche non è descrivibile in termini di un unico riferimento classico. Quindi la luce ha una duplice natura: essa esibisce sia caratteristiche ondulatorie che corpuscolari. Difatti, nel 1905 Einstein, nello stesso anno in cui pubblicava la teoria della relatività ristretta, riusciva a dare una spiegazione esauriente dell'effetto fotoelettrico, estendendo

alle onde elettromagnetiche il concetto di quantizzazione introdotto da Planck alcuni anni prima.

Egli mostrò infatti che il fenomeno può essere interpretato se si ipotizza che la radiazione luminosa non sia distribuita uniformemente nello spazio, ma concentrata in “pacchetti” chiamati fotoni a ciascuno dei quali è associata un’energia E il cui valore è data da:

$$E = hf$$

dove f rappresenta la frequenza della radiazione ed h è la costante di Planck. L’ipotesi della quantizzazione della radiazione elettromagnetica giustifica pienamente i risultati sperimentali di tale effetto, risultati non interpretabili applicando le sole leggi della fisica classica. Questa linea di pensiero trova poi la conferma finale e più convincente nell’effetto Compton, scoperto da Arthur Compton nel 1927, premio Nobel per la Fisica. L’effetto Compton, difatti, rappresenta una delle più importanti prove sperimentali dell’interpretazione quantistica delle radiazioni elettromagnetiche.

Si richiama, ora, il punto 5 del problema

5) Il candidato risolva infine il seguente problema

Un fotone urta un elettrone libero che ha una velocità iniziale che può essere considerata trascurabile. Dopo l’urto si rileva un fotone diffuso che ha un’energia pari a 101 keV e che presenta un angolo di deviazione dovuto all’ effetto Compton di 30° . Ricavare l’energia del fotone incidente e l’energia cinetica dell’elettrone di rimbalzo sempre espresse in eV.

Si ricorda che:

$1\text{eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$; h = (costante di Planck) ; $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$ (massa a riposo dell’elettrone); $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ (velocità della luce nel vuoto)

Soluzione del problema

Un fotone urta un elettrone libero. Tale elettrone possiede una velocità iniziale che può essere ritenuta trascurabile. Dopo l’urto si rileva un fotone diffuso avente un’energia pari a 101 keV e che presenta un angolo di deviazione dovuto all’ effetto Compton di 30° . Si vuole determinare l’energia del fotone incidente e l’energia cinetica dell’elettrone di rimbalzo espresse entrambe in eV.

A tale scopo indichiamo con E' l’energia del fotone diffuso e con φ il suo angolo di diffusione per effetto Compton. Dalla relazione che descrive l’effetto Compton:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi)$$

ove λ' è la lunghezza d’onda del fotone diffuso e λ la lunghezza d’onda del fotone incidente. Poiché l’energia del fotone incidente è uguale a: $E = hf$ e quella del fotone diffuso $E' = hf'$, ricordando che:

$$\lambda f = c \quad f = \frac{c}{\lambda}$$

si ottiene:

$$E = hf = h \left(\frac{c}{\lambda} \right)$$

ed

$$E' = hf' = h \left(\frac{c}{\lambda'} \right)$$

Pertanto la lunghezza d'onda del fotone diffuso λ' e quella del fotone incidente λ risultano pari a:

$$\lambda' = \frac{hc}{E'} \quad e \quad \lambda = \frac{hc}{E}$$

Sostituendo le precedenti relazioni che forniscono, rispettivamente, l'espressione di λ' e λ in funzione dell'energia del fotone incidente e di quella del fotone diffuso, nella relazione che descrive l'effetto Compton:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi)$$

si ottiene:

$$\frac{hc}{E'} - \frac{hc}{E} = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \varphi)$$

La costante

$$\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$$

prende il nome di “lunghezza d'onda di Compton” per l'elettrone ed ha il valore:

$$\begin{aligned} \lambda_c &= \frac{h}{m_0 c} = \frac{(6,63 * 10^{-34} Js)}{(9,11 * 10^{-31} Kg) * (3,00 * 10^8 m/s)} = \\ &= \frac{(6,63 * 10^{-34} Js)}{27,33 * 10^{-23} \frac{Kg * m}{s}} = 0,2426 * 10^{-34} * 10^{23} \frac{J * s}{\frac{Kg * m}{s}} \\ &= 0,2426 * 10^{-11} \frac{J * s}{\frac{Kg * m}{s}} = 2,426 * 10^{-12} m \end{aligned}$$

dimensionalmente, si ha:

$$\frac{\frac{J * s}{\frac{Kg * m}{s}}}{s} = \frac{J * s^2}{Kg * m} = \frac{N * m * s^2}{Kg * m} = \frac{N * s^2}{Kg} = \frac{Kg * \frac{m}{s^2} * s^2}{Kg} = \frac{Kg * m}{Kg} = m$$

Dalla relazione

$$\frac{hc}{E'} - \frac{hc}{E} = \lambda_c (1 - \cos \varphi)$$

si ottiene:

$$hc * \left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right) = \lambda_c (1 - \cos \varphi)$$

da cui:

$$\left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right) = \frac{\lambda_c (1 - \cos \varphi)}{h c}$$

Pertanto:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E'} - \frac{\lambda_c (1 - \cos \varphi)}{h c}$$

E quindi:

$$\frac{1}{E} = \frac{hc - \lambda_c (1 - \cos \varphi) * E'}{E' * h * c}$$

L'energia del fotone incidente sarà:

$$E = \frac{E' * h * c}{hc - \lambda_c (1 - \cos \varphi) * E'}$$

Sostituendo i valori numerici forniti dal testo, è possibile calcolare l'energia del fotone incidente. Si ottiene, pertanto:

$$\begin{aligned} E &= \frac{E' * h * c}{hc - \lambda_c (1 - \cos \varphi) * E'} = \\ &= \frac{(6,63 * 10^{-34} Js) * (3,00 * 10^8 m/s) * (1,62 * 10^{-14} J)}{(6,63 * 10^{-34} Js) * (3,00 * 10^8 m/s) - (1,62 * 10^{-14} J) * (2,426 * 10^{-12} m) * (1 - 0,866)} = \\ &= \frac{32,22 * 10^{-40} J^2}{(19,89 * 10^{-26} J) - (0,53 * 10^{-26} J)} = \frac{32,22 * 10^{-40} J^2}{(19,89 * 10^{-26} J) - (0,53 * 10^{-26} J)} = \\ &= \frac{32,22 * 10^{-40} J^2}{19,36 * 10^{-26} J} = 1,66 * 10^{-14} J \end{aligned}$$

Poiché:

$$1eV = 1,6 * 10^{-19} J$$

L'energia del fotone incidente espressa in elettron-volt sarà data da:

$$\begin{aligned} E &= 1,66 * 10^{-14} J = (1,66 * 10^{-14} J) * \left(\frac{1}{1,6 * 10^{-19} \frac{J}{eV}} \right) = \\ &= \frac{1,66 * 10^{-14} J}{1,6 * 10^{-19} \frac{J}{eV}} = 1,038 * 10^5 J * \frac{eV}{J} = 1,04 * 10^5 eV = 104 KeV \end{aligned}$$

L'energia del fotone incidente è pari, quindi, a 104 KeV. Per determinare, ora, l'energia cinetica dell'elettrone, basta ricordare che l'energia perduta nell'urto dal fotone incidente viene acquistata dall'elettrone sotto forma di energia cinetica; questo, per lo spostamento che subisce viene chiamato "elettrone di rinculo". L'interazione tra fotone ed elettrone si può spiegare trattando i fotoni, come abbiamo visto, come veri e propri corpuscoli e ritenendo validi per essi i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto. Pertanto, l'energia cinetica dell'elettrone di rinculo è pari, per il principio di conservazione dell'energia, alla differenza tra l'energia del fotone incidente e l'energia del fotone diffuso. Pertanto, indicando con K l'energia cinetica dell'elettrone, avremo:

$$K = E - E'$$

Ovvero:

$$K = E - E' = 104 KeV - 101 KeV = 3KeV = 3.000 eV$$

Dal ch  si evince che la differenza tra l'energia del fotone incidente e quella del fotone diffuso (l'energia cinetica dell'elettrone, pari a 3 KeV) risulta molto minore di quella del

fotone incidente (pari a 104 KeV). Pertanto non è possibile mantenere nel risultato le tre cifre significative dei dati iniziali. Da notare che il valore dell'angolo di diffusione è addirittura fornito con quattro cifre significative.

Conclusione

“..... la mente non ha bisogno, come un vaso, di essere riempita, ma, come legna da ardere, ha bisogno solo di una scintilla che la accenda, che vi infonda l'impulso alla ricerca e il desiderio della verità”

Plutarco, Moralia, De Audiendo

Attraverso la risoluzione dei temi di fisica presentati, appare evidente che la fisica, pur essendo una disciplina presente in tutti i corsi delle scuole secondarie di secondo grado, con indiscusso valore formativo, non venga generalmente considerata una disciplina “di base” come la matematica. L'organizzazione dei contenuti di fisica e di matematica presenti nelle nuove indicazioni nazionali, mettono in evidenza una questione rilevante: non sempre lo studente può disporre di tutti gli strumenti matematici necessari per uno studio approfondito dei contenuti di fisica che gli vengono proposti. Ad es. molte delle leggi fondamentali della fisica vengono espresse di sovente in forma di equazioni differenziali (basti pensare alla II legge della dinamica), tuttavia, lo studio delle equazioni differenziali viene affrontato in modo semplice e poco formale solo nei licei scientifici e in pochi altri istituti.

Di fronte a questo stato di cose emergono due domande fondamentali per il docente di fisica:

1. Come si deve impostare la didattica della fisica prendendo atto dei limitati strumenti matematici di cui lo studente può disporre?
2. Se non è possibile in classe costruire significati completi ed esaurienti, dal punto di vista formale e quantitativo delle leggi e dei fenomeni, quale valore assume lo studio della disciplina?

Si può affermare allora, che il ruolo fondamentale lo assume il linguaggio con il quale la disciplina viene presentata agli studenti. Con il termine “linguaggio” si intende:

1. La terminologia usata dal docente per presentare i concetti;
2. Gli strumenti matematici utilizzati per trattare gli argomenti.

A tale proposito, si ritiene particolarmente efficace l'approccio proposto dallo psicologo e pedagogista americano Jerome Bruner che si sostanzia, in ultima analisi, nel cosiddetto “modello a spirale”, approccio presente, tra l'altro, nelle stesse Indicazioni Nazionali per il curriculum nei Licei Scientifici.

L'evoluzione dell'insegnamento della Fisica in Italia, da un punto di vista storico, si può leggere attraverso una rapida analisi delle riforme che si sono susseguite negli anni, la metodologia didattica non era contemplata nella formazione dei docenti, anche se l'acquisizione della pratica dell'insegnamento e del mostrare, affonda le sue origini

nell'era ellenistica. Fin dagli anni '60 l'attività degli studenti in laboratorio era quasi del tutto sconosciuta e l'unica applicazione pratica consisteva in qualche rara esperienza fatta ex-cathedra dal docente. In campo pedagogico il 1960 può essere considerato un anno di demarcazione per quanto riguarda la didattica della fisica. A partire da quegli anni infatti, si è dato maggiore impulso all'organizzazione di corsi di formazione dei docenti di fisica da destinare alle cosiddette "classi pilota" nelle quali veniva sperimentato l'insegnamento della fisica secondo il metodo proposto dal PSSC. Il testo e i sussidi didattici del PSSC ebbero il grande merito di far comprendere alle Direzioni Generali del Ministero quanto fosse grave il problema dell'insegnamento della Fisica in Italia e come fosse urgente intervenire opportunamente. Per cercare di modificare la situazione complessivamente sclerotizzata della scuola italiana riguardo all'insegnamento della fisica, nel 1968, cominciarono ad essere autorizzate dal Ministero le prime sperimentazioni richieste espressamente dalle scuole. Si cominciò a parlare con sempre maggiore frequenza di recupero, di programmazione educativa e didattica, di verifica e valutazione. L'insegnamento della Fisica ebbe un nuovo impulso con l'avvio del Piano Nazionale per l'Informatica (P.N.I.) che, presentato dal Ministro Falcucci nel Convegno C.E.E. di Bologna del maggio 1985, aveva lo scopo di introdurre la tecnologia informatica nella scuola italiana, come era già avvenuto nella Nazioni più avanzate. Furono proposti nuovi programmi di Fisica sia per il biennio che per il triennio. In questo periodo furono in sperimentazione due programmi di fisica proposti a livello nazionale: quello del Piano Nazionale per l'Informatica e quello del progetto Brocca. Nel biennio i due programmi erano completamente diversi. Quello del P.N.I. è innovativo prevalentemente nelle scelte metodologiche perché insiste sulla necessità della programmazione didattica, sull'utilizzazione del laboratorio, la risoluzione dei problemi di fisica e l'uso del computer nell'attività didattica. Quello Brocca è, invece, un programma integrato di Fisica e Chimica. Per il triennio, le differenze tra i due programmi delle due sperimentazioni sono limitate, poiché il programma Brocca rappresenta solo un'evoluzione di quello del P.N.I. sulla base della sperimentazione effettuata. Inoltre, i programmi di Fisica degli indirizzi tradizionali erano generalmente costituiti da un elenco di argomenti disposti in ordine sequenziale, mentre quelli del P.N.I. e del Brocca erano organizzati, invece, per temi e gli obiettivi erano indicati in maniera esplicita.

I problemi derivanti dalla sperimentazione del programma di Fisica del P.N.I. furono affrontati per la prima volta in un seminario nazionale organizzato dalla Direzione Classica e tenuto a Salice Terme nel maggio 1991. In tale occasione i numerosi docenti che vi parteciparono chiesero al Ministero un serio impegno per l'aggiornamento non soltanto per la parte metodologica, ma anche per i contenuti. In particolare furono richiesti corsi aventi per oggetto la teoria della relatività, la struttura della materia, l'universo fisico e, naturalmente, l'attività di laboratorio. L'insegnamento della fisica, cristallizzato da decenni di tradizione nella scelta dei contenuti e dei metodi, fu rivitalizzato dalla introduzione della prova scritta obbligatoria negli istituti che sperimentavano il programma di fisica con almeno tre ore settimanali di lezione. Nella prova scritta erano previsti non solo problemi ed esercizi, ma anche saggi brevi, test e relazioni di laboratorio.

Infine, dal punto di vista dei contenuti, è da evidenziare che sia il PNI che il progetto Brocca prevedevano nel triennio una massiccia introduzione della fisica moderna. Si ritiene pertanto fondamentale e condivisibile ribadire la premessa ai programmi Brocca che qui si riporta: *“Nell’indirizzo scientifico l’insegnamento della Fisica fornisce un efficace mezzo per conoscere ed interpretare la realtà, proponendo un metodo di ricerca che, avvalendosi dell’attività di laboratorio come irrinunciabile tappa del processo conoscitivo, consente una buona formalizzazione dei contenuti teorici e l’acquisizione di una metodologia generale di lavoro efficacemente applicabile anche in molti altri campi del sapere”*. Per quanto riguarda gli aspetti metodologici, l’impostazione proposta, sia nella versione PNI che nei programmi Brocca, è certamente condivisibile non solo perché coerente con i più attuali indirizzi pedagogici e didattici, ma anche perché mette in risalto la indubbia valenza culturale e formativa delle discipline scientifiche in generale e della fisica in particolare. Compito del docente è, pertanto, quello di individuare un curriculum che consenta una trattazione esauriente e una visione armoniosa e unitaria dei temi da trattare. Le modalità, il grado di approfondimento e la scansione temporale dello svolgimento dei singoli temi è lasciata alla libera scelta del docente come conseguenza di una attenta e adeguata attività di programmazione.

A tutt’oggi, nonostante le tante dichiarazioni di principio, permane la frattura, la separazione implicita tra l’istruzione scientifica e tutte quelle abilità trasversali che concorrono alla formazione dello studente. Indubbiamente una delle principali cause di tale disaffezione è da ricercarsi nell’obsolescenza del sistema scolastico italiano e in alcune dinamiche in azione ancora oggi nella scuola reale compatibili, purtroppo, anche col disegno della scuola futura. *Obsolescenza*, come definisce G. Bateson, (antropologo, sociologo e psicologo britannico) i presupposti, non tanto dei contenuti, che infatti sono stati periodicamente modernizzati ma senza produrre alcun rinnovamento, nessun impatto realmente significativo. L’apprendimento scientifico, pertanto, ancora oggi non gode di buona salute e in nessun paese al mondo è ritenuto adeguato alle esigenze della società moderna. Il problema è ovviamente complesso, molto più complesso di quanto appaia dal dibattito tra gli esperti. Come ben sappiamo, la scienza è un’arma a doppio taglio: nel risolvere i problemi in cui si imbatte ne crea inevitabilmente altri, ma sempre a un livello superiore.

La scienza, difatti, non è statica, anzi cresce e si diffonde intorno a noi. Innovazioni e scoperte stanno cambiando l’intero panorama economico, politico e sociale, rovesciando le vecchie credenze e i pregiudizi cui eravamo legati. Siamo destinati a trasformarci in quegli stessi dei che una volta adoravamo e temevamo. Ma gli strumenti di cui ci serviremo non saranno bacchette magiche e pozioni, bensì la scienza dei computer, la nanotecnologia, l’intelligenza artificiale, la biotecnologia e, più di ogni altra cosa, la teoria quantistica, che è alla base di queste tecnologie. Ma a che cosa ci condurranno tutti questi cambiamenti tecnologici? Qual è la destinazione finale del lungo percorso della scienza e della tecnologia?

Premesso che la transizione è inevitabile, non ci resta che sperare di riuscire a maneggiare la spada della scienza con saggezza ed equanimità, vincendo la barbarie che abbiamo

ereditato dal passato. Nell'attuale società, dove la ricchezza non è più costituita dalla manodopera-ricchezza tipica della società agricola-, né dal capitale-proprio dell'età industriale-, l'intelligenza e la conoscenza sono realmente diventati gli elementi centrali dell'intero sistema. Tali considerazioni inducono a pensare che oggi la scuola non è più l'unica istituzione preposta alla conoscenza formale, ma, unitamente alla famiglia e all'incedere sempre più invasivo dei mass media (conoscenza informale), costituiscono l'unica fonte di conoscenza e di valori che vengono trasmessi alle nuove generazioni. Pertanto oggi la scuola deve poter offrire una sintesi positiva di un sapere che ormai apprendiamo da mille fonti diverse. Quando la scienza si associa ai valori, non soltanto diviene coscienza delle persone, ma raggiunge la consapevolezza della sua reale dimensione e, soprattutto, dei suoi limiti, con un atteggiamento positivo di reale servizio all'uomo ed alle sue aspirazioni sia materiali che spirituali. Il miglioramento della cultura scientifica dei giovani diplomati e laureati è certamente un problema di estrema importanza in una Nazione ad economia di tipo industriale e tecnologicamente avanzata.

Bibliografia

1. V. Barone- Relatività. Principi e applicazioni-dicembre 2004- Bollati Boringhieri
2. W. Heisenberg- I principi fisici della teoria dei quanti- 2016- Bollati Boringhieri
3. L. E. Picasso- Lezioni di Meccanica Quantistica- II edizione- Edizioni ETS
4. Manjit Kumar- Quantum. Da Einstein a Bohr, la teoria dei quanti, una nuova idea della realtà- Oscar Mondadori
5. V. Moretti- Teoria spettrale e Meccanica quantistica- Operatori in Spazi di Hilbert- Springer
6. P.A.M. Dirac- I principi della meccanica quantistica- Bollati Boringhieri
7. P.A.M. Dirac- General Theory of Relativity- University Press, Princeton, New Jersey
8. D. Giancoli- Fisica, con Fisica Moderna- III Edizione- Casa Editrice Ambrosiana;
9. M.Mandrone - Mathematics and Relativity: Reflections on the Theory of Relativity between history and epistemology- Scienze and Philosophy, 2014, 49,58 ISSN online 2282-7765, PRINT 2282-7757
10. M. Mandrone - History and epistemology of mathematical analysis: from the method of exhaustion to the defined integral. Overview on non-standard analysis- Scienze and Philosophy, 2015, ISSN online 2282-7765, PRINT 2282-7757

La Fisica moderna e le tematiche affrontate nei test ministeriali.

Nascita e Storia della Meccanica Quantistica e Teoria della Relatività

Ferdinando Di Martino¹

¹Dipartimento di Architettura
Università degli Studi di Napoli Federico II
fdimarti@unina.it

Le onde gravitazionali

Sommario. – *In questo studio sono analizzate le onde gravitazionali e le recenti prove sperimentali della loro esistenza. È compiuta una breve trattazione dei processi evolutivi stellari che danno luogo alla formazione di oggetti massicci quali stelle di neutroni e buchi neri e sono analizzati i rilevatori interferometrici di onde gravitazionali. Infine sono discussi i recenti risultati sperimentali che hanno permesso di rilevare la presenza di onde gravitazionali.*

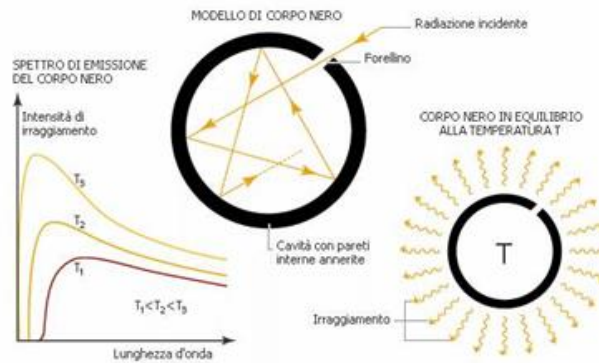
Il corpo nero

Per corpo nero si intende un corpo ideale con riflessione nulla; esso assorbe tutta la radiazione incidente, irradiandola.

Un corpo nero è riproducibile in laboratorio con una cavità mantenuta a temperatura costante.

Una importante equazione lega la temperatura del corpo nero all’intensità di radiazione emessa (la potenza della radiazione emessa per unità di superficie. Essa è la *legge di Stefan Boltzmann*: $I = \sigma T^4$, dove $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \text{ K}^2)$ è detta *costante di Stefan Boltzmann*.

Una stella può essere approssimata a un corpo nero. Dall’intensità della radiazione emessa da una stella è possibile stimare la sua temperatura superficiale mediante la legge di Stefan-Boltzmann.



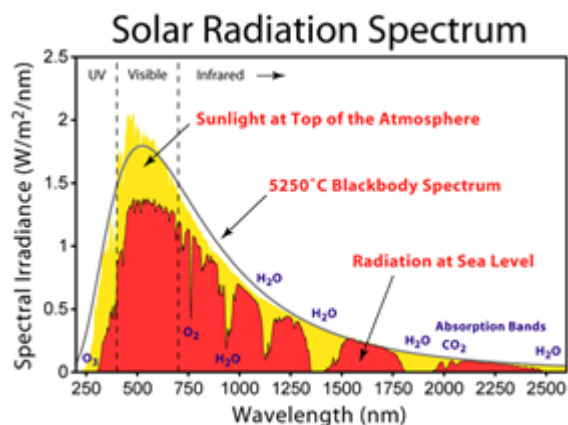
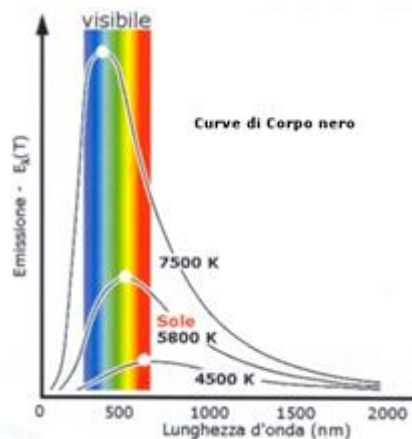
Schema di un corpo nero e variazione dell'intensità di radiazione con la temperatura

Il colore delle stelle - la legge di Wien

Approssimando una stella a un corpo nero è possibile stimare la massima lunghezza d'onda alla quale la stella emette la massima intensità d'energia mediante la legge di Wien: $T\lambda_{MAX} = r$, dove $r = 2,898 \times 10^{-3} \text{ mK}$ è detta *costante di radiazione*.

Il colore di una stella è correlato alla lunghezza d'onda della massima intensità di energia emessa per unità di superficie, quindi alla sua temperatura superficiale.

Il Sole ha una temperatura superficiale di 5800 °K, cui corrisponde una lunghezza d'onda di massima emissione $\lambda_{MAX} = 5 \times 10^{-7} \text{ m} = 5000 \text{ Å}$.



La curva di un corpo nero e spettro di emissione della radiazione solare

Le classi spettrali stellari

Una stella ha una temperatura superficiale tra 2×10^3 e 4×10^4 °K. La classificazione spettrale delle stelle o classificazione di Harward, divide le stelle in 7 classi, O-B-A-F-G-K-M. Ad ogni classe spettrale è associato un intervallo di temperatura superficiale e

un colore corrispondente alla lunghezza d'onda della massima intensità emissiva. Ogni classe è divisa in 10 sottoclassi, da 0 a 9.

Il Sole è una stella di classe G2, cui è associato un colore convenzionale giallo.

Class	Temperatura ^[18] (Kelvin)	Colore convenzionale	Colore apparente ^{[17][18][19]}	Massa ^[18] (masse solari)	raggio ^[18] (raggi solari)	Luminosità ^[18] (bolometrica)
O	≥ 33 000 K	blu	blu	≥ 16 M _☉	≥ 6,6 R _☉	≥ 30 000 L _☉
B	10 000–33 000 K	azzurro	blu chiaro	2,1–16 M _☉	1,8–6,6 R _☉	25–30 000 L _☉
A	7 500–10 000 K	bianco	azzurro	1,4–2,1 M _☉	1,4–1,8 R _☉	5–25 L _☉
F	6 000–7 500 K	bianco-giallo	bianco	1,04–1,4 M _☉	1,15–1,4 R _☉	1,5–5 L _☉
G	5 200–6 000 K	giallo	bianco-giallo	0,8–1,04 M _☉	0,96–1,15 R _☉	0,6–1,5 L _☉
K	3 700–5 200 K	arancione	giallo-arancione	0,45–0,8 M _☉	0,7–0,96 R _☉	0,08–0,6 L _☉
M	≤ 3 700 K	rosso	arancio-rosso	0,08–0,45 M _☉	≤ 0,7 R _☉	≤ 0,08 L _☉

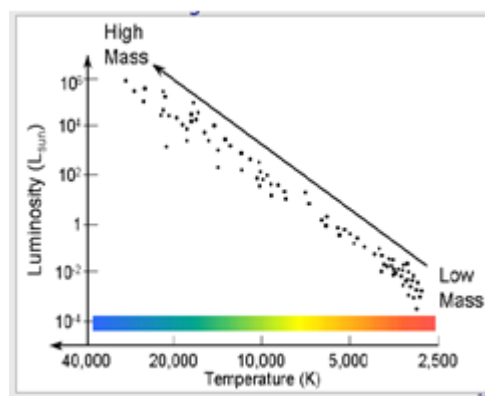
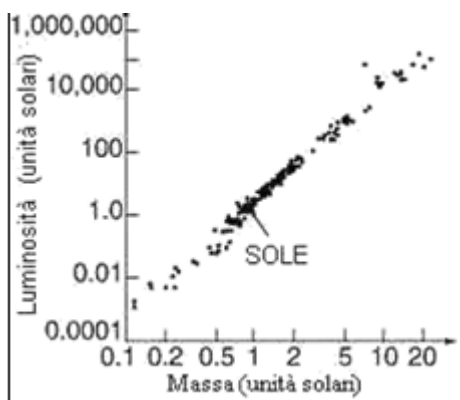
Tabella delle classi spettrali delle stelle

La relazione Massa-Luminosità

Massa, luminosità e temperatura superficiale delle stelle sono parametri tra loro strettamente correlati.

È complesso trovare una formula esatta che correli la massa di una stella alla sua luminosità. Approssimativamente si ha $L \propto M^3$, dove L è la luminosità della stella, ovvero l'energia irradiata al secondo dall'astro.

Le stelle di classe M hanno una massa minore di 0.45 M_☉, dove ☉ è il simbolo del Sole. Esse hanno una luminosità inferiore a 0.08 L_☉. Le stelle di classe O hanno una massa superiore a 16 M_☉ e una luminosità superiore a 3x10⁴ L_☉.



I rapporti Massa-Luminosità e Temperatura-Luminosità delle stelle

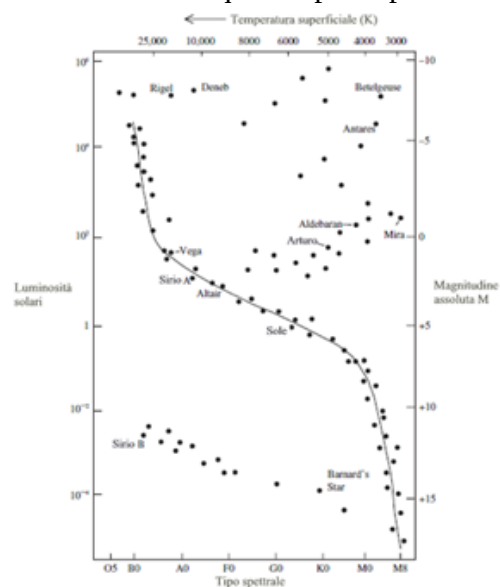
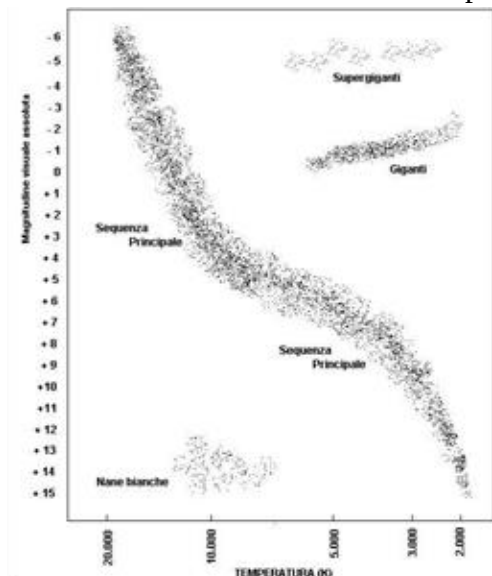
Il diagramma di Hertzsprung-Russell

Il diagramma Hertzsprung-Russell (diagramma H-R) fu messo a punto nei primi anni del '900 da Ejnar Hertzsprung e Henry Norris Russell, per mettere in relazione la temperatura effettiva delle stelle, determinata dal suo indice di colore e la loro luminosità assoluta.

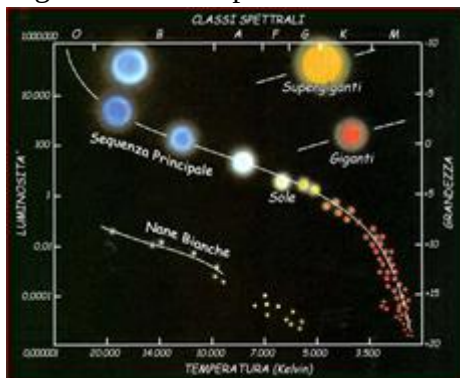
Esso mostra la relazione tra la temperatura superficiale di una stella e la sua luminosità assoluta e permette di comprendere l'evoluzione delle stelle. Nel diagramma, infatti, le stelle tendono a posizionarsi in regioni specifiche; la maggior parte delle stelle è posizionata lungo una curva detta sequenza principale, mentre in due aree sopra la sequenza principale alla sua destra si dispongono le stelle giganti e supergiganti. In un'area a sinistra al di sotto della sequenza principale si dispongono le nane bianche.

La sequenza principale corrisponde al ciclo di vita della stella dalla sua nascita alla terminazione del suo combustibile termonucleare.

Più la stella è luminosa e massiccia più è breve la sua vita in sequenza principale.



Il diagramma H-R e posizione di alcune stelle nel diagramma



Il colore delle stelle nelle sequenze del diagramma H-R

La vita di una stella

La vita di una stella è trascorsa nella sua sequenza principale, fino a quando tutto l'idrogeno non sarà stato trasformato in elio nel processo di fusione termonucleare. Successivamente la stella, se di piccola massa, diventa una gigante rossa, se massiccia diventa una supergigante.

Al termine dell'espansione una gigante rossa perde massa per instabilità e se la sua massa non è superiore a 1.44 masse solari (limite di Chandrasekar), si contrae fino a formare una nana bianca, stella molto densa e delle dimensioni delle Terra.

Una stella terminata la sua fase di fusione termonucleare esce dalla sequenza principale e dopo la sua espansione, più o meno violenta, si contrae a formare una nana bianca, una stella di neutroni o un buco nero.

Stelle con massa originale mediamente uguale o superiore a $10 M_{\odot}$ dopo la loro espansione hanno una massa del residuo superiore al limite di Chandrasekhar e si trasformano in stelle di neutroni o buchi neri. Esse hanno una durata in sequenza principale molto breve, tra 6 e 10 milioni di anni (la durata in sequenza principale del Sole è di circa 10 miliardi di anni, quella di una stella di classe spettrale M è di circa 800 miliardi di anni).

La tabella successiva mostra in cosa si trasformerà una stella in dipendenza della sua massa iniziale dopo aver abbandonato la sequenza principale.

Massa originale (in $M_{\odot}$)	Luminosità nella SP (in $L_{\odot}$)	Durata della SP ($\times 10^3$ anni)	Prodotto finale della fusione	Fenomeno terminale	Massa espulsa (in $M_{\odot}$)	Natura del residuo	Massa del residuo (in $M_{\odot}$)	Densità del residuo ($\times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$)	Raggio del residuo (in m)	Accel. di gravità (in m s^{-2})
30	10 000	0,006	ferro	supernova tipo Ib	24	buco nero	6	3×10^{15}	6192,21	$5,19 \times 10^{12}$
10	1 000	0,01	silicio	supernova tipo II	8,5	stella di neutroni	1,5	5×10^{14}	17861,44	$2,5 \times 10^{12}$
3	100	0,30	ossigeno	nebulosa planetaria	2,2	nana bianca	0,8	2×10^7	$2,67 \times 10^6$	$1,49 \times 10^7$
1	1	10	carbonio	nebulosa planetaria	0,3	nana bianca	0,7	10^7	$3,22 \times 10^6$	$8,99 \times 10^6$
0,3	0,004	800	elio	vento stellare	0,01	nana bianca	0,3	10^6	$5,22 \times 10^6$	$1,46 \times 10^6$

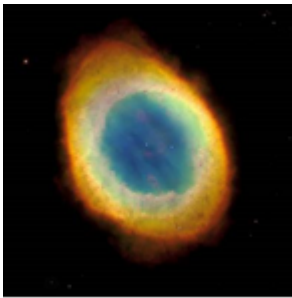
Tipo di tramutazione di una stella che fuoriesce dalla sequenza principale in dipendenza della sua massa originale.

Le nane bianche

Se la massa della stella è inferiore al limite di Chandrasekhar di 1.44 masse solari, essa, dopo una fase di espansione in cui si raffredda, si trasforma in una gigante rossa, restando in questa fase circa un miliardo di anni, fino a quando non termina tutto il suo combustibile nucleare.

Successivamente, la forza gravitazionale, non più bilanciata dalla forza di espansione termonucleare, contrae la stella, che emette gli strati gassosi più esterni. Tali strati gassosi, per stelle di classe M formano un vento stellare, per stelle di massa maggiore formano una nebulosa planetaria attorno alla stella.

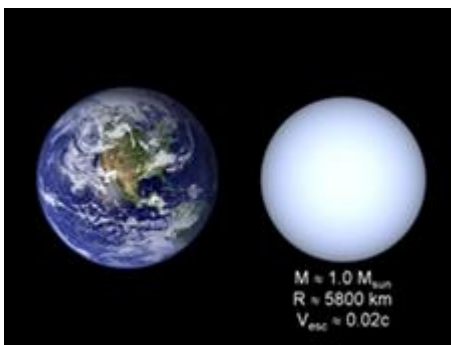
La fase di contrazione termina quando la forza di gravità è bilanciata dalla forza di repulsione elettromagnetica dei protoni nel nucleo. La stella si sarà trasformata in una nana bianca, con un raggio circa uguale a quello terrestre, una elevata densità (circa 10^6 kg/m^3) e una elevata temperatura (circa 10^8 °K).



Nebulosa planetaria



Sirio e la sua nana bianca compagna Sirio B



Dimensioni medie di una nana bianca

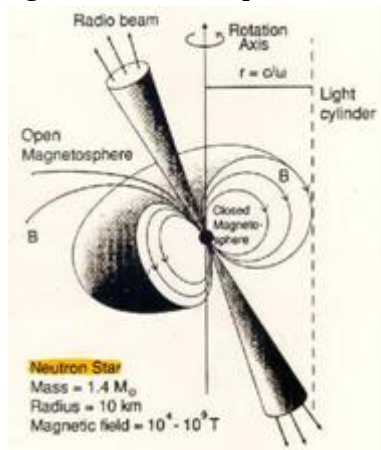
Le stelle di neutroni

Se la massa della stella supera 1.44 masse solari, essa, dopo una violenta esplosione, si contrae fino a formare una stella di neutroni, elettricamente neutra e della dimensione di qualche chilometro. A causa della sua densità elevatissima ($1,98 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$) possiede un campo gravitazionale enorme, circa 10^{11} volte quello della Terra. Tale campo gravitazionale ha permesso di vincere la forza di repulsione elettromagnetica nella fase di contrazione.

Per l'intenso campo magnetico generato gli elettroni allontanati dalla stella ruotano intorno ad essa ad elevata velocità, formando sorgenti di raggi X e gamma chiamate Pulsar

La Pulsar più nota è la Crab Nebula (Nebulosa del Granchio), nella costellazione del Toro, esplosa nel 1054 d.C.

Una stella di neutroni ha un raggio medio di circa 20 km, una densità di circa $5 \times 10^{14} \text{ kg/m}^3$ e ruota con periodo da 10^{-2} s a 30 s.



Moto di una stella di neutroni



La Crab Nebula

I buchi neri

Se la stella è così densa da generare un campo gravitazionale in grado di superare nel collasso anche la forza nucleare che teneva compatti i neutroni nei nuclei atomici, essa continuerà a collassare fino a formare un oggetto con un campo gravitazionale così elevato da creare una velocità di fuga superiore a quella della luce.

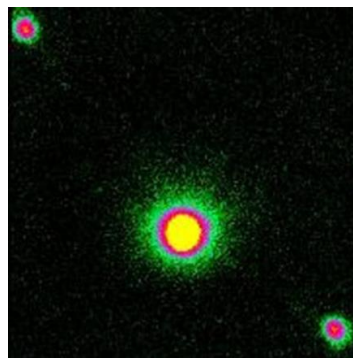
Nel 1939 Oppenheimer e Snyder prevedero che le stelle di neutroni con massa superiore a tre masse solari (il limite di Tolman-Oppenheimer-Volkoff) sarebbero collassate a tal punto da avere un raggio inferiore al proprio **raggio di Schwarzschild**, ovvero al raggio di un corpo la cui velocità di fuga sia pari a quella della luce.

Poiché nessun corpo può avere velocità maggiore di quella della luce, allora, se la stella collassata avesse un raggio minore del suo raggio di Schwarzschild, nessun corpo, neanche la luce, potrebbe fuggire da essa.

La stella si trasforma in un buco nero. Il suo collasso gravitazionale continua indefinitamente (singolarità).



Formazione di un buco nero



Il buco nero in Cygnus X-1

I buchi neri– Raggio di Schwarzschild

L'espressione matematica del raggio di Schwarzschild può essere ottenuta anche senza ricorrere al complesso formalismo matematico della relatività generale, cercando il raggio di un corpo di massa M per il quale la velocità di fuga sia pari alla velocità della luce.

Nell'approssimazione classica è possibile determinare il raggio di Schwarzschild può eguagliando energia cinetica e gravitazionale per un corpo con velocità pari alla velocità c della luce.

Energia cinetica	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$
Energia gravitazionale	$E_g = G \frac{mM}{d}$
Per $v = c$	$\frac{1}{2}mc^2 = G \frac{mM}{d}$
Cui corrisponde un raggio di Schwarzschild $r_s = d$ con:	
$r_s = \frac{2GM}{c^2}$	

Calcolo del raggio di Schwarzschild

Per la terra si ottiene $r_s = 8.87 \times 10^{-3}$ m., il che significa che se la terra avesse un raggio di meno di 10 mm (densità di circa 2×10^{27} g), allora neanche la luce potrebbe sfuggire al campo gravitazionale terrestre. Vediamo ora quanto vale il raggio di Schwarzschild per la stella Rigel, che nella sua fase finale di vita si trasformerà in un buco nero.



Rigel – raggio di Schwarzschild

$$M = 3.58 \times 10^{31} \text{ kg (18 } M_{\odot})$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nxm}^2/\text{kg}^2 .$$

$$r_s = 5.3 \times 10^4 \text{ m} = 53 \text{ km.}$$

La stella Rigel e il suo raggio di Schwarzschild calcolato con la formula $r_s = \frac{2GM}{c^2}$.

In base al raggio di Schwarzschild è fatta la seguente classificazione dei buchi neri:

Buchi neri stellari: sono stelle di massa superiore a 3 masse solari collassate fino ad oltre il proprio raggio di Schwarzschild.

Buchi neri supermassivi: sono oggetti di massa superiore a 150 masse solari, generalmente relegati nei centri galattici. La prova dell'esistenza dei buchi neri supermassivi è il buco nero supermassivo nel centro della Via Lattea la cui massa è circa $2.5 \times 10^6 M_{\odot}$

Buchi neri primordiali: sono oggetti di massa molto piccola e raggio di Schwarzschild minore di 1 nm. Si ritiene si siano formati all'epoca del Big Bang, in condizione di estrema densità della materia.

Le onde gravitazionali

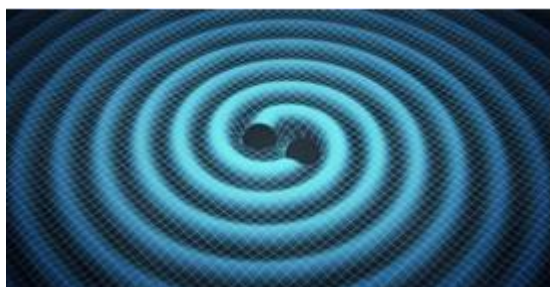
Un'onda gravitazionale è costituita da una perturbazione dello spazio-tempo che si propaga come un'onda.

Il movimento di oggetti molto massicci provoca la generazione di un'onda gravitazionale che si propaga nello spazio-tempo.

Un'onda gravitazionale si propaga indisturbata senza essere deviata dalla materia, a differenza di un'onda elettromagnetica.

Quindi, le onde gravitazionali non sono attenuate dal materiale intergalattico ed interstellare.

L'effetto prodotto da un'onda gravitazionale è una deformazione dello spazio-tempo, quindi delle distanze spaziali e temporali, ma tale effetto è così lieve che è molto difficile rilevarlo.



Oggetti massicci in accelerazione e propagazione di onde gravitazionali nello spazio-tempo

Un'onda gravitazionale può essere considerata una forma di energia che genera una increspatura dello spazio tempo allo stesso modo come un'onda generata da un sasso gettato nello stagno genera una increspatura della superficie dello stagno.

Essa è fornita dall'energia di interazione gravitazionale tra grandi masse in moto. A differenza di un'onda elettromagnetica, un'onda gravitazionale interagisce in minima parte con la materia.

Einstein ha predetto l'esistenza di onde gravitazionali nella teoria della relatività generale, come perturbazioni dello spaziotempo prodotte da moti e accelerazioni di oggetti massicci quali, ad esempio, stelle di neutroni o buchi neri in rotazione.

Mentre un'onda elettromagnetica è generata dalla propagazione del campo elettromagnetico nello spazio-tempo ed è descritta dalle equazioni di Maxwell, un'onda gravitazionale è generata dalla propagazione del campo gravitazionale nello spazio-tempo. Essa è descritta dalle equazioni tensoriali di Einstein della Relatività Generale.

Le onde gravitazionali si propagano con la velocità della luce c . Come la luce, esse sono onde trasversali, quindi provocano distorsioni in una direzione perpendicolari alla direzione di propagazione.

È l'accelerazione delle masse a provocare onde gravitazionali. Parte dell'energia delle masse in accelerazione è trasformata in onde gravitazionali che generano distorsioni geometriche nello spazio-tempo

Rilevatori di onde gravitazionali

Per rilevare onde gravitazionali è necessario impiegare l'uso di interferometri, non dissimili da quello usato da Michelson e Morley nel loro famoso esperimento di rilevazione dell'etere.

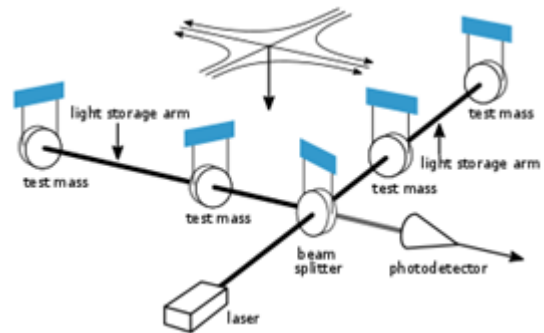
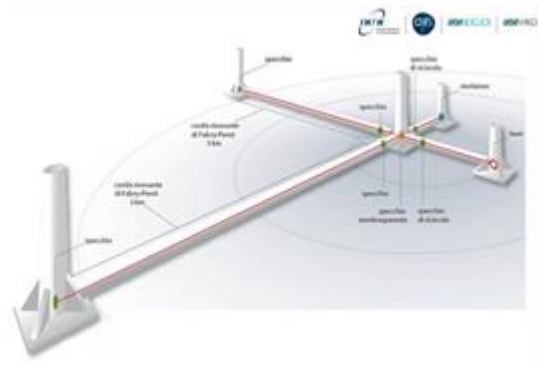
Un fascio di luce laser viene splittato e poi fatto attraversare due lunghi bracci perpendicolari. Dopo aver attraversato il braccio più volte, il fascio viene rilevato da un fotorilevatore. L'uso del laser è necessario per disporre di fasci di luce coerenti.

Un'onda gravitazionale, provocando una distorsione dello spazio-tempo, genera una modifica nelle lunghezze dei due bracci (contrae l'uno e allunga l'altro) e quindi una differenza di cammino ottico tra i due bracci. Il rilevatore produrrà delle frange di interferenza generate dai due fasci uscenti.

Bisogna considerare che onde gravitazionali anche significative prodotte da oggetti massicci lontani possono produrre una variazione nella lunghezza di uno dei bracci pari al massimo a circa 10^{-18} m, cioè una variazione infinitesima (al confronto, ad esempio, il raggio dell'orbita più interna dell'atomo di idrogeno, o raggio di Bohr, è di $5,291 \times 10^{-11}$ m cioè oltre un milione di volte più grande).

Oggi rilevatori interferometrici come i due rilevatori di LIGO arrivano a rilevare onde gravitazionali che producono variazione nella lunghezza di uno dei bracci di circa 5×10^{-22} m.

I rilevatori Advanced Virgo e Advanced Ligo in progettazione saranno in grado di rilevare onde gravitazionali che producano differenze ancora minori delle lunghezze dei bracci.



Esempi di rilevatori di onde gravitazionali.

Prima rilevazione di onde gravitazionali

Poiché un'onda gravitazionale è generata dal moto accelerato di oggetti molto massicci, per la sua produzione è necessario che oggetti molto massicci, come una stella di neutroni o un buco nero, si muovano molto velocemente.

Russel Hulse e Joseph Taylor sono stati i primi a rilevare indirettamente onde gravitazionali. Essi studiarono nel 1975 un sistema binario formato da una pulsar (PSR 1513-16) e una stella di neutroni compagna molto vicine in rotazione. Esse compiono una rotazione in circa 8 ore e distano da 1 a 5 raggi solari.

I due ricercatori osservarono le emissioni radio delle due stelle con il radiotelescopio di Arecibo in Portorico, calcolando, in base all'intensità di tali emissioni e ai tempi di arrivo dell'impulso radio, le variazioni nel tempo della velocità di rotazione della pulsar.

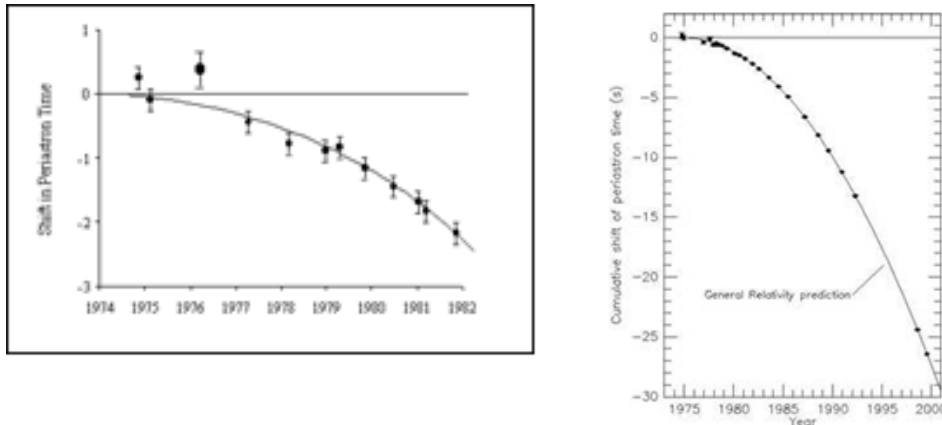


Il radiotelescopio di Arecibo

Hulse e Taylor, partendo dalle misure negli anni della radiazione radio emessa, calcolarono l'avanzamento nel tempo del periastro del sistema, ovvero della minima

distanza tra le due stelle nell'orbita. La diminuzione nel tempo di questa distanza indica che fra meno di 300 milioni di anni le due stelle si fonderanno.

La curva continua nel grafico è la previsione del cambiamento del periastro dovuto all'emissione di onde gravitazionali, calcolata sulla base della teoria della Relatività Generale di Einstein. Essa è stata confermata dalle osservazioni compiute fino al 1981 (Taylor e Weisberg, *The Astrophysical Journal*, 253:908-920, 1982). Questo risultato costituisce la prima prova dell'esistenza delle onde gravitazionali e diede il premio nobel per la fisica a Hulse e Taylor nel 1993.



Avanzamento del periastro in PSR 1913+16 e curva predetta dalla Relatività Generale

L'interferometro LIGO

LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) è un progetto composto da due interferometri laser costruiti negli Stati Uniti, ad Hanford Site (Washington) e a Livingston (Louisiana).

LIGO è stato progettato per rilevare onde gravitazionali da scienziati del California Institute of Technology (Caltech) e del Massachusetts Institute of Technology (MIT).

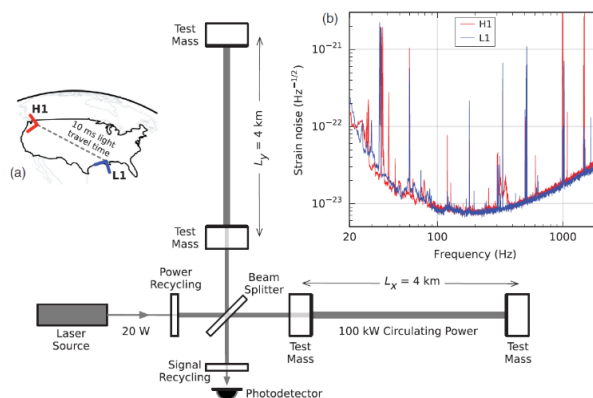
LIGO è in funzione dal 2002. Nel 2010, fu iniziato lo sviluppo di Enhanced LIGO, un progetto di miglioramento della sensibilità dei due rilevatori. Il progetto è terminato nel 2015; un ulteriore progetto, avviato per accrescere ulteriormente la sensibilità dei due rilevatori, terminerà nel 2021.

I due interferometri di Livingston e di Hanford consistono in un tunnel vuoto a forma di L, lungo 4 km per lato, alle cui estremità si trovano degli specchi sospesi. Il raggio laser viene fatto attraversare più volte l'interferometro nei due lati del tubo. Una variazione di cammino ottico tra i due fasci viene rilevata da un rilevatore posto all'estremità.



I due rilevatori interferometrici LIGO

Onde gravitazionali che sono originate a centinaia di milioni di anni luce dalla Terra dovrebbero distorcere i 4 chilometri di spazio tra gli specchi di circa 10^{-18} m e il rilevatore dovrebbe misurare questa distorsione.



I due interferometri LIGO e le distorsioni capaci di rilevare

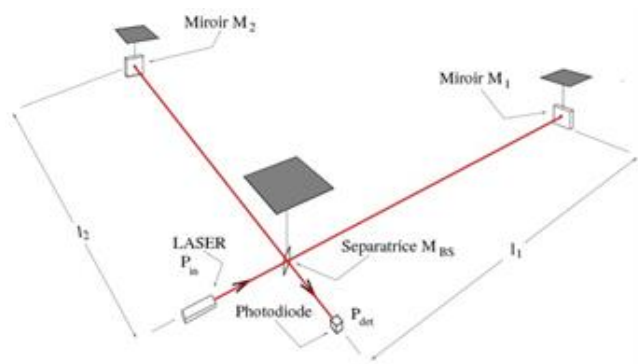
L'interferometro VIRGO

Virgo è un rivelatore interferometrico di onde gravitazionali italo-francese messo a punto dall'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare e dal Centre National de la Recherche Scientifique.

L'interferometro è situato nel comune di Cascina (PI), in località Santo Stefano a Macerata. La costruzione dell'apparecchiatura è terminata nel 2003.

Virgo è in grado di rivelare onde gravitazionali, in un intervallo di frequenze esteso tra 10 e 10^3 Hz

La sensibilità dell'interferometro permetterà di osservare onde generate da supernove e sistemi binari situati nell'ammasso della Vergine (da cui il nome del progetto).



Il rivelatore interferometrico VIRGO

VIRGO impiega un fascio laser ad alta precisione, che viene suddiviso da un separatore di fascio ed inviato nelle cavità ottiche di 3 km di lunghezza che costituiscono i due bracci perpendicolari del rivelatore.

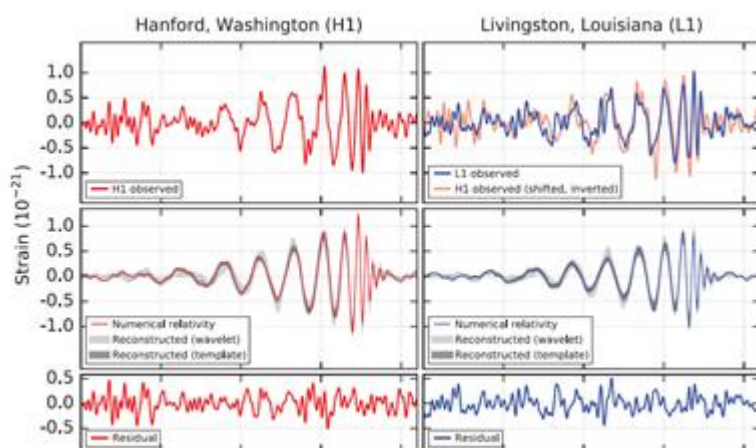
I fasci laser vengono fatti viaggiare avanti e indietro per 50 volte e si ricombinano all'uscita dell'interferometro dove un rivelatore misura la differenza di fase accumulata. Onde gravitazionali prodotte a milioni di anni luce di distanza dalla Terra, dovrebbero distorcere i cammini lungo i bracci distorcere i 3 chilometri di distanza tra gli specchi di circa 10^{-18} m.

Il 20 febbraio 2017 è stato inaugurato Advanced Virgo, che permette di accrescere la sensibilità del rivelatore e di individuare la posizione delle masse generatrici dell'onda gravitazionale.

LIGO e VIRGO – i primi risultati

L'11 febbraio 2016, la LIGO Scientific Collaboration e la Virgo Collaboration pubblicarono un articolo sulla prima osservazione diretta di onde gravitazionali, costituita da un segnale distinto ricevuto alle 09.51 UTC (tempo coordinato universale) del 14 settembre 2015, che correla perfettamente con il segnale prodotto da un'onda gravitazionale predetta dalla relatività generale dalla rotazione di due buchi neri aventi ~30 masse solari che si fondono tra loro a circa 1,3 miliardi di anni-luce dalla Terra.

Il riferimento dell'articolo è: *B. P. Abbott , LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, in Physical Review Letter 116, 061102 (2016), 11 febbraio 2016, DOI:10.1103/PhysRevLett.116.061102.*

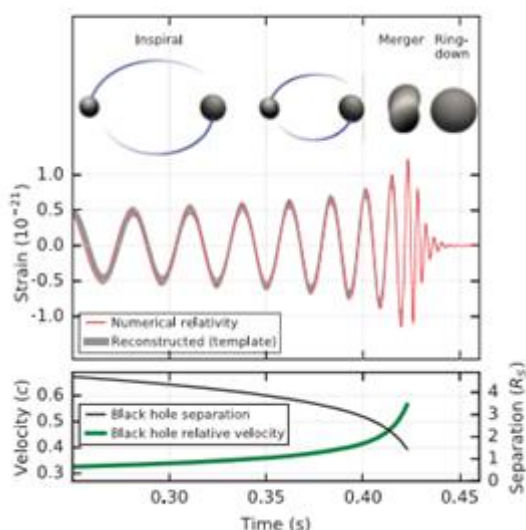


La deformazione rilevata dai due interferometri LIGO confrontata con quella predetta dalla relatività generale.

Il segnale rilevato nel tempo mostra che i due buchi neri in rotazione tra loro, dopo aver spiraleggiato, si stavano fondendo.

I due buchi neri, di massa circa $36 M_{\odot}$ e $29 M_{\odot}$, si sono fusi insieme a formare un buco nero di circa $62 M_{\odot}$. La massa residua di $3 M_{\odot}$ è stata trasformata in energia irradiata sotto forma di onde gravitazionali.

La figura mostra la deformazione del segnale prodotta e la variazione nel tempo della velocità (in v/c) e della distanza tra i due buchi neri (in $R/R_{\text{Schwarzschild}}$). In circa 20 secondi la velocità di rotazione dei due buchi neri passa da $0.3 c$ a quasi $0.6 c$ e la loro distanza passa da oltre 4 a meno di due raggi di Schwarzschild.

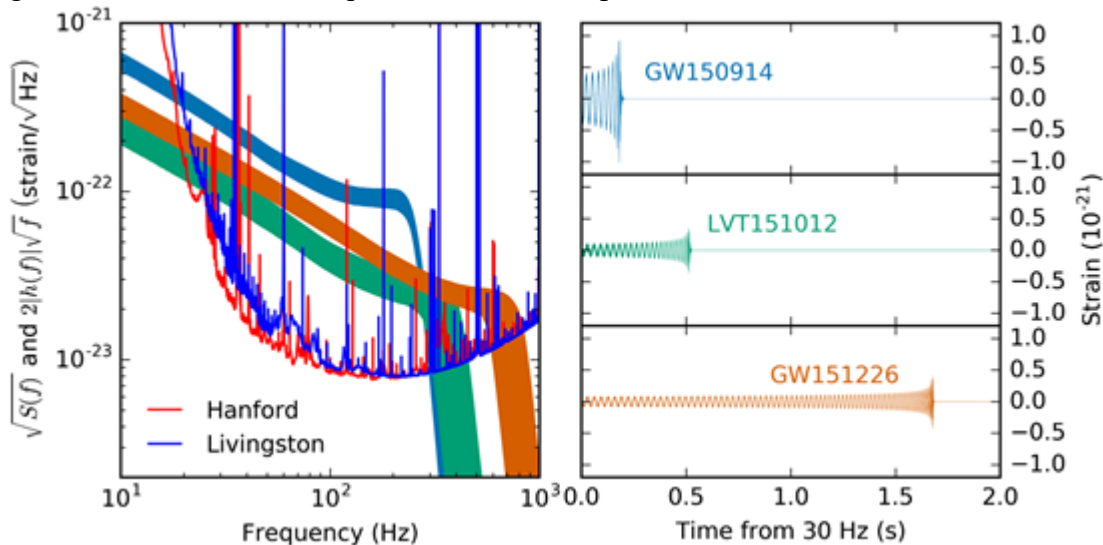


Deformazione del segnale e variazione nel tempo della velocità e della distanza tra i due buchi neri

Oltre LIGO e VIRGO – le basse frequenze

Purtroppo non è possibile, da rilevatori in laboratori terrestri, rilevare onde gravitazionali di bassa frequenza, in quanto a queste frequenze il rumore prodotto in atmosfera è troppo elevato.

I due rilevatori Advance LIGO possono rilevare onde gravitazionali anche di ampiezza (strain) minore di 10^{-21} , ma con frequenze maggiori di 10 Hz. Per rilevare onde gravitazionali di bassa frequenza è necessario porre rilevatori oltre l'atmosfera terrestre.



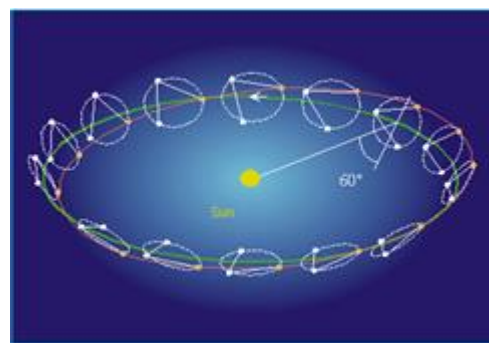
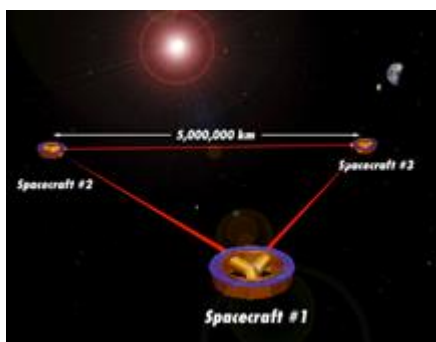
Ampiezze e frequenze delle onde gravitazionali rilevabili dai due interferometri LIGO.

L'interferometro spaziale LISA

LISA (Laser Interferometer Space Antenna) è una missione spaziale in progettazione presso l'Agenzia Spaziale Europea (ESA), e il cui lancio è previsto per il 2034.

Obiettivo della missione è costruire un interferometro spaziale in grado di rilevare per 5 anni onde con una frequenza compresa tra 0,0001 e 1 Hz più bassa rispetto alle frequenze rilevabili dagli interferometri terrestri.

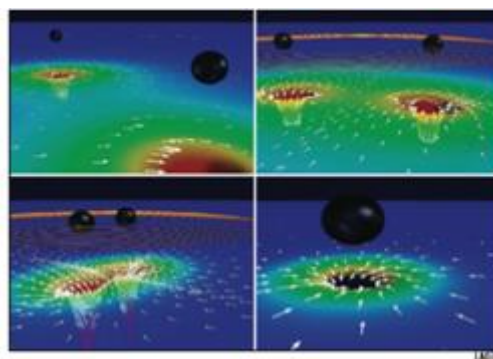
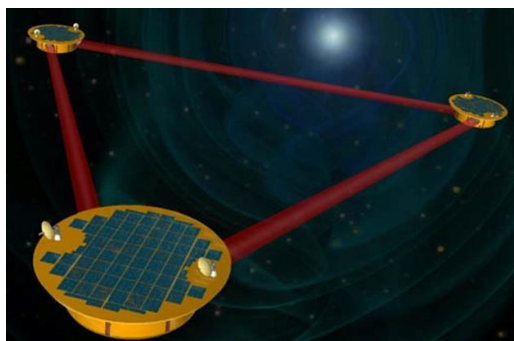
LISA sarà composto da da 3 satelliti artificiali posti ai vertici di un triangolo equilatero, separati tra loro da una distanza di 5 milioni di chilometri e ad una distanza di 1 Unità Astronomica (AU) dal Sole. Essi effettuano un moto di rotazione rispetto al loro centro di massa e di rotazione attorno al Sole.



Il rilevatore interferometrico LISA e rotazione dei tre satelliti in orbita intorno al Sole

Poiché LISA sarà in grado di rilevare onde gravitazionali di bassa frequenza, l'interferometro permetterà di rilevare anche onde di minore frequenza come quelle generate da sistemi binari nella nostra galassia o da buchi neri supermassicci in galassie lontane.

Un rilevatore laser sarà in grado di misurare con estrema precisione le distanze tra i tre satelliti rilevando piccole variazioni nelle lunghezze fino a 10^{-11} m.



Misurazioni laser delle distanze tra i tre satelliti di LISA e simulazione di fusione di buchi neri rotanti in centri galattici rilevabile con LISA

Sorgenti rilevabili con LISA

La tabella successiva mostra alcune sorgenti binarie generatrici di onde gravitazionali rilevabili con LISA. Oltre alle masse delle due stelle sono riportate la frequenza dell'onda gravitazionale calcolata e il logaritmo della deformazione provocata.

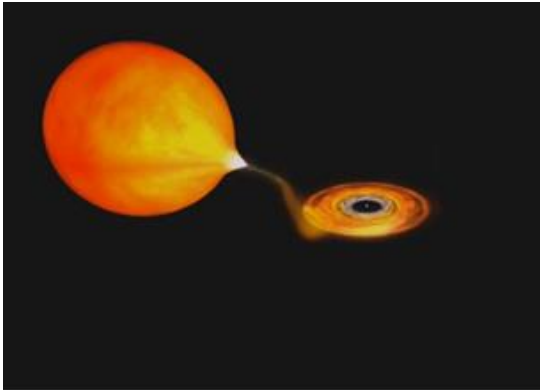
name	$m_1 (M_\odot)$	$m_2 (M_\odot)$	ν_{GW} (Hz)	$\log h_c$
U Gem	1.26	0.57	$1.31 \cdot 10^{-4}$	-20.8
IP Peg	1.15	0.67	$1.46 \cdot 10^{-4}$	-20.9
HU Aqr	0.95	0.15	$2.67 \cdot 10^{-4}$	-21.3
VW Hyi	0.63	0.11	$3.12 \cdot 10^{-4}$	-21.3
EX Hya	0.78	0.13	$3.39 \cdot 10^{-4}$	-21.4
WZ Sge	0.45	0.058	$4.08 \cdot 10^{-4}$	-22.1
ST LMi	0.76	0.17	$2.93 \cdot 10^{-4}$	-21.4
SW UMa	0.71	0.10	$4.93 \cdot 10^{-4}$	-21.6
Z Cha	0.84	0.125	$3.11 \cdot 10^{-4}$	-21.5
V 436 Cen	0.7	0.17	$3.70 \cdot 10^{-4}$	-21.6

Sorgenti stellari di onde gravitazionali rilevabili con LISA

Sorgenti rilevabili con LISA: U Gem

U Geminorum è un sistema binario formato da una nana bianca di massa $m_1 = 1.26 M_{\odot}$ e da una stella rossa di massa $m_2 = 0.57 M_{\odot}$. Le due stelle ruotano con un periodo di rotazione di 4h e 12 m e distano da 52 parsec (170 anni luce) a 112 parsec (370 anni luce). La nana bianca assorbe continuamente getti di materia dalla compagna durante la rotazione.

In base al calcolo elaborato con la teoria della relatività generale Il moto delle due stelle genera un'onda gravitazionale di frequenza 1.31×10^{-4} Hz.

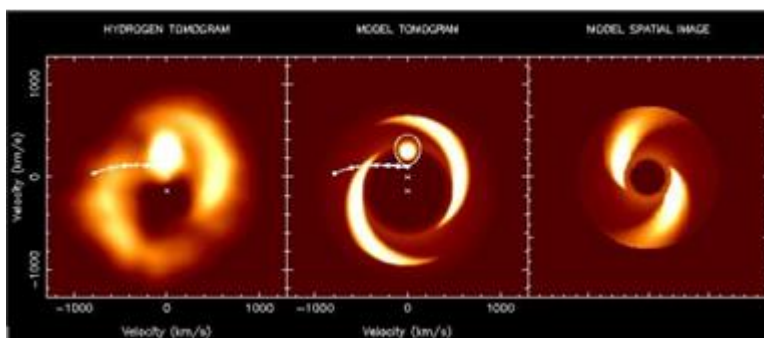


Simulazione del sistema U Geminorum

Sorgenti rilevabili con LISA: IP Peg

IP Pegasi è un sistema binario formato da una nana bianca di massa $m_1 = 1.15 M_{\odot}$ e da una stella rossa di massa $m_2 = 0.67 M_{\odot}$. Esse distano 162 anni luce dalla Terra. Le due stelle ruotano con un periodo di rotazione di 228 m e rappresentano una variabile cataclismica. Come i U Gemiorum, la nana bianca assorbe continuamente getti di materia dalla compagna in un disco di accrescimento, cioè in una forma a spirale creata dal campo gravitazionale tra le due stelle.

In base al calcolo elaborato con la teoria della relatività generale Il moto delle due stelle genera un'onda gravitazionale di frequenza 1.46×10^{-4} Hz.



Simulazione del disco di accrescimento in IP Pegasi

I Quasar

I QUASAR (QUASI Stellar radio sources) sono potentissime radiosorgenti di dimensione apparente puntiforme (da cui l'appellativo quasi stellar) con uno spostamento doppler delle righe verso il rosso (redshift) molto elevato dovuto alla loro grande velocità di allontanamento, che, in base alla legge di Hubble, ($v = H_0 R$ con H_0 costante di Hubble = 67.15 km/sMpc) pone questi oggetti ai confini dell'universo. Oggi sono stati scoperti quasar con redshift $z > 7$, cui corrispondono distanze di oltre 13 miliardi di anni luce. Ciò comporta anche che tali oggetti sono osservati ai primordi dell'evoluzione dell'universo.

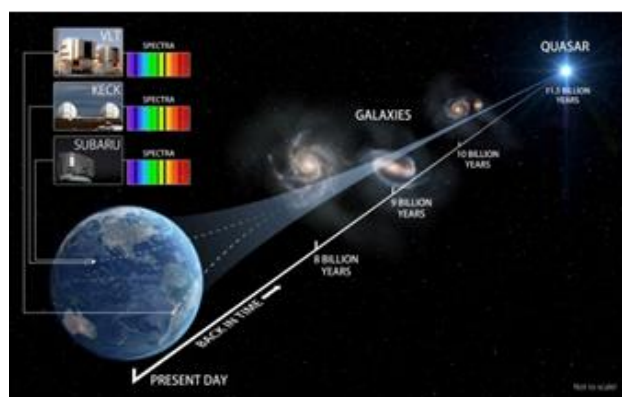
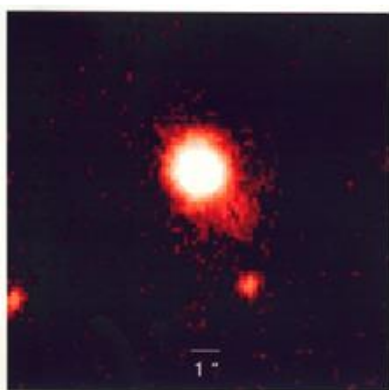
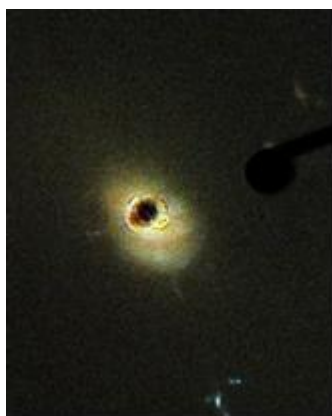


Immagine di un quasar e gerarchie delle distanze dalla terra di oggetti nell'universo

I QUASAR sorgenti di onde gravitazionali

La luminosità così elevata dei quasar (si pensi che il quasar 3c273, con una luminosità assoluta più di 100 milioni di volte quella solare se fosse posto a 32 anni luce dalla Terra, illuminerebbe il cielo quanto il Sole), si ritiene generata da gas e polveri di materiale assorbito in un disco di accrescimento da un buco nero supermassiccio. Molti ricercatori fanno corrispondere il quasar col buco nero supermassiccio che lo costituisce.

I quasar, quindi, sono sorgenti di enormi onde gravitazionali nello spazio-tempo



Il quasar 3c273, distante 3×10^9 anni luce dalla Terra

IL QUASAR IJ1120+0641

Il quasar più lontano conosciuto, IJ1120+0641 ha un redshift di 7.085. Esso dista 12.9 miliardi di anni luce dalla Terra.

Questo quasar si formò 770 milioni di anni dopo il Big Bang, circa 13 miliardi di anni fa. Studi recenti mostrano che la sua luminosità intrinseca è generata da un buco nero supermassiccio presente al suo interno, di massa circa 6.3×10^{13} volte quella del Sole. Un buco nero così massiccio in una età vicina al Big Bang indica che questo buco nero si è formato mediante la fusione di più buchi neri primordiali formatisi dopo il Big Bang.

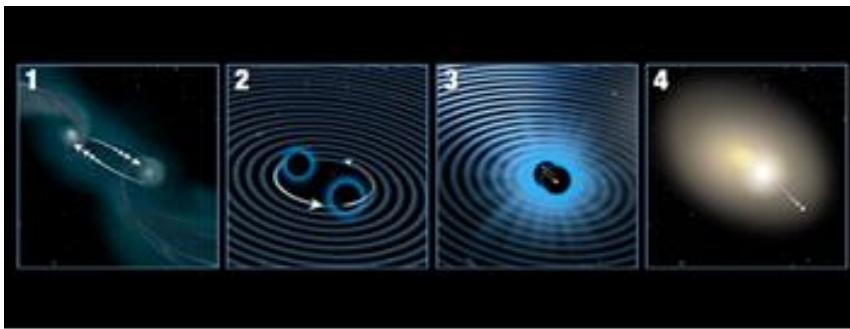


Il quasar ULAS J1120+0641, distante oltre 13 miliardi di anni luce dalla Terra.

Il buco nero del quasar 3C 186

Grazie alle osservazioni del satellite Hubble è stata rilevata dalla radiosorgente extragalattica 3C 186 ad una velocità di oltre 7.5×10^6 km/h di un quasar costituito da un buco nero supermassiccio di oltre 100 milioni di masse solari. Secondo alcuni ricercatori, questa elevata velocità, che permetterà al buco nero di sfuggire alla galassia madre, è stata generata dall'energia fornita da un'onda gravitazionale di enormi proporzioni, sviluppatasi durante la fusione dei due buchi neri che hanno formato il buco nero supermassiccio.

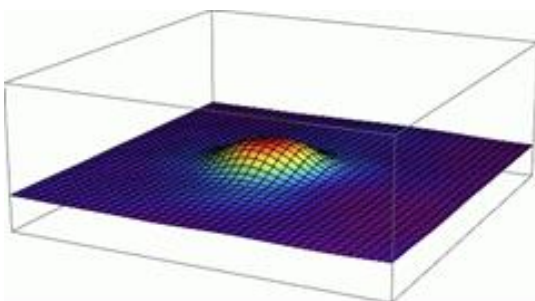
Nel loro articolo essi mostrano la simulazione di questo evento (M. Chiaberge et al., The puzzling case of the radio-loud QSO 3C 186: a gravitational wave recoiling black hole in a young radio source? *Astronomy & Astrophysics manuscript no. 3c186_edited_final*, 2017).



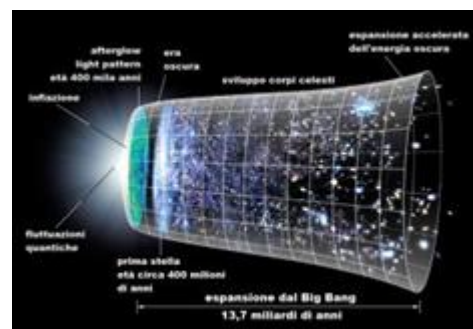
Simulazione dell'espulsione di un buco nero supermassiccio in 3c186

Verso il futuro: Big Bang e oscilloni

Secondo uno studio effettuato di recente solo 10^{-35} secondi dopo il Big Bang l'universo si espanse con una forte accelerazione (fenomeno noto come *inflazione*) fino ad avere una dimensione sferica di un raggio di qualche centimetro. Le oscillazioni delle particelle create in quell'istante, dette *inflaton*, hanno provocato onde gravitazionali gli *oscilloni*, che potrebbero essere rilevate con opportune frequenze. Lo studio è stato pubblicato su Physical Review Letters (Antusch et al., 2017); i suoi risultati predicono la rilevazione degli oscilloni da parte dei rilevatori futuri di onde gravitazionali.



Simulazione di un oscillone



L'universo dall'inflazione al presente

Bibliografia

- Abbott B. P. (2016): “*LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*”, Physical Review Letter 116, 061102 (2016), DOI:10.1103/PhysRevLett.116.061102.
- Antusch S., Cefalà F, and Orani S. (2017): “*Gravitational Waves from Oscillons after Inflation*”, Physical Review Letters 118, 011303, 5 pp. DOI: /10.1103/PhysRevLett.118.011303.
- Aufmuth P. (2018): “*eLISA - Hunting waves in space*” - Einstein Online Vol. 04 (2010), 2018
- Chiaberge M. et al. (2017): “*The puzzling case of the radio-loud QSO 3C 186: a gravitational wave recoiling black hole in a young radio source?*” Astronomy & Astrophysics manuscript no. 3c186_edited_final, 16 pp., DOI: 10.1051/0004-6361/201629522.
- Ciarlaniello S.,. (2017): “*Onde gravitazionali. Una finestra sul lato oscuro dell'universo*” - Cento autori editore, 189 pp., ISBN: 78-8868721343.
- Ferrari A.. (2011): “*Stelle, galassie e universo: fondamenti di Astrofisica*” – Springer Verlag, 574 pp. ISBN: 978-8847018327.
- Gasperini M. (2012): “*Lezioni di cosmologia teorica*” – Springer Verlag, 250 pp. ISBN: 978-8847024830.
- LIGO Caltech. (2016): “*What are Gravitational Waves?*” Available online at: <https://www.ligo.caltech.edu/page/what-are-gw>
- Taylor J. H., Weisberg J. M. (1982): “*A new test of general relativity: Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16*”, Astrophysical Journal 253, 908,--920 DOI: 10.1086/159690.

La Fisica atomica, la Meccanica Quantistica e l’uso del tool MS Excel per l’analisi dei dati e la determinazione di soluzioni numeriche a problemi matematici

Ferdinando Di Martino¹

¹Dipartimento di Architettura
Università degli Studi di Napoli Federico II
fdimarti@unina.it

Modello di Bohr dell’atomo di idrogeno e nascita della meccanica quantistica

Sommario. – *Questo studio è focalizzato sull’analisi delle motivazioni che hanno condotto alla nascita nel ventesimo secolo della Meccanica Quantistica con la produzione di modelli sempre più complessi dell’atomo di idrogeno, fino ai modelli di Bohr e di Bohr-Sommerfeld. Sono, infine, esplorati i concetti base della moderna meccanica quantistica con cenni a scoperte e teorie recenti, quali il bosone di Higgs e la teoria delle stringhe.*

Sir Joseph John Thompson e gli elettroni

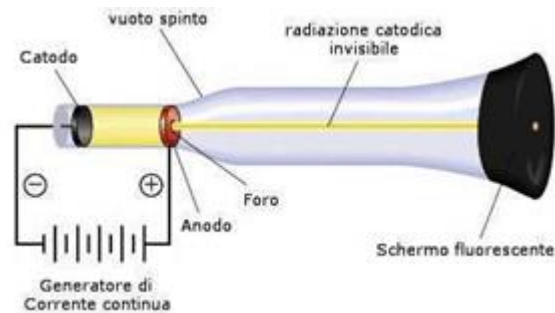
Il fisico inglese Joseph John Thompson, professore di fisica a Cambridge, nel 1897 fu il primo a definire l’elettrone, da lui inizialmente chiamato *corpuscolo*, come una particella subatomica con una quantità di carica. Per questa scoperta vinse il nobel della fisica nel 1906.

Thompson comprese che il fascio di radiazione catodica prodotto in un tubo a raggi catodici di Faraday fosse formato da particelle subatomiche, i corpuscoli.

Un tubo a raggi catodici, inventato da Faraday nel 1838, e perfezionato successivamente da Crookes, è un tubo ad area rarefatta collegato ad un generatore di corrente elettrica continua. Al passaggio di corrente, per surriscaldamento di un filamento metallico, un fascio di particelle è prodotto dal catodo verso l’anodo; esso viene fatto passare attraverso un foro verso uno schermo fluorescente. Thompson arguì che quel fascio era composto da particelle subatomiche, i corpuscoli, ovvero, gli elettroni.



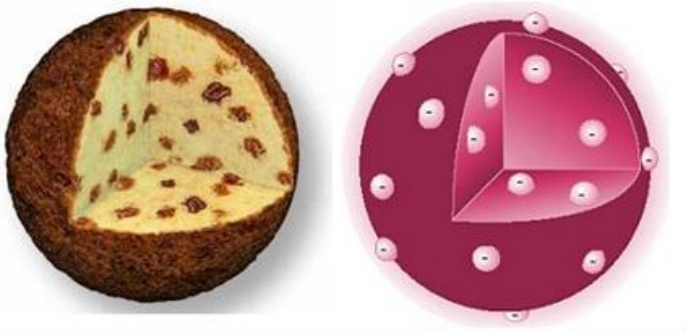
Sir Joseph John Thompson.



Il tubo a raggi catodici

Modello atomico di Thompson

Thompson nel 1904 propose un modello di atomo detto *a panettone* (*plum padding model*), in cui particelle di carica negativa erano sparse, come l'uvetta in un panettone, in una superficie sferica composta da cariche positive distribuite in modo continuo in tutta la sfera. L'atomo, così composto, era elettricamente neutro.



Il modello a panettone di Thompson

Le cariche negative (i corpuscoli o elettroni) potevano muoversi liberamente nell'atomo. La stabilità delle orbite degli elettroni era dovuta al fatto che più l'elettrone si allontanava verso le zone esterne dell'atomo maggiore era la carica positiva all'interno dell'orbita e, per la legge di Gauss, maggiore era il campo elettrico prodotto sull'elettrone dalle cariche positive interne alla sua orbita.

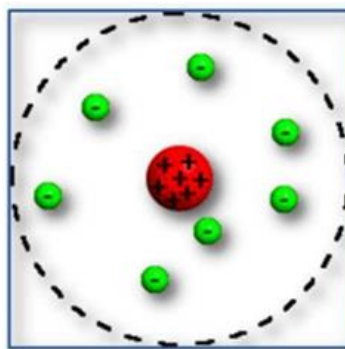
Se, infatti, l'elettrone si trova a una distanza r dal centro dell'atomo, supponendo la carica positiva distribuita uniformemente con densità per unità di volume ρ , il campo elettrico sull'elettrone sarà: $E(r) = -q/(4\pi r^2 \epsilon_0) = -\rho r/3\epsilon_0$. Quindi più distante è l'elettrone maggiore è il campo elettrico che lo attrae verso il centro.

L'esperimento di Rutheford. Abbandono del modello atomico di Thompson

Nel 1909 un discepolo di Thompson, Ernst Rutheford, insieme con Geiger e Marsden, compì un esperimento per provare la validità del modello atomico di Thompson.



Ernest Rutheford

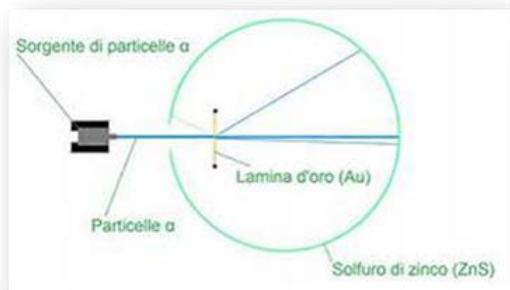


Modello atomico ipotizzato da Rutheford

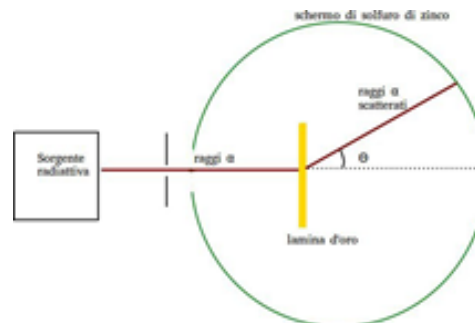
Nell'esperimento un fascio di particelle alfa, nuclei di elio ${}^4\text{He}$ formati da due protoni e due neutroni, viene collimato verso una lamina d'oro sottile di spessore circa pari a $1\text{ }\mu\text{m}$.

Attorno alla lamina è posto uno schermo fluorescente di solfuro di zinco in modo da rilevare gli angoli in cui le particelle alfa sono deflesse a causa dell'urto disordinato (scattering) con la lamina.

Secondo il modello di Thompson le particelle alfa dovrebbero essere deflesse per scattering multiplo (urti diversi con più particelle) mediamente di un angolo molto piccolo, circa pari a 1° . La probabilità di un back scattering (urto all'indietro con angolo di 180°) è infinitesima, circa $\exp(-180^2)$.



L'esperimento di Rutherford, Geiger e Marsden



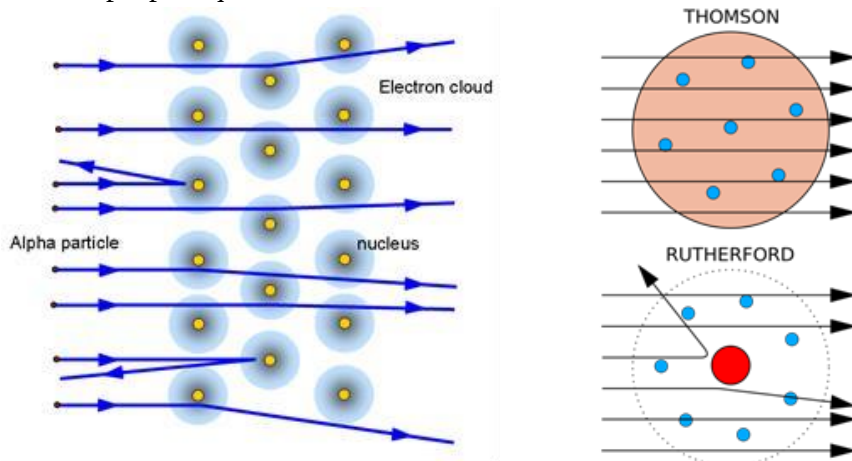
Rilevazione dell'angolo di scattering

L'esperimento di Rutheford. Abbandono del modello atomico di Thompson

Nell'esperimento di Rutheford, invece, la frequenza di particelle α deflesse per back scattering (angolo di 180°) era di 1 ogni 8000, un valore molto più elevato di $\exp(-180^2)$.

Rutheford comprese che per permettere un urto di back scattering è necessaria un'energia più elevata, producibile se tutta la carica positiva fosse concentrata in un nucleo con un raggio di circa $4.6 \times 10^{-4}\text{ A}^\circ$, cioè un decimillesimo rispetto al raggio medio dell'atomo d'oro di 1 A° .

Egli mostrò che i risultati dell'esperimento si spiegavano soltanto prendendo in considerazione un modello di atomo in cui tutta la carica positiva è concentrata in una zona centrale di raggio pari a 10^{-4} volte il raggio medio dell'atomo; in questo caso la frequenza di particelle α deflesse per back scattering a causa degli urti con il nucleo sarebbe proprio quella osservata.



Il back scattering rilevato nell'esperimento. Ipotesi di Rutherford per motivare il back scattering

Modello di Rutherford dell'atomo di idrogeno

Rutherford pubblicò un lavoro (*E. Rutherford, the Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom, in Philosophical Magazine, Series 6, vol. 21, 1911, pp. 669–688*) in cui mostrò che il motivo 10^{-4} di tutte le particelle alfa venivano deflesse con angolo maggiore di 90° era il fatto che, a differenza delle altre particelle, che subivano leggere deviazioni continuando il loro cammino quasi lineare, queste particelle colpivano i nuclei degli atomi d'oro subendo uno scattering elevato ad opera delle forze elettriche generate da tutte le cariche positive concentrate in un nucleo di raggio circa pari a 10^{-4} volte il raggio dell'atomo stesso.

Il modello a panettone di Thompson era quindi inadatto a descrivere un atomo. Le cariche positive non sono diffuse con continuità in tutto il volume atomico, ma sono racchiuse in un nucleo di raggio circa diecimila volte minore di quello dell'intero atomo.

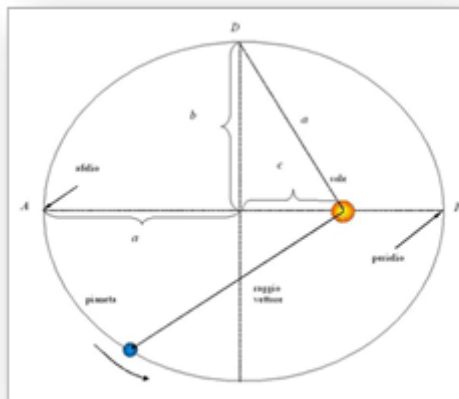
In conseguenza dei risultati ottenuti, Ernst Rutherford propose un nuovo modello atomico che potesse accordarsi con i risultati del suo esperimento.

Il modello dell'atomo di Rutherford è identico a quello di un sistema planetario e spiega la deflessione con angolo anche maggiore di 90° di alcune particelle alfa nell'esperimento.

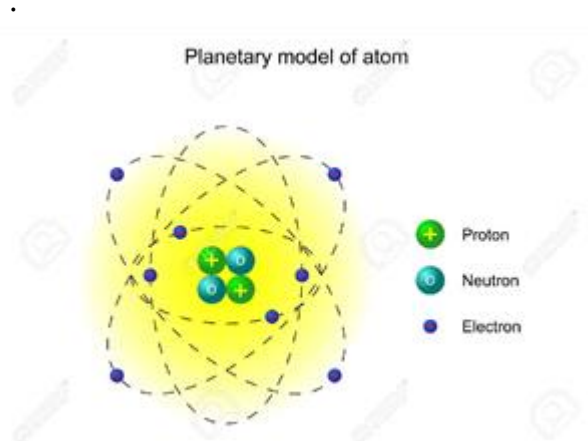
Le orbite compiute dai pianeti sono delle ellissi di cui il Sole orbita uno dei due fuochi (1° legge di Keplero). L'eccentricità dell'orbita di un pianeta ($e=c/a$ con c distanza dall'origine dei due fuochi e a asse maggiore) è generalmente molto piccola (per la Terra $e = 0.0167$), esse sono approssimabili ad orbite circolari con centro nel Sole.

L'afelio e il perelio (le distanze lungo l'asse maggiore più lontana e più vicina al Sole) sono molto simili.

Rutheford ipotizzò che l'elettrone compie una orbita molto simile attorno al nucleo dell'atomo.



Orbita ellittica planetaria



Moto dell'elettrone nel modello di Rutheford

Consideriamo l'atomo di idrogeno in stato stazionario in cui il nucleo è formato da un protone di massa M attorno a cui gira, compiendo un moto ellittico, un elettrone di massa m ad una distanza r pari a quella dell'orbita più interna (raggio di Bhor).

Poiché $M \approx 10^4 m$ allora l'ellisse è approssimabile ad una circonferenza centrata nel nucleo e il moto dell'elettrone è approssimabile a un moto circolare con forza centripeta di intensità:

$$F = ma = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Dove $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ è la costante dielettrica nel vuoto.

L'energia cinetica dell'elettrone in moto circolare intorno al nucleo è:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J}$$

Atomo di idrogeno ^1_1H

M = massa protone = $1.67262 \times 10^{-27} \text{ kg}$

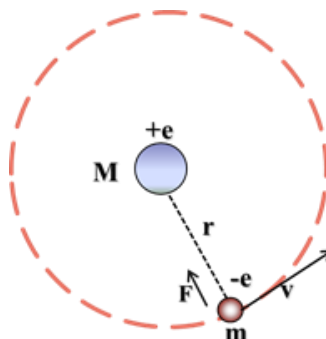
m = massa elettrone = $9.10938 \times 10^{-31} \text{ kg}$

e = $1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$

Forza di Coulomb

$$F = ma = -e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$$

Dove $r \approx 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ è approssimativamente la distanza tra protone e elettrone (raggio di Bhor)



Parametri caratteristici dell'atomo di idrogeno nucleo

Moto dell'elettrone intorno al

Modello di Rutheford dell'atomo di idrogeno - perdita di energia di una carica accelerata

Nel 1897 Sir Joseph Larmor verificò che una carica elettrica in movimento, se accelerata, irradia energia sotto forma di radiazione elettromagnetica. Nel vuoto l'energia al secondo dissipata da una carica q accelerata con accelerazione a è:

$$P = Kq^2a^2 \quad \text{con} \quad K = \frac{1}{6\pi\epsilon_0c^3} = 2.2 \times 10^{-16} \text{ s/m}$$



Sir Joseph Larmor

Approssimando a circolare il moto dell'elettrone nell'atomo di idrogeno attorno al nucleo, la sua accelerazione sarà l'accelerazione centripeta:

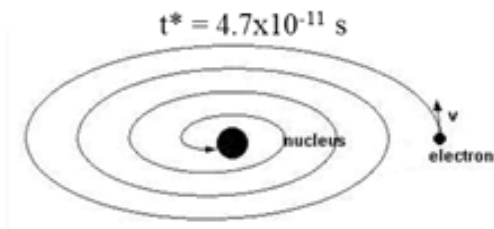
$$a = F/m = v^2/r = -e^2/4\pi m\epsilon_0 r^2$$

Allora la potenza dissipata dall'elettrone nel suo moto attorno al nucleo sarà:

$$P = Ke^2a^2 = \frac{Ke^4}{4\pi m\epsilon_0 r^2} = 4.6 \times 10^{-8} \text{ W}$$

Poiché l'energia iniziale dell'elettrone è $T = 2.18 \times 10^{-18} \text{ J}$, allora, dopo un tempo $t^* = T/P = 4.7 \times 10^{-11} \text{ s}$ l'elettrone perderà tutta la sua energia cadendo nel nucleo dopo aver percorso una traiettoria a spirale.

Quindi, il modello planetario di Rutheford è inadatto a spiegare la struttura dell'atomo di idrogeno. L'elettrone in meno di 0.05 ns cadrebbe nel nucleo, perdendo tutta la sua energia e l'atomo di idrogeno sarebbe instabile...



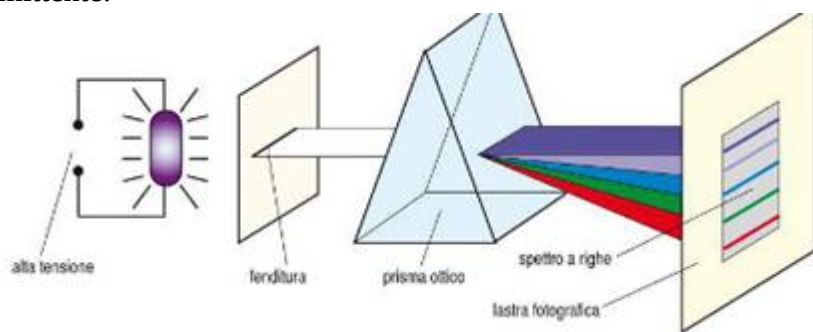
Collasso dell'elettrone sul nucleo

Modello di Rutheford dell'atomo di idrogeno - gli spettri di emissione

Le evoluzioni nel campo della spettroscopia avevano permesso di studiare la distribuzione dell'intensità di luce proveniente dalla sorgente al variare della lunghezza d'onda.

In uno spettroscopio la luce proveniente dalla sorgente viene fatta attraversare una fenditura e collimata verso un dispersore di radiazione elettromagnetica, ad esempio un prisma a dispersione o un reticolo a diffrazione, che disperdono con angolazione diversa la radiazione di diversa lunghezza d'onda.

La radiazione così dispersa raggiunge un rivelatore (ad esempio una lastra fotografica o un rivelatore a diodo), che ne rileva lo spettro, ovvero la distribuzione dell'intensità della radiazione elettromagnetica con la lunghezza d'onda. Conoscendo l'elemento chimico di cui è composta la sorgente (ad esempio, una lampada al sodio), si possono associare le righe prodotte nello spettro a quelle generate da quell'elemento chimico emittente.

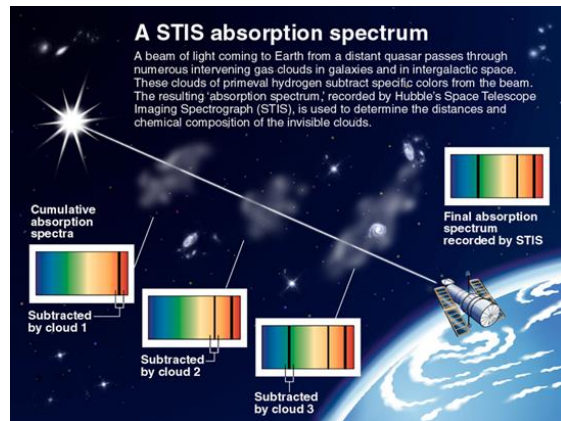
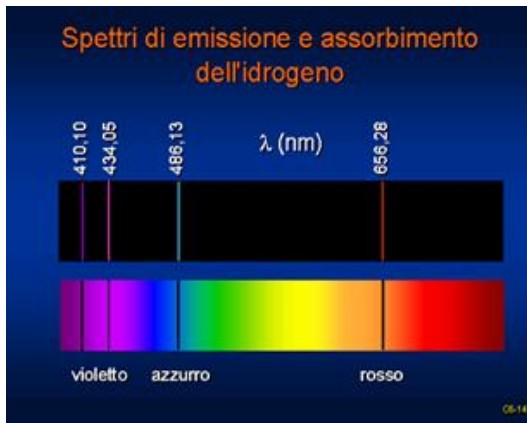


Semplice spettroscopio a prisma

Modello di Rutheford dell'atomo di idrogeno - lo spettro dell'idrogeno

Quindi, riscaldando una sorgente gassosa composta da molecole d'idrogeno H_2 è possibile studiare le righe prodotte dalla radiazione elettromagnetica emessa dal gas. Allo stesso modo frapponendo il gas ad una sorgente, è possibile studiarne lo spettro di assorbimento, che restituisce come righe scure quelle relative alla radiazione elettromagnetica di una certa lunghezza d'onda che è assorbita dal gas.

Ad esempio il telescopio Hubble misura spettri di assorbimento prodotti dalla presenza di nubi di idrogeno molecolare che si sovrappone a luce stellare.

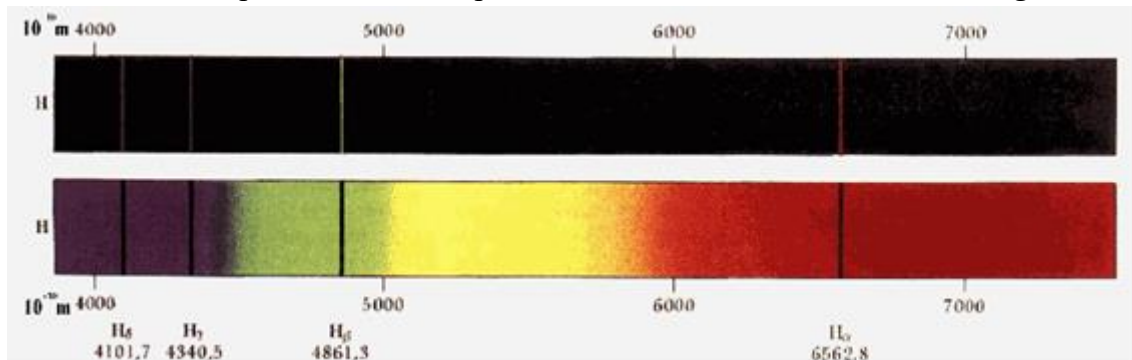


Spettri di emissione e assorbimento nell'atomo di idrogeno e spettri di assorbimento ottenuto dal satellite Hubble

Modello di Rutheford dell'atomo di idrogeno - righe di emissione discrete

L'elettrone dell'atomo di idrogeno, perdendo energia dopo essere stato eccitato, dovrebbe emettere radiazione elettromagnetica, producendo uno spettro continuo di radiazione, in relazione alla perdita continua di energia. Ma questa ipotesi è contraddetta dalle osservazioni in cui gli elettroni eccitati negli atomi emettono radiazioni producendo uno spettro discreto.

Infatti, già dalla seconda metà dell'800 numerosi esperimenti avevano evidenziato nella banda visibile la presenza di linee spettrali discrete emesse dall'atomo di idrogeno.



Righe di emissione e assorbimento nel visibile dell'atomo di idrogeno

Righe di emissione dell'atomo di idrogeno - Serie di Balmer

Nel 1884 Balmer aveva proposto la seguente formula empirica per la lunghezza d'onda espressa in nanometri emessa dall'elettrone:

$$\lambda = 3645.6 / (1 - 4/n^2) \quad \text{nm} \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 3$$

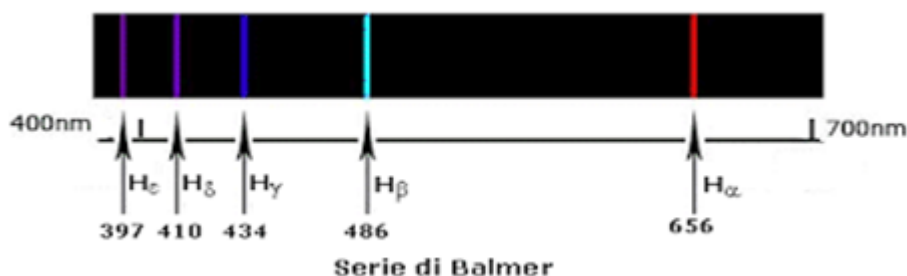
Questa formula si accordava bene con i risultati delle osservazioni delle righe emesse nella luce visibile (serie di Balmer).

Le righe sono identificate da lettere dell'alfabeto greco, cosicché la riga con $n = 3$ $H\alpha$, con $n = 4$ $H\beta$, con $n = 5$ $H\gamma$, con $n = 6$ $H\delta$, e così via. La riga $H\alpha$, nel rosso visibile, è

riscontrabile nella maggior parte degli oggetti astronomici dell'universo. Per $n = 8$ si ottengono righe che ricadono nell'ultravioletto. La riga nell'ultravioletto a 364.6 nm (limite di Balmer) si ottiene per $n \rightarrow \infty$.

n	λ (in Angstrom = 10^{-10} m)	λ (in nm = 10^{-9} m)	Riga
3	656.28	656.28	H α
4	4860.8	486.08	H β
5	4340.0	434.00	H γ
6	4101.7	410.17	H δ

Le prime quattro righe della serie di Balmer



Le righe della serie di Balmer

Righe di emissione dell'atomo di idrogeno – formula di Rydberg e Ritz

Successivamente Rydbergh e Ritz, generalizzarono questa formula per spiegare gli spettri di altri atomi. Essi ottennero la formula

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

dove $1/\lambda$ è l'inverso della lunghezza d'onda, detto numero d'onda k , R è chiamata costante di Rydbergh e vale $R = 1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ e n_1 e n_2 numeri naturali con $n_1 < n_2$.

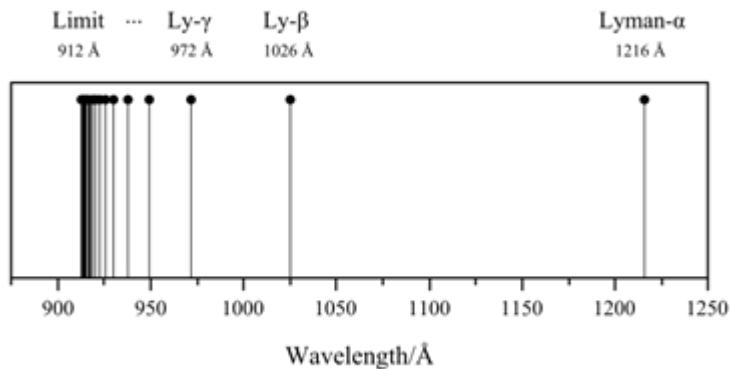
Per $n_1 = 2$ si ottiene la serie di Balmer. Essa, nella formula di Rydberg e Ritz, produce le righe spettrali di Balmer con lunghezze d'onda ottenute da $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$

con questa legge fu possibile completare lo spettro osservato da Balmer per l'atomo di idrogeno e si riescono ad ottenere anche ulteriori righe, quali quelle della serie di Lyman ($n_1=1$) nell'ultravioletto e di Paschen ($n_1=3$) nell'infrarosso.

Righe di emissione dell'atomo di idrogeno - Serie di Lyman

La *serie di Lyman* consiste in una sequenza di righe spettrali emesse dall'atomo di idrogeno nella regione dell'ultravioletto. Esse sono causate dalla transizione da livelli più alti (numero quantico principale $n \geq 2$) al livello fondamentale ($n=1$) cioè il livello energetico più basso per gli elettroni. Anche per la serie di Lyman le righe sono identificate con la sequenza delle lettere dell'alfabeto greco, cosicché la transizione da $n = 2$ a $n = 1$ viene chiamata riga Lyman α , da 3 a 1 Lyman β , da 4 a 1 la Lyman γ . Più è

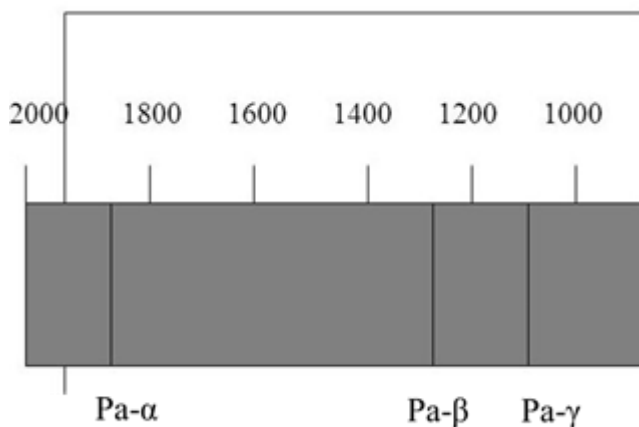
elevata la transizione, ovvero maggiore è il salto di livello energetico, maggiore è l'energia emessa dall'elettrone, e maggiore è la frequenza (minore la lunghezza d'onda) della riga spettrale corrispondente.



Le righe della serie di Lyman

Righe di emissione dell'atomo di idrogeno - Serie di Paschen

La serie di Paschen è una sequenza di righe spettrali di emissione dell'atomo di idrogeno nell'infrarosso causate dalla transizione dell'elettrone da livelli energetici con numero quantico principale da $n \geq 4$ al livello energetico con numero quantico principale $n = 3$. Anche in questo caso le righe sono codificate usando lettere dell'alfabeto greco; così la transizione da $n = 4$ a $n = 3$ è chiamata Paschen- α (Pa- α), da 5 a 3 Paschen- β (Pa- β), da 6 a 3 Paschen- γ (Pa- γ) e così via.



Le righe della serie di Paschen

Spettro atomo di idrogeno

La formula generalizzata di Rydbergh e Ritz:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

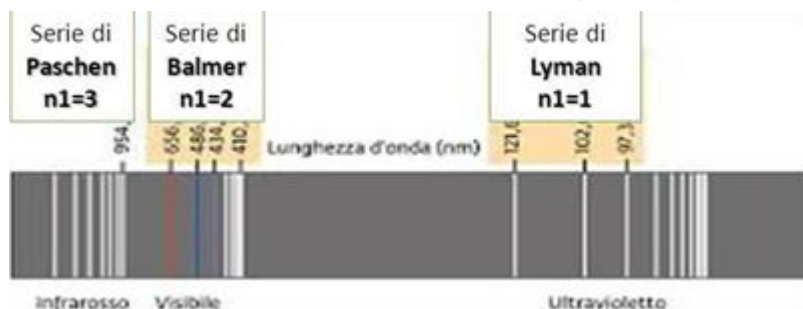
spiega le righe di emissione dell'atomo di idrogeno come dovute a salti di livelli energetici dell'elettrone, dal livello con numero quantico fondamentale n_2 al livello inferiore con numero quantico fondamentale $n_1 < n_2$.

Otteniamo:

Righe della serie di Lyman ($n_1 = 1$) $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ Ultravioletto

Righe della serie di Balmer ($n_1 = 2$) $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ Visibile

Righe della serie di Paschen ($n_1 = 3$) $\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ Infrarosso



Le tre serie spettrali nello spettro di emissione dell'atomo di idrogeno

Bohr e l'abbandono del modello planetario di Rutheford

Quindi, il modello di Rutheford non può caratterizzare la struttura dell'atomo di idrogeno, in quanto:

l'elettrone in moto periodico attorno al nucleo perderebbe energia collassando nel nucleo stesso in meno di 0.05 ns.

lo spettro di emissione dell'atomo di idrogeno non è continuo, ma mostra righe di emissione discrete.

Fu il fisico danese Niels Bohr a comprendere perché lo spettro di emissione dell'atomo di idrogeno fosse discreto.



Niels Bohr



Niels Bohr ed Albert Einstein
a Leida, in Olanda

Per spiegare i motivi del perché fosse discreto lo spettro di emissione dell'atomo di idrogeno Bohr ricorse al concetto di quantizzazione dell'energia introdotto da Planck. Nel 1900 Planck ipotizzò che l'emissione e l'assorbimento di energia da parte degli atomi sotto forma di radiazioni elettromagnetiche avvenisse in modalità discreta e non continua, come predice, invece, l'elettrodinamica classica. Questo concetto giustificerebbe lo spettro discreto di emissione dell'atomo di idrogeno.

La legge di Planck e i quanti di energia

Nel 1901 il fisico tedesco Max Karl Planck ipotizzò che l'emissione di energia elettromagnetica da parte di un elettrone oscillante in un atomo avvenisse in forma discreta mediante pacchetti di energia detti **quanti**.

La relazione tra l'energia elettromagnetica emessa da un elettrone sotto forma di quanto e la frequenza di emissione presente nella riga spettrale è data da:

$$E = h \nu$$

Dove E è l'energia emessa, ν la frequenza della radiazione emessa e h una costante della costante di Planck.

Il valore di tale costante nel SI è $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$

Planck ottenne nel 1918 il premio Nobel per la fisica grazie alla scoperta dei quanti di luce. Egli fu il precursore della fisica atomica quantistica.

La costante di Planck h rappresenta una costante fisica universale, come la velocità della luce.

Planck ipotizzò che l'elettrone in un atomo potesse emettere energia solo come un numero discreto n_q di quanti di radiazione elettromagnetica, di frequenza ν nella forma:

$$E = n_q h \nu \text{ (Postulato di Planck)}$$

Albert Einstein validò l'esattezza dell'ipotesi di Planck fornendo con essa una spiegazione dei risultati dell'effetto fotoelettrico ottenuti con gli esperimenti del fisico tedesco Lenard..



Max Planck



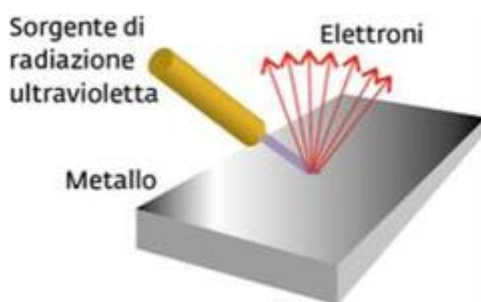
Max Planck con Albert Einstein

L'effetto fotoelettrico

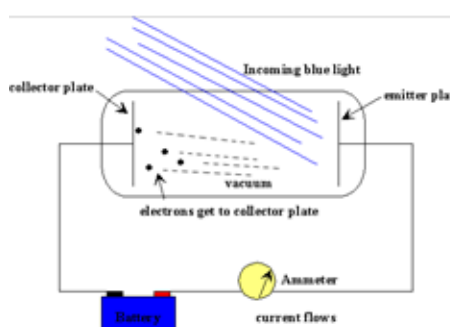
La prova dell'emissione in quanti discreti della radiazione elettromagnetica fu data dall'effetto fotoelettrico, un effetto generato dall'emissione di elettroni da una lamina metallica bombardata da radiazione elettromagnetica nell'ultravioletto.

Gli elettroni sono emessi soltanto se la frequenza della radiazione è superiore ad una soglia ν_m che dipende dal tipo di metallo; radiazione con frequenza al di sotto di questa soglia non produce alcuna emissione di elettroni dal metallo; oltre tale soglia, maggiore è la frequenza, maggiore è il numero di elettroni emessi.

Nell'esperimento gli elettroni espulsi dalla lamina sono raccolti da un collettore metallico e la loro intensità viene misurata mediante un amperometro posto nel circuito elettrico che comprende le lamine emettitore e collettore.



Effetto Fotoelettrico



Esperimento per verificare l'effetto fotoelettrico

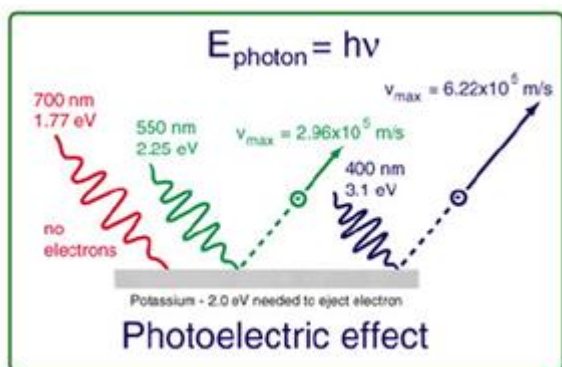
Spiegazione dell'effetto fotoelettrico

Per spiegare questi risultati Albert Einstein propose che la radiazione elettromagnetica fosse non solo di natura ondulatoria, ma anche corpuscolare, ovvero fosse costituita da

particelle, i **fotoni**. L'energia di ogni fotone è collegata alla sua frequenza della radiazione dalla formula: $E = h \nu$.

L'elettrone è espulso dal metallo soltanto se l'energia del fotone incidente, ovvero la sua frequenza, supera una specifica soglia. L'energia dell'elettrone uscente è uguale a quella del fotone incidente meno l'energia di legame dell'elettrone. Ciò spiega perché gli elettroni sono espulsi da una lamina di potassio se la frequenza della radiazione incidente è nell'ultravioletto, in misura sempre minore, nel blu e nel verde, ma non nel rosso visibile, la cui frequenza fornisce un'energia $h\nu$ di 1.77 eV inferiore a quella di legame degli elettroni di 2 eV.

La spiegazione dell'effetto fotoelettrico avvalorava l'ipotesi di Planck. I quanti di Planck sono i fotoni che sono emessi ad una specifica frequenza dall'elettrone nelle transizioni energetiche nell'atomo.



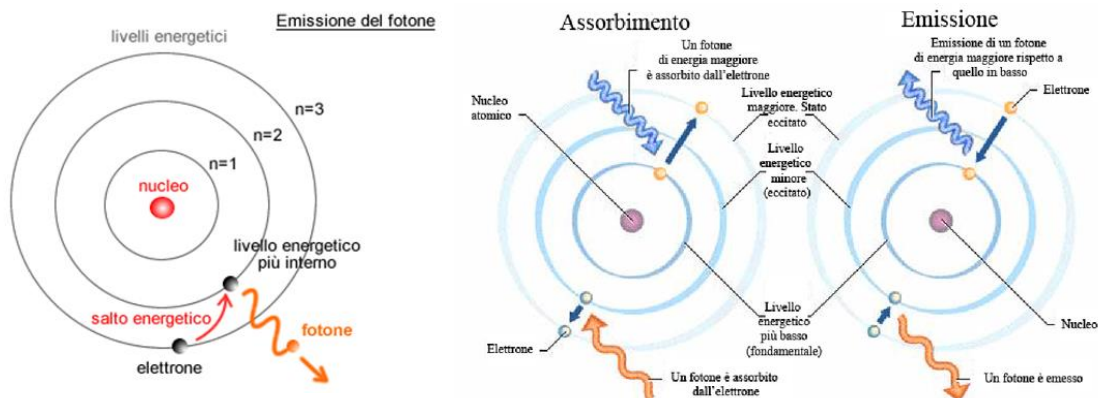
Emissione di elettroni dalla lamina a partire da una soglia energetica del fotone incidente

Modello atomico di Bohr – quantizzazione livelli di energia

La spiegazione dell'effetto fotoelettrico fruttò ad Einstein il premio Nobel per la fisica nel 1921. I fisici dei primi del '900 compresero che la presenza di righe spettrali discrete nello spettro di emissione di radiazione elettromagnetica da una sorgente era collegato all'ipotesi di Planck e al fatto che l'elettrone non poteva orbitare intorno al nucleo in qualsiasi modo, ma solo su un insieme discreto di orbite cui corrispondevano specifici livelli discreti di energia di legame.

Infatti, se l'elettrone potesse avere qualsiasi livello energetico, allora lo spettro di emissione dovrebbe essere continuo.

Bohr comprese che le righe dello spettro di emissione corrispondevano a lunghezze d'onda di fotoni emessi dall'elettrone nel "salto" da un livello energetico superiore a uno inferiore. A questo salto corrisponde una specifica perdita discreta di energia da parte dell'elettrone pari all'energia $E = h \nu$ del fotone emesso.



Emissione di fotoni e salti tra livelli energetici

Assorbimento e emissione di fotoni

Modello atomico di Bohr – quantizzazione livelli di energia

Bohr propose un modello di atomo di idrogeno in cui l'elettrone si muove su orbite circolari discrete intorno al nucleo, ad energia definita.

Il modello di Bohr si basa sui seguenti postulati:

- 1) L'elettrone in un atomo si muove in un'orbita circolare intorno al nucleo, ma solo alcune orbite discrete sono permesse. Esse sono dette **orbite stazionarie**. L'elettrone in un'orbita stazionaria è stabile e non decade emettendo radiazione elettromagnetica. Ad ogni orbita stazionaria è associato un numero d'ordine e un livello di energia. Il livello energetico con numero quantico $n=1$ è detto **livello energetico fondamentale**.
- 2) Un elettrone in rotazione in una certa orbita stazionaria di livello n_i può effettuare una transizione verso un'orbita stazionaria con livello di energia inferiore n_j emettendo radiazione elettromagnetica di frequenza ν , tale che:

$$E_i - E_j = h \nu$$

con i e j numeri d'ordine delle orbite stazionarie finale e iniziale.

- 3) Il momento angolare dell'elettrone in un'orbita stazionaria con livello energetico n e raggio r è quantizzato e dato dalla formula:

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar$$

Modello atomico di Bohr

Il valore dell'energia totale dell'elettrone in orbita stazionaria è dato da.

$$E = T - U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$$

Con Z numero atomico.

Nella formula v è la velocità dell'elettrone nell'orbita. Il suo valore può essere ottenuto eguagliando la forza centripeta e la forza elettrostatica di Coulomb:

$$F = ma = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Da cui

$$v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 mr}$$

Sostituendo v^2 nell'equazione dell'energia totale si ottiene:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Che è un valore negativo in quanto l'elettrone è legato in orbita intorno al nucleo.

Quindi, dal postulato 2) otteniamo:

$$E_i - E_j = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{r_i} \right) = h\nu$$

con r_i e r_j raggi dell'orbita dello stato finale e dello stato iniziale.

Dal postulato 3)

$$mvr = \frac{nh}{2\pi} = nh$$

Otteniamo:

$$r^2 = \left(\frac{nh}{mv} \right)^2 = \frac{n^2 h^2}{m^2} \frac{4\pi\epsilon_0 mr}{Ze^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 h^2}{Ze^2 m} r$$

Il raggio dell'orbita è quindi dato da:

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 h^2}{mZe^2} = r_0 \frac{n^2}{Z} \quad \text{con} \quad r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{me^2} = 5.3 \times 10^{-11} m = 0.53 \text{ \AA}$$

Il parametro r_0 , detto raggio di Bohr, è il raggio del livello fondamentale dell'atomo di idrogeno ($Z=1$, $n=1$).

Inoltre,

$$E = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} \frac{Z^2}{n^2} = E_0 \frac{Z^2}{n^2}$$

con

$$E_0 = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = -2.18 \times 10^{-18} J = -13.6 eV$$

Il parametro E_0 è l'energia del livello fondamentale dell'atomo di idrogeno ($Z=1$, $n=1$).

La frequenza di una transizione è data da:

$$\nu = \frac{E_i - E_j}{h} = \frac{E_0 Z^2}{h} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

con n_i numero quantico dello stato finale e n_j numero quantico dello stato iniziale.

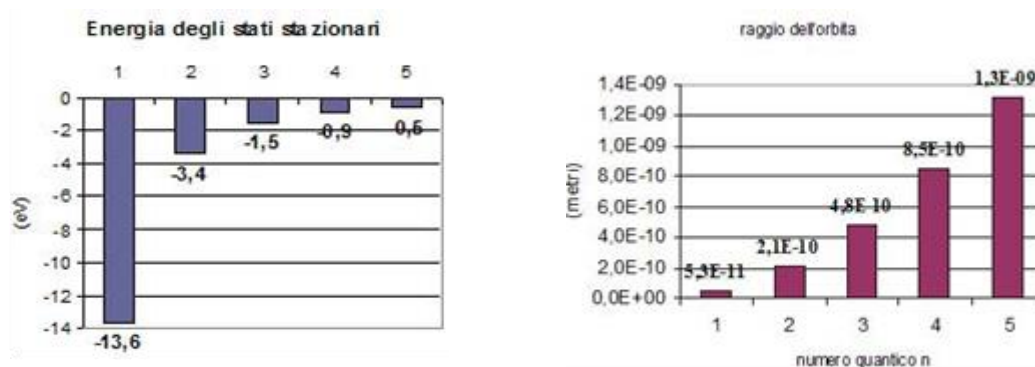
Modello atomico di Bohr – la legge di Planck e l'effetto fotoelettrico

Dunque, il modello di Bohr spiega correttamente le righe di emissione discrete nell'atomo di idrogeno.

Un elettrone eccitato è portato da un livello inferiore in uno stato stazionario n_j al livello energetico superiore n_i per emettere successivamente energia sotto forma di fotoni, tornando al livello energetico inferiore n_j . L'energia è emessa sotto forma di fotoni con frequenza:

$$\nu = \frac{E_i - E_j}{h} = \frac{E_0 Z^2}{h} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Le due figure successive mostrano i valori di energia totale (in eV) e raggio dell'orbita (in metri) per i primi 5 livelli stazionari dell'atomo di idrogeno.



I primi 5 livelli energetici dell'atomo di idrogeno e i rispettivi raggi dell'orbita

Modello atomico di Bohr: spiegazione della formula di Ryberg e Ritz

La formula precedente spiega perfettamente la formula empirica trovata da Ryberg e Ritz.

Infatti, per l'atomo di idrogeno ($Z = 1$), la formula di Bohr è data da:

$$\nu = \frac{E_i - E_j}{h} = \frac{E_0}{h} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

E considerando che $\lambda \nu = c$ (velocità della luce nel vuoto) $\approx 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$, otteniamo:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{E_0}{h} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Da cui:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{ch} \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = R \left(\frac{1}{n_j^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

Con $R = \frac{E_0}{ch}$ = costante di Rydberg = $1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

Il modello di Bohr spiega, quindi, correttamente la formula di Rydberg-Ritz; la costante di Rydberg è data dal livello energetico fondamentale dell'atomo di idrogeno diviso per il prodotto della velocità della luce per la costante di Planck.

La riga Lyman- α nell'ultravioletto prodotta dall'atomo di idrogeno è data dal salto dell'elettrone dall'orbita fondamentale con $n = 1$, all'orbita con livello energetico $n = 2$

Dall'equazione
$$E = E_0 \frac{Z^2}{n^2}$$

per $Z = 1$ otteniamo:

$$E_{n=1} = E_0 = -13.6 \text{ eV}$$

$$E_{n=2} = E_0/n^2 = E_0/4 = -3.4 \text{ eV}$$

La frequenza della radiazione elettromagnetica emessa sarà:

$$\nu = (E_{n=2} - E_{n=1})/h$$

Ponendo $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 4.14 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$

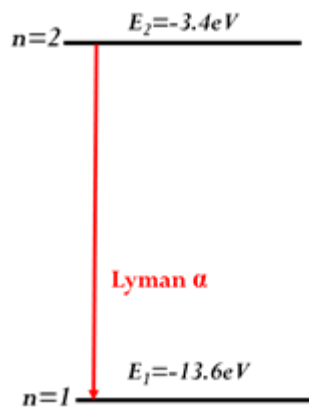
Otteniamo:

$$\nu = (13.6 - 3.4) / 4.14 \times 10^{-15} = 2.46 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

cui corrisponde una lunghezza d'onda:

$$\lambda = c/\nu = 1.216 \times 10^{-7} \text{ m} = 1216 \text{ \AA} = 121.6 \text{ nm.}$$

Dove c = velocità della luce nel vuoto = $3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$



La riga Lyman α dovuta al salto dell'elettrone tra le prime due orbite fondamentali

Il modello atomico di Bohr – Sommerfeld

Il modello atomico di Bohr, pur spiegando la presenza delle righe di emissioni nell'atomo di idrogeno o in atomi idrogenoidi, non riusciva a dimostrare la presenza di righe di emissione in atomi più complessi dell'atomo di idrogeno, a partire da righe di emissione degli atomi di elio.

Il fisico tedesco Arnold Sommerfeld, apportando correzioni relativistiche, modificò il modello di Bohr, introducendo, oltre al numero quantico energetico n , un ulteriore numero quantico l , detto **numero quantico orbitale o azimutale**, che generava orbite ellittiche di diversa eccentricità. Ad un'orbita lecita dell'elettrone, detta **orbitale**, sono assegnati un certo numero quantico energetico n e orbitale l .

Il numero quantico orbitale assume valori tra 0 e $n-1$.

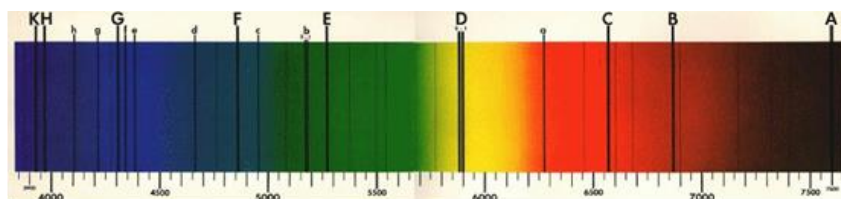
Al primo livello energetico corrisponde un'unica orbita ($n = 1, l = 0$).

Al secondo livello energetico due orbite ($n = 2, l = 0, 1$).

Al terzo livello energetico tre orbite ($n = 3, l = 0, 1, 2$).



Arnold Sommerfeld



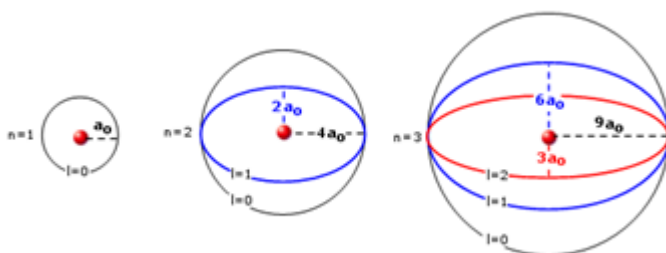
Righe di assorbimento di struttura fine

Il modello atomico di Bohr – Sommerfeld – numero quantico azimutale

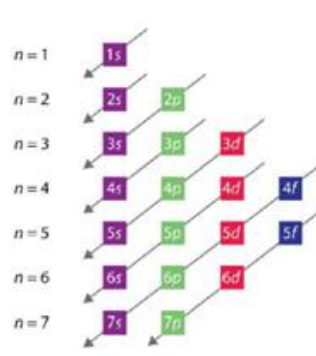
Il modello atomico di Bohr-Sommerfeld riuscì a spiegare la struttura fine delle righe spettrali, ovvero la compresenza nello spettro di emissione di righe molto vicine. Esse erano infatti originate dalla presenza di sottolivelli di diverso livello orbitale per uno stesso livello energetico con piccole differenze energetiche tra i differenti sottolivelli.

Ai valori di $l = 0, 1, 2, 3 \dots$ furono assegnati i seguenti simboli:

$0 = s, 1 = p, 2 = d, 3 = f \dots$



Orbitali nel modello di Bohr-Sommerfeld



Simboli per gli orbitali

Così, l'orbitale 2p corrisponde al livello energetico $n=2$ e al livello azimutale $l = 1$.

Ad un certo numero quantico n corrisponderanno, quindi $l = n$ orbitali possibili. Allora, nel modello di Bohr-Sommerfeld, un elettrone in un atomo può orbitare in n **stati** possibili di un certo livello energetico di numero quantico principale n .

Effetto Zeeman e numero quantico magnetico

Una complicazione al modello di Bohr-Sommerfeld fu fornita dall'effetto Zeeman.

L'effetto Zeeman, scoperto dal fisico olandese Pieter Zeeman, che per tale ragione ricevette il premio Nobel nel 1902, è un fenomeno che consiste nella separazione delle righe spettrali a causa di un campo magnetico esterno accanto alla sorgente. Ogni riga

dello spettro, a causa della presenza del campo magnetico accanto alla sorgente di radiazione, si separa in più righe spettrali vicine.

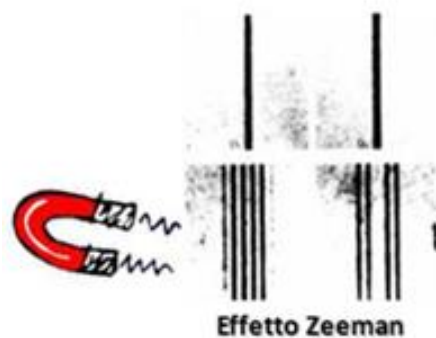
L'effetto Zeeman si spiega con l'interazione degli elettroni nell'atomo con il campo magnetico esterno. L'elettrone, infatti, essendo una carica in movimento, genera un campo magnetico che interagisce con il campo magnetico esterno.

L'interazione col campo magnetico modifica il momento angolare dell'elettrone.

Per spiegare la separazione delle righe spettrali fu introdotto un nuovo numero quantico, il **numero quantico magnetico m** , che assume valori tra $-l$ e l . Per $l = 0$ (orbitale sferico) m assume un unico valore $m = 0$.



Pieter Zeeman



L'effetto Zeeman

Il numero quantico magnetico

Il numero quantico magnetico è correlato alla componente del momento angolare dell'elettrone lungo l'asse di rotazione. Esso è collegato alle possibili orientazioni dell'orbitale nello spazio.

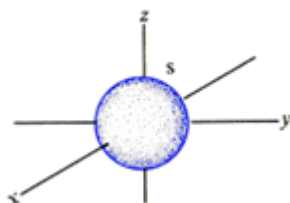
Si ottengono, per uno stesso livello di energia n , differenti orbitali per ogni numero quantico azimutale l .

Per $l = 0$ si ha un unico orbitale ($m = 0$) con simmetria sferica (orbitale s).

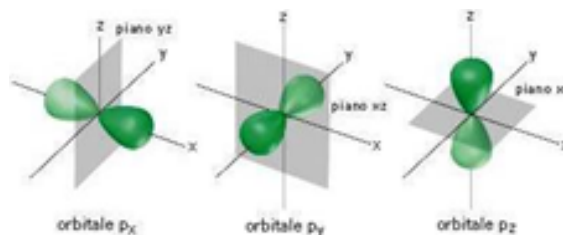
Per $l = 1$ si hanno tre diversi orbitali ($m = -1, m = 0, m = 1$) collegati alle tre differenti orientazioni perpendicolari dell'asse di rotazione di un'orbita a lobo nello spazio (orbitali p).

Per $l = 2$ si hanno 5 diversi orbitali ($m = -2, -1, 0, 1, 2$) (orbitali d) collegate alle 5 diverse orientazioni di un'orbita quadrupla nello spazio.

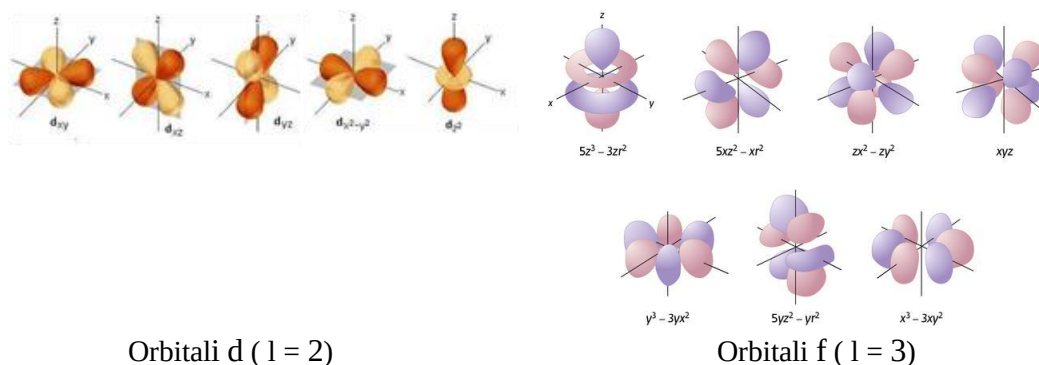
Per $l = 3$ (m da -3 a 3) si hanno 7 diversi orbitali (orbitali f).



Orbitale s ($l = 0$)



Orbitali p ($l = 1$)



L'esperimento di Stern e Gerlach e lo spin

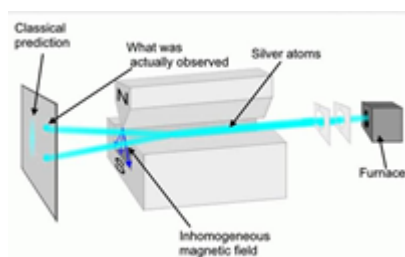
Otto Stern, e Walther Gerlach, due assistenti dell'Istituto di Fisica Teorica della Johann Wolfgang Goethe-Universität di Francoforte, eseguirono nel 1922 un esperimento per verificare il modello di Bohr-Sommerfeld secondo cui la direzione del momento angolare di un atomo di argento è quantizzata.

Nell'esperimento un fascio di atomi di argento, dopo aver attraversato un campo magnetico, veniva inviato su uno schermo.

Secondo la teoria classica, sullo schermo si sarebbe dovuto osservare solo una macchia diffusa.

Stern e Gerlach osservarono invece sullo schermo due zone puntiformi ben separate tra loro e ad una stessa distanza dall'origine dello schermo.

La loro interpretazione fu che ciò fosse dovuto alla quantizzazione del momento magnetico dell'atomo.



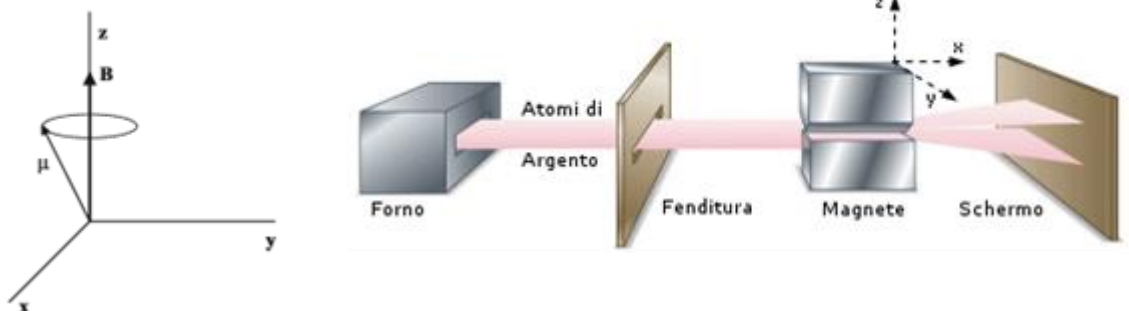
L'esperimento di Stern e Gerlach e le due zone separate prodotte sullo schermo

Se μ è il momento magnetico dell'atomo che attraversa un campo magnetico $\mathbf{B}$ e $\mathbf{L}$ il momento angolare, si ha la relazione $\mu = -e\hbar/2m_e$, con $-e$ e m_e , rispettivamente, carica e massa dell'elettrone.

Dall'effetto Zeeman sappiamo che per un numero quantico l del momento angolare l , corrispondono un numero dispari di $2l+1$ numeri quantici magnetici m da $-l$ a l .

In base ai calcoli, quindi, un atomo d'argento nel suo stato fondamentale con $n = 1$, $l = 0$ non avrebbe dovuto interagire con il campo magnetico, essendovi un solo numero quantico magnetico $m = 0$.

Le osservazioni delle due zone ben separate sullo schermo e simmetriche rispetto all'asse di attraversamento del magnete, mostravano invece che gli atomi d'argento si disponevano secondo due valori possibili e opposti del momento magnetico.



Il momento magnetico e la deflessione degli atomi d'argento nell'esperimento di Stern e Gerlach

Il numero quantico di spin

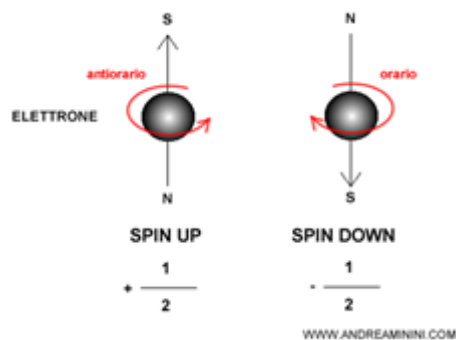
Nel 1925 i fisici olandesi George Eugene Uhlenbeck e S.A. Goudsmit interpretarono i risultati dell'esperimento di Stern e Gerlach ipotizzando l'esistenza di un momento magnetico intrinseco dell'elettrone originato dal moto di rotazione intorno al suo asse.

Al momento angolare intrinseco di rotazione dell'elettrone attorno al suo asse fu assegnato il nome di **spin**. Esso fu quantizzato assegnandogli un numero quantico di spin pari a $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ in base al verso della rotazione.

In ogni orbita possono coesistere al massimo due elettroni con verso di rotazione opposto, cui sono associati numeri quantici di spin, rispettivamente, $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.



Uhlenbeck, Kramers e Gousmith



due tipi di spin dell'elettrone

Il principio di esclusione di Pauli

Il principio di esclusione di Pauli afferma che due elettroni non possono occupare nell'atomo lo stesso stato quantico, ovvero non possono avere identico numero quantico energetico, orbitale, magnetico e di spin.



Wolfgang Pauli

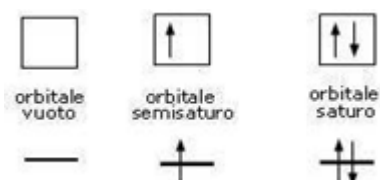
Quindi, in un atomo di elio, con due elettroni, l'orbitale fondamentale 1s ($n = 0, l = 0, m = 0$) può essere occupato dai due elettroni soltanto se essi hanno spin opposto ($m_s = \frac{1}{2}$ per il primo e $-\frac{1}{2}$ per il secondo elettrone).

In un atomo di litio, composto da tre elettroni, l'orbitale fondamentale 1s non può essere occupato da tutti i tre elettroni, ma solo al massimo da due di essi. Il terzo elettrone deve occupare l'orbitale 2s, ad energia maggiore rispetto a quella dell'orbitale fondamentale. La tabella seguente mostra per i primi quattro livelli energetici i sottolivelli e il numero massimo di elettroni per ogni sottolivello.

livello (n)	1	2	3	4
sottolivello (l)	s	s p	s p d	s p d f
Numero massimo di elettroni	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14
Num. max elettroni per livello	2	8	18	32

Tabella con il numero massimo di elettroni distribuiti per ogni livello e sottolivello

La figura seguente mostra i simboli utilizzati per le tre tipologie degli orbitali: orbitale vuoto, orbitale semisaturo e orbitale saturo di elettroni.

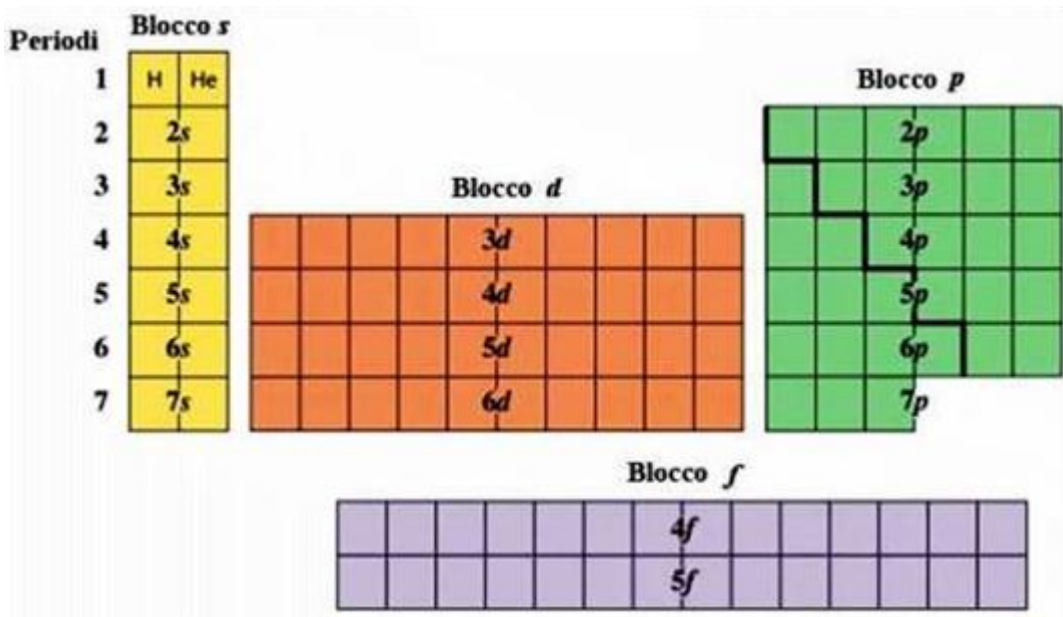


Simboli per le tipologie di orbitale

Il principio di esclusione di Pauli e la tavola periodica degli elementi

Il principio di esclusione di Pauli e all'origine delle differenti caratteristiche degli elementi atomici sulla tavola periodica. Essi differiscono, oltre che per la composizione dei protoni e dei neutroni nel nucleo, per il numero di elettroni e i singoli livelli e sottolivelli energetici occupati dagli elettroni.

Come si può notare dalle due figure in basso, la tavola periodica rispetta esattamente la composizione per livelli e sottolivelli energetici degli atomi.



I blocchi della tavola periodica degli elementi connessi a livelli e sottolivelli energetici

Gli elementi nella tavola periodica occupano le caselle corrispondenti al blocco.

Ad esempio, l'atomo di Sodio (Na) è composto da 11 elettroni: 2 elettroni nell'orbitale saturo 1s, 2 elettroni nell'orbitale saturo 2s, 6 elettroni negli orbitali saturi 2p e un unico elettrone nell'orbitale 3s.

IUPAC Periodic Table of the Elements

1 H hydrogen (1.008)																	2 He helium (4.0026)				
3 Li lithium (6.941)	4 Be beryllium (9.0122)															19 K potassium (39.0983)					
11 Na sodium (22.98976928)	12 Mg magnesium (24.304)															20 Ca calcium (40.078)					
		Key																			
		atomic number		Symbol																	
		name		element group except																	

La tavola periodica degli elementi

Superamento del modello atomico di Bohr – principio di indeterminazione

Nonostante le modifiche al modello di Bohr apportate da Sommerfeld e Wilson per tenere conto di effetti relativistici e l'inserimento del numero quantico magnetico e di spin, per dimostrare la presenza di righe di emissione in atomi più complessi dell'atomo di idrogeno, il modello di Bohr-Sommerfeld si rivela inefficace a spiegare molti fenomeni fisici rilevati in particelle subatomiche.

Il motivo è che il modello si basava sulle leggi della meccanica classica. Ad esempio, il modello prevede che gli elettroni si muovano su orbite fisse in cui è possibile misurare in ogni momento posizione e velocità della particella.

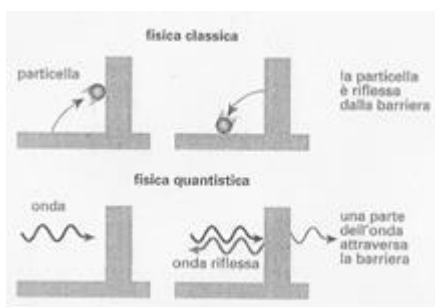
Il modello di Bohr-Sommerfeld non riesce a spiegare, in particolare, due principi confermati da numerosi risultati sperimentali:

Il Principio **di Indeterminazione** di Heisenberg che stabilisce l'impossibilità di determinare contemporaneamente le esatte posizione e quantità di moto della particella.

La dualità onda-particella di De Broglie che stabilisce che ogni particella ha proprietà sia ondulatorie che corpuscolari.



Principio di indeterminazione



Dualità onda-particella

Wermer Karl Heisenberg stabilì che non era possibile misurare al contempo posizione e velocità di una particella come in un sistema classico.

Egli formulò nel 1927 il **Principio di Indeterminazione** che si basa sulla seguente formula:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$$

dove Δx e Δp sono gli errori sulla determinazione della posizione e della quantità di moto della particella.

Esso stabilisce l'impossibilità di una misurazione esatta al tempo t della posizione e della quantità di moto della particella.

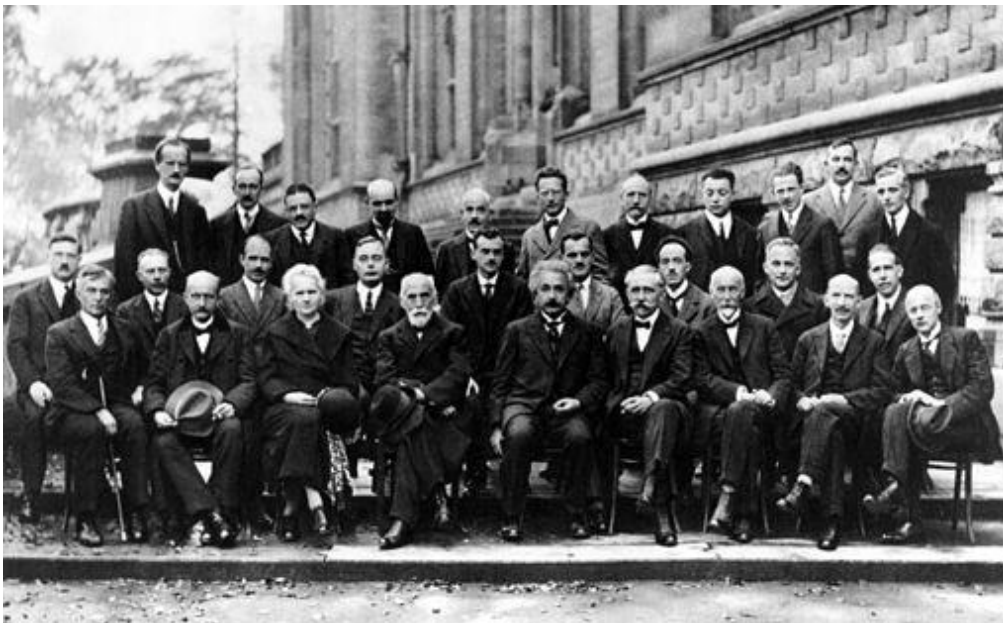
Heisenberg ipotizzò che ogni rilevatore, per poter misurare la posizione della particella, fornisce ad essa energia, modificandone la quantità di moto e la posizione. Quindi, le due grandezze non possono essere misurate contemporaneamente senza ottenere una imprecisione. Questo principio è in totale contraddizione con la fisica classica.



Werner Karl Heisenberg

In un famoso congresso Solvay tenutosi a, Bruxelles nel 1927, cui parteciparono 27 fisici, di cui 17 presenti e futuri premi Nobel per la Fisica, Einstein dibatté a lungo con Bohr e Heisenberg sul principio di indeterminazione, convinto che ci fossero leggi fisiche non note che permettessero di misurare con precisione contemporaneamente quantità di moto e posizione dell'elettrone. Einstein presentò al congresso un problema ideale per mostrare un paradosso sortito dal principio di indeterminazione, ma Bohr riuscì a risolvere il paradosso e rimosse le perplessità di Einstein.

Einstein propose il problema immaginando di avere una scatola da cui in un preciso istante fuoriesce un raggio di luce. Utilizzando la relazione massa-energia $E = mc^2$ e pesando la scatola prima e dopo l'evento, è possibile calcolare esattamente l'energia del raggio di luce emesso. Ma la conoscenza precisa dell'energia del raggio di luce emesso e dell'istante esatto in cui è stato emesso contraddice il principio di indeterminazione. Bohr risolse il paradosso dimostrando che, in base alla relatività generale, la forza di gravità che permette di pesare la scatola modifica gli intervalli temporali e quindi anche la misura dell'istante in cui è emesso il raggio di luce.



Il 5° congresso Solvay - Institut International de Physique Solvay nel Leopold Park di Bruxelles. Partecipanti, da sinistra in alto:

A. Piccard, E. Henriot, P. Ehrenfest, E. Herzen, Th. de Donder, E. Schrödinger, J.E. Verschaffelt, W. Pauli, W. Heisenberg, R. Fowler, L. Brillouin; P. Debye, M. Knudsen, W.L. Bragg, H.A. Kramers, P.A.M. Dirac, A.H. Compton, L. de Broglie, M. Born, N. Bohr; I. Langmuir, M. Planck, M. Skłodowska-Curie, H.A. Lorentz, A. Einstein, P. Langevin, Ch.-E. Guye, C.T.R. Wilson, O.W. Richardson.

Heisenberg spiegò il Principio di Indeterminazione con un esperimento ideale: il microscopio di Heisenberg.

In questo esperimento un microscopio è utilizzato per rilevare la posizione di un elettrone, inizialmente fermo. Per poter effettuare la misurazione con il microscopio è necessario illuminare l'elettrone con fotoni incidenti di una certa lunghezza d'onda λ per illuminare l'elettrone da rilevare.

La luce diffusa dei fotoni che urteranno l'elettrone giungerà successivamente al microscopio per permettere la rilevazione della posizione del fotone.

Naturalmente, osservando l'elettrone visualizzandolo con fotoni di lunghezza d'onda λ , si ottiene una indeterminazione Δx della sua posizione con $\Delta x \approx \lambda$, perché non è possibile stabilire la posizione dell'elettrone con una imprecisione minore della lunghezza d'onda del fotone incidente.

Quindi minore è la lunghezza d'onda del fotone, più precisa sarà la misura della posizione dell'elettrone. quantità di moto

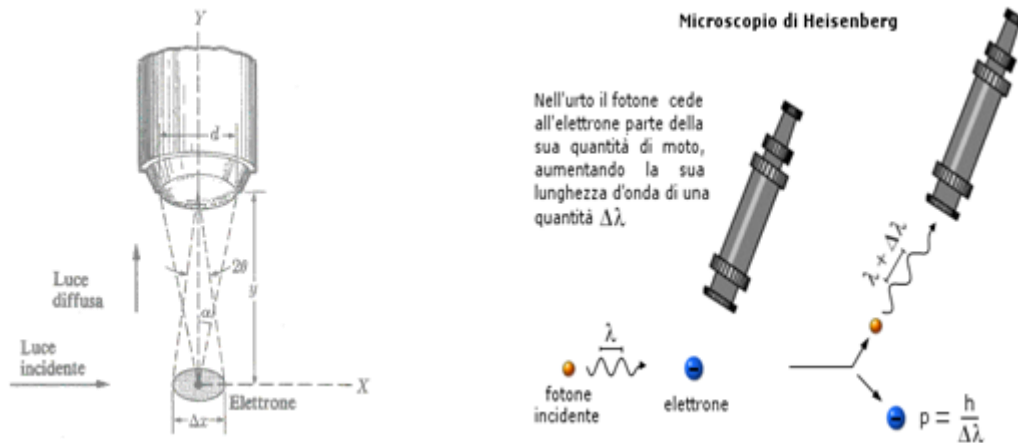
Sia p la quantità di moto del fotone incidente, pari a h/λ , come risulta dalla relatività ristretta ($p = E/c = hv/c = h/\lambda$).

Dopo che il fotone avrà urtato l'elettrone, per effetto Compton l'elettrone assorbirà energia dal fotone, e aumenterà la sua quantità di moto di un valore massimo $\Delta p_x \approx h/\lambda$. Si otterrà una incertezza nella misura contemporanea della posizione e della quantità di moto dell'elettrone

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h \quad \textbf{Principio di indeterminazione di Heisenberg}$$

Infatti, maggiore è la quantità di moto del fotone incidente minore è l'incertezza sulla posizione dell'elettrone, in quanto minore è la lunghezza d'onda del fotone, ma maggiore sarà l'incertezza sulla sua quantità di moto dell'elettrone. Quindi posizione e quantità di moto dell'elettrone non possono essere misurate contemporaneamente se non con una imprecisione pari alla costante di Planck.

La rilevazione della posizione non è possibile senza che il fotone ceda energia all'elettrone, che modificherà la sua quantità di moto e più si tenta di misurare con maggior precisione la posizione dell'elettrone maggiore sarà la quantità di moto ad esso ceduta.



Il microscopio di Heisenberg e il principio di indeterminazione

Superamento del modello atomico di Bohr – dualità particella-onda

Il fisico Louis de Broglie ipotizzò che ogni particella oltre a proprietà corpuscolari possiede proprietà ondulatorie.

De Broglie teorizzò che ogni particella avesse proprietà ondulatorie, applicando alla particella la formula di Planck per i quanti con energia $E = h \nu$ e impulso $p = h \nu / c = h / \lambda$. $\lambda = h/p$ è chiamata *lunghezza d'onda di De Broglie*.

Ad esempio, la lunghezza d'onda dell'elettrone che viaggia con velocità

$$v = 0,9c$$

è data da:

$$\lambda = h/p = h/mv = 6.6 \times 10^{-34} / (9.11 \times 10^{-31} \cdot 2.7 \times 10^8) = 2.7 \times 10^{-12} \text{ m.}$$

Essa corrisponde alla lunghezza d'onda di una radiazione di raggi gamma.

L'ipotesi di De Broglie fu confermata da vari esperimenti effettuati a partire dal 1924.

In molti esperimenti si è dimostrata la natura ondulatoria delle particelle osservando risultati tipici di fenomeni ondulatori quali l'interferenza e la diffrazione.



Louis de Broglie

Dualità particella-onda - l'esperimento di Davisson e Germer

L'esperimento più noto che dimostrò la natura ondulatoria delle particelle fu effettuato da Clinton Davisson e Lester Germer nel 1927 nei Bell Laboratories.

Nell'esperimento di Davisson e Germer un fascio di elettroni è inviato su un reticolo cristallino di Nichel. Il fascio di elettroni dopo l'urto è deviato verso un rivelatore.

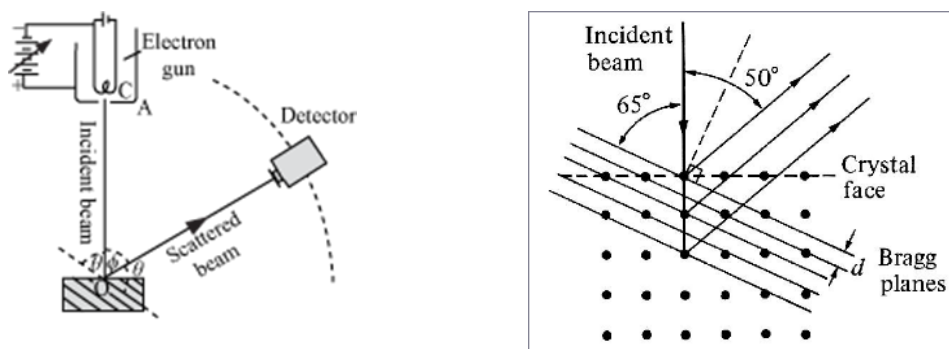
Secondo l'ipotesi di De Broglie gli elettroni, sparati ad una velocità di circa 4.2×10^{10} m/s, quindi dotati di impulso pari a

$$p = mv = 9.1 \times 10^{-31} \cdot 4.2 \times 10^{10} = 3.8 \times 10^{-20} \text{ kg m/s,}$$

posseggono una lunghezza d'onda $\lambda = h/p \approx 1.7 \times 10^{-10}$ m, che è la lunghezza d'onda dei raggi x.

Davisson e Germer osservarono sul rivelatore una figura di diffrazione identica a quella creata da un fascio di raggi x incidente sul reticolo di Nichel.

Questo risultato comprova l'ipotesi di De Broglie relativa alla natura ondulatoria delle particelle.



L'esperimento di Davisson e Germer

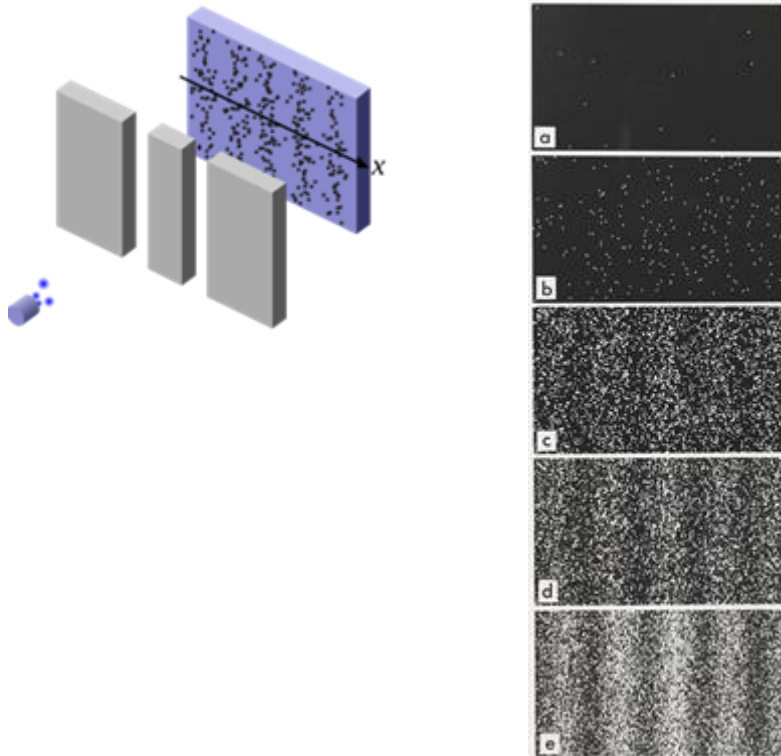
Dualità particella-onda - l'esperimento della doppia fenditura

Un ulteriore esperimento a comprova dell'ipotesi di De Broglie fu l'esperimento della doppia fenditura.

Tale esperimento è identico a quello effettuato da Thomas Young e Augustin Fresnel agli inizi dell'800 per evidenziare la natura ondulatoria della luce, ma anziché sparare su una barriera con una doppia fenditura un fascio di luce, viene inviato su di essa un fascio di elettroni.

Il fascio di elettroni si comporta esattamente come il fascio di fotoni producendo sullo schermo posto dietro la barriera delle figure di diffrazione. Se l'unica natura degli elettroni fosse stata quella corpuscolare non si sarebbe dovuta formare alcuna figura di diffrazione sullo schermo.

La formazione di figure di diffrazione sullo schermo anche per gli elettroni è una ulteriore prova della natura ondulatoria delle particelle.



L'esperimento della doppia fenditura e figura di diffrazione osservata sullo schermo dopo l'invio di 10 (a), 200 (b), 6000 (c), 40000 (d), 140000 (e) elettroni.

Erwin Shroedinger: breve biografia

Fu il fisico austriaco Erwin Shroedinger a decretare l'abbandono definitivo della fisica classica, mediante il concetto di funzione d'onda e l'equazione fondamentale della meccanica quantistica da lui formulata nel 1925.

Erwin Schrödinger (12/08/1887 – 04/01/1961) fu soldato di fanteria durante la prima guerra mondiale, combattendo per l'esercito austriaco sul fronte italiano.

Nel 1920 accettò un posto di assistente a Jena e successivamente divenne professore associato a Stoccarda e poco dopo professore ordinario a Breslavia.

L'instabilità politica del periodo post bellico in Austria e Germania lo convinse ad accettare un trasferimento a Zurigo, dove produsse i suoi lavori scientifici più importanti tra il 1925 e 1926.

L'enorme notorietà che ebbe con l'equazione fondamentale della meccanica quantistica che porta il suo nome lo condusse a ricevere l'incarico molto prestigioso di sostituto di Max Plank a Berlino.

A Berlino però rimase assai poco perché nel frattempo era salito al poter in Germania Adolf Hitler. Sebbene non fosse ebreo Shroeidinger avvertiva il clima repressivo generato dal nazismo negli ambienti accademici tedeschi e si convinse a lasciare l'Università di Berlino per dirigersi ad Oxford; in quel periodo ricevette il premio nobel per la fisica nel 1933.

Nel 1936 tornò in Austria a Vienna, ma di nuovo fu travolto dalle vicende politiche con il voto popolare austriaco di inclusione nella Germania nazista.

Nel 1938 decise di lasciare l'Austria dirigendosi prima a Gand, in Belgio, poi a Dublino, dove rimase per ben 17 anni formando un'importante scuola di fisica teorica. Tornò in Austria nel 1955, nominato professore straordinario all'Università di Vienna. Morì dopo pochi anni, nel 1961, già in condizioni di salute molto precarie.



Erwin Shrodinger

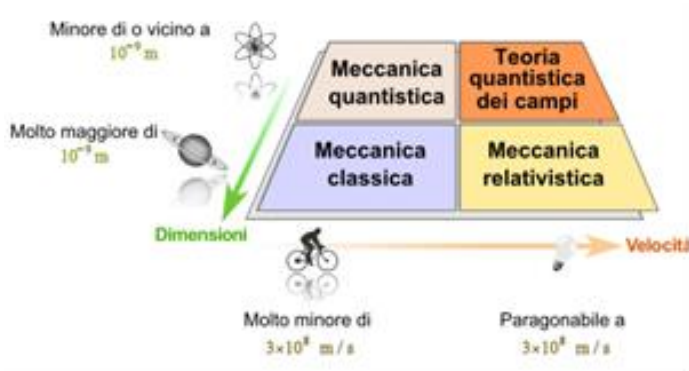
La funzione d'onda e l'equazione di Schrödinger

Nella meccanica classica lo stato di una particella è descritto dalle sue coordinate e dalle sue velocità, o meglio, dai vettori posizione e impulso.

Conoscendo le coordinate e le velocità iniziali di una particella, in meccanica classica saranno note le coordinate e le velocità della particella in ogni momento.

Infatti, le equazioni del moto di una particella, ottenute applicando la seconda legge della dinamica, sono equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine risolvibili imponendo le condizioni iniziali date dalla posizione e dalla velocità iniziali.

Il principio di indeterminazione Heisemberg ha mostrato che l'approccio deterministico della meccanica classica non è valido nella descrizione di un sistema atomico. In nessun momento è possibile conoscere esattamente allo stesso tempo le coordinate e l'impulso di una particella. La fisica classica non può essere applicata per particelle di dimensioni minori o vicine a 10^{-9} m, dove le caratteristiche ondulatorie delle particelle non sono trascurabili e i livelli sono quantizzati. È necessario un nuovo modello che descriva lo stato di un sistema fisico in meccanica quantistica.



Limiti all'utilizzo della fisica classica

Fu Schrödinger nel 1927 a mettere a punto questo modello introducendo le **funzioni d'onda**. Una funzione d'onda è una funzione $\psi(\mathbf{x},t)$ che descrive lo stato di un sistema fisico in meccanica quantistica.

Il valore

$$|\psi(x,y,z,t)|^2 dx dy dz$$

esprime la probabilità che al tempo t la particella si trovi all'interno del volume di centro (x,y,z) e ampiezza $dx dy dz$.

Fu il fisico tedesco Max Born a proporre questa interpretazione probabilistica della funzione d'onda. Per questa sua interpretazione della funzione d'onda Max Born ebbe il premio Nobel per la fisica nel 1954.

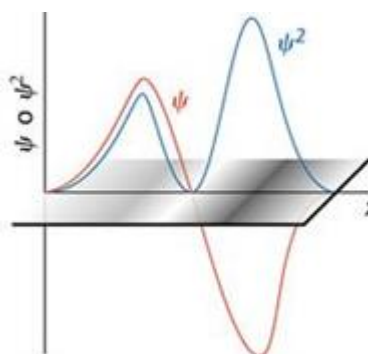
La funzione d'onda $\psi(\mathbf{x},t)$ è una funzione complessa. Quindi $|\psi(\mathbf{x},t)|^2 = \psi^*(\mathbf{x},t) \cdot \psi(\mathbf{x},t)$ con ψ^* complesso coniugato di ψ .

Affinchè $|\psi(x,y,z,t)|^2 dx dy dz$ rappresenti una densità di probabilità deve valere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,y,z,t)|^2 dx dy dz = 1$$



Max Born



Interpretazione della funzione d'onda

La funzione d'onda ψ descrive lo stato e il livello energetico di un elettrone in un atomo. Così come in meccanica classica la posizione e l'impulso in ogni istante di una particella sono ottenuti dall'equazione del moto, così in meccanica quantistica la

funzione d'onda che descrive lo stato di una particella è ottenuta a partire dall'**equazione d'onda** o **equazione di Schrödinger**.

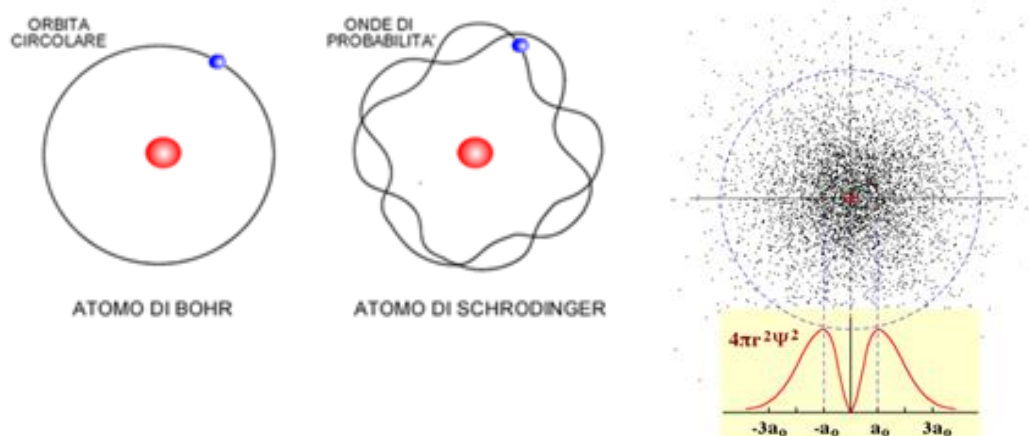
L'equazione di Schrödinger è una equazione differenziale a derivate parziali della funzione d'onda $\psi(\mathbf{x},t)$, la cui soluzione descrive il comportamento fisico di una particella di massa m in un certo stato.

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

Il valore $|\psi(\mathbf{x},t)|^2 dx dy dz$ rappresenta la probabilità che l'elettrone in moto intorno al nucleo in un certo stato possa trovarsi nel volume infinitesimo $dx dy dz$ al tempo t .

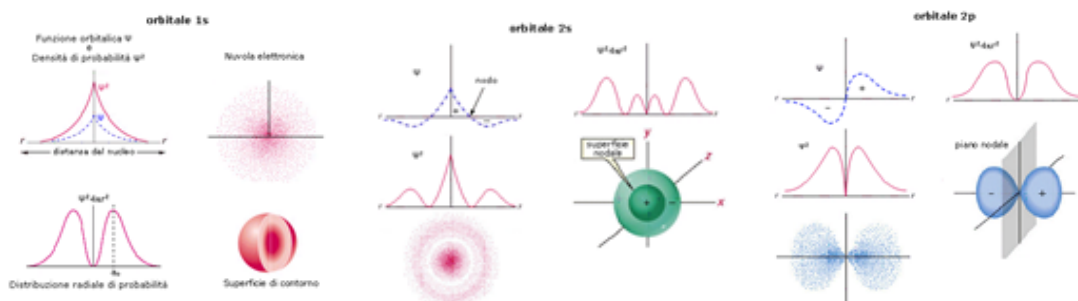
L'**orbitale** rappresenta una superficie nello spazio nella quale la probabilità di trovare l'elettrone è massima. Ad ogni orbitale corrisponde un particolare livello di energia.

Per l'elettrone dell'idrogeno nello stato fondamentale risulta che la funzione d'onda ψ ha simmetria sferica e dipende solo dalla distanza dal nucleo. Anche $|\psi|^2$ dipenderà, quindi, solo dalle distanze e l'orbitale avrà una simmetria sferica.



Orbitale descritto da una funzione d'onda e funzione d'onda dell'orbitale 1s dell'atomo d'idrogeno,

Tale simmetria è mantenuta anche per l'orbitale 2s, in quanto non c'è alcuna dipendenza angolare, ma solo radiale. Ciò non accade per l'orbitale 2p, la cui funzione d'onda non ha simmetria sferica, avendo una dipendenza sia radiale che angolare; quest'ultima è legata alla presenza del numero quantico azimutale l non nullo.



Funzioni d'onda degli orbitali 1s, 2s e 2p dell'atomo d'idrogeno

L'effetto tunnel

L'**effetto tunnel** è un effetto quantistico che permette ad una particella di transitare verso uno stato non permesso in meccanica classica.

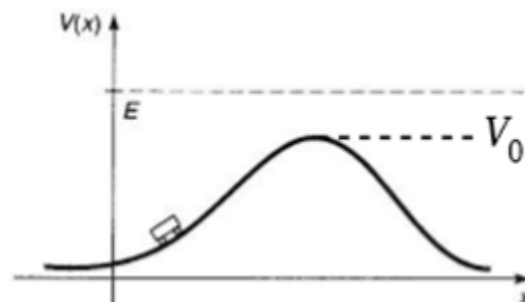
In meccanica classica per superare, ad esempio, una certa barriera di potenziale è necessaria una energia maggiore della barriera. Ciò deriva dal principio di conservazione dell'energia

In figura è considerato un esempio di ciò che accade in fisica classica. Un carrellino è spinto con una certa velocità iniziale v su una collinetta. Il carrellino non torna indietro soltanto se l'energia totale E supera o eguaglia l'energia potenziale V_0 alla sommità della collinetta. Ora supponiamo che il carrellino arrivi alla sommità a velocità nulla.

Per il teorema di conservazione dell'energia $E = \frac{1}{2} m v^2 = V_0$ e si ottiene:

$$v = \sqrt{\frac{2V_0}{m}}$$

Che è la velocità iniziale minima da far avere al carrello per farlo giungere alla sommità della collina



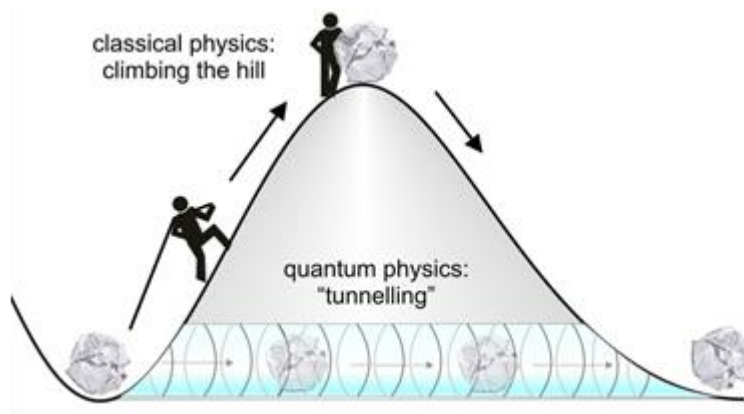
Caso classico – barriera di potenziale

In meccanica quantistica il comportamento ondulatorio delle particelle e le proprietà di densità di probabilità della funzione d'onda permettono di assegnare una probabilità non nulla alla particella di superare la barriera di potenziale anche se l'energia totale della particella fosse minore della barriera di potenziale V_0 .

Questo effetto è chiamato effetto tunnel.

Nell'esempio in figura c'è una probabilità non nulla che la particella possa attraversare la collina attraversandola in orizzontale proprio come se attraversasse una galleria scavata sotto la collina; da ciò il nome di "effetto tunnel".

Ci sono molte prove sperimentali che dimostrano la presenza dell'effetto tunnel nei processi quantistici.



Caso quantistico – barriera di potenziale e effetto tunnel

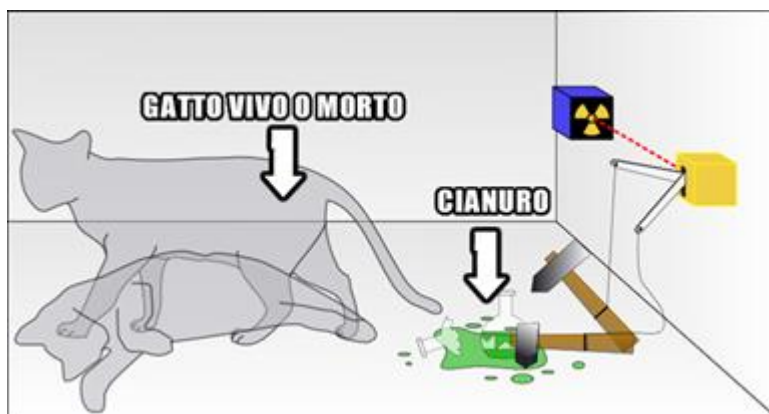
Il gatto di Schrödinger

Un apparente paradosso della meccanica quantistica fu fornito da Schrodinger in un esperimento ideale in cui un gatto è rinchiuso in una scatola d'acciaio nella quale viene inserito una sostanza radioattiva con una certa probabilità che in un'ora uno dei suoi atomi si disintegri. Se ciò accadesse, allora un contatore geiger registrerebbe la presenza della sostanza radioattiva, azionando un martelletto che romperà una fiala di cianuro.

Dopo un'ora viene aperta la scatola. Il gatto sarà vivo o morto?

Il paradosso è legato al fatto che secondo la meccanica quantistica ci sono due stati possibili (gatto vivo e gatto morto) descritti da una funzione d'onda. Siamo noi che aprendo la scatola agiamo come uno strumento di misurazione che modifica lo stato del sistema in gatto vivo o gatto morto, ma fino a quando la scatola è chiusa il sistema si trova in uno stato indeterminato con una funzione d'onda che esprime la probabilità che il sistema gatto-scatola sia nello stato gatto vivo o gatto morto.

Il paradosso si spiega, quindi, con la motivazione che è l'osservazione, interagendo col sistema, a determinarne il risultato.



Il gatto di Schrödinger

La teoria delle stringhe

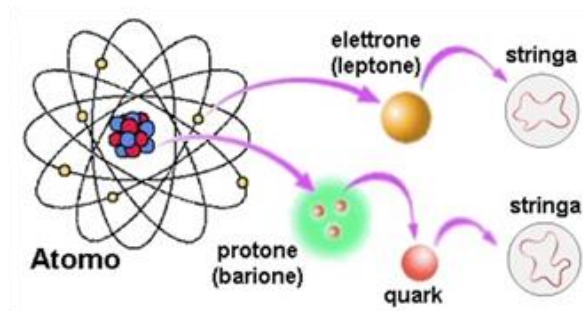
La teoria delle stringhe nacque dai primi lavori del fisico italiano Gabriele Veneziano che effettuò degli studi di gravità quantistica, per cercare di unificare la teoria del campo gravitazionale di Einstein con la meccanica quantistica.

Gli adroni, soggetti alla forza nucleare forte, sono composti da particelle elementari dette quark, che non sono mai separati in natura, ma uniti come se fossero legati tra loro da filamenti di energia di spessore infinitesimo di circa 10^{-15} m. Questi filamenti di energia sono simili a corde vibranti, da cui il nome string, ovvero corda. In base al modo con cui vibrano le stringhe, esse formano particelle elementari diverse.

Ogni particella elementare nell'universo è formata dall'unione di stringhe vibranti con una specifica modalità di vibrazione. Queste unità fisiche fondamentali, le stringhe, formano anche la radiazione e lo spazio-tempo. Gli stessi elettroni (leptoni) sono formati da stringhe con una specifica modalità di vibrazione.



Gabriele Veneziano



Formazione degli atomi dalle stringhe

La teoria delle stringhe è una branca nascente della fisica che ha lo scopo di conciliare la meccanica quantistica con la teoria della relatività generale di Einstein. Essa è un esempio di **teoria del tutto**, ovvero di teoria che tenta di unificare tutte le forze conosciute, le quattro forze fondamentali: gravitazionale, elettromagnetica, nucleare forte e nucleare debole.

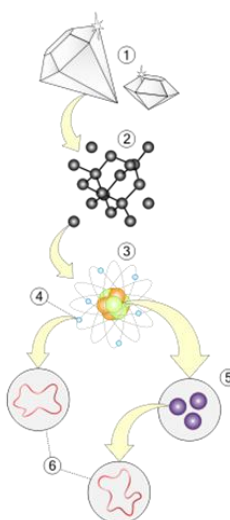
Le particelle subatomiche e lo spazio-tempo sono considerati formate da forme di energia fondamentali mono-dimensionali dette stringhe (letteralmente “corde”), bi-dimensionali, dette membrane e p-dimensionali, dette p-brane.

A partire dalle stringhe vibranti è possibile definire una struttura gerarchica di composizione della materia. Nella figura successiva è riportata tale struttura gerarchica, dove:

- 6) Stringhe vibranti
- 5) Quark
- 4) Elettroni
- 3) Atomi (neutroni, protoni e elettroni)
- 2) Molecole
- 1) Materia visibile



Stringhe vibranti



Struttura gerarchica della materia

La teoria delle stringhe nacque per spiegare le forze nucleari forti cui sono sottoposti gli adroni (particelle formate da quark, come neutroni e protoni). La forza nucleare forte tra adroni era spiegata in termini di vibrazioni delle stringhe di cui si compongono i quark che formano gli adroni.

Negli anni '80 si arrivò a formulare una teoria, la **teoria delle superstringhe**, che poteva spiegare la formazione di tutte le particelle elementari. Molti fisici condussero ricerche su diversi modelli e teorie di superstringhe.

Negli anni '90 il fisico-matematico statunitense Edward Witten mostrò che affinché le teorie delle superstringhe possano essere valide, lo spazio-tempo deve essere formato non più da 4, ma da 11 dimensioni, 10 spaziali e una temporale. Witten chiamò la sua teoria unificata delle superstringhe la **M-teoria**. Per gioco molti cercarono di interpretare il significato di quella lettera M, forse il motivo di quella lettera era che essa è l'11ma lettera dell'alfabeto, come 11 sono le dimensioni dello spazio tempo secondo la M-teoria di Witten.



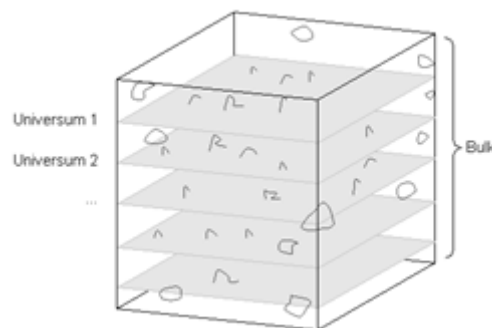
Edward Witten



La M-teoria

Secondo la M-teoria il nostro universo si è formato a partire solo da quattro delle 11 dimensioni esistenti. Il Big Bang è stato formato da una collisione tra brane, che ha formato il nostro universo come uno spazio quadrimensionale, detto bulk, o che si trova su una 3-brana. E' possibile che esistano universi situati su altre brane rispetto al nostro, che potrebbero essere retti da leggi fisiche diverse da quelle del nostro universo e potrebbero avere dimensioni differenti.

Oggi ancora non esiste alcuna evidenza sperimentale della M-teoria, ma solo dimostrazioni teoriche che sarebbe in grado di unificare tutte le forze fondamentali dell'universo e di spiegare la composizione di tutte le particelle dell'universo osservabile. Una formulazione matriciale della M-teoria, fu effettuata di recente da Banks, Fisher e Shenker per unificare la teoria della gravitazione e la meccanica quantistica.



Formulazione matriciale della M-teoria e creazione di un bulk

Il bosone di Higgs

In esperimenti effettuati nel 2011 presso l'acceleratore Large Hadron Collider del Cern di Ginevra, coordinati dai fisici italiani Fabiola, Gianotti e Carlo Tonelli, da urti tra due fasci di protoni è stata rilevata la formazione nel vuoto di una particella elementare, il bosone di Higgs, con una energia tra i 124 e 126 Mev.

Tale particella fu teorizzata indipendentemente nel 1964 dai fisici Peter Higgs, Francois Englert e Robert Brou. La sua importanza è dovuta al fatto che nel modello unificato delle forze elementari essa è associata al campo di Higgs, un campo scalare creatosi all'atto del Bing Bang e che conferisce la massa a tutte le particelle.

Il bosone di Higgs è noto con la denominazione di *Particella di Dio*, derivante dal titolo del libro di fisica divulgativa di Leon Lederman "The God Particle: If the Universe Is the Answer, What Is the Question?", pubblicato nel 1993.



Peter Higgs

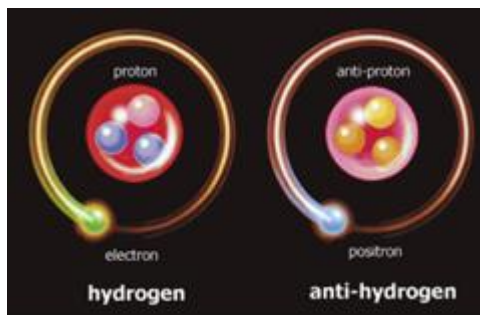
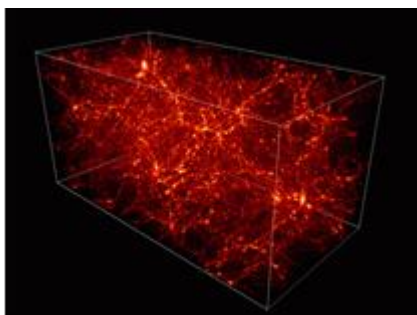


Fabiola Gianotti

La scoperta del bosone di Higgs è rilevante perché, oltre a essere compatibile col modello unificato, spiegherebbe sia la composizione della materia oscura nell'universo che la scomparsa dell'antimateria successivamente al Big Bang.

Il bosone di Higgs, infatti, potrebbe permeare l'universo e consistere della materia oscura, ovvero non osservabile perché non emette radiazione elettromagnetica. Esso potrebbe, quindi, fornire nuove ipotesi sullo studio dei modelli di universo.

Inoltre, l'assenza di antimateria nel nostro universo potrebbe essere spiegata con l'elevata intensità del campo di Higgs nei primi istanti di formazione dell'universo per effetto del processo di inflazione che ha condotto alla produzione di materia. Infatti, altrimenti, il nostro universo si sarebbe dovuto comporre in maniera uguale di materia e antimateria.



Modello sulla presenza di materia oscura nell'universo e l'atomo di anti-idrogeno, formato da antimateria

Verso una nuova fisica: il bosone Madala

Esperimenti molto recenti compiuti con il Large Hadron Collider del Cern nell'analisi delle collisioni protone-protone, sembrano aver confermato la presenza di un nuovo bosone, **Madala**, la cui esistenza è stata predetta dagli scienziati della High Energy Physics (HEP) dell'Università di Witwatersrand a Johannesburg in Sudafrica, coordinata dal fisico Bruce Mellado. Per ora non c'è una conferma ufficiale del CERN.

Mentre il bosone di Higgs agisce solo con la materia nota, il bosone Madala avrebbe, unica particella elementare, la caratteristica di interagire con la materia oscura nell'Universo che, oggi, stando alle previsioni, formerebbe il 27% della materia di tutto

l'Universo. Se la scoperta del bosone Madala fosse confermata, essa rivoluzionerebbe l'intera comprensione della fisica in quanto permetterebbe di rilevare la materia oscura e di riformulare la teoria unificata delle forze. L'umanità potrebbe trovarsi di fronte ad una nuova rimodulazione e rivoluzione delle teorie fisiche proprio come agli inizi del '900 con la relatività e la meccanica quantistica.



Bruce Mellado e la smentita del CERN di una conferma ufficiale dell'esistenza del bosone Madala

Bibliografia

- Bohr N. (1913): "*On the constitution of atoms and molecules*". The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 6(26), 1-25, DOI: 10.1080/14786441308634955
- De Broglie L. (2006) XXXV. *A Tentative Theory of Light Quanta*, Philosophical Magazine Letters, 86:7, 411-423, DOI: 10.1080/09500830600914721.
- Dirac P.A.M. (1959): "*I principi della meccanica quantistica*" - Bollati Boringhieri editore, pp. 430 pp., ISBN: 8833951618.
- Einstein A., (1917): "*On the quantum theory of radiation*" - Physikalische Zeitschrift., 18, 121-128.
- Griffiths D.J. (2005): "*Introduzione alla meccanica quantistica*" – Zanichelli editore, 488 pp. ISBN:9788808087478.
- Heisenberg W., W. Pauli W.. 1930. *Zur Quantentheorie der Wellenfelder*, Zeitschrift für Physik 59, 160-190, DOI: 10.1007/BF01341423.
- Kumar M. (2017): "*Quantum. Da Einstein a Bohr: una nuova teoria della realtà*" - Cambridge University Press, 436 pp., ISBN: 978-88-04-60893-6.
- Plank M., Clarke H. T., Silberstein L. (1922): "*The origin and development of the quantum theory*" - Cambridge University Press, 436 pp.
- Rutherford E. R. (1911): "*The scattering of alpha and beta particles by matter and the structure of the atom*" – Clarendon Press, Oxford, 6(21), 669-688, DOI: 10.1080/14786440508637080.
- Schrodinger E. (1926): "*Quantisierung als Eigenwert problem*" - Annalen der Physik. 384 (4): 273–376, DOI: 0.1002/andp.19263840404.

Relatività ristretta e cenni di relatività generale

Ferdinando Di Martino¹

¹Dipartimento di Architettura
Università di Napoli Federico II
fdimarti@unina.it

Sommario. – Sono esplorate le principali problematiche che hanno condotto alla nascita della relatività ristretta e le conseguenze fisiche della teoria. Inoltre, è descritta una introduzione alla teoria della Relatività Generale e sono analizzate le sue conseguenze sullo studio dei modelli di universo.

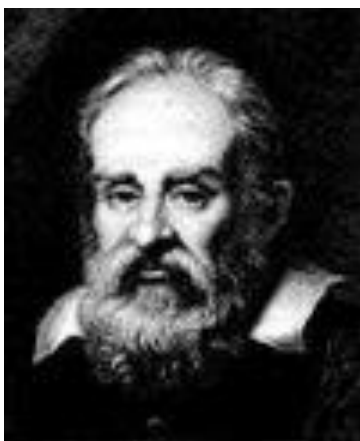
Nascita della relatività ristretta

Le trasformazioni di Galileo

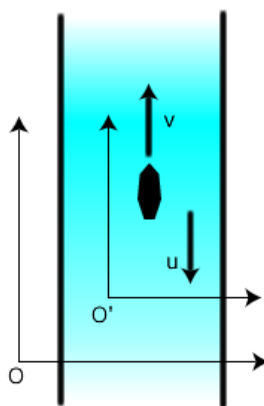
Galileo Galilei nel 1632 nel “Dialogo sopra i massimi sistemi del mondo” poneva questo quesito:

Un osservatore in viaggio su una nave a velocità costante su un mare perfettamente calmo non riesce a rilevare se la nave è in moto o ferma.

Dunque, se un osservatore viaggiasse su una nave che in moto rettilineo uniforme si avvicina alla terraferma, può arguire che ci sia un altro osservatore sulla terraferma che si sta avvicinando a lui.



Galileo Galilei (1564-1642)

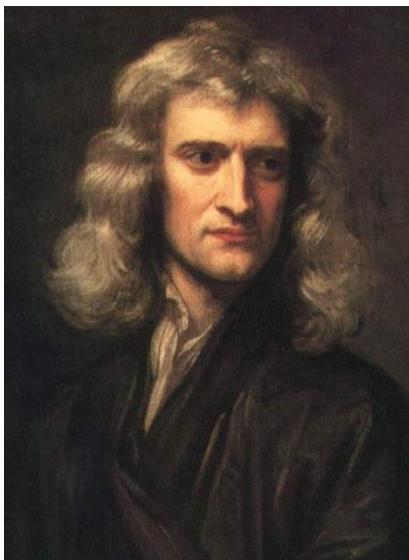


Osservatori in sistemi di riferimento inerziali

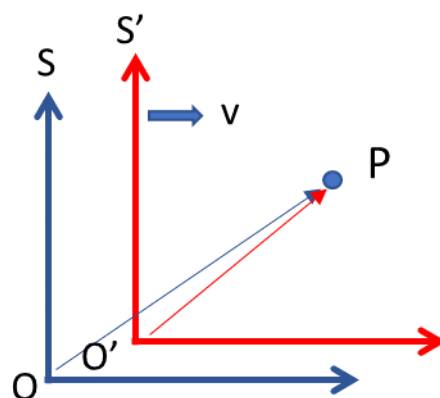
Entrambi gli osservatori non sono in grado di conoscere chi realmente si sta muovendo e chi no.

La spiegazione di questo paradosso è nelle leggi della meccanica di Newton.

Esse, infatti, sono invarianti rispetto a osservatori che si muovono in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro.



Isaac Newton (1642-1727)



Osservatori in sistemi di riferimento inerziali

Se, infatti, consideriamo:

il moto I

un punto d

due osservatori S e S' con S' in moto rettilineo uniforme con velocità v rispetto a S, otteniamo:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t$$

$$t' = t$$

da cui, derivando rispetto al tempo:

$$d\mathbf{x}'/dt = d\mathbf{x}/dt - \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}$$

$$d\mathbf{u}'/dt = d\mathbf{u}/dt - \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{a}' = \mathbf{a}$$

Sistemi di riferimento inerziali

Non esiste quindi un sistema di riferimento privilegiato, ma in tutti i sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro valgono le stesse equazioni del moto $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Si definisce **sistema di riferimento inerziale** un sistema di riferimento in cui vale il principio di inerzia, ovvero in cui un corpo su cui agisce una forza complessiva nulla si muove di moto rettilineo uniforme.

Non esiste in natura un sistema totalmente inerziale, ma con buona approssimazione possiamo considerare sistema inerziale un sistema solidale con il centro del sole o di altre stelle (trascurando il moto della stella rispetto al centro galattico e il moto della

galassia rispetto all'ammasso locale). La terra, a causa dei suoi moti di rivoluzione e rotazione, non rappresenta un buon riferimento inerziale.

Tutti i sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto a un sistema di riferimento inerziale sono a loro volta sistemi di riferimento inerziali.

Le equazioni di Maxwell

Le leggi della meccanica classica sono, quindi, invarianti rispetto ad una trasformazione di Galileo.

Ma vale la stessa cosa per l'elettrodinamica?

Le equazioni di Maxwell sono invarianti rispetto ad una trasformazione di Galileo?



James Clerk Maxwell (1831-1879)

Consideriamo le equazioni di Maxwell per i campi elettrico e magnetico.

$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	legge di Gauss elettrica	➔	Nel vuoto, nel caso di onda piana	
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	legge di Gauss magnetica		$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$	
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	legge di Faraday Neumann		$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$	
$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	legge di Ampère			
$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$			

ϵ Permeabilità elettrica nel mezzo
 μ Permeabilità magnetica nel mezzo
 j Densità di corrente

ϵ_0 Permeabilità elettrica nel vuoto
 μ_0 Permeabilità magnetica nel vuoto
 c velocità della radiazione elettrom. nel vuoto

Le equazioni di Maxwell per una trasformazione di Galileo $x' = x - vt$, e $t' = t$ diventano della forma:

$$\frac{\partial^2 E'}{\partial x'^2} \neq \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Quindi le **equazioni di Maxwell NON SONO INVARIANTI rispetto ad una trasformazione di Galileo**. Campo elettrico e campo magnetico non sono identici in tutti i sistemi inerziali. Allora:

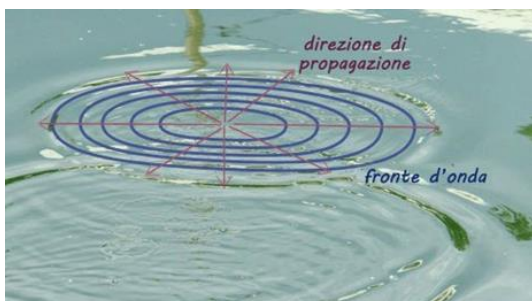
- è corretta la meccanica di Newton e valgono le trasformazioni di Galileo e bisogna riscrivere le leggi dell'elettrodinamica;
- sono corrette le equazioni di Maxwell dell'elettrodinamica; le trasformazioni di Galileo non sono valide e bisogna riscrivere le leggi della meccanica.

L'etere

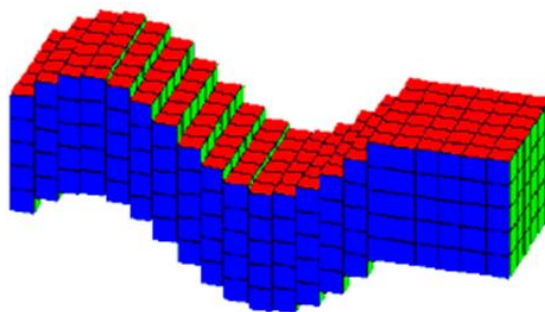
La soluzione dell'equazione di Maxwell è costituita da un'onda, la cui velocità di propagazione nel vuoto è pari a c .

Nel XIX secolo tutte le onde note in natura, ad esempio le onde acustiche, le onde sismiche, le onde che si propagano sulla superficie del mare, ecc., erano considerate perturbazioni che si propagano come forme di energia attraverso un mezzo. Si riteneva, quindi, che le onde elettromagnetiche si propagassero attraverso un mezzo con massa e densità non rilevabili in laboratorio, *l'etere* o *etere lumifero*, e che nel sistema di riferimento dell'etere la velocità di propagazione fosse proprio c .

Se ciò fosse vero, allora le equazioni dell'elettrodinamica si riferiscono ad un sistema di riferimento privilegiato, l'etere, e ciò spiegherebbe perché le equazioni di Maxwell non sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Galileo.



Onda sferica su una superficie liquida

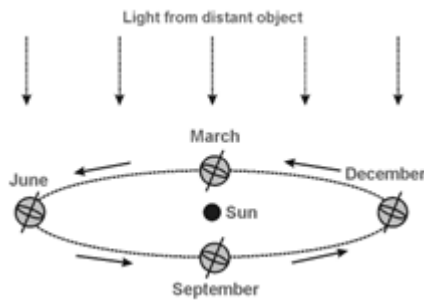


Onda trasversale sismica

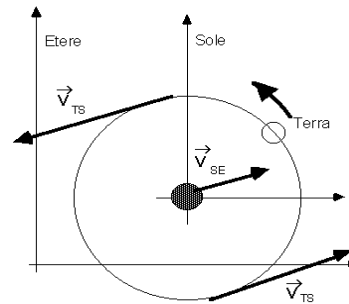
In base a questa supposizione, un osservatore in moto rispetto all'etere con velocità v dovrebbe misurare la velocità della radiazione elettromagnetica solidale con l'etere come $c-v$ o $c+v$ a seconda se l'osservatore si avvicini o si allontani dal sistema di riferimento dell'etere.

Inoltre, a differenza di altre sostanze, l'etere non era rilevabile da strumenti di misura, quindi sono stati effettuati esperimenti di varia natura per riscontrarne indirettamente l'esistenza.

Poiché la Terra è in moto rispetto a un etere fisso, si dovrebbero misurare sulla Terra in periodi diversi valori differenti della velocità della luce, considerando le trasformazioni di Galileo e la meccanica classica.



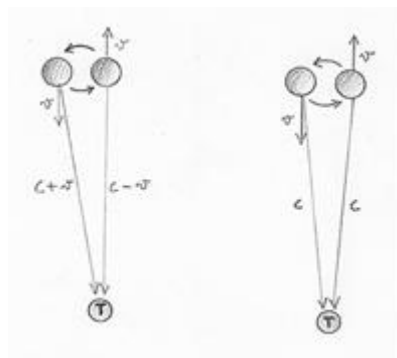
Moto della terra rispetto all'etere



L'esperimento di De Sitter

De Sitter considerò un sistema binario stellare, con una stella in rotazione rispetto a un'altra con velocità v . Nel periodo di rotazione quando la stella si allontana dalla Terra la luce emessa dovrebbe avere velocità $c-v$; al contrario, essa dovrebbe avere velocità $c+v$ quando si avvicina alla Terra, esattamente come un pallone scagliato a velocità u in un treno in corsa con velocità v avrebbe velocità $u + v$ (se il treno si avvicina) o $u-v$ (se si allontana) rispetto a un viaggiatore in attesa sulla piattaforma.

De Sitter mostrò che, invece, la velocità della luce emessa dalla stella in rotazione con velocità v rispetto alla compagna restava sempre uguale a c , la stessa velocità della luce emessa dalla compagna. Quindi, non c'è alcun movimento della Terra rispetto all'etere, altrimenti varrebbero le trasformazioni di Galileo.



Moto di un sistema stellare binario visto dalla Terra

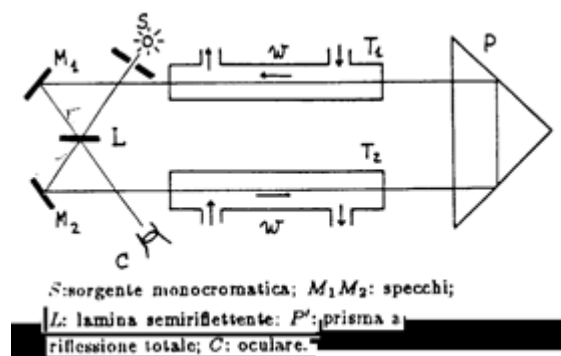
L'esperimento di Fizeau

I risultati dell'esperimento di De Sitter mostrarono che se la luce si propagasse attraverso l'etere, nessun osservatore in moto rispetto all'etere misurerebbe una velocità della luce diversa da c . Lorentz ipotizzò, allora, che l'etere fosse "trascinato" dai corpi (*ipotesi di trascinamento dell'etere*).

Fizeau mostrò che l'etere, se esiste, non può essere trascinato dai corpi. Con un sistema di specchi fece passare la luce emessa da una sorgente S attraverso due tubi pieni d'acqua. Se l'acqua, inizialmente a riposo, venisse fatta scorrere a velocità w nei due

tubi, in modo che la corrente attraversasse l'acqua in senso inverso nell'uno e nell'altro tubo, si dovrebbero osservare frange di interferenza sullo schermo P dovute al trascinamento dell'etere da parte dell'acqua in moto, ma le frange previste non furono rilevate.

Se l'etere fosse stato trascinato dall'acqua la velocità della luce avrebbe dovuto essere $c/n+w$ in un tubo e $c/n-w$ nell'altro, con n indice di rifrazione dell'acqua, invece le frange rilevate non erano generate da questa differenza di velocità nei due tubi.



L'esperimento di Fizeau

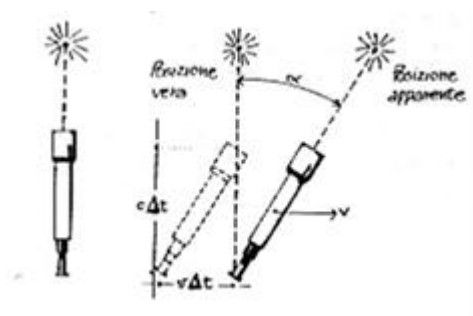
L'aberrazione della luce

Il fenomeno di aberrazione della luce, osservato per la prima volta da Bradley nel 1727, è una ulteriore conferma dell'invalidità dell'ipotesi di trascinamento dell'etere

Supponiamo di osservare una stella fissa con un telescopio sulla Terra. La luce impiega un tempo Δt per percorrere la distanza dall'obiettivo all'oculare. Nel frattempo il telescopio, a causa del moto terrestre, si sarà spostato di $v \Delta t$ verso destra. La stella sarà vista dall'oculare spostata di un angolo α rispetto alla sua posizione reale, con:

$$\tan \alpha = v \Delta t / c \Delta t = v/c.$$

Poiché v è pari a circa 3×10^5 m/s si ottiene $\alpha = 20.5$ secondi d'arco. Dopo sei mesi, misurando la posizione apparente invertita si ottiene un cono di angolo $2\alpha = 41$ secondi d'arco, esattamente come rilevato dalle osservazioni. Ciò conferma che l'etere non è trascinato dalla Terra, altrimenti l'etere sarebbe in riposo rispetto ad essa, α dovrebbe essere uguale a 0 e il telescopio non dovrebbe essere inclinato.

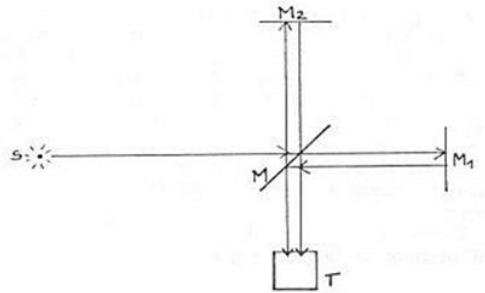


Il fenomeno di aberrazione della luce

L'esperimento di Michelson-Morley

L'esperimento di Michelson e Morley permise di abbandonare definitivamente l'ipotesi di esistenza e trascinamento dell'etere. La luce emessa dalla sorgente S veniva in parte rifratta verso uno specchio M_1 e in parte riflessa verso uno specchio M_2 .

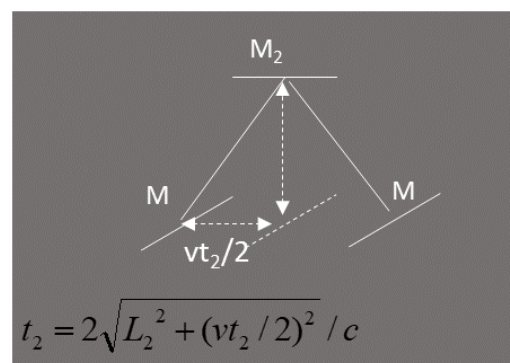
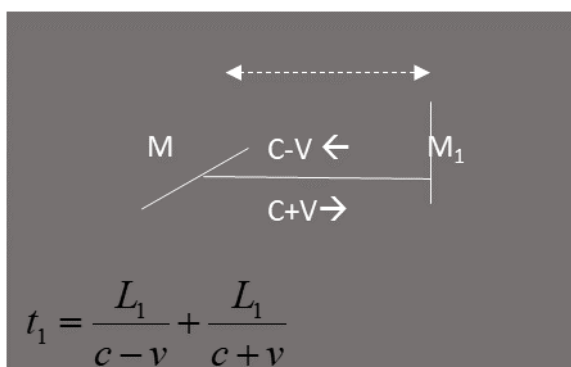
La radiazione riflessa dai due specchi veniva inviata un telescopio T dal quale si dovevano osservare frange di interferenza dovute al diverso cammino ottico della radiazione.



Schema dell'esperimento di Michelson e Morley

Se L_1 è la distanza dello specchio M_1 dalla lamina M e L_2 quella dello specchio M_2 , allora la luce impiegherebbe nei due percorsi due tempi $2L_1/c$ e $2L_2/c$ per giungere al telescopio T posto dietro M.

Ma la Terra, e, quindi, il laboratorio con l'interferometro, compie un moto di rivoluzione intorno al Sole. Se ipotizziamo la terra in moto con velocità v rispetto all'etere, allora il tempo impiegato dalla luce per giungere da M a M_1 e ritornare è $t_1 = L_1/(c-v) + L_1/(c+v)$, mentre quello impiegato dalla luce per giungere da M a M_2 e ritornare è t_2 . Come si può notare dalla figura, la luce che arriva su M_2 impiega un tempo $t_2 \neq t_1$ per giungere allo specchio e ritornare verso M.



I due differenti cammini nell'esperimento di Michelson-Morley

Infatti, nel tempo $t_2/2$ in cui la luce giunge verso M_2 , l'interferometro si sarà spostato di una lunghezza $vt_2/2$ rispetto all'etere.

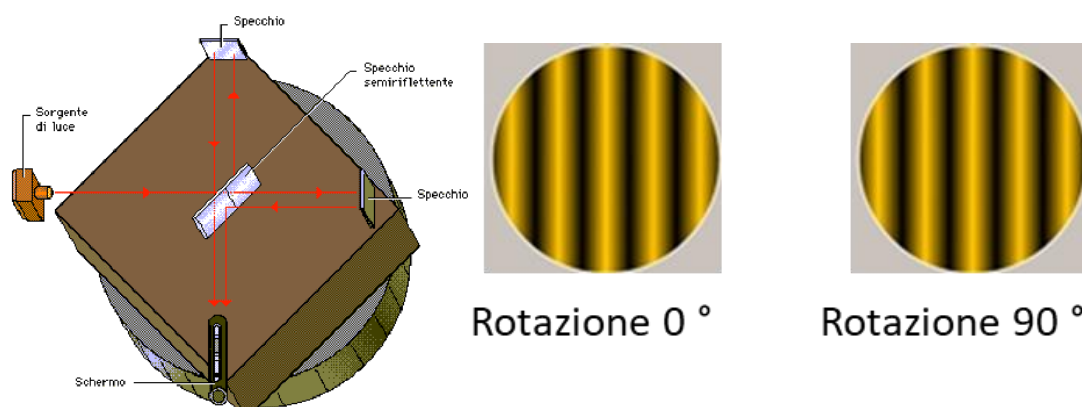
Si otterrà, per i due cammini:

$$t_1 = \frac{2L_1}{c} \left(\frac{1}{\frac{1-v^2}{c^2}} \right) \qquad t_2 = \frac{2L_2}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1-v^2}{c^2}}} \right)$$

I tempi per raggiungere il telescopio sono quindi differenti per i due cammini ottici, dando luogo a frange di interferenza.

Ruotando di 90° l'interferometro questi tempi si dovrebbero invertire, e si dovrebbe notare una differenza delle frange di interferenza rispetto a quelle prodotte dall'interferometro non ruotato.

Se la lunghezza dei due bracci è $L_1=L_2=L \approx 22\text{m}$ e v è la velocità della terra rispetto al sistema di riferimento dell'etere si dovrebbe osservare una differenza delle frange di interferenza ottenute dall'interferometro prima e dopo la rotazione di 90° pari a $2Lv^2/c^2$, corrispondente a circa la metà della lunghezza d'onda della sorgente nel giallo, ma nessuna differenza nelle frange di interferenza è osservata.



L'apparato dell'esperimento ruotato di 90° e le frange di interferenza risultanti

Conseguenze dell'esperimento

L'esperimento di Michelson e Morley dimostrò che la luce ha sempre la stessa velocità c e che non esiste alcun sistema di riferimento inerziale privilegiato rispetto ad essa.

Per gli esperimenti effettuati con il suo interferometro, Michelson ottenne il Premio Nobel per la Fisica nel 1907.



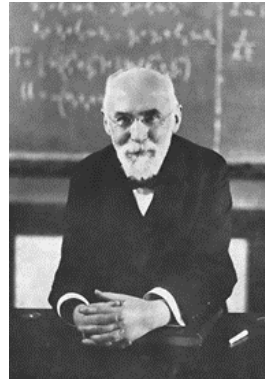
Albert Abraham Michelson

Se la luce ha sempre la stessa velocità per tutti gli osservatori, allora bisogna concludere che evidentemente le trasformazioni di Galileo non sono valide e devono essere sostituite.

Già Poincaré e poi Lorentz intuirono che era necessario modificare le trasformazioni di Galileo e cambiare il concetto assoluto di tempo, ma essi ritenevano sempre valida la meccanica classica. Fu però solo Einstein ad afferrare che l'intera meccanica newtoniana era inadatta a spiegare la costanza della velocità della luce in tutti i sistemi di riferimento inerziali e che essa doveva essere sostituita.



Henry Poincaré

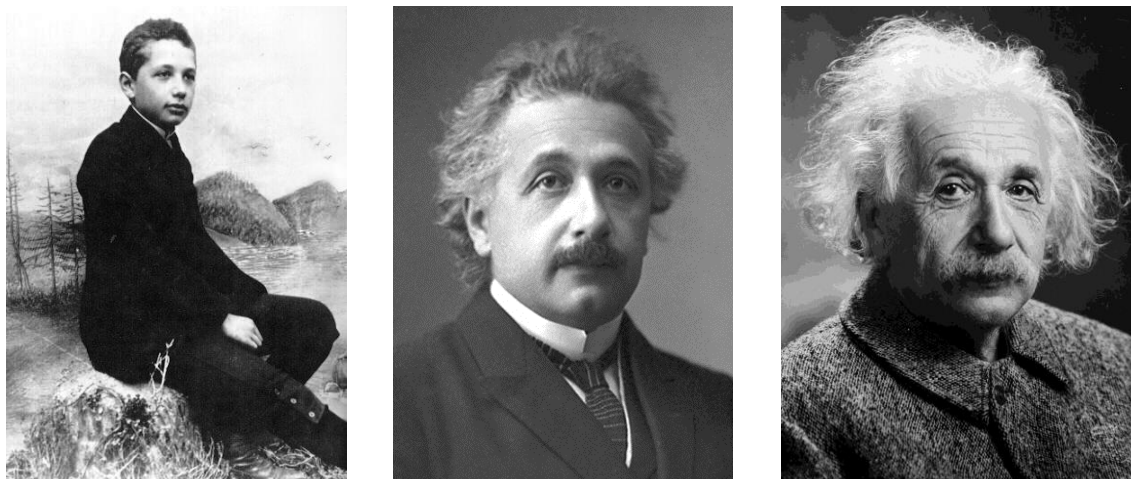


Hendrick Antoon Lorentz

Albert Einstein: note biografiche

Albert Einstein nacque ad Ulma, in Germania, nel 1879. Ciò che maggiormente sorprende dei suoi studi scolastici è che non brillasse, come studente. Non amava l'approccio dogmatico di insegnamento dell'epoca, e andò spesso in conflitto con i suoi professori. Fu bocciato agli esami per essere ammesso al Politecnico, che dovette rifare l'anno successivo.

Nel 1900 Einstein concluse gli studi al Politecnico, diplomandosi con voto 4,9 su 6, quarto su cinque promossi. Egli fu l'unico dei diplomati a non ottenere un posto come assistente.



Albert Einstein (1871-1955) da ragazzo, da adulto e in età avanzata

Ottenuto il diploma, Einstein lavorò all'Istituto Brevetti di Berna. Il suo lavoro non lo occupava tutta la giornata e nel tempo libero disponibile lavorava segretamente al nuovo concetto di tempo e allo sviluppo della relatività ristretta.

Sorprendentemente, senza essere entrato in contatto con la comunità scientifica accademica, sviluppò la teoria della relatività ristretta che presentò in un famoso articolo del 1905: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (Sull'elettrodinamica dei corpi in movimento) che gettò le basi della teoria della relatività ristretta. Nello stesso anno pubblicò un altro articolo per spiegare l'effetto fotoelettrico, articolo per il quale vinse il premio Nobel nel 1921.

Conseguì il dottorato nel 1906 e insegnò prima a Berna, poi a Praga e Berlino, dove divenne, nel 1914, direttore dell'istituto di Fisica. Nel 1915 propose la teoria della relatività generale, confermata dall'astronomo Sir Arthur Eddington che misurò la deviazione della luce stellare da parte del sole durante una eclisse solare.

Dopo la salita al potere di Hitler, nel 1933, le successive leggi razziali e il conseguente licenziamento di tutti i docenti universitari di origine ebraica, si trasferì a Princeton, divenendo cittadino degli Stati Uniti.

Morì a Princeton il 17 aprile 1955 per un aneurisma improvviso.

Come osservò Martin J. Klein in "Klein J. M., "Einstein and Some Civilized Discontents", *Physics Today*, 18 (1), 38, 1965.

"Ciò che è veramente sorprendente dei primi anni della vita di Einstein è che nessuno dei suoi superiori si sia accorto del suo genio."

"Nel tempo libero, durante quei 7 anni a Berna, il giovane esaminatore di brevetti scrisse una serie di miracoli scientifici: nessun termine è così adeguato. Egli tracciò niente di meno che le linee principali sulle quali si è sviluppata la fisica teorica del ventesimo secolo."

"E, per di più Einstein fece tutto questo completamente da solo, senza alcun contatto con gli ambienti accademici o con gli esperti della materia."

I postulati della relatività ristretta

La relatività ristretta spiega tutte le contraddizioni sortite dall'esigenza di introdurre un mezzo, l'etere, in cui si propagassero le onde elettromagnetiche, per spiegare l'esistenza di un sistema di riferimento assoluto per le equazioni di Maxwell.

La relatività ristretta si basa sui seguenti due postulati:

- 1) *Le leggi della fisica sono le stesse in tutti i riferimenti inerziali (postulato di relatività).*
- 2) *La velocità della luce è una costante universale per tutti i sistemi di riferimento inerziali*

Il primo postulato decreta il superamento del principio di relatività galileana con un principio di relatività estendibile a tutte le leggi della fisica. Il secondo postulato stabilisce la costanza della velocità della luce in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

I due postulati determinano una nuova concezione del tempo, non più visto come un tempo assoluto. Lo scorrere del tempo è differente per due sistemi di riferimento inerziali in moto l'uno rispetto all'altro.

Cadono quindi i concetti di spazio assoluto (*etere lumifero*) e tempo assoluto.

Le trasformazioni di Lorentz

Consideriamo un fronte d'onda sferico di un'onda elettromagnetica. Due osservatori in moto relativo uniforme con velocità v ,

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

Per il primo postulato entrambi gli osservatori osserveranno il fronte d'onda espandersi con velocità c .

Partendo da queste due equazioni, consideriamo una trasformazione lineare dei due sistemi di riferimento (x, y, z, t) e (x', y', z', t') :

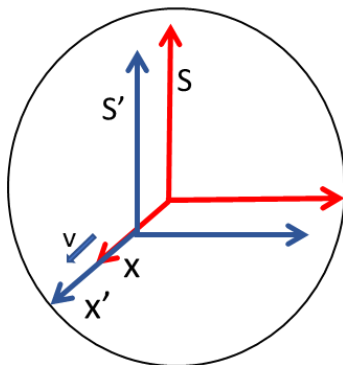
$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t$$

$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t$$

$$t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t$$

Poniamo, per semplificare il calcolo, v lungo l'asse x , come in figura.



I due sistemi di riferimento S e S' si ottiene $y = y'$ e $z = z'$; inoltre, x' e y' non dipenderanno da y e z otteniamo, allora:

$$x' = a_{11}x + a_{14}t$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = a_{41}x + a_{44}t$$

Partendo da queste trasformazioni generalizzate, e considerando la costanza della velocità della luce, Lorentz sviluppò un sistema di trasformazioni invariante rispetto alle equazioni di Maxwell.

Fu Einstein a comprendere che queste trasformazioni danno luogo ad una nuova teoria della fisica e all'abbandono della meccanica classica, che rappresenta solo una approssimazione della nuova teoria accettabile per velocità molto minori della velocità della luce.

Paragoniamo le trasformazioni di Lorentz con quelle di Galileo:

Trasformazioni di Galileo	Trasformazioni di Lorentz
$x' = x - vt$	$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
$y' = y$	$y' = y$
$z' = z$	$z' = z$
$t' = t$	$t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Ciò che appare più evidente è che il tempo assoluto delle trasformazioni di Galileo ora scompare; i tempi dei due osservatori, t e t' , sono differenti.

Inoltre, spazio e tempo, x' e t' , sono tra loro correlati e dipendono dalla velocità della luce in base a un fattore $\beta^2 = v^2/c^2$. Quando questo fattore è trascurabile, v/c tende a zero e le trasformazioni di Lorentz diventano le trasformazioni di Galileo.

È interessante notare come le equazioni di Lorentz assumono una forma simmetrica considerando una unità di misura spaziale della variabile temporale:

$$w = ct \text{ e ponendo } \beta = v/c.$$

$$x' = \frac{x - \beta w}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$x = \frac{x' + \beta w'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$w' = \frac{w - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

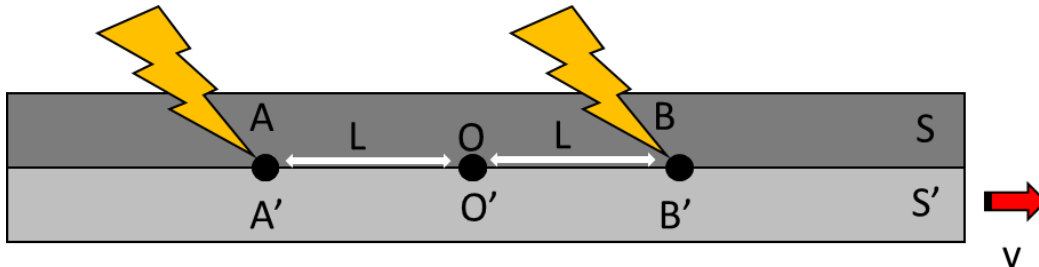
$$w = \frac{w' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Si può notare la completa simmetria delle due equazioni che evidenziano come esse trattino spazio e tempo in un'unica struttura quadrimensionale: lo spazio-tempo. Le trasformazioni inverse diventano:

Simultaneità degli eventi

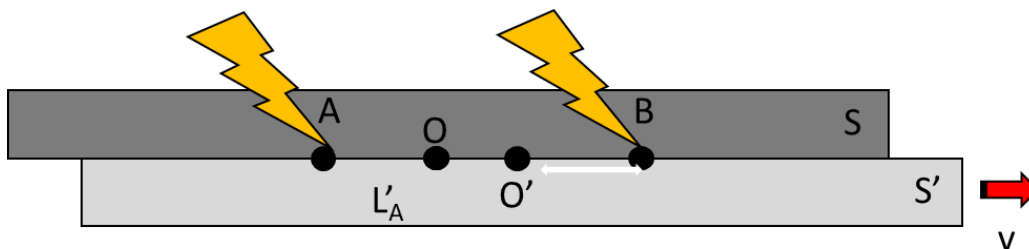
La prima evidenza della relatività del tempo è che due eventi non sono più simultanei per i due osservatori.

Supponiamo che due fulmini colpiscano il suolo in A e B, equidistanti da O. Un osservatore in O osserverà una simultaneità tra i due eventi. Se $L = OA = OB$, allora l'osservatore in O vedrà i due eventi simultaneamente dopo un tempo $t = L/c$.



Simultaneità dei due eventi per l'osservatore O

Ciò non è vero, per l'osservatore in O', in moto con velocità v rispetto a O. Egli vedrà accadere prima il fulmine in B, poi quello in A, in quanto, mentre la luce arriva all'osservatore, O' si sta spostando con velocità v avvicinandosi a B



I due eventi non sono simultanei per l'osservatore O

Quindi, i due eventi giunti simultaneamente in O, non giungeranno simultaneamente in O'.

Allora:

Due eventi simultanei in un sistema di riferimento non sono simultanei in un altro sistema di riferimento in moto rispetto al primo: **la simultaneità è un concetto relativo e non assoluto.**

Cambia la concezione della fisica che il tempo fosse una grandezza assoluta indipendente dal moto degli osservatori. Due eventi simultanei per un osservatore non lo sono per un altro osservatore in moto rispetto al primo.

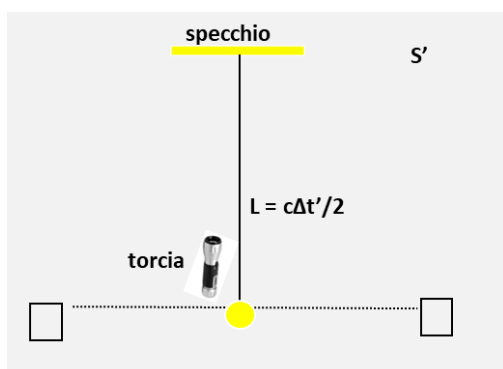
La relatività della simultaneità si spiega con il fatto che la velocità della luce non è infinita, ma è finita e costante in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

La dilatazione dei tempi

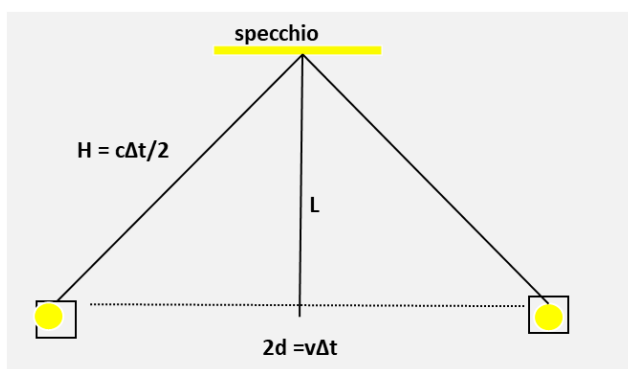
Consideriamo due osservatori, S e S', il secondo in moto relativo uniforme con velocità v rispetto al primo.

Un osservatore solidale con S' invia un segnale luminoso su uno specchio posto sul soffitto a distanza L da lui. Lo specchio rifletterà il segnale che giungerà all'osservatore dopo un tempo $\Delta t' = 2L/c$.

Un osservatore solidale con S vedrà il segnale riflesso dallo specchio solidale con S' compiere un cammino obliquo di lunghezza $H = c \Delta t/2$.



Cammino del segnale luminoso per S'



Cammino del segnale luminoso per S

Otteniamo così: $(\Delta t)^2 = 4H^2/c^2 = 4(L^2 + (v\Delta t/2)^2)/c^2$.

E ricordando che $\Delta t' = 2L/c$, abbiamo, infine:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \Delta t'$$

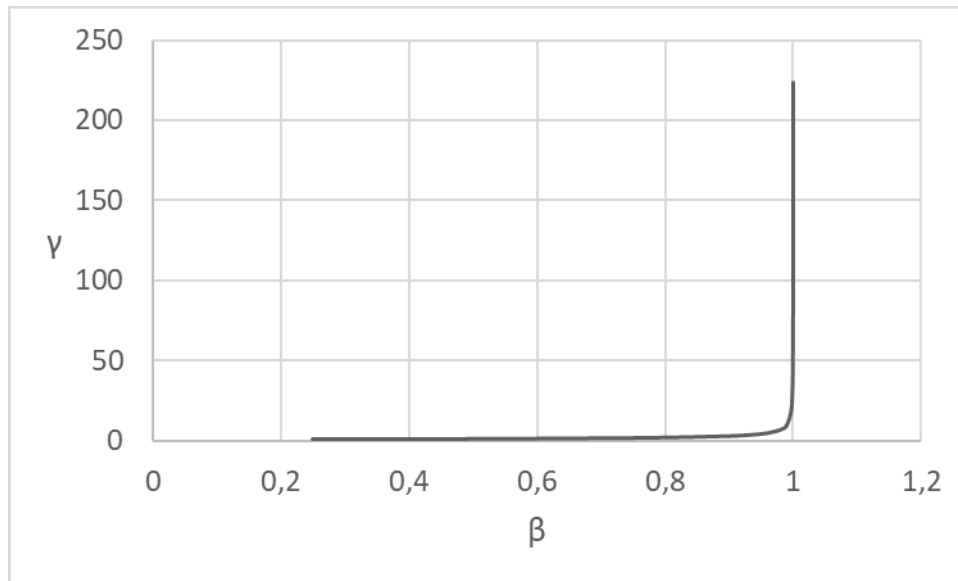
che è l'equazione di dilatazione dei tempi.

$\Delta t'$ è detto anche tempo proprio Δt_p . Il tempo proprio è l'intervallo di tempo tra due eventi misurato da un osservatore che vede i due eventi accadere nello stesso punto dello spazio.

Quindi, nel nostro caso è S' a misurare il tempo proprio. Invece, l'osservatore S misurerà un tempo più lungo di un fattore moltiplicativo:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Il parametro γ tende all'infinito al tendere a 1 del parametro β , come è mostrato in figura.



Andamento del parametro γ al variare di β .

Se S' misurasse un tempo proprio del segnale luminoso pari a 2s, e S' viaggiasse con velocità $v = 0.9c$ rispetto a S , allora il tempo misurato da S sarebbe pari a 4.59 s, ovvero più del doppio del tempo proprio.

Se v fosse pari a 0.9999 s, allora S misurerebbe per il segnale luminoso un tempo Δt di circa 7.45 minuti!

La contrazione delle lunghezze

Consideriamo due osservatori, S e S' , che devono misurare la lunghezza di un oggetto. Sia S in moto rispetto all'oggetto e S' in quiete rispetto all'oggetto

S' è in quiete rispetto all'oggetto, quindi misurerà la lunghezza dell'oggetto cronometrando i passaggi di S alle due estremità dell'oggetto. Invece, S , partendo da una estremità arriverà all'altra estremità viaggiando con velocità v . Ad S sembrerà che il corpo si muova verso di lui a velocità v . Egli misurerà il lasso di tempo tra il passaggio della prima estremità dell'oggetto e della seconda.

L'osservatore solidale col sistema S misurerà un tempo proprio, in quanto, posto ad una estremità della sbarra, vedrà sopraggiungere l'altra estremità della sbarra dopo un tempo

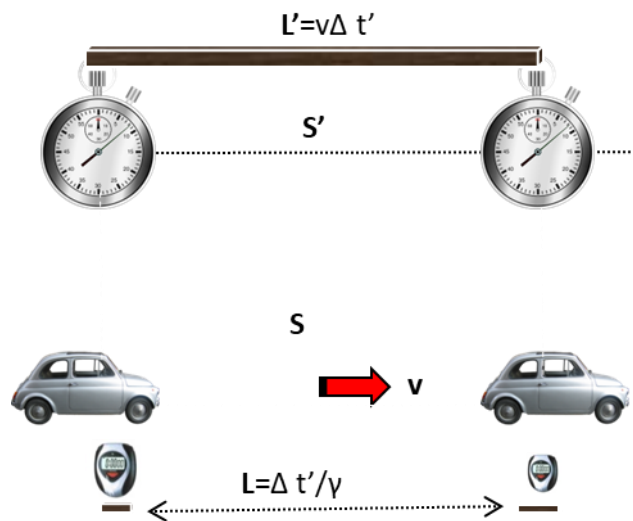
$$\Delta t_p, \text{ dove } \Delta t_p = \Delta t' / \gamma.$$

A causa delle dilatazioni dei tempi, egli misurerà una lunghezza pari a:

$$L = v \Delta t_p = v \Delta t' / \gamma.$$

L'osservatore solidale con S' misurerà una lunghezza propria $L_p = v \Delta t'$, in quanto è in quiete rispetto all'oggetto e cronometrerà i momenti in cui S , muovendosi a velocità v , raggiungerà la prima e la seconda estremità dell'oggetto.

Se ne deduce che $L = v \Delta t' / \gamma = L_p / \gamma$. Allora la lunghezza misurata da S sarà minore rispetto alla lunghezza propria, con un fattore di riduzione $1/\gamma$.



Per l'osservatore S la lunghezza dell'oggetto sarà minore di quella propria di un fattore $1/\gamma$

Si otterrà: quindi

$$L = \frac{1}{\gamma} L_p = \sqrt{1 - \beta^2} L_p = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_p$$

Più v si avvicina alla velocità della luce, più ridotte saranno le lunghezze misurate dall'osservatore S.

Per riassumere:

Δt_p = tempo proprio = intervallo di tempo tra due eventi misurato da un osservatore che vede i due eventi accadere nello stesso punto dello spazio.

Se Δt = tempo misurato da un altro osservatore in moto rettilineo uniforme con velocità v rispetto al primo, allora (*Dilatazione dei tempi*):

$$\Delta t = \gamma \Delta t_p$$

L_p = lunghezza propria = lunghezza di un oggetto misurata da un osservatore in quiete rispetto all'oggetto.

Se L = tempo misurato da un altro osservatore in moto rettilineo uniforme con velocità v rispetto al primo, allora (*Contrazione delle lunghezze*):

$$L = \frac{1}{\gamma} L_p$$

Una prova sperimentale: i muoni

I muoni sono creati negli strati superiori dell'atmosfera dai raggi cosmici solari. Essi hanno vita media brevissima, pari a 2.2×10^{-6} s, in quanto decadono in un elettrone ed in un neutrino muonico. Hanno una velocità prossima a c che però non permette di giustificare il fatto che sono rilevati sul suolo terrestre.

Infatti, pur supponendo che i muoni viaggino a velocità $c = 3 \times 10^8$ m/s, il loro cammino medio sarebbe pari a $l = 3 \times 10^8 \cdot 2.2 \times 10^{-6} = 660$ m. In pratica non raggiungerebbero mai il suolo.

Come è possibile allora che siano rilevati al suolo?

Il motivo è la contrazione delle lunghezze. Nel sistema di riferimento del muone, che si muove a velocità prossima a c verso il suolo terrestre, la terra dista meno di 660 m.

Il sistema di riferimento del muone misura un tempo proprio, quello del laboratorio terrestre una lunghezza propria. Tale lunghezza, nel sistema di riferimento del muone è contratta di un fattore $1/\gamma$.

Se, ad esempio, la velocità del muone fosse $0.999 c$, allora avremmo $\gamma = 22.366$ e nel sistema del muone una distanza $L_p = 1 \times 10^4$ m sarebbe contratta in una distanza $L = L_p / \gamma = 447.102$ m !!!

Il paradosso dei gemelli

Il paradosso dei gemelli è un apparente paradosso sostenuto principalmente dal filosofo inglese Herbert Dingle, per confutare la teoria della relatività di Einstein. Einstein stesso, oltre a Born, mostrò l'illogicità di questo paradosso e la piena validità della teoria della relatività.

Il paradosso tratta di due gemelli della stessa età nell'anno 3000. Uno dei due sale su un'astronave per dirigersi verso la stella Wolf 359, a 7.78 anni luce dalla Terra, mentre l'altro resta a casa. Nell'anno 3000 l'astronave può viaggiare ad una velocità $v = 0.8c$ cui corrisponde $\gamma = 1.67$.

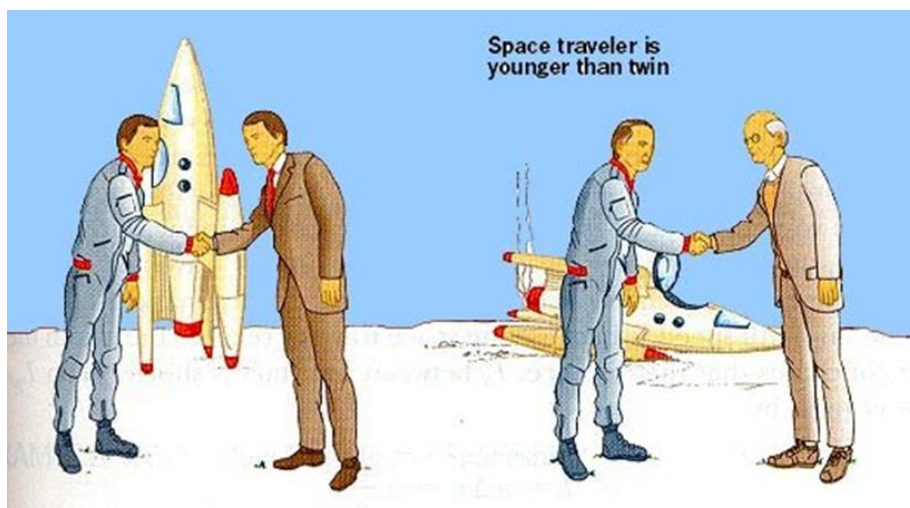
Nel sistema di riferimento della terra l'astronave impiegherà 7.78 anni luce per raggiungere la stella, e altrettanti per ritornare di nuovo sulla terra. Poiché l'astronave viaggia alla velocità di $0.8c$, in tale sistema l'astronave impiegherà $7.78/0.8 = 9.725$ anni per giungere alla stella e altrettanti per ritornare. Quando ritornerà l'astronave, per il gemello sulla terra saranno trascorsi 19.45 anni, ovvero circa 20 anni dalla partenza.

Nel sistema di riferimento dell'astronave, a causa della contrazione delle lunghezze, la distanza da percorrere per arrivare alla stella sarà $L/\gamma = 7.78/1.67 = 4.67$ anni luce.

Poiché l'astronave viaggia alla velocità di $0.8c$, essa impiegherà un tempo di $4.67/0.8 = 5.84$ anni per giungere alla stella, ed altrettanti per ritornare.

Dunque, quando ritornerò sulla Terra, per il gemello nell'astronave saranno trascorsi 11.67 anni dalla partenza.

In pratica, mentre per il gemello sulla terra saranno trascorsi quasi 20 anni, per il gemello nell'astronave saranno trascorsi quasi 12 anni!!!



Il paradosso dei gemelli: i due gemelli alla partenza e al ritorno del gemello astronauta

Il paradosso nasce dal fatto che, poiché i due sistemi di riferimento della Terra e dell'astronave sono supposti inerziali (sappiamo che la Terra non è un sistema di riferimento inerziale ma nel paradosso l'approssimiamo a tale), nessuno dei due è un sistema di riferimento privilegiato. Per il gemello astronauta è la Terra ad allontanarsi e, nel viaggio di ritorno, a muoversi verso di lui a velocità $0.8c$.

Ma il paradosso ha diverse incoerenze. La principale è che l'astronave nei pressi della stella decelera, per poi accelerare nel momento del ritorno. Il sistema di riferimento dell'astronave, quindi, non è un sistema di riferimento inerziale.

Allora la simmetria tra i due sistemi di riferimento è rotta. L'astronave, decelerando all'arrivo sulla stella e accelerando alla partenza, non sarà più considerata un sistema di riferimento inerziale e non può essere utilizzata la relatività ristretta, ma la teoria generale della relatività, che spiega correttamente il differente intervallo di tempo trascorso per i due gemelli.

Le trasformazioni delle velocità

Sappiamo che per due sistemi inerziali, l'uno in moto rettilineo uniforme a velocità v rispetto all'altro, le trasformazioni di Galileo sono: $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ e $t' = t$. Derivando si ottiene per le accelerazioni $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$, da cui la validità, in meccanica classica, delle stesse leggi del moto per qualsiasi sistema di riferimento inerziale.

Cosa accade per le trasformazioni di Lorentz? Vediamo la differenza con quelle di Galileo ponendo $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$

Trasformazioni di Galileo

$$u_x' = u_x - v$$

$$u_y' = u_y$$

$$u_z' = u_z$$

Trasformazioni di Lorentz

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \quad u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{vu_x'}{c^2}}$$

$$u_y' = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \quad u_y = \frac{u_y'}{\gamma \left(1 + \frac{vu_x'}{c^2}\right)}$$

$$u_z' = \frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \quad u_z = \frac{u_z'}{\gamma \left(1 + \frac{vu_x'}{c^2}\right)}$$

Quindi, contrariamente alle trasformazioni di Galileo, nelle trasformazioni di Lorentz le componenti trasversali della velocità, ovvero le componenti lungo y e z delle velocità del corpo, non sono invarianti rispetto alla trasformazione.

Per $v \ll c$ si ha v/c tendente a zero, γ tendente a 1 e i denominatori che tendono a 1 per tutte e tre le componenti, ottenendo di nuovo le trasformazioni di Galileo.

Cosa accade se u_x' tende a c ? In questo caso u_x potrebbe superare la velocità della luce? Verifichiamolo:

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{u_x' v}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c \frac{c + v}{c + v} = c$$

Quindi, come ci si aspettava, **la velocità della luce non può essere superata.**

La massa relativistica

Secondo la meccanica classica la massa è una costante. L'equivalenza tra massa inerziale e gravitazionale indica che la massa è una grandezza caratteristica di un corpo invariante rispetto a trasformazioni di Galileo.

Ciò non accade nella relatività ristretta. La massa di un corpo cresce se cresce la sua velocità.

Se il corpo è fermo rispetto al laboratorio in cui è effettuata la misura, la massa misurata per il corpo sarà la sua massa a riposo m_0 . Se il corpo si muove con velocità v rispetto al laboratorio la sua massa misurata sarà:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0$$

Quindi, se la particella si muovesse con velocità $v = c$ rispetto al laboratorio, la sua massa sarebbe infinita!!!

Per velocità $v \ll c$, invece, $\gamma \approx 1$. Così m può essere approssimato a m_0 , e può essere applicata con buona approssimazione la fisica classica.

Allora, poiché sappiamo che i fotoni viaggiano nel vuoto con velocità c rispetto a qualsiasi sistema di riferimento inerziale, perché la loro massa non è infinita?

Perché la loro massa a riposo è nulla, quindi la precedente formula non può essere applicata ad un fotone, in quanto si otterrebbe un valore indeterminato.

E che succede se un elettrone, di massa a riposo $9,109 \times 10^{-31}$ kg, potesse essere accelerato fino ad avere una velocità pari a $0.999c$?

Poiché per $v = 0.999 c$ $\gamma = 22.367$ e un osservatore a riposo rispetto all'elettrone in moto misurerebbe una massa $m = 2.21 \times 10^{-29}$ kg pari a 22.37 volte la massa a riposo dell'elettrone.

L'equivalenza massa-energia

Secondo la relatività ristretta massa ed energia meccanica (cinetica + potenziale) sono grandezze correlate.

La famosa relazione di equivalenza massa-energia, o equazione di Einstein è:

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2$$

Questo risultato è stato confermato in numerosissimi esperimenti di fisica particellare e nucleare.

Questa equazione fu enunciata da Einstein nel 1905 in un lavoro intitolato: Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? (L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia?).

Esso esprime che la massa altro non è che una forma di energia. Una particella che accresce la sua velocità, accresce la sua massa rispetto alla massa a riposo, quindi accresce la sua energia.

Una particella a riposo possiede un'energia:

$$E_0 = m_0 c^2$$

L'equazione di Einstein, considerando che $c^2 = 9 \times 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2$, ci rivela che con piccole perdite di massa si possono ottenere enormi quantità di energia.

Si pensi, ad esempio, ad una bomba atomica, dove meno dell'1% della massa è trasformata in energia e l'energia prodotta è 3.2×10^{11} J!!!

Una ulteriore evidenza dell'equivalenza tra massa ed energia è data dal decadimento in natura di nuclei instabili. La massa a riposo del nucleo è convertita nel decadimento in parte in particelle di massa complessiva minore e in parte in energia elettromagnetica emessa sotto forma di radiazione a diverse lunghezze d'onda.

Nei processi di fissione (o scissione) nucleare un nucleo di un elemento chimico pesante (ad esempio un nucleo di uranio o plutonio) decade in nuclei di elementi più leggeri e genera una quantità consistente di energia.

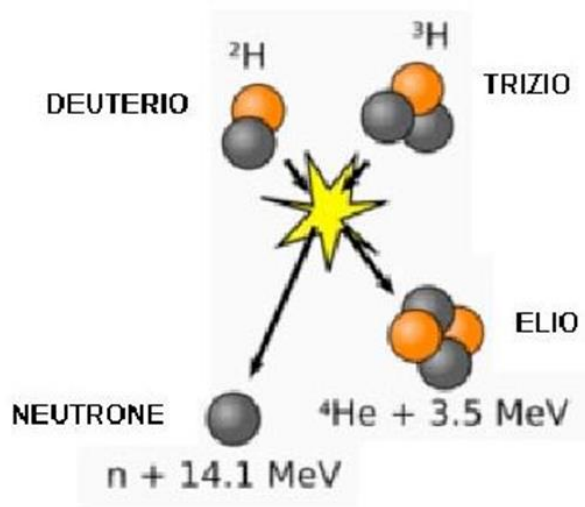
Ad esempio, l'energia liberata da un nucleo di Uranio ^{235}U è di 211 MeV pari a 3.38×10^{-11} J, di cui parte emessa sotto forma di radiazione elettromagnetica

Una ulteriore evidenza dell'equivalenza massa-energia è data dal processo di fusione nucleare. In tale processo, che, accade, ad esempio nei nuclei stellari, vere e proprie fornaci termonucleari, nuclei di elementi atomici sono compressi al punto che la forza di

gravità supera la repulsione elettromagnetica e i nuclei sono fusi tra loro per formare nuclei di elementi più pesanti, ma di massa minore della somma delle masse dei nuclei compressi. I nuclei compressi sono così ravvicinati che la forza nucleare di attrazione supera la forza di repulsione elettromagnetica tra i protoni.

Il processo di fusione è quello utilizzato nella produzione della bomba H o bomba a idrogeno.

In figura è riportata una fusione esotermica DT, in cui un nucleo di deuterio, formato da un neutrone e un protone, e un nucleo di trizio, formato da due neutroni e un protone, sono fusi per formare un nucleo di elio e un neutrone con energie, rispettivamente, di 3.5 Mev e 14.1 Mev.



La fusione esotermica DT

Il cono di luce

Consideriamo il piano spazio-tempo in figura in cui, per semplicità di visualizzazione, consideriamo soltanto l'asse x come componente spaziale. Ogni punto del piano rappresenta un evento accaduto nello spazio x al tempo t . L'asse x rappresenta l'evento presente.

Un corpo descrive una curva nel piano spazio-tempo detta linea di universo. Radiazione elettromagnetica emessa dall'origine viaggerà con velocità c ; la sua linea di universo è descritta dall'equazione:

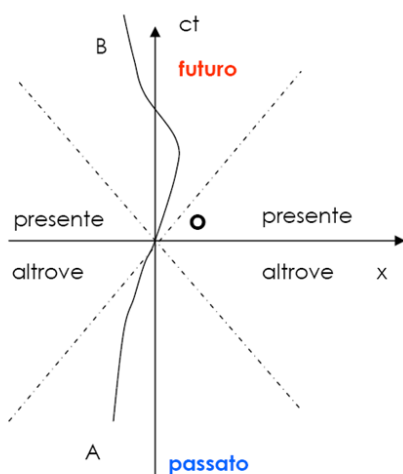
$$x^2 = c^2 t^2$$

la cui soluzione è data dalle due bisettrici.

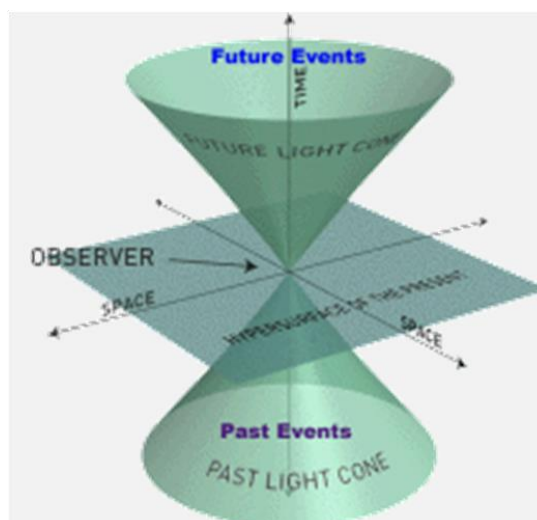
Partendo dall'origine, che è il presente nel nostro sistema di riferimento, un corpo si muove all'interno della superficie inclusa tra le due bisettrici. La linea di universo disegnata è, appunto, inserita in questa superficie. La semi-superficie al di sotto dell'origine temporale rappresenta il passato, quella al di sopra il futuro.

Il fatto che la linea di universo è ristretta in questa superficie ha origine dal vincolo che il corpo non può superare la velocità della luce.

Se prendiamo in considerazione anche la coordinata y o le coordinate y e z , la superficie entro cui è vincolata la linea di universo è rappresentata da un cono (rispettivamente, un iper-cono) detto **cono di luce**. Ogni punto nel cono rappresenta un evento accaduto nello spazio al tempo t . Il piano (x,y) rappresenta l'evento presente.



La linea di universo



Il cono di luce

Consideriamo due punti evento $A(x_A, y_A, z_A, t_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B, t_B)$

La quantità distanza tra i due eventi A e B:

$$d^2(A, B) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 - (ct_A - ct_B)^2$$

è invariante per una trasformazione di Lorentz

Essa è detta **separazione spazio-temporale** e può essere negativa, positiva o nulla.

- Quando $d^2(A, B) > 0$ il vettore $\mathbf{AB}$ è detto di tipo spazio
- Quando $d^2(A, B) < 0$ il vettore $\mathbf{AB}$ è detto di tipo tempo
- Quando $d^2(A, B) = 0$ il vettore $\mathbf{AB}$ è detto isotropo o vettore nullo

Il cono di luce descrive tutti i vettori di tempo $\mathbf{AB}$ centrati in A che sono futuri se $t > 0$ e passati se $t < 0$.

Cenni alla relatività generale

La teoria della relatività generale, fu elaborata da Albert Einstein nel 1915 e rappresenta una estensione della teoria della relatività ristretta.

Einstein partì dall'equivalenza tra massa inerziale e massa gravitazionale. Egli definì il *principio di equivalenza tra massa gravitazionale ed inerziale*, stabilendo che massa inerziale e gravitazionale sono perfettamente identiche.

Einstein correlò questo principio al *principio di equivalenza forte*, che stabilisce che, nei pressi di masse in moto, un osservatore in un sistema di riferimento solidale con tali masse non può distinguere tra una accelerazione prodotta da una forza esterna dall'accelerazione prodotta dal campo gravitazionale.

Einstein chiarì il significato del principio di equivalenza con un esempio, *l'esempio dell'ascensore di Einstein*. In esso un osservatore è in un ascensore insieme a corpi pesanti. Se l'ascensore è mosso da una forza verso l'alto o verso il basso, l'osservatore in esso non riesce a distinguere se l'ascensore è mosso da una forza esterna oppure è attratto da un campo gravitazionale formato da masse in quiete.



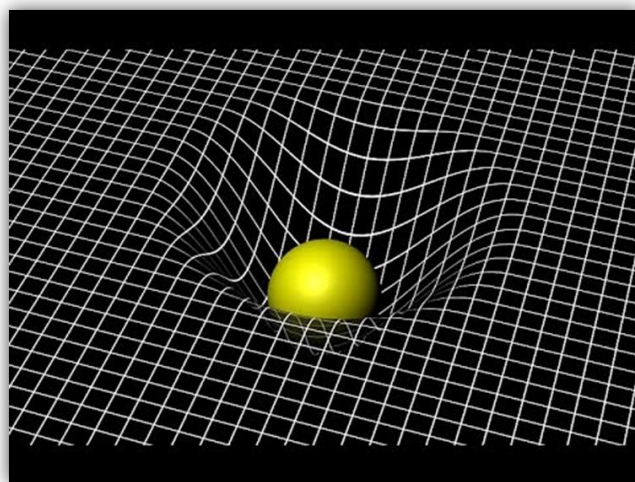
L'esempio dell'ascensore di Einstein

Prima Eotvos e poi Dicke nel 1960 confermarono la congettura di Einstein mostrando sperimentalmente che massa inerziale e gravitazionali sono identiche.

Einstein nel 1915 determinò un'equazione, detta **equazione di campo di Einstein**, in cui il campo gravitazionale è rappresentato da una curvatura dello spazio-tempo.

La forza gravitazionale non è più vista come una interazione tra corpi dotati di massa, come in fisica classica, ma come un effetto sulla geometria dello spazio-tempo che ne genera una curvatura nei pressi dei corpi.

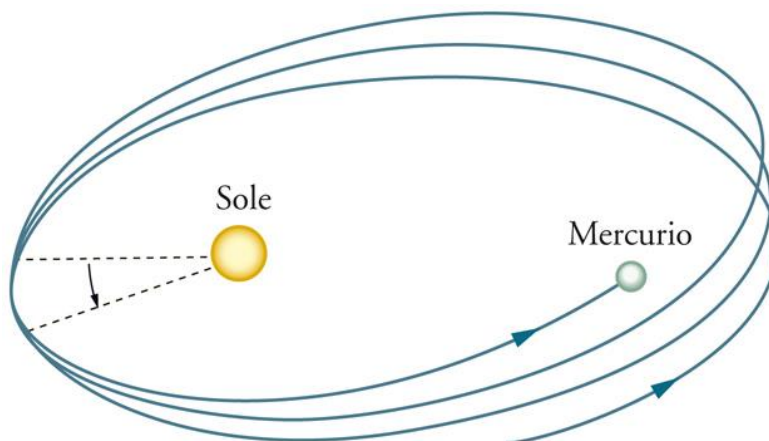
Immaginiamo lo spazio-tempo come formato da un telo elastico teso che poggia su un piano. In assenza di masse poggiate sulla sua superficie la forma del telo è perfettamente piana e le linee orizzontali e verticali del telo formano angoli retti. Se un corpo massiccio è poggiato sul telo, il telo si curverà intorno al corpo, assumendo, come in figura, una forma incurvata descritta dalla geometria non euclidea.



Curvatura dello spazio-tempo

L'equazione di Einstein si basa su complessi concetti matematici soprattutto di algebra tensoriale e geometria differenziale. La curvatura di superfici fu introdotta da Carl Friedrich Gauss e successivamente ripresa da Bernhard Riemann che studiò a fondo le superfici non euclidee.

La validità dell'equazione di Einstein fu dimostrata in molti test fisici, tra cui la verifica della precessione del perielio di Mercurio il cui valore era stato previsto da Einstein applicando la sua teoria.



Precessione del perielio di Mercurio predetta dalla teoria della relatività generale.

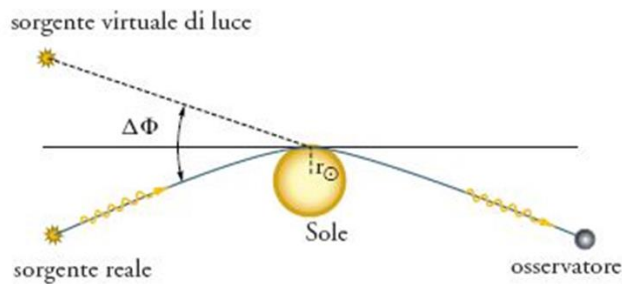
Prove della deflessione della luce

Già Cavedish nel 1784 e Soldner nel 1801 prevedero la deflessione della luce in presenza di oggetti massicci. Einstein effettuò il calcolo della curvatura della luce in presenza di oggetti di grande massa.

Fu Sir Artur Eddington nel 1919 a misurare questo valore, misurando la variazione della posizione delle stelle visibili accanto al Sole in una eclissi solare. Le misurazioni dell'angolo di deflessione, compiute simultaneamente nelle città di Sobral in Brasile e

nella repubblica africana di São Tomé e Príncipe, confermarono il valore predetto mediante la relatività generale.

Successivamente, altre misurazioni di maggior precisione hanno confermato il valore dell'angolo di deflessione predetto dalla teoria.



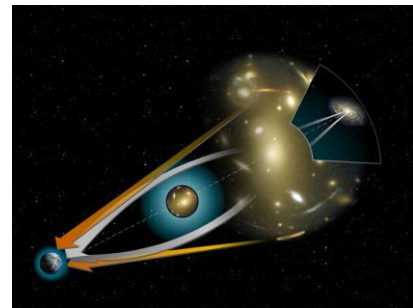
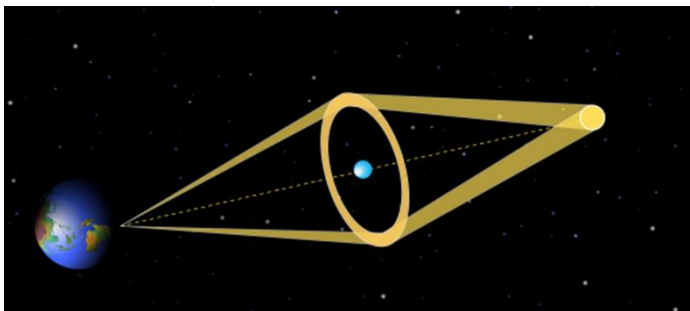
Deflessione della luce stellare da parte del Sole

Le lenti gravitazionali

Una *lente gravitazionale* è un fenomeno di deflessione della radiazione elettromagnetica emessa da una sorgente a causa della presenza di un oggetto massiccio presente tra la sorgente e l'osservatore.

Questo fenomeno è provocato dalla deformazione dello spazio-tempo creato dall'oggetto massiccio. Il cammino proveniente da una sorgente esterna è incurvato a causa della curvatura dello spazio-tempo creato dall'oggetto massiccio, che convoglia la radiazione allo stesso modo con cui una lente convoglia raggi luminosi verso un punto.

Il fenomeno di deflessione della luce nella sperimentazione di Sir Arthur Eddington durante l'eclissi del 1919 rappresenta un fenomeno di lente gravitazionale.

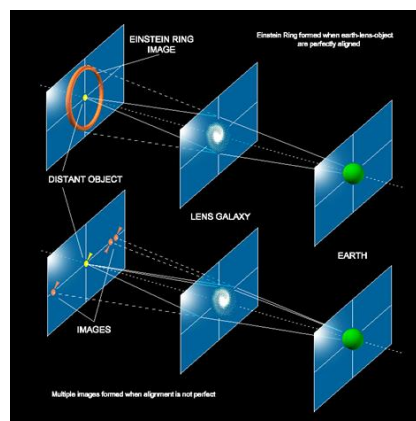
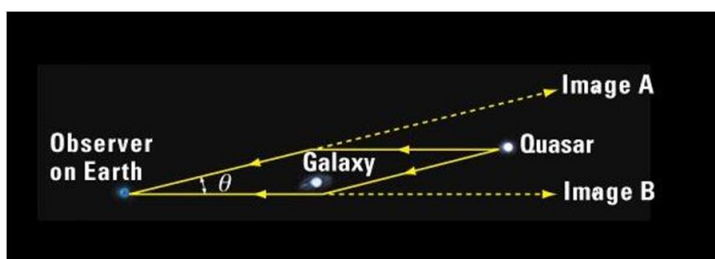


Esempi di lenti gravitazionali

A scala maggiore si possono osservare potenti lenti gravitazionali in presenza di galassie massicce o ammassi di galassie. Una galassia massiccia frapposta tra un quasar e la Terra può funzionare da lente gravitazionale convogliando verso la Terra la radiazione proveniente dal quasar. A un osservatore sulla Terra sembrerà che i quasar rilevati siano due, posti in due direzioni opposte.

Se la Terra, la sorgente e il corpo massiccio frapposto sono perfettamente allineati l'osservatore vedrà un anello detto **anello di Einstein (Einstein ring)**.

La lente produce una **distorsione** della sorgente, che l'osservatore vedrà geometricamente deformato.



Lenti gravitazionali prodotte da galassie massicce e quasar

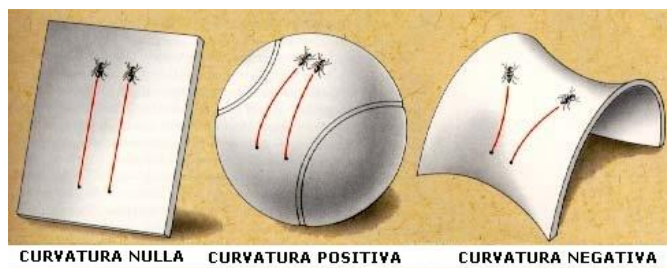
I modelli di universo

La Relatività Generale mostra che oggetti massicci causano la curvatura dello spazio-tempo. Allora, in base alla quantità totale di massa nell'universo, l'universo assume una diversa geometria., ci sono tre possibili geometrie per l'Universo. Ogni geometria implica un diverso passato e un diverso futuro per l'Universo.

I tre tipi di geometrie possibili (K) sono:

- universo piatto ($K = 0$, curvatura nulla $\rightarrow$ geometria euclidea)
- universo con curvatura positiva ($K > 0$, curvatura positiva $\rightarrow$ geometria sferica)
- universo con curvatura negativa ($K < 0$, curvatura negativa $\rightarrow$ geometria iperbolica).

Se simuliamo lo spazio-tempo quadrimensionale con uno spazio bi-dimensionale otteniamo le seguenti superfici:



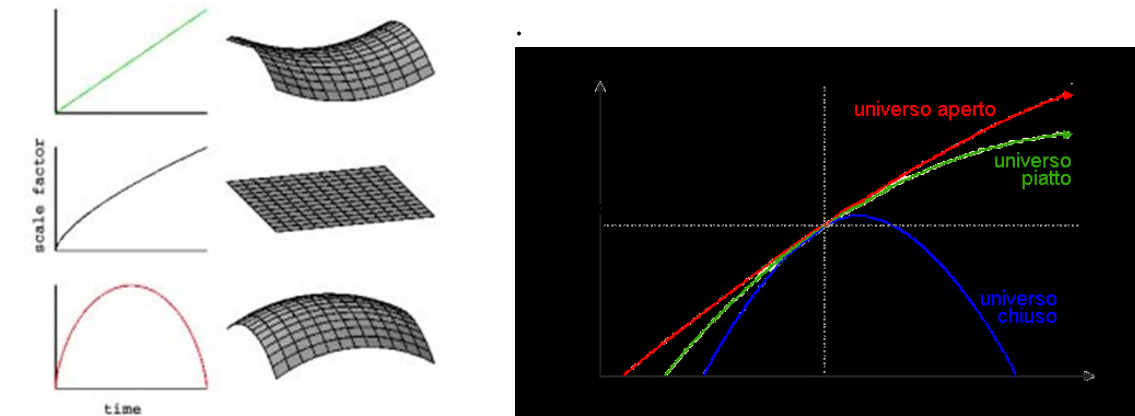
Le tre superfici che simulano lo spazio-tempo bidimensionale

Le tre diverse curvatures generano tre diversi scenari futuri per l'universo.

Se lo spazio ha curvatura negativa, la massa dell'universo non è sufficiente per fermarne l'espansione. L'universo si espanderà indefinitamente (Universo aperto o in espansione).

Se lo spazio ha curvatura nulla (cioè è "piatto"), contiene esattamente la massa necessaria a far terminare la sua espansione, ma ciò accadrà solo dopo un tempo infinito. L'universo si espanderà indefinitamente, ma le galassie si allontaneranno con velocità decrescente nel tempo e tendente a zero in un tempo infinito. (Universo piatto o euclideo “).

Se lo spazio ha curvatura positiva, la sua massa è sufficiente a fermare l'attuale espansione. L'universo terminerà in un tempo finito la sua espansione e si contrarrà. In un momento del futuro le galassie smetteranno di allontanarsi tra loro e cominceranno ad avvicinarsi. (Universo chiuso).



I tre modelli di universo

La Relatività Generale, con l'utilizzo del modello di Friedmann-Robertson-Walker permette di ricavare una densità critica per l'universo:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 8 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$$

che è detta *equazione di Friedmann*.

H_0 è la costante di Hubble, che permette di stimare la distanza d di una galassia dalla sua velocità di allontanamento $v = H_0 d$. Stime recenti danno per H_0 un valore di $71.9 \pm 2.7 \text{ km/s/Megaparsec}$.

G è la costante di gravitazione universale ($6.67408 \pm 0.000031 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg/s}^2$).

Sia $\Omega = \rho / \rho_c$, con ρ densità dell'Universo.

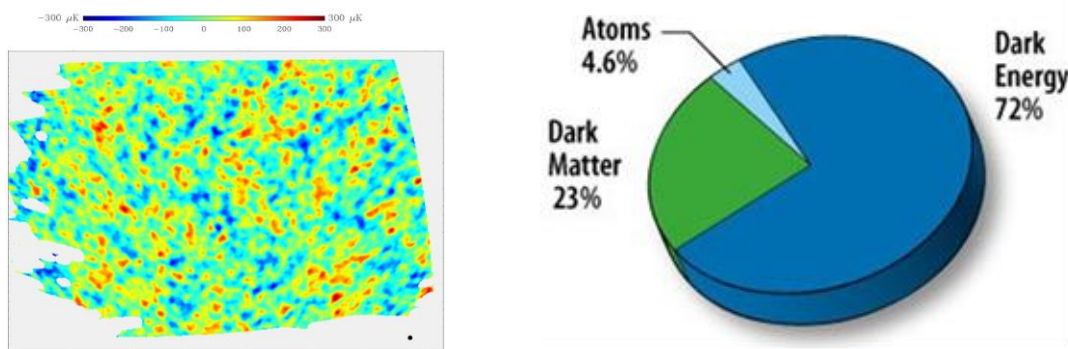
Dall'equazione di Friedmann segue che:

$\Omega > 1 \rightarrow k > 0$ (universo con curvatura positiva)

$\Omega = 1 \rightarrow k = 0$ (universo piatto)

$\Omega < 1 \rightarrow k < 0$ (universo con curvatura negativa).

Dai risultati di un'analisi dettagliata della radiazione di fondo effettuata in Antartide (esperimento BOOMERanG) sono state effettuate stime della densità dell'universo, l'universo in cui risulta $\rho \approx \rho_c$, quindi che l'universo è piatto. Solo il 4.6% della massa di questo universo è costituito da materia convenzionale (materia barionica), di cui solo $\frac{1}{4}$ visibile. Il restante 95.4% della massa dell'universo è costituita da materia oscura non barionica (23%) e da energia oscura (72%).



Anisotropia della radiazione di fondo e distribuzione della massa e dell'energia nell'Universo

Una ipotesi futuristica: il tachione

Per tachione si intende una ipotetica particella la cui massa a riposo è immaginaria. Nessun tachione è stato rilevato in laboratorio, ma la sua esistenza non è contraddetta dalla relatività ristretta.

Infatti, se consideriamo l'equazione di Einstein:

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Che possiamo anche scrivere come:

$$E = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}} \sqrt{1 - \frac{v}{c}}}$$

Essendo la massa a riposo un numero immaginario, affinché l'energia sia un numero reale, il denominatore deve essere un numero immaginario.

Ma ciò accade solo se $v > c$, quindi solo se la velocità del tachione è maggiore di quella della luce!!!

Dagli anni ottanta furono effettuati diversi esperimenti di laboratorio per rilevare i tachioni ma i risultati sono stati finora negativi. Nuovi esperimenti sui neutrini forse potranno dare nel futuro risultati positivi, rivelando che i neutrini sono tachioni, come predisse Ettore Majorana nel 1932.

Se in futuro saranno rilevate queste particelle, allora sarà possibile invertire il cono di luce dello spazio-tempo e viaggiare verso il passato. Ciò determinerebbe una contraddizione, perché viaggiando verso il passato si produrrebbe una alterazione del presente, si potrebbe alterare la linea d'universo.

Inoltre il tachione, oltre a raggiungere velocità superiori a quella della luce, a differenza di ogni altra particella, accresce la sua velocità se si fa diminuire la sua energia. Ciò permetterebbe di far raggiungere al tachione velocità inimmaginabili. Una ipotetica astronave composta da tachioni potrebbe raggiungere in tempi relativamente brevi stelle e galassie esterne ad una velocità anche molto superiore a quella della luce.



Immaginaria astronave del futuro con velocità superiore a quella della luce

Bibliografia

- Callahan, James J (2000): “*The Geometry of Spacetime: an Introduction to Special and General Relativity*”. Springer, New York, , ISBN 0-387-98641-3.
- Carroll S., M. (2004), “*Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*” - Addison-Wesley- 528 pp, ISBN: 978-0805387322.
- Christodoulides C. (2016): “*The Special Theory of Relativity: Foundations, Theory, Verification, Applications*” - Springer Verlag, 500 pp. ISBN: 978-3319252728.
- Einstein A. (1905): “*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*” - Annalen der Physik 17 (1905), pp. 891-921,
- Gasparini M. (2010): “*Manuale di relatività ristretta*” – Springer Verlag, Milan, 158 pp. DOI: 10.1007/978-88-470-1605-7.
- Hobson M. P. (2006): “*General Relativity: An Introduction for Physicists*” - Cambridge University Press, 592 pp., ISBN: 978-0521829519.
- Resnick R. (2000): “*Introduzione alla relatività ristretta*” – Casa Editrice Ambrosiana, 244 pp., ISBN: 978-8840807423.

Il modello standard ed oltre ...

Il *bosone* di Higgs

Ferdinando Casolaro¹

¹Dipartimento di Architettura
Università Federico II di Napoli
ferdinando.casolaro@unina.it

Alberto Trotta²

²Liceo Scientifico “B. Rescigno” - Roccapiemonte (SA)
albertotrotta@virgilio.it

Sommario. *In questo lavoro ci proponiamo di riassumere alcuni risultati degli ultimi anni, relativi all’evoluzione della Fisica moderna, con l’obiettivo di dare un ordine anche alla lettura delle notizie che, giorno dopo giorno, ci vengono dagli scienziati ed anche dai mass-media. In particolare, ci soffermeremo su alcune questioni attinenti ai costituenti della materia descritte attraverso il Modello Standard.*

1. Introduzione

Nelle Indicazioni nazionali e nelle Linee guida per la Scuola Secondaria di secondo grado, tra gli obiettivi da raggiungere, si chiede la conoscenza con un’analisi critica dell’evoluzione della Fisica moderna negli ultimi decenni.

Contrariamente allo sviluppo della Matematica, l’evoluzione della Fisica comporta ipotesi o aggiornamenti da verificare sperimentalmente con continuità. Infatti, la Fisica moderna è la frontiera del sapere e la base delle tecnologie di oggi: studiarla significa mettersi al passo coi tempi.

In questi ultimi anni si è parlato di alcune proprietà dei *neutrini*, del *bosone* di Higgs e del Modello Standard, argomenti che ovviamente non possono essere presenti nei libri di testo perché sono ancora in fase di discussione tra i ricercatori (F. Casolaro, A. Trotta 2014).

In ogni caso, però, la Scuola più precisamente un docente di Matematica e Fisica non può ignorare una discussione, o eventuali richieste di chiarimento da parte degli allievi, sugli eventi scientifici che giorno dopo giorno arrivano nelle nostre case con notizie non sempre precise perché riportate, attraverso flash, da giornalisti che raramente sono addetti ai lavori.

Uno degli elementi centrali dello studio dei ricercatori è il Modello Standard che rappresenta un esempio di unificazione delle forze fondamentali, in particolare dell'*interazione elettromagnetica* e dell'*interazione debole*, entrambe manifestazioni di un'unica forza che prende il nome di *forza elettrodebole*. Tale modello è basato sulla teoria quantistica dei campi, ed è a tutt'oggi ritenuto coerente sia con la *meccanica quantistica* che con la *relatività ristretta* (F. Casolaro, R. Pisano 2012).

Anche se le previsioni del Modello Standard sono state in larga parte verificate sperimentalmente con un'ottima precisione, esso non può essere considerato una teoria completa delle interazioni fondamentali, in quanto non comprende la forza gravitazionale e non prevede l'esistenza della materia oscura, che costituisce gran parte della materia dell'universo.

2. Status Quaestions

Il Modello Standard, che con successo descrive le interazioni tra le particelle elementari nelle scale di energia degli esperimenti, sarà ancora in grado di descrivere le interazioni nelle scale di energie superiori? Oppure è un modello ancora incompleto?

Certamente tale modello lascia aperti vari problemi come quello della distribuzione delle masse delle particelle e delle cosiddette generazioni. Anche l'oscillazione dei *neutrini* rappresenta un segnale dell'esistenza di qualcosa che va oltre il Modello Standard (Jayawardhana Ray 2014).

Siamo ad un bivio. Andremo verso una estensione del modello oppure dobbiamo percorrere altre strade ai fini della spiegazione delle leggi della natura?

La prova più eclatante dell'avvento di una nuova fisica è costituita dal fatto che i *neutrini* dispongono di una massa. È importante notare che per i risultati sperimentali a sostegno di questa ipotesi, è stato attribuito il premio Nobel per la Fisica 2015 a Takaaki Kajita e Arthur McDonald¹.

Questo non è previsto nel Modello Standard che funziona molto bene in determinati intervalli (range) energetici, quelli al disotto dei TeV², ma evidenzia i suoi limiti quando viene messo alla prova delle alte energie, tipiche dei nuovi acceleratori.

Dai dati raccolti dall'esperimento Liquid Scintillator Detector (LSND) operativo negli anni Novanta a Los Alamos e dal Min Booster Neutrino Experiment (Mini Boo Ne) del Fermilab è emersa l'ipotesi di quattro sapori dei *neutrini* e non solo i tre conosciuti.

Alcune teorie esotiche hanno proposto l'esistenza di una quarta varietà, quella dei *neutrini sterili*, che non interagirebbero mai con la materia, pertanto sarebbero rilevabili solo indirettamente per via sperimentale.

¹ Scientific Background on the Nobel Prize in Physics 2015 NEUTRINO OSCILLATIONS compiled by the Class for Physics of the Royal Swedish Academy of Sciences (motivazione per l'attribuzione del premio Nobel per la Fisica 2015).

² TeV (Teraelettronvolt) è l'unità di misura dell'energia usata nella fisica delle particelle. Il TeV è un multiplo dell'elettronvolt ed equivale a 1.000 miliardi di eV, pari a 10^{-7} Joule.

Se il quarto sapore dovesse realmente esistere, i *neutrini* di tale tipo sarebbero quindi ancora più elusivi degli altri tre. Dal canto suo Janet Marie Conrad³, del MIT (Massachusetts Institute of Technology), è convinta che l'ipotesi dell'esistenza del quarto sapore può essere ammessa. Ella afferma che alcuni fenomeni come ad esempio l'*asimmetria tra neutrini ed antineutrini dell'universo primordiale*, potrebbe celare l'esistenza di neutrini sterili.

Gli scienziati hanno affrontato in diversi modi il mistero delle grandi famiglie di particelle e alcuni di loro hanno proposto molti ipotetici costituenti per *quark* e *leptoni*, ognuno con un diverso nome, ma si è affermato il termine *<preone>* come qualifica generica per tutti. Il più delle volte lo stesso nome è stato usato anche per i costituenti portatori delle forze agenti sulle particelle.

Il Modello Standard riesce a descrivere *quark*, *leptoni* e *bosoni* senza far riferimento ai *preoni*; pertanto spetta ai fisici cercare le sottili deviazioni sulle previsioni del modello o minuscole crepe nell'edificio della fisica moderna.

Vi sono almeno due aspetti del modello che meritano un'indagine più accurata:

- il primo è inerente alle dimensioni delle particelle in esame;
- il secondo è inerente ai concetti di *spin* e di *momento magnetico*.

Il Modello Standard tratta i *quark* ed i *leptoni* come se fossero puntiformi, cioè particelle nulle e prive di struttura interna.

Se scopriremo che queste particelle hanno dimensioni diverse da zero, avremmo un forte indizio a favore dei *preoni*. Alcuni esperimenti hanno mostrato che protoni e neutroni hanno un raggio di azione di circa 10^{-15} metri. In particolare, gli esperimenti fatti presso i principali collisori di particelle hanno cercato prove del fatto che anche i *quark* o i *leptoni* possano avere dimensioni misurabili. Finora i dati a nostra disposizione sono coerenti con la dimensione zero o con la dimensione di un ordine di grandezza compresa tra 0,0002 e 0,001 volte quella del *protone*. Al fine di distinguere tra queste due possibilità bisogna fare misurazioni più precise. Mediante l'uso della macchina LHC⁴ potremo avere a disposizione un'enorme quantità di dati dalle collisioni che avvengono e da queste ricavarne utili informazioni sulle dimensioni dei *quark* e dei *leptoni*. Per quanto riguarda i *leptoni*, un altro modo di verificare l'esistenza di una sottostruttura consiste nell'approfondimento dei concetti di *spin* e di *momento magnetico* strettamente collegati tra loro (Bernanuer Jan, Pohl Randolph 2014).

Come a tutti i *fermioni*, all'*elettrone* si assegna *spin* $\frac{1}{2}$. Visto che l'*elettrone* è dotato di carica, la combinazione *carica spin* conferisce a questa particella un momento magnetico; pertanto, se da qualche misurazione di un *fermione* risultasse un momento magnetico

³ Janet Marie Conrad - Prof.ssa di Fisica a Massachusetts Institute of Technology. Il 22 agosto 2010 ha affermato di avere nuovi elementi di prova che la materia e l'antimateria potrebbero comportarsi in modo diverso.

⁴ LHC: *Large Hadron Collider*: macchina che accelera due fasci di particelle che circolano in direzioni opposte.

diverso dalle previsioni teoriche, tale risultato suggerirebbe che le suddette particelle non siano puntiformi e quindi possano essere composte da *preoni*.

È noto da tempo ai fisici che i momenti magnetici dell'*elettrone* e del *muone* sono diversi da quello di una particella puntiforme. Tuttavia questa piccola differenza non ha a che fare con i *preoni* ed è possibile spiegarla nel contesto del Modello Standard. Il Fermilab si sta impegnando nell'esplorazione di fenomeni rari.

Due degli esperimenti più interessanti per la ricerca dei *preoni* misureranno il momento magnetico dei *muoni* e cercheranno di rilevare il decadimento del *muone* in un *elettrone* e in un *fotone*. Continuano pertanto le ricerche delle prove di una dimensione diversa da zero per i *quark* e per i *leptoni* e di qualche indizio relativo al fatto che anche le *particelle-vettori* di forze, cioè i *bosoni* W e Z che mediano la forza nucleare debole, abbiano cugini più pesanti. In tal caso si aprirebbero nuovi scenari per il mondo quantistico (Quigg Chriss 2008).

3. Il bosone di Higgs

Il 4 luglio 2012, in seguito dei risultati degli esperimenti ATLAS e CMS, gli scienziati del CERN annunciano di aver scoperto una particella di tipo Higgs a circa 125 GeV. Questa particella è coerente con il bosone di Higgs, previsto dal Modello Standard, come manifestazione del meccanismo di Brout-Englert-Higgs⁵.

Tale scoperta segna il culmine di una ricerca durata decenni. Negli anni precedenti, con la messa a punto del *Modello Standard della fisica delle particelle*, i ricercatori non disponevano delle spiegazioni del perché le particelle fossero dotate di massa. Una serie di scoperte teoriche avevano suggerito l'esistenza di un nuovo campo, oggi chiamato "*campo di Higgs*", tale da poter rallentare le particelle e conferire loro una certa inerzia. La ricerca di questo campo, che doveva possedere una particella corrispondente, rappresenta l'inizio della ricerca del *bosone* di Higgs.

Attualmente, pochissimi fisici dubitano che sia apparsa una particella pesante. Ma di che tipo di particella si tratta?

Tutto quello che si può dire è che abbiamo a che fare con una particella estremamente instabile e che decade in numerosi processi diversi o *<canali>*. Riportiamo qui di seguito quattro dei più importanti canali di decadimento.

1. *Decadimento in due fotoni. In tal caso un rilevatore può misurare la loro energia complessiva con accuratezza estremamente elevata, il che aiuta a ricostruire in modo preciso la massa della particella trovata.*

⁵ L'otto ottobre 2013, il Premio Nobel per la Fisica è stato assegnato congiuntamente a François Englert e Peter Higgs "per la scoperta teorica di un meccanismo che contribuisce alla nostra comprensione dell'origine della massa delle particelle subatomiche".

2. *Decadimento in una coppia di bosoni Z, ciascuno dei quali può decadere in un elettrone accoppiato con un antielettrone o in due muoni.*
3. *Decadimento in un quark bottom e nella sua antiparticella, ognuno dei quali decade rapidamente in un <getto> di particelle secondarie dette adroni.*
4. *Decadimento in due bosoni W, ognuno dei quali decade in un elettrone, antielettrone o muone, più un neutrino o antineutrino.*

I fisici parlano di tale particella con una certa cautela, insistendo sulla necessità di nuovi dati al fine di definire meglio le sue caratteristiche. Il CERN, infatti, non ha ancora dimostrato in modo definitivo che la nuova particella abbia *spin* zero, come richiesto dal Modello Standard, anche se un confronto con i dati di Tevatron (pubblicati il 2 luglio 2012) suggeriscono di sì. Inoltre, gli esperimenti stanno rilevando più eventi in due *fotoni* rispetto alle attese (Collins Graham 2008).

C'è forse qualcosa che non va? O questo eccesso ci fa intravedere una nuova fisica?

Gli accoppiamenti della particella con *fotoni* ad alta energia hanno stimolato molto interesse. Visto che il campo di Higgs conferisce la massa alle particelle elementari, esso deve interagire più intensamente con le particelle più pesanti. I *fotoni*, avendo massa a riposo nulla, sono prodotti dal *bosone* di Higgs attraverso un meccanismo che coinvolge altre particelle dotate di massa. Queste ulteriori particelle pesanti, richieste dalla simmetria e da altre teorie, potrebbero contribuire al processo, come sembra stia accadendo in base ai nuovi dati (Kane Gordon 2005).

Se dovesse mantenersi questa tendenza, verrebbe suggerita con forza una nuova fisica, oltre quella descritta dal Modello Standard. La scoperta di questa particella (il *bosone* di Higgs) pone fine ad una lunga era della fisica delle particelle e segna l'inizio dello studio dei fenomeni nella scala delle energie di TeV. Molte domande potrebbero trovare una risposta nelle nuove ricerche su tale particella e sui suoi possibili partners. Tra le tante, ne poniamo alcune:

- *Ha un ruolo nel meccanismo dell'inflazione?*
- *Interagisce con particelle di materia oscura?*

Questa particella ci pone di fronte ad un ampio ventaglio di ulteriori esperimenti.

Altre fondamentali domande sono le seguenti:

- *Le sue proprietà sono esattamente quelle previste?*
- *Le apparenti discrepanze nei primi dati potrebbero essere fluttuazioni casuali che spariranno in breve tempo, o forse ci offrono i primi intriganti indizi di una fisica del tutto nuova?*

4. Il dilemma delle dimensioni del protone

Due esperimenti hanno ottenuto valori significativamente diversi per il raggio del protone. Questa discrepanza ha animato la comunità scientifica, visto che le misurazioni hanno confermato che il suo raggio è $0,8409 \text{ femtometri}^6$, più o meno $0,0004$. Questo è un dato dieci volte più accurato di qualsiasi misurazione precedente, ma ne differisce del 4%, che è un divario notevole.

Quattro anni dopo l'enigma del raggio del *protone*, i fisici hanno esaurito le spiegazioni semplici, come possibili errori di misurazioni o di calcolo. Adesso hanno ipotizzano altre possibilità più affascinanti e si sono posti alcune domande; ad esempio, come reagisce realmente il *protone* all'attrazione del *muone*? È noto che la forza elettrostatica del *muone* deforma il *protone* in maniera analoga alla gravità della luna che genera maree sulla terra. Il *protone* deformato modifica lievemente l'orbitale $2s$ dell'idrogeno muonico. Generalmente si è portati a pensare che tale fenomeno sia ben compreso, ma il *protone* è un sistema così complesso che potrebbe sfuggirci qualcosa. La possibilità è che tali misurazioni possano dar luogo ad una nuova fisica che vada oltre il Modello Standard. Probabilmente l'universo contiene una particella non ancora individuata che in qualche modo fa sì che i *muoni* si comportino in maniera differente dagli *elettroni*.

Alcuni fisici, infatti, avendo preso in considerazione questa possibilità, non sono ancora riusciti a definire una nuova particella che non produca anche conseguenze osservabili in contrasto con i risultati degli esperimenti.

Un altro enigma da risolvere è perché il momento magnetico del *muone* non corrisponde ai calcoli del QED (elettrodinamica quantistica). Forse nuovi fenomeni spiegheranno la misurazione del raggio del *protone* e l'anomalo momento magnetico del *muone*. Per dare risposte a questi dubbi sono stati proposti nuovi esperimenti. Queste misurazioni daranno luogo a verifiche indipendenti e metteranno alla prova alcune delle spiegazioni proposte. Solo il tempo dirà se l'enigma del raggio si rivelerà un bizzarro errore o l'accesso verso una più profonda conoscenza dell'universo.

⁶ *femtometro* (simbolo: *fm*) è un'unità di misura di lunghezza utilizzata, nel Sistema Internazionale, per misure atomiche e subatomiche. E' un sottomultiplo del metro; si chiama (dal danese: *femten*, "quindici") ed è pari a 10^{-15} m .^[1] Sia il protone sia il neutrone hanno raggio pari a circa 1 fm .

5. Alcune considerazioni sul modello standard. La super-simmetria

Il Modello Standard descrive particelle e forze combinando la *meccanica quantistica* e la *teoria della relatività ristretta*. Esso offre un'eccellente descrizione di quello che accade nel mondo subatomico.

Viene spontaneo, però, chiedersi: perché prevede solo quelle particelle e quei mediatori di forze?

È necessario studiare la natura ad un livello più profondo per poter dare una adeguata risposta a questa domanda.

In questi ultimi anni molta attenzione è stata posta nei confronti della *super-simmetria*, che non è un modello in sé, ma uno schema per elaborare modelli dell'universo (Lincoln Don (2013).

La *super-simmetria* è una teoria complessa, formulata per definire i fenomeni della fisica delle particelle che rimangono inspiegati nell'ambito del Modello Standard, la cui particolarità è associare ad ogni *particella bosonica*, dotata di *spin intero*, una *particella fermionica* dotata di *spin semintero*, che rappresenta il suo super partner fermionico.

Allo stesso modo, ogni *fermione* ha un super partner bosonico. Tale teoria prevede l'esistenza di particelle che potrebbero costituire la materia oscura e consente di unificare tre delle forze fondamentali della natura, una volta raggiunte le energie più elevate, permettendo inoltre di risolvere anche il problema della gerarchia, che è inerente al notevole divario esistente fra l'intensità della *forza nucleare debole* e la *forza gravitazionale*, di 32 ordini di grandezza a favore della forza debole.

Non si è disposti a pensare a questo divario come ad un frutto del caso. Infatti, per i fisici che si occupano delle interazioni fondamentali, una stranezza del genere è indizio di una spiegazione ignota che si trova ad un livello molto più profondo di quello che si è riusciti a raggiungere.

Si è cercata la conferma di un impianto teorico del genere con l'uso di *acceleratori di particelle* sempre più potenti, ma nulla sembra confermare la teoria, almeno nella sua semplice forma originaria. Per il momento nulla si intravede oltre il Modello Standard, per il quale permangono alcuni problemi come quello della gerarchia. Questo ostacolo è agevolmente superato mediante la teoria della *super-simmetria*, che prevede, come già detto, l'esistenza di partner supersimmetrici, e si può comprendere considerando la teoria di Higgs (Tonelli Guido 2012).

Questa teoria ritiene *che tutto lo spazio sia pervaso (riempito) uniformemente dal campo di Higgs, il quale è disturbato dal <bollore> delle particelle virtuali che emergono e annichilano nel vuoto quantico*.

Questo fenomeno dovrebbe conferire al campo di Higgs una notevole energia ed avere come effetto l'incremento del bosone di Higgs. Ma il campo ha una energia relativamente bassa, incompatibile con questo fenomeno.

Una spiegazione è che i contributi di tutte le particelle si compensino a vicenda; in tal modo, il bosone di Higgs può avere un ragionevole valore, secondo un principio chiamato

"regolazione fine". Proprio quello che succede alle particelle ed ai partners supersimmetrici.

Una delle richieste della *super-simmetria* è che i partners siano più massicci delle particelle note. Al fine di salvare il principio di regolazione fine, sono state apportate modifiche sempre più complesse, con partner sempre più pesanti.

Per dare una risposta più corretta alla teoria, la parola è passata all'LHC⁷ di Ginevra e solo il tempo potrà verificare se è necessario dar vita ad una nuova fisica.

Il Modello Standard non spiega diverse cose come la materia e l'energia oscura.

Il gruppo di ricerca LHC ha presentato prove di un decadimento del *mesone* β e la misurazione effettuata mostra una deviazione delle predizioni del Modello Standard. Queste deviazioni rispecchiano con esattezza i calcoli precedentemente fatti da un team di fisici formato da Joaquin Matias⁸ e Javier Virto⁹ dell'Università Autonoma di Barcellona e Sebastian Descotes Genon¹⁰ del Centro Nazionale della Ricerca Scientifica Francese, per i quali è possibile spiegare tale fenomeno introducendo un nuovo *bosone* o, in ogni caso, qualcosa non prevista dal Modello Standard. Tale *bosone* potrebbe costituire la base per una nuova fisica. Secondo il fisico Joaquin Matias, mentre il *bosone* di Higgs completa il puzzle del Modello Standard, questa scoperta potrebbe essere il primo tassello di un puzzle più grande.

6. Quale futuro?

Se le super partner saranno scoperte nella prossima serie di esperimenti a LHC, sarà l'inizio di un'affascinante avventura intellettuale. In caso contrario ci troveremo di fronte alla rottura del paradigma del modello fondamentale della fisica quantistica.

Saremo quindi indotti ad un radicale ripensamento dei fenomeni alla base dell'universo. Certamente un ruolo fondamentale lo avrà il *bosone* di Higgs, che potrebbe interagire con la materia oscura aprendo nuovi filoni di ricerca ed è probabile che per la fisica sarà necessario descrivere un altro modello in grado di spiegare quello che il Modello Standard non riesce a definire (Kane Gordon 2005).

⁷ L'LHC (Large Hadron Collider; in italiano *Grande Collisore di Adroni*), è l'acceleratore di particelle più grande e potente finora realizzato. Può accelerare adroni fino al 99,9999991% della velocità della luce.

⁸ Joaquin Matias, Professore di Fisica all'Università Autònoma de Barcelona.

⁹ Javier Virto, Professore di Fisica all'Universität Siegen - Germany.

¹⁰ Sebastian Descotes Genon, Professore di Fisica al Laboratoire de Physique Théorique - Université Paris-Sud.

Bibliografia

- F. Casolaro - A. Trotta (2014), *"I neutrini"* - Journal of Science & Philosophy Divulcation - Fascicolo 1 (2014) pag. 238-241.
- F. Casolaro, R. Pisano (2011): *"An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part One)"* - History Research - Vol. 1, Number 1, December 2011 - pag. 47-60.
- F. Casolaro, R. Pisano (2012): *"An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part two)"* - History Research - Vol. 2, Number 1, January 2012 - pag. 57-65.
- Jayawardhana Ray (2014): *"Cacciatori di Neutrini"* - Le Scienze, edizione italiana di Scientific American. Supplemento al N. 550 di Giugno 2014.
- Bernanuer Jan, Pohl Randolph (2014): *"Il dilemma del protone"* - Le Scienze, edizione italiana di Scientific American. Aprile 2014, N.548.
- Lincoln Don (2013) *"L'universo è un luogo complesso ed intricato"* - Le scienze, edizione italiana di Scientific American. Gennaio 2013, N. 533.
- Tonelli Guido (2012): Wu San Lau, Riordan Michael – *"Il bosone di Higgs, finalmente"*. Le Scienze, edizione italiana di Scientific American. Ottobre 2012, N. 530.
- Quigg Chriss (2008): *"L'imminente rivoluzione della fisica delle particelle"*. Le Scienze, edizione italiana di Scientific American. Aprile 2008, N.476.
- Collins Graham (2008): *"Dossier, La macchina delle scoperte"*. Le Scienze, edizione italiana di Scientific American. Aprile 2008, N. 476.
- Kane Gordon (2005): *"Il mistero della massa"* - Le Scienze, edizione italiana di Scientific American. Ottobre 2005, N. 446.
- Kane Gordon (2005): *"La fisica, oltre il modello standard"*. Le scienze, edizione italiana di Scientific American. Luglio 2003, N. 419.

Istruzioni per gli autori

Chi desidera inviare un lavoro da pubblicare sulle Riviste e sui Quaderni dell'APAV deve seguire i seguenti criteri per il formato da usare:

- (1) Il lavoro deve essere in formato doc o docx, carattere Times New Roman, 12 p, il titolo in carattere Times New Roman, grassetto, 18 p.
- (2) I margini devono essere impostati a 3 cm sotto, sopra, a destra e a sinistra. La distanza dal bordo per intestazione e piè di pagina devono essere 2 cm. L'interlinea è multipla 1,15 p.
- (3) Il lavoro deve essere diviso in paragrafi numerati, di cui il primo è una introduzione e l'ultimo una conclusione. I paragrafi vanno separati da due interlinee. Il titolo di ogni paragrafo è in carattere Times New Roman, grassetto, 14 p.
- (4) Ogni lavoro deve avere una lunghezza minima di 6 pagine e non deve superare, di regola, le 14 pagine.
- (5) Dopo l'ultimo paragrafo va inserita la bibliografia. Le citazioni devono essere almeno 4 fra libri e articoli nella forma cognome, nome (anno), titolo dell'articolo, titolo del libro o rivista, editore, città.
- (6) La bibliografia non va numerata. I riferimenti bibliografici nel testo devono avere la forma (cognome dell'autore, anno).
- (7) Non mettere note bibliografiche a piè di pagina. Tutta la bibliografia va messa alla fine.
- (8) I disegni vanno fatti con programmi di elaborazione grafica (non in Word) e salvati in jpg o in png; vanno poi inseriti nel testo all'interno di una tabella (non con le funzioni di inserimento immagine di Word ma con il semplice "copia e incolla").
- (9) Il lavoro deve essere inviato in formato doc o docx ed in formato pdf per il controllo dell'impaginazione e deve avere un numero pari di pagine.

Istruzioni più dettagliate ed il modello di formato possono essere scaricate dalle pagine web delle Riviste o dei Quaderni sui siti www.apav.it e www.eiris.it.

Tutti i lavori ricevuti saranno esaminati da due revisori che invieranno il loro parere sulla pubblicazione ed eventuali proposte di correzioni ai direttori editoriali.

I lavori possono essere inviati ad uno dei seguenti indirizzi email:

apavsegreteria@gmail.com

antmat@libero.it

giuseppemanuppella@gmail.com



Accademia **Piceno - Aprutina** **dei Velati in Teramo**

ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola
(Decreto del 24/07/2009 e Direttiva 170/2016)