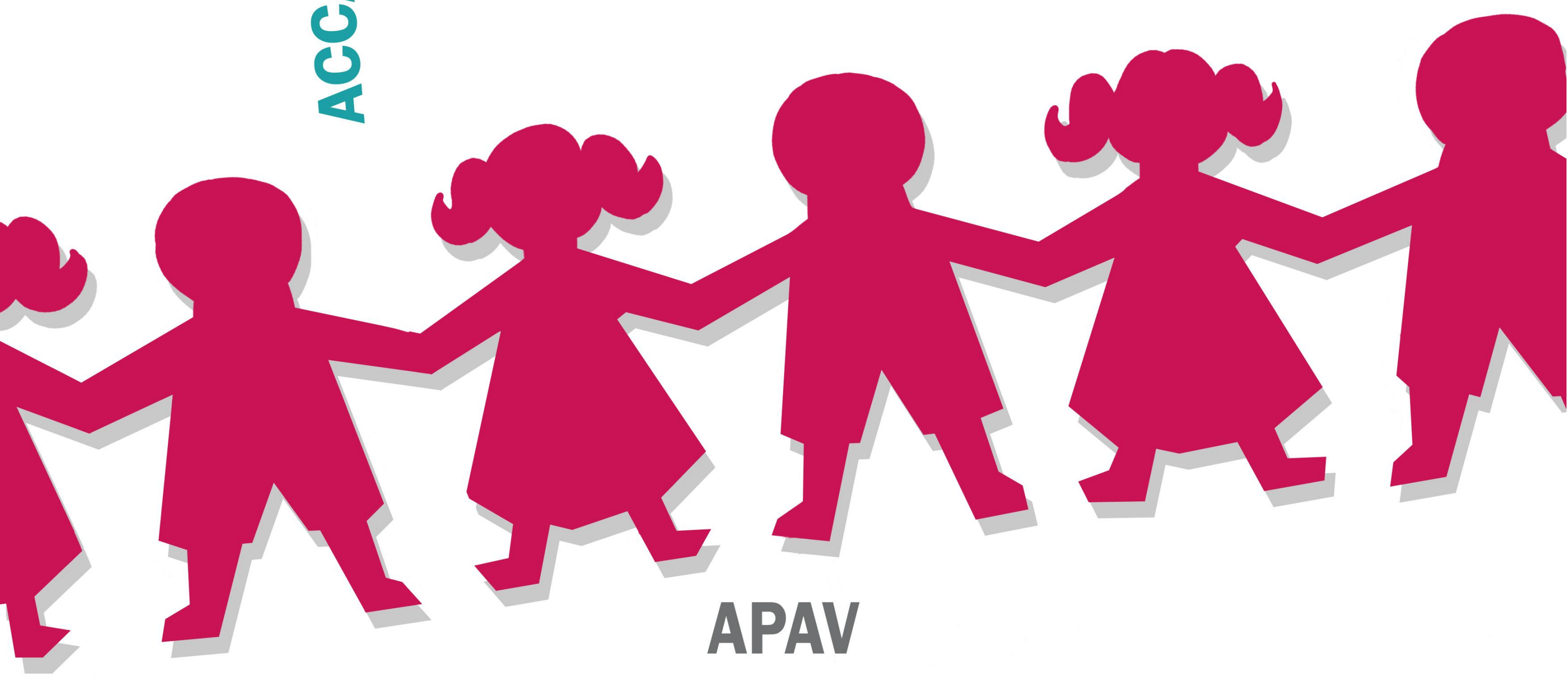
ACCADEMIA PICENO APRUTINA DEI VELATI

2^ SCUOLA ESTIVA DI FORMAZIONE PER I DOCENTI DEL I CICLO DI ISTRUZIONE

INSEGNARE MATEMATICA: DIDATTICA, INCLUSIONE E COOPERAZIONE

PIZZOFERRATO (CH)
22 - 23 - 24 - 25 LUGLIO
2018



APAV

Accademia Piceno – Aprutina dei Velati in Teramo
e
Sezione Mathesis di Pescara

Scuola Estiva di Formazione per i docenti del Primo Ciclo di Istruzione. *Insegnare Matematica: didattica, inclusione e cooperazione*

Pizzoferrato, Hotel Delberg Palace – Valle del Sole
22, 23, 24, 25 luglio 2018

Presidente dell'APAV
Giuseppe Manuppella

Direttore della Scuola
Renata Santarossa

Comitato Scientifico e Organizzatore

Antonio Maturo, Coordinatore del Comitato Scientifico, Presidente della sezione Mathesis di Pescara, VicePresidente dell'APAV
Anna Maria Di Poccio, Coordinatore del Comitato Organizzatore
Palmerino Fagnilli, Sindaco del Comune di Pizzoferrato
Franco Eugeni, Fondatore e Presidente Onorario dell'APAV
Giuseppe Manuppella, Presidente dell'APAV
Domenico Marconi, Segretario dell'APAV
Agostino Zappacosta, VicePresidente della Sezione Mathesis di Pescara
Paolo Rotondo, Segretario della Sezione Mathesis di Pescara
Luciana Delli Rocili, Referente per la Scuola Primaria
Renata Santarossa, Direttore della Scuola Estiva

Curatori del libro

Giuseppe Manuppella, Antonio Maturo

Impaginazione: ***Fabio Manuppella***
Sito web: www.fabiomanuppella.it
E-mail: fabiomanuppella@gmail.com

Copertina: ***Fabrizio Di Nicola***
E-mail: fabriziopluc@gmail.com

Programma

Domenica 22 luglio 2018

Ore 16.00-17.00

Registrazione e accoglienza dei partecipanti nella Hall dell'Hotel Delberg Palace di Pizzoferrato – Valle del Sole.

Ore 17.00-20.00

***Franco Eugeni**: Presentazione e breve storia dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati in Teramo*

***Giuseppe Manuppella**: Modalità di svolgimento della Scuola Estiva*

***Palmerino Fagnilli**: Pizzoferrato turismo: gli itinerari matematici*

***Anna Maria Di Poccio**: Pizzoferrato e la Scuola Estiva di Matematica*

***Antonio Maturo**: Introduzione ai lavori*

***Renata Santarossa**: Una risposta adeguata per gestire e affrontare le relazioni sociali: i gruppi. Organizzazione dei Gruppi di Lavoro*

Ore 20.00 Cena

Lunedì 23 luglio 2018 – Sessione mattutina

Ore 09.00-09.30 ***Fiorella Paone**: 1, 2, 3 … Via! Officine di Matematica attiva e … altre storie*

Ore 09.30-11.00 Laboratorio operativo

Ore 11.00-11.15 Pausa caffè

Ore 11.15-11.45 ***Angela Chiefari, Mario Mandrone, Franca Rossetti**: Matematica ricreativa: giochi, enigmi e situazioni insolite e curiose per la scuola dell'Infanzia e la scuola Primaria*

Ore 11.45-13.15 Laboratorio operativo

Ore 13.30 Pranzo

Lunedì 23 luglio 2018 – Sessione pomeridiana

Ore 15.00 - 15.30 ***Antonio Maturo****,* ***Luciana Delli Rocili****: Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni*

Ore 15.30 - 17.00 Laboratorio operativo

Ore 17.00-17.15 Pausa caffè

Ore 17.15-17.45 ***Ferdinando Casolaro, Paolo Rotondo****: La geometria nelle indicazioni per la scuola dell'obbligo, con particolare riferimento alle trasformazioni geometriche*

Ore 17.45-19.15 Laboratorio operativo

Ore 20.00 Cena

Martedì 24 luglio 2018 – Sessione mattutina

Nota bene: per questa mattinata di lavoro può essere utile che i corsisti siano in possesso del loro computer portatile.

Ore 09.00-09.30 ***Fabio Manuppella****: Logica e pensiero computazionale*

Ore 09.30-11.00 Laboratorio operativo

Ore 11.00-11.15 Pausa caffè

Ore 11.15-11.45 ***Anna Maria Di Poccio****: Narrazione e apprendimento: scopriamo la matematica dell'incerto con il Digital Storytelling*

Ore 11.45-13.15 Laboratorio operativo

Ore 13.30 Pranzo

Martedì 24 luglio 2018 – Sessione pomeridiana

Ore 15.00-15.30 ***Agostino Zappacosta****: La magia delle quattro operazioni con giochi divertenti e accattivanti per ragazzi dai quattro ai quattordici anni*

Ore 15.30 - 17.00 Laboratorio operativo

Ore 17.00-17.15 Pausa caffè

Ore 17.15-17.45 ***Diana Cipressi****: Spazio alla geometria*

Ore 17.45-19.15 Laboratorio operativo

Ore 20.00 Cena

Mercoledì 25 luglio 2018

Ore 09.00-09.30 ***Bruno Iannamorelli****: Geometria sul geopiano: attività laboratoriali in compagnia di Euclide*

Ore 09.30-11.00 Laboratorio operativo

Ore 11.00-11.15 Pausa caffè

Ore 11.15-12.45 ***Tavola rotonda finale****: Relazioni dei rappresentanti dei Gruppi di lavoro e raccolta dei materiali prodotti nelle sessioni di lavoro.*

Ore 12.45-13.00 ***Giuseppe Manuppella, Antonio Maturo, Renata Santarossa****: Conclusioni e saluti. Consegna attestati.*

Ore 13.30 Pranzo

Indice

Prefazione 7
Renata Santarossa

1, 2, 3....via! Officine di matematica attiva e …. altre storie 11
Fiorella Paone

Laboratorio di matematica ricreativa: Giochi, enigmi e situazioni insolite e curiose per la scuola dell’infanzia e la scuola primaria 19
Angela Chiefari, Mario Innocenzo Mandrone, Franca Rossetti

Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria 35
Luciana Delli Rocili, Antonio Maturo

La geometria nelle indicazioni per la scuola dell’obbligo, con particolare riferimento alle trasformazioni geometriche 47
Ferdinando Casolaro, Paolo Rotondo

Logica e pensiero computazionale 59
Fabio Manuppella

Narrazione e apprendimento: scopriamo la matematica dell'incerto con il Digital Storytelling 71
Anna Maria Di Poccio

La magia delle quattro operazioni mediante giochi divertenti ed accattivanti per ragazzi dai 4 ai 14 anni 83
Agostino Zappacosta

Spazio alla geometria 95
Diana Cipressi

Geometria sul geopiano: attività laboratoriali in compagnia di Euclide **107**
Bruno Iannamorelli

CURRICULA BREVI DEI FORMATORI **113**

Prefazione

In questo quaderno di lavoro, realizzato dall’APAV, sono raccolti i materiali che costituiscono lo specifico della *2^ Scuola Estiva di Formazione di Pizzoferrato* per i docenti del Primo ciclo.
Il percorso formativo che si propone è in linea con il Piano Nazionale per la Formazione Docenti pubblicato dal MIUR e tratterà alcune delle conoscenze fondamentali della matematica i cui contenuti si prestano particolarmente per uno sviluppo innovativo, occasione strategica per i docenti che dovranno sviluppare una progettualità didattica mirata a superare le debolezze che gli studenti mostrano per questa disciplina.
Ci si rivolge in particolare al segmento Primario del sistema scolastico italiano, come punto di riferimento principale, ma ciò non toglie che sia possibile, per ciascun docente, rimodellare non solo i presupposti teorici, ma anche le indicazioni metodologico-didattiche tanto alla scuola dell’infanzia quanto a quella secondaria.
Gli articoli pubblicati intendono far riflettere sui fondamenti didattici e pedagogici dell’insegnamento della matematica intesa come disciplina universale, struttura del pensiero, strumento intellettivo in grado di sviluppare la capacità di interpretare la realtà, di porsi e risolvere problemi.
Si vuole proporre una *Matematica del fare,* al passo con i tempi, utilizzando le opportunità che offrono i recenti sviluppi scientifici e tecnologici, spaziando in più ambiti della matematica e delle sue applicazioni.
Questo corso di formazione intende dare anche un contributo pedagogico proponendo alcune attività che facciano riflettere sulla propria storia di formazione, sui modelli pedagogici e sugli stili educativi interiorizzati nel corso della propria esperienza, con l’obiettivo di far acquisire maggiore padronanza nelle cosiddette competenze pedagogiche trasversali, tra cui risultano centrali quelle di tipo relazionale.
La Psicologia Positiva (Seligman, Csikszentmihalyi, 2000) ha fornito contributi innovativi a livello teorico ed applicativo: essa enfatizza il ruolo fondamentale delle risorse e potenzialità dell'individuo che le ricerche precedenti — volte ad analizzare carenze, deficit e patologie — non mettevano in luce.
Per il bambino la prima struttura sociale, dopo la famiglia, è la classe che è un ambiente di apprendimento in cui la conoscenza viaggia con la buona capacità del docente di canalizzare e favorire le relazioni spontanee e evitare i conflitti. Altro elemento fondamentale per un docente è saper organizzare i gruppi all’interno della classe, perché la fluidità delle relazioni favorisce la cooperazione e la condivisione delle risorse intellettive (intelligenza generale, secondo Morin), elementi fondamentali che permettono agli studenti di affrontare efficacemente le situazioni che la realtà quotidianamente propone. In questo modo ciascuno studente sarà in grado di costruire il proprio sapere, di utilizzare le proprie intelligenze e le proprie propensioni per raggiungere il successo formativo.

Pertanto ciò che produce apprendimento non può essere attribuito solo alla lezione frontale, alla didattica attiva o ancora all'esperienza da laboratorio, perché essi rappresentano il mezzo attraverso il quale si giunge all'apprendimento ma non mettono in luce i reali fattori psicologici che causano l'apprendere.

Ciò premesso, questo corso di formazione intende perseguire simultaneamente due linee di intervento non disgiunte ma complementari:

1. approfondire le dinamiche relazionali di classe, fattori emotivi, sociali e affettivi che possono incidere sui risultati dell'insegnamento/apprendimento. Senza la creazione di una relazione di classe positiva, si rivela inutile ogni riflessione sul come insegnare, come costruire situazioni che consentano apprendimento, come procedere in maniera efficace. (Sasso, S. 2009);
2. costruire i significati in situazione: a partire da una lezione front-stimolo, si contestualizzano i contenuti passando ad attività di costruzione di *senso,* mediante un approccio pratico esperienziale che prevede il coinvolgimento diretto dei docenti in formazione.

Per quanto riguarda il punto 1, si parte dal presupposto che l'apprendimento si sviluppi in base a quello che studenti e insegnanti fanno in classe. Spesso gli insegnanti devono gestire situazioni difficili e complesse per incanalare le necessità personali, affettive e sociali dei giovani e devono orientarle secondo le esigenze formative richieste dal sistema scolastico, adeguandosi alle innovazioni assunte nei vari contesti della società moderna. Ai docenti in formazione sarà presentato un metodo utile per conoscere le relazioni esistenti tra gli studenti: il sociogramma di Moreno, uno strumento che consente di avere informazioni importanti per creare un buon clima di classe e prevenire i conflitti, perché un clima positivo favorisce l'apprendimento, la motivazione, la socializzazione. Tenuto conto della caratteristica sperimentale che connota questa parte della formazione, non sarà presente nel quaderno ma, a conclusione della Scuola Estiva, sarà possibile scaricare il *Report* gratuitamente dal sito dell'APAV.

Per quanto riguarda il punto 2, il percorso di formazione sarà organizzato in lezione *front-stimolo*, ciascuna lezione sarà di 30 minuti, ad essa seguirà un'attività laboratoriale della durata di 1 ora e 30 minuti, organizzata in gruppi di lavoro.

Tra le varie tecniche didattiche saranno privilegiate le attività laboratoriali, le simulazioni, l'action-learning. Queste offriranno ulteriori spunti per una rivisitazione dei contenuti presentati, affinché siano più vicini ai modi di "*vedere*" dei giovani.

Il termine *laboratorio* rimanda al lavoro, alle dimensioni dell'agire e del fare. In qualche modo evoca anche laboriosità e quindi attenzione, coinvolgimento, partecipazione attiva al processo di costruzione dei significati. Il laboratorio che si propone non sarà un luogo fisico ma un approccio metodologico: si progettano i significati matematici, ossia le attività da svolgere in piccoli gruppi, oggetto poi di "*discussione*" di classe per condividere i significati e istituzionalizzare il sapere. Nel laboratorio occorre che il discente abbia la libertà di sbagliare, di sfruttare i propri errori, e utilizzi gli esercizi come strumenti per raggiungere i concetti. Per la costruzione dei significati occorre che la manipolazione di oggetti concreti si configuri come uno strumento, volto a dare sostanza e significato a tale concetto astratto e che non rischi invece di sostituirsi al concetto astratto stesso. Per queste attività verranno utilizzate alcune pratiche come il *cooperative learning* e il *collaborative learning*. Dunque il laboratorio è un modello di insegnamento-apprendimento diverso dalla lezione frontale, nel laboratorio il sapere matematico è un processo tipicamente sociale, l'apprendimento è di tipo percettivo, si apprende facendo e vedendo fare*: learning by doing.*

Saranno affrontate tematiche riferite ai fondamenti della matematica, concetti forti che si evolveranno negli ordini scolastici successivi con particolare riferimento alla geometria. Sarà possibile sperimentare la valenza interdisciplinare della simmetria in vari contesti quotidiani, anche non strettamente matematici. Una officina di giochi matematici propone alcune riflessioni sull'utilizzo di strategie ludiche come possibile alternativa al tradizionale insegnamento/apprendimento della matematica e analizza le opportunità che il gioco matematico (matematica) offre sia nel suo settore disciplinare specifico che, più in generale, in tutti gli altri. Sarà proposto un uso meno consueto del geopiano per calcolare le aree di figure insolite e per scoprire gradualmente il teorema di Pick e come da un problema di quadratura di un rettangolo di stoffa si ha la possibilità di rivalutare il secondo teorema di Euclide. Attraverso la magia delle quattro operazioni viene proposta e attualizzata la didattica della matematica concepita da Bruno de Finetti e Emma Castelnuovo.

Si parlerà anche di probabilità e teoria delle decisioni; vuole essere una risposta al ruolo sempre più importante svolto da queste discipline negli ultimi venti anni. Si vuole scardinare in qualche modo un pregiudizio inconsistente secondo cui la probabilità non sia adeguata alla struttura cognitiva di bambini e bambine della scuola primaria.

Il mondo dell'incertezza nella scuola primaria utilizza il mondo della fantasia: i giochi, le storie come ambiente di apprendimento.

Più articolato e ampio per la varietà delle conoscenze richieste è il lavoro sulle gare di matematica. Saranno presentati alcuni quesiti delle gare Kangourou il cui aspetto formativo consiste nell'utilizzare il gioco per insegnare a ragionare. Infatti vi sono giochi senza esplicito contenuto matematico, ma che influiscono sulla formazione dei concetti matematici e giochi di matematica veri e propri, che hanno come oggetto numeri, figure…. Queste gare, a differenza delle altre, trattano esplicitamente argomenti di matematica presenti nei curricoli scolastici, proposti come problem solving e tali da dare spazio alla riflessione sui possibili percorsi risolutivi da seguire.

Infine, l'aspetto innovativo del corso di formazione è rappresentato dal "pensiero computazionale", ovvero l'insieme dei processi mentali che occorre mettere in atto per risolvere un problema a connessione multipla o tipicamente di *problem solving*.

Spesso a scuola l'informatica si limita al saper usare il computer, il tablet con programmi e applicativi predefiniti, ma non si è mai pensato al possibile contributo culturale e interdisciplinare che invece tali strumenti possono offrire. Sono competenze trasversali, utili e declinabili in tutti gli ambiti disciplinari e che permettono di automatizzare lo svolgimento di compiti e trasferire processi risolutivi a situazioni diverse. Insomma un valido aiuto per il problem solving.

I docenti in formazione dovranno utilizzare i laboratori come spazi di riflessione e condivisione sulle proprie modalità di lavoro pedagogico e didattico, per discutere, argomentare, effettuare ipotesi, progettare e sperimentare nuovi percorsi. Tutti i laboratori avranno un comune denominatore: il gioco, uno strumento privilegiato per il bambino che viene coinvolto nelle azioni e quindi nell'apprendimento dei contenuti. Il gioco ha un suo ruolo fondamentale nella comunicazione, nell'educazione al rispetto delle regole condivise, nell'elaborazione di strategie adatte a contesti diversi. Giocare è il modo con cui il bambino entra in rapporto con la realtà, la comprende e la rielabora. Una tavola rotonda concluderà il percorso di formazione. I docenti in formazione saranno organizzati in gruppi e ciascun gruppo presenterà la propria relazione in cui sarà documentato il processo di crescita professionale, le tematiche trattate nel corso delle attività, le riflessioni sui percorsi di ricerca e sulle competenze acquisite.

Il direttore del corso

Renata Santarossa

1, 2, 3....via!
Officine di matematica attiva e …. altre storie

Fiorella Paone[1]

[1]Università d'Annunzio, Chieti-Pescara
E-mail: fiorella.paone@unich.it

Sunto

La riflessione propone le strategie ludiche come possibile modello di insegnamento/apprendimento efficace in ambito socio-educativo e didattico. Le caratteristiche del gioco sono, infatti, presentate come opportunità di superamento della barriera comunicazionale fra docenti e alunni.
Si esamina in particolare il caso dell'insegnamento della matematica, analizzando le possibilità che il gioco matematico (matematica) introduce sia nel suo settore disciplinare specifico che, più in generale, in tutti gli altri.

Parole Chiave: gioco, apprendimento, metodologie attive, partecipazione, matematica, stili comunicazionali

1. Gioco e apprendimento

Per lavoro, ma anche per passione, mi capita spesso di elaborare giochi, interventi o percorsi di gioco con finalità educative. Credo che il gioco sia una splendida risorsa per educare e comunicare, specie laddove la trasmissione frontale di informazioni non basta e non funziona. Questo è molto spesso il limite delle tradizionali modalità di didattica della matematica, spesso insegnata con un approccio che non è in grado di tener conto dell'aspetto emotivo e motivazionale dell'alunno.
Perché non basta più una modalità di insegnamento tradizionale della matematica? Sicuramente i motivi sono molti; un motivo generale potrebbe essere "perché l'informazione ricevuta non si integra con la persona". È percepita come lontana dalla propria vita, dai propri interessi e passioni. Viene percepita solo come una norma da memorizzare, come oggetto di verifica, come qualcosa di inutile al di fuori della scuola. A questo proposito, Mario Lodi avrebbe probabilmente detto che occorre considerare l'alunno *intero* e non solo *dalla testa in su.*
Sarebbe importante ricordare che ogni atto di insegnamento è sempre costituito da un aspetto manifesto (i saperi che caratterizzano ogni disciplina) e un aspetto latente che ha

che fare con le modalità comunicazionali, le scelte epistemologiche e le strategie di insegnamento. Essere consapevoli di questo aiuta a stare attenti a far sì che la nostra azione didattica non abbia aspetti indesiderati come concetti sbagliati e linguaggi scorretti. Solo per fare un esempio, potrebbe essere importante mettere in evidenza il legame tra matematica e vita reale, spiegare il senso della coerenza in un ragionamento matematico, distinguendolo dalla verità, distinguere fra esercizi, che permettono l'utilizzo di concetti già posseduti, e problemi, che hanno il fine di costruire conoscenza.
La passione del docente per ciò che insegna a un'azione di contagio che motiva l'alunno, superando un approccio di tipo utilitaristico e legando l'apprendimento al piacere del fare, dello scoprire, dello sperimentare, nutrendo una curiosità scientifica che, come quella artistica, ha le sue radici nel desiderio di costruire senso e creare significato, al di là di un approccio che si imiti alla memorizzazione della regola e alla sua corretta applicazione.
Può essere, inoltre, estremamente significativo presentare la matematica in una prospettiva storica, proprio come si fa con la letteratura o l'arte. Una prospettiva atemporale fa, infatti, sì che lo studente non abbia gli strumenti per orientarsi e riconoscere l'evoluzione degli oggetti del suo studio.
Più nello specifico si può scegliere di:
-usare tutti i supporti mediali,
-partire da problemi veri in contesti non – matematici,
-incoraggiare l'intuizione,
-insegnare a costruire i problemi prima di risolverli quindi porre la domanda più generale possibile e fare in modo che quelle più specifiche vengano fuori da sole,
- curare l'acquisizione del linguaggio matematico (le formule sono molto sintetiche ma contengono molte informazioni che vanno collegate tra loro e al contesto),
- valorizzare un orientamento ludico della didattica,
- adoperare un metodo sperimentale all'interno di un contesto laboratoriale.

2. Un percorso laboratoriale per ragazzi/e da 11 a 13 anni

Il laboratorio di didattica ludica della matematica “1,2, 3...Via!”, realizzato con ragazzi della seconda classe della scuola secondaria di primo grado, può essere, se opportunamente declinato, utilizzato anche con studenti degli ultimi due anni della scuola primaria. Il laboratorio offre un modello alternativo di insegnamento/apprendimento: nel gioco matematico non c’è più un emittente e un ricevente, non c’è neanche un messaggio.
Il gioco matematico è, in definitiva, un “ambiente” creato dalle regole del gioco, in cui tutti i giocatori si muovono contemporaneamente. I giocatori abitano questo ambiente e così facendo lo conoscono meglio.

Non c'è in definitiva nessuno che insegni o che mandi messaggi, ma diversi giocatori che imparano e che scoprono i "segreti" della matematica in un'ottica cooperativa e creativa.

Il gioco matematico soffre, quindi, sempre di un paradosso educativo: fa imparare ma non può insegnare; chi gioca gode di una libertà che è data dalla garanzia di essere al di fuori (anche solo momentaneamente) di un circuito educativo, al di fuori di una logica valutativa e trasmissiva. Un buon gioco matematico è anzitutto un gioco divertente, in cui un insieme di regole garantisce e promuove autonomia; l'educatore può intervenire prima o dopo il gioco: durante il gioco sarà uno dei giocatori.

All'interno di questa cornice, il laboratorio propone l'esplorazione di *diverse stanze* del sapere matematico.

Si vuole lavorare insieme soprattutto sul potenziamento delle competenze propedeutiche al ragionamento scientifico e, più propriamente, matematico. Lo sfondo integratore utilizzato sarà di tipo teatrale e narrativo; si immagina così di essere di fronte a 5 porte colorate, e che dietro ognuna di esse vi sia nascosto un qualche segreto matematico il cui contenuto è anticipato dal nome della stanza. I giochi matematici adoperano diverse tecniche e metodologie:

-role playing,

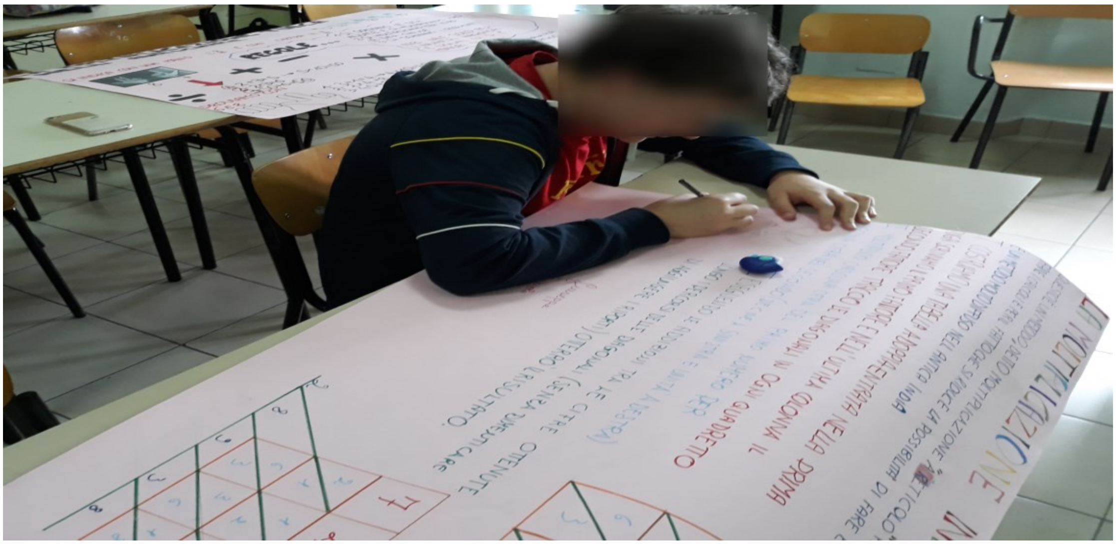
-lavori di gruppo,

-brainstorming,

-attività manuali e grafiche.

È così che si esplora in maniera divertente e coinvolgente il mondo della matematica attraverso *l'ingresso nelle seguenti stanze:*

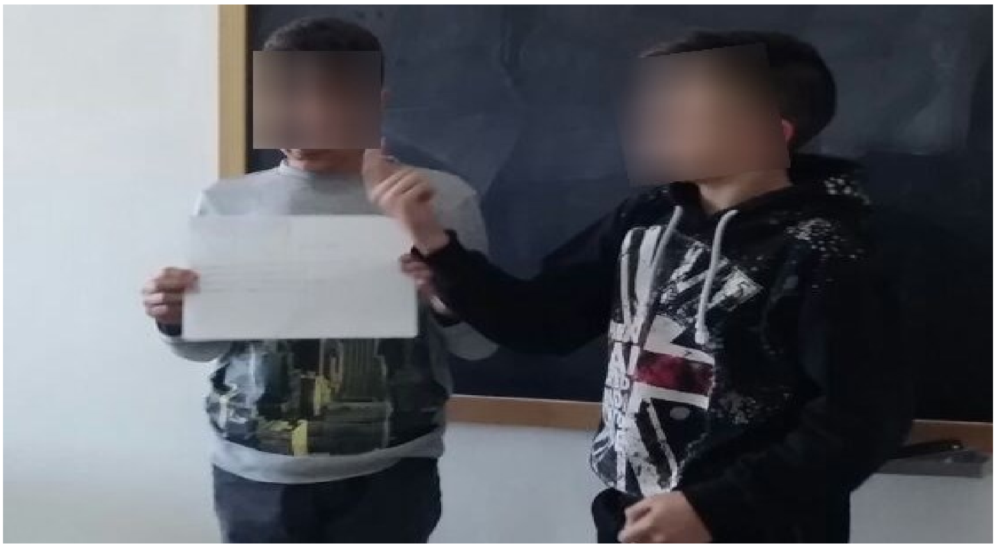
STANZA 1 - C'ERA UNA VOLTA...: giochi con i sistemi di matematica antica e altre curiosità (la duplicazione del quadrato, le tabelline nell'antichità, la moltiplicazione egizia, la moltiplicazione indiana, la risoluzione di problemi complessi, attività di autovalutazione)



STANZA 2 - LOGICAMENTE: introduzione alla logica fra cenni storici e role-playing (indicazioni per risolvere un problema e applicazioni pratiche, giochi di logica: elemento mancante, completare la sequenza, rapporto anomalo, deduzione logico-semantica, dedurre equivalenze logiche)

STANZA 3 SPAZIANDO E GIOCANDO: partecipazione animata ad attività per il potenziamento delle abilità visuo-spaziali e di interpretazione grafica (interpretazione grafica, hypercard, poligoni equivalenti, equiscomposizioni, tassellazioni, trasformazioni geometriche).

STANZA 4 - QUESTIONI DI LOGICA: attività per potenziare il ragionamento deduttivo e creazioni di giochi logici (l'aritmetica dell'orologio, sistemi di numerazione antichi)



STANZA 5 - PASSO DOPO PASSO: giochi matematici per scoprire e inventare serie e successioni (principi di induzione, successioni numeriche, segno di successioni, successioni monotone).

Inoltre, alla fine del percorso i ragazzi sono chiamati ad essere gli autori e gli interpreti di una performance nella quale restituiscono e condividono con tutti gli interessati le conoscenze acquisite.
L'idea di realizzare un prodotto collettivo alla fine del percorso è motivo di impegno e motore di un più rigoroso desiderio di comprendere a fondo l'oggetto di studio in modo da poterlo restituire nel modo più chiaro ed efficace possibile.

La proposta è di lavorare sui seguenti traguardi di competenza:
- Rappresentare, confrontare, analizzare, figure geometriche piane e solide individuandone proprietà e relazioni
- Risolvere problemi di vario genere individuando le strategie appropriate, utilizzando eventualmente rappresentazioni grafiche e strumenti di calcolo in modo adeguato
- Rappresentare, analizzare, interpretare dati avvalendosi di grafici e usando consapevolmente gli strumenti di calcolo
- Analizzare e interpretare rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni
- Riconoscere e risolvere problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza
- Spiegare il procedimento seguito, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati
- Sostenere le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accettare di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta
- Utilizzare e interpretare il linguaggio matematico e coglierne il rapporto col linguaggio naturale.

3. Conclusioni

Per concludere, posso sostenere che intendere l'insegnamento/apprendimento della matematica come processo cooperativo e attivo che valorizzi le conoscenze, le attitudini e gli interessi dello studente attraverso attività di *bricolage* basate sull'*imparare facendo*, è fortemente in assonanza con l'attuale impostazione filogenetica dell'apprendimento ed è in grado di esaltarne le caratteristiche di immersività, cooperazione, plurisensorialità, istantaneità, interattività e partecipazione.
Giocare vuol dire, infatti, entrare in una situazione, ponderando tutte le chance attraverso un coinvolgimento attivo e globale che coinvolge l'intera sfera sensoriale dello studente, tutto il suo corpo. Il gioco matematico valorizza le capacità intuitive, la capacità di adattarsi, cooperare e verificare a posteriore la correttezza delle proprie ipotesi. L'aspetto creativo e connettivo di ogni gioco è alla base del rafforzamento delle capacità di problem solving propedeutiche alla costruzione del ragionamento logico.
Quando nel gioco, inoltre, vi è anche un adulto esperto in grado di sostenere, facilitare, sollecitare e promuovere il contributo di ognuno si riesce a proporre percorsi conoscitivi in cui ognuno riesce a sviluppare una competenza metariflessiva che dalla matematica può essere trasferita ad altri contesti.

Bibliografia

Alcuino di York (2005) *Giochi matematici alla corte di Carlo Magno. Problemi per rendere acuta la mente dei giovani*, ETS, Pisa

Angiolino A., Sidoti B. (2010) *Dizionario dei giochi*, Zanichelli, Bologna

Bersani R., Peres E. (1998) *Matematica. Corso di sopravvivenza* , Ponte alle Grazie, Milano

Cerasoli A., (2008) *Sono il numero 1*, Feltrinellli, Milano

D'amore B., Fandino Pinilla M.I. (2012), *Matematica, come farla amare*, Giunti, Firenze

D'Amore Bruno, Elementi di Didattica della matematica, Pitagora, Bologna, 2001.

Gardner M. (2001) *Enigmi e giochi matematici* , tr. it. Rizzoli,

Infante C. (2000) *Imparare giocando, Interattività fra teatro e ipermedia,* Bollati Boringhieri, Torino

Jannamorelli Bruno, Abbasso la Matematica: regole e formule addio! Ed. Qualevita, Torre dei Nolfi (AQ), 2010

Krutetski V. A. *Alcune caratteristiche del pensiero in scolari con scarsa attitudine per la matematica* (tr. It. In Vygotskij Lurja, Lenotiev, *Psicologia e pedagogia*, a cura di M. Cecchini, Editori riuniti, Roma, 1969, pp. 225-245)

Sarcone G.A., Waeber M. (2005) *Matemagica Giochi d'ingegno con la matematica,* La Meridiana, Bari

Laboratorio di matematica ricreativa–Giochi, enigmi e situazioni insolite e curiose per la scuola dell'infanzia e la scuola primaria

Angela Chiefari[1], Mario Innocenzo Mandrone[2], Franca Rossetti[3]

1. Convitto Nazionale "Pietro Giannone" - Benevento
e-mail: angelachiefari@gmail.com
2. Dipartimento di Scienze e Tecnologie - Università degli Studi del Sannio- Benevento
e- mail: almavit@libero.it
3.Scuola di formazione scientifica "Luigi Lagrange" -Torino
e-mail: rossetti.franca@fastwebnet.it

Sunto

Il presente lavoro ha per oggetto due approcci metodologici relativi all'insegnamento della matematica: quello del problem solving e quello del gioco, particolarmente efficaci sia per il raggiungimento di diverse finalità ed obiettivi dell'insegnamento della matematica nella scuola primaria, sia per il mantenimento di un grado relativamente elevato di interesse e di collaborazione da parte degli allievi, specie nel caso di ragazzi demotivati e/o svantaggiati. Realizzare attività didattiche in forma di laboratorio è la modalità di lavoro che meglio incoraggia la ricerca e la progettualità, coinvolge gli alunni nel pensare, realizzare, valutare attività vissute in modo condiviso e partecipato. Il laboratorio di matematica ricreativa, inoltre, favorisce lo sviluppo ed il potenziamento di capacità logiche e critiche.

Parole chiave: problem solving, cooperative learning, matematica ricreativa, prospettive metodologiche: empirico - analitica; ermeneutico - fenomenologica, critico-dialettica, didattica per problemi.

1. Introduzione – La didattica della matematica nella scuola primaria

Un matematico, come un pittore o un poeta, apre dei sentieri. Se i suoi durano più dei loro, è perché sono fatti con le idee (Godfrey Harold Hardy,1877- 1047).

Dire che la matematica goda oggi nella nostra società, al di fuori degli ambienti specializzati, di una buona reputazione, credo proprio che sarebbe una manifestazione di ottimismo poco giustificato. In realtà non possiamo fare a meno di riconoscere che le accademie, i circoli culturali, gli uffici, le scuole, le buone famiglie pullulano di rispettabili persone che, con indifferenza o addirittura con compiacimento, ostentano la loro ignoranza nei confronti dei più elementari concetti matematici e che, implicitamente o dichiaratamente, catalogano i matematici di tutti i livelli come individui costituenti una categoria con ben precise caratteristiche di rigidezza mentale, di astrattezza, di distacco dai problemi più vivi della realtà classificandoli come "gli adoratori delle formule". Se esaminiamo poi la situazione negli ambienti studenteschi dobbiamo ugualmente riconoscere che, salvo le dovute eccezioni, tra i giovani studenti predomina, nei confronti della matematica, un atteggiamento negativo che va dalla passività (molti studenti, pur dedicandosi diligentemente agli studi di matematica, li subiscono come un male necessario) all'antipatia, alla paura, alla ripulsa. Fortunatamente, la situazione in cui opera la scuola in questi anni è radicalmente cambiata rispetto al passato per la massiccia richiesta di formazione, per l'affermarsi del diritto allo studio, per l'estendersi delle conoscenze e per la conseguente necessità di accrescere continuamente le competenze professionali, la cultura, il sapere. Per effetto della nuova civiltà tecnologica, oggi è quanto mai sentita l'esigenza di una scuola nuova, rinnovata nella didattica, nei metodi, nei contenuti e nell'organizzazione. L'innovazione è favorita dalla collaborazione tra informatica e didattica nei processi di apprendimento e nell'ambiente scolastico, motivo per cui la classe, l'insegnante, la scuola oggi non possono assolutamente ignorare una comunicazione ricca di informazioni medializzate. Pertanto gli alunni hanno bisogno di una nuova alfabetizzazione culturale. Testi, suoni, immagini multimediali, CD, computer e apparecchiature varie sono validi strumenti di mediazione didattica che integrano il lavoro scolastico del docente e facilitano l'acquisizione dei saperi da parte degli alunni. A tal riguardo il "coding" e l'attività di "problem solving" si rivelano quanto mai idonei per coinvolgere e motivare l'alunno rendendolo protagonista e autore dei suoi processi di apprendimento e formazione, motivandolo nell'attività di ricerca. Indubbiamente la scuola primaria è il luogo elettivo per la multimedialità: c'è attenzione al suono, alle immagini, alla condivisione delle immagini, ma soprattutto una curiosità molto sviluppata. La metodologia del problem solving e della matematica ricreativa offre la possibilità di stimolare la funzione cognitiva, spaziale, esplorativa, manipolativa prevista dal curricolo didattico in aderenza agli obiettivi (educativi e didattici generali) da perseguire e alla flessibilità dei ritmi di apprendimento.

2. Il problem solving e il gioco nell'insegnamento della matematica

Il presente lavoro ha per oggetto due approcci metodologici all'insegnamento della matematica, quello del problem solving e quello del gioco, particolarmente efficaci sia per il raggiungimento di diverse finalità ed obiettivi dell'insegnamento della matematica nella scuola primaria, sia per il mantenimento di un grado relativamente elevato di interesse e di collaborazione da parte degli allievi, specie nel caso di ragazzi demotivati e/o svantaggiati. L'importanza e l'efficacia "dell'insegnamento per problemi", per quanto riguarda la matematica, è già nelle parole di illustri Maestri quali Guido Castelnuovo (Congresso Mathesis, 1912), Bruno de Finetti, Emma Castelnuovo. Infine, secondo l'idea di Polya, la via efficace per "formare" è "nel fare", per cui "il risolvere i problemi è un'arte pratica, come il nuotare o lo sciare o il suonare un piano: potete impararlo solo con l'imitazione e la pratica".

Il problem solving tende alla ricerca di una risposta ad un problema e tale risposta non è necessariamente di tipo numerico (problemi di determinazione): si può, infatti, cercare un oggetto geometrico (problemi di costruzione) o la dimostrazione di una certa proprietà (problemi di dimostrazione), ecc. Il che vuol dire "apprendere con comprensione", vale a dire, in primo luogo, saper scorgere un'identità di struttura in problemi e situazioni che si presentino in forme diverse e, in secondo luogo, saper operare quello che gli psicologi chiamano "transfert", saper trasferire cioè quel che si è appreso, trarne profitto per problemi diversi o per conseguire apprendimenti diversi. Al docente di oggi deve interessare soprattutto che gli apprendimenti matematici di base, quelli cioè che hanno luogo nell'ambito della scuola dell'obbligo, siano iniziazione al pensiero matematico anziché apprendimento di una pseudo- matematica che dà sì qualche abilità di carattere tecnico, (conduce, ad es. a saper fare la divisione a due cifre o a saper estrarre la radice quadrata o a saper risolvere delle equazioni), ma deforma la mentalità del ragazzo , impedendo allo stesso quell'apprendimento "intelligente" che sta a cuore al pedagogista e le cui condizioni vengono studiate dallo psicologo.
La matematica ricreativa, il gioco e le tecniche di problem solving sembrano essere le più efficaci ad evitare che l'insegnamento della matematica si riduca ad una riproduzione meccanica di un catechismo formalistico. Il vantaggio è notevole, e non solo sul piano pratico, per un'economia di discorsi, ma pure dal punto di vista della teoria, dal momento che l'operazione si fonda su concetti unitari di forte densità critica. Il gioco è nel linguaggio comune qualcosa che piace, che diverte e si associa al recupero della dimensione ludica nello studio della matematica. I due ambiti sono in larga misura sovrapponibili (un problema può essere posto sotto forma di gioco e un gioco può svolgersi attraverso la risoluzione di uno o più problemi). È per questa ragione che, salvo alcune considerazioni di carattere specifico, in ciò che verrà detto i due termini sono da considerarsi interscambiabili. È facile rendersene conto che il problem solving e il gioco si configurano come un potente strumento didattico capace di trasformare gli studenti da annoiati ripetitori di definizioni, teoremi e meccanici esecutori di algoritmi, in menti capaci di padroneggiare in modo flessibile e creativo gli strumenti matematici che permettono di impreziosire ed arricchire il bagaglio formativo degli allievi e di perseguire obiettivi difficilmente coniugabili con la normale prassi didattica. Uno degli aspetti che rende ostico l'apprendimento della matematica è il linguaggio; la difficoltà risiede in gran parte nel fatto che esso non ammette ambiguità, che appare ermetico e sibillino, lontano da quello comune e dalla realtà che ci circonda, freddo, arido ed astratto. Il gioco matematico, invece, recupera in parte questo "gap" tra matematica e realtà poiché predilige il linguaggio extramatematico; in questo modo il gioco estende e valorizza il campo di interesse ed il vocabolario della matematica, popolandola, accanto a numeri e lettere, triangoli, ε e π, anche di oggetti, di animali, di aneddoti e di paradossi, gettando un ponte tra gli aspetti rigorosamente teorici e formali e gli ambiti concreti di applicazione. Il costante riferimento a soggetti e situazioni appartenenti ad

un ambito extramatematico si traduce nella contestualizzazione dei contenuti, nella costruzione della conoscenza dal basso, a partire dal contesto applicativo.
Il riscontro concreto, applicativo che trovano i concetti matematici nelle applicazioni a problemi reali, di carattere extramatematico, induce a percepire quei concetti non più come aridi e sterili ma come utili e applicabili, se ne comprende l'esigenza e l'importanza. Questi oggetti extramatematici inoltre colpiscono la fantasia e favoriscono un coinvolgimento della sfera emotiva del soggetto e questo ha un esito positivo sul piano dell'apprendimento e della motivazione. Il problem solving e il gioco sono approcci che permettono di rivelare, tra l'altro, un volto della matematica che spesso rimane nell'ombra, celato dietro l'aspetto esteriore della disciplina. Questo nuovo volto riesce, però, ad esercitare un fascino discreto, capace di far amare una disciplina generalmente considerata arida, difficile e noiosa.
Ciò che generalmente impariamo a scuola è il risultato definitivo, la formalizzazione, ignorando le inquietudini, le idee geniali e i fallimenti che si celano dietro di essi. Il fatto di dimostrare (processo di sintesi) dà una giustificazione, ma nasconde del tutto il modo in cui si è pervenuti a quella verità; ribaltando il processo (analisi), si procede a ritroso, si accede a quella faccia nascosta del pensiero matematico fatta di tentativi, di errori, di intuizioni, di quelle "brutte copie" estromesse dalla codifica dei risultati che però, paradossalmente, hanno forse molto più da insegnare. Un aspetto fondamentale relativo al problem solving ed alla matematica ricreativa, è quello del recupero della motivazione allo studio di questa disciplina, in particolare per alunni non particolarmente interessati e/o svantaggiati. La sorpresa, il paradosso, il risultato inatteso sono elementi di stimolo per l'attività cognitiva, sono un po' il gioco di prestigio di cui cerchiamo il trucco. Cimentandosi su un problema o un gioco e risolvendolo, l'allievo cessa di essere soggetto passivo per diventare il protagonista di un processo mentale, lo scopritore, l'inventore della soluzione; questo influisce notevolmente sulla sua motivazione, oltre che sul livello di attenzione e sulla qualità dell'apprendimento. Ancora, i problemi e i giochi possono essere impiegati per far emergere i modelli spontanei e i misconcetti degli allievi; essi possono cioè essere strutturati in modo da evidenziare e, nello stesso tempo, mettere in crisi i vari misconcetti per poter così intervenire su di essi. Non è da sottovalutare inoltre, l'opportunità di stimolare l'interesse per il pensiero matematico utilizzando questioni di interesse storico, filosofico, ecc., che possono essere presentate sotto forma di problema o gioco; esistono diversi problemi e giochi celebri relativi ad aspetti del pensiero matematico rilevanti dal punto di vista didattico (ad esempio la torre di Hanoi e il principio di induzione).
Risolvere i problemi è una questione di abilità vera e propria e qualunque abilità può essere acquisita con l'imitazione e l'esercizio. Si impara a risolvere i problemi soprattutto…. risolvendoli. Gli approcci alla risoluzione di un problema possono essere di vario tipo (intuitivo, sistematico, algoritmico, parziale per tentativi, per esclusione, ecc.); un individuo può manifestare una propensione per alcune tipologie di approccio piuttosto che per altre e, in relazione alla specificità del problema, un approccio può

rivelarsi più idoneo e fruttuoso di un altro. Questa visione multiapproccio a giochi e problemi si contrappone alla vecchia logica dell'algoritmo predefinito, del "come si fa", e favorisce l'attivazione di facoltà ed inclinazioni diverse e complementari tra loro: intuito, comprensione olistica degli schemi, progettualità, analiticità, tendenza ad algoritmizzare, ecc.

3. Laboratorio di matematica ricreativa

Il laboratorio di matematica ricreativa è realizzato in molte scuole che avvertono la necessità di ampliare la propria offerta formativa promuovendo e incoraggiando la partecipazione ai giochi matematici (Olimpiadi di matematica dell'Università Bocconi di Milano, Olimpiadi di matematica dell'U.M.I. Unione Matematica Italiana, I Kangourou della matematica, Il Premio A. Morelli ed altri). L'esperienza dei giochi matematici, di indiscutibile valore educativo e didattico, va fortificata con un percorso specifico e finalizzato, per stimolare curiosità e creatività indispensabili in un processo di apprendimento, per consolidare abilità difficilmente trasferibili e per maturare autostima e gratitudine verso la matematica. Si aggiunga a ciò che una concezione epistemologica del curricolo di matematica non può ispirarsi all'intuizionismo, ad una pratica matematica come successione concatenata di atti intuitivi. Una didattica che si ispira, invece, ad una epistemologia costruttivista, impone una pratica individuale e sociale, con spazi, momenti e sollecitazioni rivolte ad una riflessione su processi cognitivi e motivazionali personali e collettivi. Da tali considerazioni deriva la necessità di impiantare una programmazione ben definita, che si avvale di più prospettive metodologiche: da quella "empirico- analitica" focalizzata sulla descrizione di un fatto, a quella "ermeneutico- fenomenologica", mirata alla comprensione e all'interpretazione di un'esperienza, a quella "critico-dialettica", fondamentale per un apprendimento significativo basato sull' acquisizione di competenze.
Il laboratorio, quindi, intende promuovere atteggiamenti di curiosità e di riflessione, valorizzare la consapevolezza degli apprendimenti e sviluppare attività di matematizzazione perseguendo i seguenti obiettivi:

a) Obiettivi educativi:

1) Sviluppare dinamiche relazionali per lavorare in gruppo;
2) Riflettere sui processi messi in atto;
3) Essere consapevole delle proprie strategie.

b) Obiettivi di apprendimento:

a. Applicare tecniche di calcolo, procedimenti, proprietà; eseguire misure:
b Individuare relazioni: confrontare, ordinare, classificare;
c. Analizzare situazioni problematiche, individuare e applicare strategie risolutive in ambito aritmetico e geometrico: osservare, formulare ipotesi, progettare, verificare.
d. Argomentare: riferire un ragionamento, riconoscere un falso ragionamento, ottimizzare una strategia:

e. Comprendere e utilizzare il linguaggio specifico, esprimersi in maniera organica e appropriata: usare rappresentazioni (schemi, tabelle, …), discutere e verbalizzare le esperienze.

I contenuti vanno, ovviamente, individuati in riferimento alla platea a cui l'intervento didattico è rivolto, tenendo presente che già 4.000 anni fa in Egitto, come risulta dal Papiro di Rhind, la matematica si insegnava per problemi. A tal proposito, una inesauribile fonte di ispirazione per questo tipo di attività sono i problemi classici della matematica, alcuni dei quali ancora molto popolari, formulati da inventori di giochi quali ad es. Sam Loyd, Martin Gardner ed altri, che utilizzano un linguaggio semplice e non tecnico, che evita eccessi di formalismo. Tutto ciò al fine di favorire interesse e motivazione. In particolare il linguaggio euristico dell'insegnante nella forma del dialogo socratico- indirizzato da una logica di ricerca- innesca nei ragazzi, grazie a domande mirate, attitudine alla riflessione.

Nella fase di realizzazione del laboratorio (fase attiva), le azioni del docente, finalizzate al raggiungimento degli obiettivi cognitivi ed educativi prefissati saranno:

a. Organizzare gruppi di lavoro per promuovere la socializzazione;

b. Proporre problemi differenziati scoraggiando le soluzioni rapide e non meditate;

c. Proporre anche problemi complessi, per imparare a semplificare, a schematizzare e a rappresentare;

d. Favorire il dialogo; ascoltare senza giudicare; formulare domande (anche provocatorie) per rinforzare le conoscenze metacognitive;

e. Richiedere di assemblare e riordinare i ragionamenti e le strategie adottate verbalizzando in forma scritta o orale per assimilare e accomodare i concetti.

f. Lasciare una questione insoluta, come elemento sorpresa, per stimolare curiosità.

In questo modo, l'alunno, riflettendo su quello che fa, impara a regolare i comportamenti, a lavorare in modo critico, a confrontare le diversità. L'errore, che nasce in una esperienza esplorativa, contribuisce a sviluppare capacità di inferenza, a riformulare ipotesi errate, a costruire una conoscenza da condividere con altri. **(Riflessione e consapevolezza)**. All'interno del gruppo, ogni alunno espone e discute le soluzioni e i procedimenti in seno alla collettività. La dimensione sociale della conoscenza, nell'imparare dagli altri e con gli altri, valorizza i processi di apprendimento e la condivisione. **(Apprendimento collaborativo).**

4. Materiale per il laboratorio di matematica ricreativa

A titolo esemplificativo, si propongono alcuni materiali di lavoro, alcuni dei quali inventati da Luca Pacioli, il frate matematico amico di Leonardo e di Piero della Francesca che, con l'aiuto del primo, fece un eccezionale lavoro in cui convivono arte e matematica. Il suo libro più famoso è il "De divina proportione" realizzato in collaborazione con Leonardo, il quale lo arricchì con le sue celebri incisioni. L'opera che mette maggiormente in evidenza le sue grandi doti di divulgatore matematico è il "De viribus quantitatis", il suo ultimo lavoro, giunto a noi ancora manoscritto, al quale

lavorò tra gli ultimi anni del Quattrocento e il 1508. Altri problemi dilettevoli e curiosi sono tratti da le "Propositiones Alcuini Doctoris Caroli Magni Imperatoris ad acuendos juvenes", di Alcuino di York, detto Albinus, monaco e poeta, di nobile famiglia anglosassone, considerato "l'uomo più saggio del suo tempo", nato in Northumbria, probabilmente a York, nel 735. Le "Propositiones" rappresentano la prima raccolta in lingua latina di problemi divertenti, quelli che oggi chiameremmo "giochi matematici. Sono 53 problemi, molti dei quali verranno ripresi (o semplicemente copiati), nei secoli successivi da chi si occuperà di giochi matematici. È un testo che dimostra la preoccupazione dell'autore di trovare il modo meno noioso e meno sgradevole per presentare le idee matematiche agli studenti. Lo stesso problema che anche oggi si trova di fronte l'insegnante, chiamato… "ad acuendos juvenes" cioè ad aguzzare l'ingegno dei giovani. La fama di Alcuino è legata a un divertente problema, diventato così popolare da entrare tra i modi di dire più comuni: Salvare capra e cavoli.
Sull'efficacia dell'insegnamento per problemi, si sono espressi, nel tempo, illustri personaggi tra i quali: Guido Castelnuovo, Bruno de Finetti, Emma Castelnuovo; anche Pòlya, in un'opera che è stata tradotta in ben 17 lingue, ha sostenuto la valenza didattica di questo metodo ai fini dell'acquisizione di competenze logico- matematiche da spendere, in ogni campo del sapere. In accordo con questa tesi, proponiamo altri esempi di quesiti che gli studenti potranno risolvere individualmente:

a) Salvare capra e cavoli

Un contadino viaggiava con un lupo, una capra, un cesto di cavoli. Arrivato a un fiume, gli si presentò il problema di portare il suo carico sul'altra sponda, avendo a disposizione una barca che ad ogni viaggio poteva trasportare soltanto due cose. Il contadino non poteva lasciare soli il lupo e la capra, né la capra e cavoli, per non rischiare di perdere "capra e cavoli". Come riuscì a trasportare tutto oltre il fiume?

b) La propositio de colomba

"Est scala una habens gradus C. In primo gradu sedebat colomba una, in secondo duae, in tres tres, in quarto IIII, in quinto V. Sic in omni gradu usque ad centesimum. Dicat, qui potest, quot columbae in totum fuerunt".
"C'è una scala che ha cento gradini. Sul primo gradino era posata una colomba, sul secondo due, sul terzo tre, sul quarto 4, sul quinto cinque. Così su ogni gradino fino al centesimo. Dica, chi è in grado, quante colombe vi erano in tutto".
Si tratta di sommare i primi 100 numeri naturali. Il docente può proporre la soluzione ingegnosa di Gauss, a partire da casi particolari più semplici discutendo le somme di 1, 2, 3, …. numeri interi e guidare la classe verso una soluzione più generale. Un ulteriore metodo, ad esempio di tipo geometrico, può migliorare la comprensione del problema.

c) Il metodo di falsa posizione I

Il procedimento è senza dubbio molto semplice ed utile per affrontare la risoluzione di problemi algebrici riconducendoli ad equazioni lineari del tipo $ax = b$ non affrontati di solito nelle classi prime e seconde, in alternativa al metodo grafico trattato su tutti i testi

di matematica per la scuola secondaria di primo grado. Esso viene proposto da Leonardo Pisano detto Fibonacci nel Liber Abaci. Il testo è il seguente:
"Di un albero $1/_4\,1/_3$ sono sottoterra. La parte di albero sotterranea misura 21 palmi. Qual è l'altezza dell'albero?"
La lettura del testo richiede attenzione in quanto ai tempi di Fibonacci non si usavano i segni delle operazioni e la scrittura $1/_4\,1/_3$ va interpretata $1/_4 + 1/_3$. Ciò può essere l'occasione per discutere con la classe la nascita del simbolismo matematico. Si tratta, in sostanza, di determinare l'altezza di un albero i cui $7/_{12} = \; 1/_4 + 1/_3$, che si trovano nel sottosuolo, misurano 21 pollici.

d) Metodo di falsa posizione II

Un uomo vedendo dei cavalli che pascolavano in un campo espresse un desiderio dicendo: "Se foste miei e foste il doppio e se ne aggiungesse la metà di questa metà, sicuramente potrei vantare 100 cavalli. Dica, chi vuole, quanti cavalli vide inizialmente quell'uomo?" (Alcuino di York, Giochi matematici alla corte di Carlo Magno, ETS, 2005).

Soluzione

Indicando con x il numero di cavalli, si ha: $2x + \frac{2x}{4} = 100$. Se si assegna ad x un numero multiplo di 2, ad esempio 2, si ottiene: $4 + \frac{4}{4} = 5$, invece di 100. Poiché per arrivare a 100, si deve moltiplicare 5 per 20, anche il numero di falsa posizione, ossia 2, va moltiplicato per 20. Quindi i cavalli che pascolavano erano 40.

e) Un incontro tra vecchi amici

Due matematici italiani si ritrovano per caso sullo stesso volo aereo. "Se ben ricordo, tu hai tre figli" dice Mario "quanti anni hanno?" "Il prodotto delle loro età è 36" risponde Ferdinando e la somma delle loro età è uguale alla data di oggi". Dopo un minuto, Mario ribatte: "Mi spiace, caro Nando, ma questo non basta per calcolare le età dei tuoi figli". "Già, avevo dimenticato di dirti che il più piccolo ha i capelli rossi". "Ah, ecco! Adesso ho capito esattamente quanti anni ha ognuno dei tuoi figli" conclude Mario. Riuscite a capire come ha fatto?

f) Indovina il numero

Si invita una persona a pensare un numero e successivamente a effettuare questa serie di operazioni:

1) Moltiplicare il numero pensato per cinque;
2) Aggiungere sei al prodotto;
3) Moltiplicare il risultato per quattro;
4) Aggiungere nove al nuovo prodotto.
5) Moltiplicare per cinque l'ultimo risultato ottenuto.

Se ci viene fornito il risultato, è sufficiente sottrarre 165 e dividere per 100, per trovare il numero pensato. Come si spiega?

g) Partita a tre

Tre giocatori convengono che ad ogni partita il perdente raddoppi il denaro degli altri due. Dopo tre partite perse nell'ordine, la prima dal primo giocatore, la seconda partita dal secondo e la terza dal terzo, chiudono il gioco avendo ognuno 24 €. Quanto denaro aveva ognuno di essi all'inizio?

h) Il bastone rotto

Il re di Aci Picchia, appassionato di giochi matematici, promette di lasciare in eredità parte del suo regno, alla persona che riesce a calcolare la probabilità che, rompendo a caso un bastone da passeggio, i tre pezzi possono formare i lati di un triangolo. Vuoi provare a risolverlo?

i) Le botti del vignaiuolo

L'esercizio che segue richiede, semplicemente, di ragionare. Un vignaiuolo lasciò, morendo, ai suoi tre figli, 21 botti della stessa capacità, 7 delle quali piene di vino, 7 semipiene e 7 vuote. Come, secondo voi, furono ripartite egualmente tra i tre figli quelle botti, senza far uso di alcuna misura?

Si propone la risoluzione tramite il "Cooperative learning", spendendo prima due parole al riguardo per sottolinearne l'importanza nell'ambito dell'apprendimento**.** La didattica collaborativa si rifà alla teoria del socio-costruttivismo secondo la quale la conoscenza è il prodotto di una costruzione attiva del soggetto ed è ancorata al contesto in cui si svolge attraverso particolari forme di collaborazione e negoziazione sociale. Essa punta al miglioramento dei processi di apprendimento e socializzazione attraverso la mediazione del gruppo i cui membri devono agire sentendosi positivamente interdipendenti tra loro, in modo che il successo di uno sia il successo di tutti. Per Vygotskij, infatti, ogni individuo possiede potenzialità cognitive latenti che si possono esprimere solo attraverso l'interazione con gli altri (zona di sviluppo prossimale). Nella didattica collaborativa il docente assume il ruolo di tutor nel senso che deve favorire l'interazione tra gli studenti, stimolare la discussione, facilitare l'apprendimento ricorrendo a continue sollecitazioni, utilizzando il gruppo in cui gli alunni lavorano insieme per migliorare reciprocamente il loro apprendimento, puntando su una mediazione sociale, contrapposta alla mediazione dell'insegnante.

Caratteristiche positive del lavoro cooperativo sono: lo sviluppo di un legame concreto tra gli studenti**,** l'interazione faccia a faccia che garantisce processi di reciproco apprendimento e incoraggiamento**,** lo stimolo alla responsabilizzazione in quanto l'insegnante deve valutare e comunicare il suo giudizio sulla qualità e la quantità dei contributi di ciascuno**,** l'importanza dello sviluppo delle "abilità sociali": il gruppo non lavora efficacemente se i suoi membri non possiedono certe capacità (saper ascoltare, essere disponibili a condividere le decisioni, comunicare le proprie opinioni, gestire i conflitti …). Numerose ricerche hanno dimostrato che con il cooperative learning si recuperano allievi problematici, poco motivati allo studio e con problemi affettivi, si facilita l'integrazione di allievi disadattati per handicap o etnie diverse, si valorizzano

gli allievi bravi (gifted student), si sviluppano competenze sociali del senso civico, del rispetto dell'altro, si favorisce lo sviluppo di un cittadino democratico.
In una prospettiva critico-dialettica, scegliamo di sperimentare il "group reading activity" con il quale l'insegnante sottopone agli alunni un testo da leggere focalizzando l'attenzione sui concetti chiave e pone una domanda generale per guidarne la lettura. Divide, quindi, la classe in gruppi eterogenei quanto più è possibile ed assegna il testo da leggere, che può anche essere diviso in parti, se si presta! Ogni alunno legge in silenzio rispondendo, eventualmente, a domande, su una scheda, che l'insegnante potrebbe aver predisposto per la miglior comprensione del testo o per facilitare qualche alunno in difficoltà. Dopo il tempo assegnato dal docente, nel gruppo si condividono le riflessioni e, per ogni gruppo, viene scelto lo student critic, dal docente o dal gruppo stesso. Al via del docente, gli studenti critici si scambiano tra i gruppi per, con domande opportune, "criticare" in modo costruttivo, il lavoro dei compagni, nel frattempo predisposto. Dopo questa fase, i critici ritornano nei loro gruppi iniziali e, alla luce di quanto evidenziato dai colleghi critici, rivedono il proprio lavoro assieme ai compagni del gruppo di appartenenza. L'insegnante gira tra i banchi per risolvere eventuali difficoltà e, quando ritiene opportuno, invita i vari gruppi a presentare il proprio lavoro. Segue, da parte di ogni gruppo, la presentazione "ufficiale" alla classe per la valutazione; in questa fase tutti gli studenti possono intervenire con domande o osservazioni.

j) dal "De viribus quantitatis" di Luca Pacioli "Riparto di monete"

Testo**:** "Tre persone si sono divise una quantità nota di oggetti, ad esempio 10 ducati, in parti che il "mago" indovinerà facendo eseguire mentalmente ai giocatori certe operazioni aritmetiche. Precisamente: il primo giocatore dovrà raddoppiare il numero degli oggetti presi; il secondo dovrà moltiplicare quanto in suo possesso per il numero degli oggetti iniziali, il terzo dovrà aggiungere 1 al numero degli oggetti iniziali e moltiplicare il risultato ottenuto per quanto in suo possesso. I tre giocatori dovranno poi sommare i tre numeri ottenuti e riferire il totale al mago che indovinerà i tre quantitativi di monete eseguendo le seguenti operazioni: il mago, moltiplicherà il numero degli oggetti iniziali +1, per il numero degli oggetti iniziali e sottrarrà, dal risultato ottenuto, il totale che i tre giocatori gli avranno riferito; quindi, dividendo il risultato ottenuto per il numero degli oggetti iniziali meno 1, scoprirà che: con il quoziente otterrà il numero degli oggetti posseduti dal primo giocatore, con il resto quelli posseduti dal secondo giocatore, infine, per trovare il numero degli oggetti posseduti dal terzo giocatore gli basterà fare la differenza"
Agli alunni, dopo attenta lettura, verrà chiesto di sperimentare il gioco con un numero di oggetti a scelta e di formalizzare, eventualmente, il procedimento descritto.
In una Prospettiva empirico-analitica rientra lo "studio dei casi" con i quali si analizzano situazioni reali per sviluppare negli studenti le capacità analitiche necessarie per affrontare sistematicamente situazioni complesse di cui sono fornite tutte le indicazioni fondamentali. Agli studenti si presenta il "caso" o la situazione da risolvere che viene prima studiata individualmente, poi discussa in gruppo; una variante consiste

nel presentare agli studenti una situazione di emergenza (incident) nei confronti della quale gli studenti devono dimostrare di sapersela cavare!

k) Una tavoletta speciale

Si dispone di una tavoletta di cioccolato il cui primo quadretto in alto a sinistra contiene un pezzetto di aglio. Il gioco prevede due contendenti: il giocatore di turno spezza la tavoletta in due parti, lungo una qualsiasi linea di divisione dei quadretti; effettuata tale operazione, tiene per sé una delle due parti e consegna l'altra all'avversario che deve proseguire la suddivisione con le stesse modalità. Perde chi è costretto a prendere il quadratino con l'aglio. Esiste una strategia che può consentire di vincere con sicurezza, a chi inizia a giocare per primo?

Questo esercizio è stato pensato con riferimento al traguardo: "l'alunno riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo." Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri".

Dal punto di vista geometrico porta a fissare l'attenzione su una particolare proprietà *secondo la quale mentre da un rettangolo, con un solo taglio, si può ottenere un* quadrato, prendendo sul lato maggiore un segmento di lunghezza pari al lato minore, col quadrato, con un solo taglio, si possono ottenere solo rettangoli!

5. Matematica ricreativa e problem solving nella scuola dell'Infanzia e nella scuola Primaria

Nell'attuale momento storico l'insegnamento e l'apprendimento della matematica trova, più che mai, la sua ragion d'essere nel contributo che può dare alla formazione del pensiero e nell'acquisizione di un modo di pensare matematico, improntato allo sviluppo di interessi, di abilità logiche, intuitive, creative, alla chiarezza di idee, al rigore e alla precisione espositiva. È necessario quindi motivare, fin dai primi anni della scuola dell'infanzia e attraverso un'attività matematica "ludica", che parta dalle esperienze vicine al bambino, per divertire e al tempo stesso stimolare curiosità e ingegno. La matematica diventa occasione per osservare, ragionare, scoprire ed entusiasmarsi, mettersi alla prova, domandare e dialogare, sbagliare ed imparare dagli errori, affrontare problemi e trovare strategie diverse per risolverli. L'apprendimento della matematica è legato alla capacità di pensare e di elaborare ed è quindi alla base di ogni apprendimento. I bambini imparano attraverso il corpo, il proprio vissuto e le esperienze significative che li aiuteranno a trovare soluzioni a problemi reali. Per questo motivo è necessario mettere a loro disposizione spazi e tempi che siano in grado di innescare relazioni e opportunità per leggere e interpretare la realtà. Solo se i bambini si

trovano di fronte a situazioni stimolanti, diventano protagonisti del proprio apprendimento. Imparano a fare domande, a dare e a chiedere spiegazioni, ad accettare e condividere i punti di vista degli altri e soprattutto a non scoraggiarsi se le loro idee non risultino appropriate in quel determinato contesto o situazione. Occorre mettere il bambino di fronte a situazioni concrete che mettano in gioco percezione e movimento, manualità, creatività e iniziativa. In questo modo si stimolerà lo "sguardo matematico" che esplora i fatti, sviluppando logica e immaginazione, in un continuo intreccio con tutti i campi di esperienza. Diverse ricerche anche datate hanno dimostrato che i bambini di età prescolare dispongono già di una qualche competenza nell'eseguire in concreto operazioni aritmetiche richieste dalla soluzione di problemi orali (Pontecorvo, Pontecorvo, 1986; Aglì, Martini, 1995). Occorre valorizzare i loro saperi stimolando il confronto e la discussione e permettendo ad ognuno la rielaborazione delle proprie conoscenze attraverso attività legate all'esperienza. Il gioco è un contesto privilegiato per favorire lo sviluppo progressivo di competenze cognitive e socio-emozionali, indispensabili anche per il successo scolastico. Garantisce il coinvolgimento, l'entusiasmo, la motivazione, la competitività e il rispetto verso le regole. Nel gioco il bambino può effettuare osservazioni, formulare domande e possibili soluzioni, pianificare il controllo delle ipotesi, la raccolta dei fatti e l'interpretazione dei dati emersi. Al termine dell'attività ludica si può avviare, inoltre, una discussione collettiva sugli esiti dell'esperienza realizzata, la formulazione di spiegazioni alternative e la messa in relazione dei risultati. Attraverso uno scambio continuo di domande e risposte si mantiene vivo l'interesse e si offre l'opportunità di maturare nuove consapevolezze, riflettere e provare insieme a rispondere e trovare la soluzione a numerosi quesiti posti dalle situazioni reali, dai compagni o dalle insegnanti.
Il percorso parte dall'esplorazione della realtà che ci circonda per scoprire che è ricco di numeri e quantità con cui i bambini entrano molto presto in contatto ed imparano ad usarli per i loro giochi (conte, filastrocche). Le osservazioni, le conversazioni, le discussioni, le attività di rielaborazione grafica, pittorica e manipolativa sono essenziali per riflettere e rielaborare la realtà in termini matematici. Il bambino, attraverso un percorso di conoscenza e scoperta, impara a organizzare le proprie esperienze attraverso azioni consapevoli. Sperimentando, impara a confrontare, a ordinare, a compiere stime approssimative, a formulare ipotesi, a verificarle con strumentazioni adeguate, a interpretare e a intervenire consapevolmente sul mondo. Durante le attività diventa fondamentale la verbalizzazione di ciò che succede, il racconto, la storia che si svolge sotto gli occhi di tutti.

6. Attività proposte

Le attività-gioco proposte si rivolgono ai bambini di 4/5 anni e, con alcune varianti, anche agli alunni della scuola primaria.

a. Trova il numero… (Memory matematico)

Occorrente: tessere con numeri (entro il 9 o il 10) e tessere con le quantità corrispondenti ai numeri. Il gioco si può svolgere a coppie o a piccoli gruppi. Lo scopo è quello di abbinare il numero alla quantità corrispondente. Come si gioca:
disporre tutte le tessere coperte sul tavolo. A turno ogni bambino gira due tessere facendole vedere anche agli altri compagni. Se le due tessere girate rappresentano il numero e la quantità corrispondente, il bambino le prende e tocca ancora a lui finché non sbaglia; Se le due tessere non rappresentano una buona coppia, deve rigirarle e tocca al giocatore successivo. Il gioco termina quando non ci sono più tessere sul tavolo. Vince chi ne ha raccolte di più.
Il gioco prevede uno sforzo di memoria nel ricordare la posizione delle tessere mostrate dai compagni e riuscire così a completare le coppie prima degli altri.
Scuola dell'Infanzia- traguardo: Il bambino gioca in modo costruttivo e creativo con gli altri, sa argomentare, confrontarsi, sostenere le proprie ragioni con adulti e bambini.
Si possono prevedere diverse varianti, non solo con i numeri ma con oggetti, animali, lettere dell'alfabeto, verbi, aggettivi, ma anche operazioni, frazioni, numeri decimali.
Scuola Primaria- traguardo: l'alunno riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.

b. Giochiamo con i tappi (Tris)

Occorrente: tappi di bottiglia di due colori diversi, griglia (3 righe e 3 colonne disegnata su un cartoncino o realizzata con cannucce, bastoncini o legnetti. Il gioco si può svolgere a coppie.
Lo scopo è quello di disporre tre dei propri tappi colorati in linea retta orizzontale, verticale o diagonale. Se la griglia viene riempita senza che nessuno dei giocatori sia riuscito a completare una linea retta di tre tappi dello stesso colore, il gioco finisce in parità. Esiste anche una "combinazione vincente", grazie alla quale, durante una partita, uno dei giocatori posiziona i suoi simboli in modo che, nel momento finale, l'avversario, sia minacciato da due file e… qualunque mossa faccia, farà comunque tris e vincerà la partita!
Scuola dell'Infanzia- traguardo: Il bambino gioca in modo costruttivo e creativo con gli altri, sa argomentare, confrontarsi, sostenere le proprie ragioni con adulti e bambini.
Esiste una versione più complessa dove i giocatori scelgono, a turno, un numero da 1 a 9. Ogni numero può essere scelto un'unica volta. Vince il primo giocatore che riesce a produrre 15 come somma di tre dei numeri che ha scelto. Il fatto che questo gioco sia in effetti identico al tris si può dimostrare disegnando un quadrato magico 3×3, ovvero una griglia in cui le celle sono numerate con numeri da 1 a 9 in progressione da sinistra a destra e dall'alto in basso. La scelta di un numero da 1 a 9 corrisponde così alla scelta di una cella sulla griglia, e le linee rette orizzontali, verticali e diagonali corrispondono a tutte e sole le triple di numeri che danno somma 15. Ogni giocatore posizionerà i propri tappi colorati sulle caselle dei numeri scelti cercando di non far fare all'avversario 15.
Scuola Primaria- traguardo: l'alunno riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.

Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.

c. Animali in gioco (Sudoku) colori/animali/ numeri

Occorrente: una tabella con 4 righe e 4 colonne per un totale di 16 celle e 16 tessere animali (4 tessere per tipo) Il gioco si può svolgere a coppie. Lo scopo è quello di riempire con le tessere degli animali tutta la tabella. Ogni animale però deve ripetersi un'unica in volta in ciascuna riga, in ciascuna colonna e in ciascun riquadro. Il riempimento di tale tabella può essere facilitato dalla presenza di alcuni animali che consentono di arrivare più o meno facilmente alla soluzione.

Il gioco si presta a diverse varianti con oggetti e naturalmente con i numeri. La più semplice con i numeri prevede una griglia 4x4 con i numeri da 1 a 4. Come dice la parola, Sudoku che significa "numeri unici", ogni numero deve ripetersi un'unica in volta in ciascuna riga, in ciascuna colonna e in ciascun riquadro. Il riempimento di tale tabella può essere facilitato dalla presenza di alcuni numeri che consentono di arrivare più o meno facilmente alla soluzione.

Scuola dell'Infanzia -traguardo: il bambino ha familiarità sia con le strategie del contare e dell'operare con i numeri sia con quelle necessarie per eseguire le prime misurazioni di lunghezze, pesi, e altre quantità.

La griglia e i numeri utilizzati possono aumentare in base all'età del bambino.

Scuola Primaria- traguardo: l'alunno costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri.

d. La maga dei numeri

Il gioco può essere realizzato con varianti diverse.

Occorrente: bambini e cerchi grandi. Lo scopo è quello di fare entrare nel cerchio il numero di bambini scelti dalla maga. Si può partire da: nessun bambino nel cerchio blu, un bambino nel cerchio giallo, due bambini nel cerchio rosso…

Occorrente: oggetti diversi, cerchi, cartellini con i disegni delle quantità o dei numeri, nastro per attaccare i cartellini ai cerchi. Il gioco si può giocare a coppie o a piccoli gruppi. Lo scopo è quello di portare il numero di oggetti scelti dalla maga nel cerchio con il cartellino della quantità corrispondente.

Scuola dell'Infanzia - traguardo: il bambino raggruppa e ordina oggetti e materiali secondo criteri diversi, ne identifica alcune proprietà, confronta e valuta quantità; utilizza simboli per registrarle; esegue misurazioni usando strumenti alla sua portata.

Occorrente: oggetti diversi, cerchi, cartellini con i disegni delle quantità o dei numeri, nastro per attaccare i cartellini ai cerchi. Il gioco si può giocare a coppie o a piccoli gruppi. Lo scopo è quello di portare il numero di oggetti maggiori e/o minori del numero scelto dalla maga nel cerchio che li rappresenta.

Scuola Primaria- traguardo: l'alunno riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni….

Occorrente: carte con la rappresentazione della frazione, cerchi, cartellini con l'indicazione di frazione propria, impropria, apparente o decimale, nastro per attaccare i cartellini ai cerchi. Il gioco si può giocare a coppie o a piccoli gruppi.

Lo scopo è quello di portare la carta con le frazioni scelte dalla maga nel cerchio corrispondente. Lo stesso gioco può essere proposto con i numeri decimali.

7. Conclusioni

Il ragionamento matematico, è innegabile, ha una sua complessità. Vanno, quindi, individuate le strategie più opportune affinché possano essere attivati i processi cognitivi che lo rendono possibile. L' apprendimento della matematica pertanto, non può essere basato sulla manipolazione di simboli, bensì sulla costruzione di concetti attraverso un itinerario che parta dall'attività ludica e costruttiva del soggetto (gioco di manipolazione, gioco di rappresentazione, gioco basato su regole). Sono queste esperienze a sollecitare la sua capacità di analisi e di intuizione, la sua curiosità e la sua fantasia. D'altra parte l'apprendimento è un processo che comporta una modificazione relativamente stabile nel modo di pensare, sentire, agire dello studente. Quando si parla di condizioni dell'apprendimento è bene distinguere quelle interne al soggetto da quelle relative all'ambiente in cui il processo deve svilupparsi. Alcune condizioni interne al soggetto sono, ad esempio, il suo grado di maturazione, le sue potenzialità cognitive, affettive e motorie, il grado di percezione dei propri bisogni, cioè tutto ciò che lo mette in grado di:

1.Fare esperienza;
2.Riflettere su quanto ha esperito;
3.Memorizzare l'esperienza fatta;
4.Riutilizzare l'esperienza in situazioni che riconosce in qualche modo analoghe alle precedenti.

Relativamente alle condizioni del contesto in cui deve avvenire l'apprendimento, compito del docente deve essere quello di creare un'atmosfera che:

a. Incoraggi ad essere attivi;
b. Favorisca la natura personale dell'apprendimento;
c. Ammetta l'idea che essere differenti è cosa accettabile;
d. Riconosca il diritto all'errore:
e. Tolleri l'imperfezione;
f. Incoraggi la fiducia in sé;
g. Trasmetta l'idea di essere rispettati e accettati;
h. Faciliti la scoperta;
i. Ponga l'accento sull'auto-valutazione in cooperazione;
j. Permetta il confronto delle idee. (In "Guida Pedagogica" della O.M.S).

Bibliografia

C. Frabetti, (2016), La matematica della natura, la natura della matematica, Hachette

E. Stabler, (1990), Il pensiero matematico, Universale scientifica Boringhieri, Torino

K. Devlin. (2000), Dove va la matematica, Bollati Boringhieri, Torino

F. Peiretti (2012), Matematica per gioco, Longanesi e C. Milano

M. Bachmakov (2008), La matematica del Club Olimpico Kangourou, Edizioni Kangourou Italia (Traduzione a cura di Barbara Mastracchio).

I. Moscovich (2016), Matemagica, Rizzoli, Milano, (Traduzione Mauro Gaffo)

B. De Finetti (1967), Il saper vedere in matematica, Loescher

G. Polya (1967), Come risolvere i problemi di matematica, Feltrinelli, Milano

G. Polya (1971), La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi, Feltrinelli, Milano (nuova edizione UTET Università Torino, 2016)

OECD, PISA (2012), Problem Solving Framework, in PISA 2012- Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy, OECD Pub., 2013.

R. Lucchetti (2001), Di duelli, scacchi e dilemmi. La teoria matematica dei giochi, Paravia

Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria

Luciana Delli Rocili[1], Antonio Maturo[2]

[1]Istituto Comprensivo Statale Pescara 5, Via Gioberti n. 15, 65100 Pescara
e-mail: lucianadr@live.it
[2]Università G. d’Annunzio di Chieti-Pescara, Viale Pindaro, 42, 65127, Pescara
e-mail: antomato75@gmail.com

Sunto
L’impostazione soggettiva del Calcolo delle Probabilità è, rispetto alle altre impostazioni, meno dipendente dal calcolo e mette maggiormente in luce gli aspetti logici del ragionamento probabilistico. Essa, essendo collegata alle scommesse ed alle decisioni in condizioni di incertezza, può essere introdotta facilmente e efficacemente in maniera ludica nella scuola primaria e quindi sembra particolarmente adatta per la comprensione dei fondamenti della matematica dell’incerto. In questo lavoro si presentano alcune esperienze di valutazione soggettive di probabilità svolte in classe, mettendo in evidenza il lavoro da svolgere per ottenere il rispetto delle condizioni di coerenza. Viene anche presentato un esperimento di valutazione soggettiva di probabilità geometriche.

Parole Chiave: Eventi, probabilità soggettiva, scommesse, coerenza, probabilità geometrica

1. Sul concetto di proposizione nella scuola primaria

In (Russell, 1962) un *enunciato* (o *proposizione) della logica bivalente* è descritto come “una disposizione di parole e/o simboli che esprime ciò che è o vero o falso”.
La descrizione di Russel, così come le altre presenti in letteratura, non è una definizione, ma nasconde una *valutazione soggettiva*. Ossia presuppone l’esistenza di un individuo, *il decisore*, forse un esperto di logica o di linguistica, ma non necessariamente, forse la maestra o un bambino, che stabilisce che una disposizione di parole e/o simboli è (a suo parere) un enunciato della logica bivalente.
Riteniamo che, in ambito scolastico, soprattutto nella scuola primaria, la mancanza di completa oggettività non sia un inconveniente. Essa riduce i deleteri automatismi ed è un’occasione per responsabilizzare i bambini e invitarli a riflettere e ad esprimere una loro opinione. Essi devono interrogarsi e cooperare per decidere se una data

disposizione di parole e/o simboli può essere interpretata come una domanda a cui si può dare una e una sola delle due risposte: *vero* o *falso*.
Dal punto di vista linguistico il concetto di *enunciato* o *proposizione* è più ampio, in quanto si riferisce ad una frase di senso compiuto (con soggetto, predicato verbale o nominale, complementi, etc.) per la quale si può esprimere un giudizio di verità che non necessariamente si limita a *vero* o *falso*, ma può essere anche *quasi del tutto vero*, *più vero che falso*, *a metà fra vero e falso*, *più falso che vero*, *quasi del tutto falso.*
Lo studio e le applicazioni degli enunciati linguistici si trova ad es. in (Zadeh, 1965, 1975). Esperienze e considerazioni sulla loro introduzione nella scuola primaria sono in (Delli Rocili, Maturo, 2013a, 2013b, 2015).
Il primo passo di una sperimentazione didattica nella scuola primaria consiste nel valutare fino a che punto i bambini, opportunamente guidati, riescono a riconoscere se una frase è un enunciato della logica bivalente, un enunciato linguistico, oppure non è un enunciato.
Importante, inoltre, è stabilire il "*criterio di verificazione*", ossia vedere con quali mezzi e quali difficoltà i bambini possono arrivare a decidere il valore di verità di un enunciato (Fadini, 1975).
Usualmente si ammette che il criterio di verificazione sia tale da permettere di assegnare il valore di verità della proposizione. Ma alcuni autori, ad esempio (Heyting, 1956), basandosi sulla logica intuizionista attribuiscono il valore vero o falso solo se è possibile dare una dimostrazione che vale uno dei due, per cui considerano un terzo valore di verità: "indeciso" o "indecidibile" se non si può dimostrare che la proposizione è vera o falsa. La possibilità di attribuire un terzo valore di verità è stata ampiamente approfondita in Reichenbach (1942), che ha elencato varie operazioni logiche fra le proposizioni della logica a tre valori. Applicazioni sono in Fadini (1975).
Lo stesso de Finetti (1970) riprende i concetti di Reichenbach per le operazioni fra eventi condizionati.
In questo lavoro, per semplicità, ci limiteremo a considerare solo proposizioni in cui si possa dimostrare che vale uno dei due valori: "vero" o "falso", una volta in possesso di una informazione completa.

2. Sul concetto di evento nella scuola primaria

Un evento E può essere definito come una proposizione della logica bivalente in cui è ammessa la possibilità che le informazioni in possesso del decisore siano incomplete e quindi non permettono di attivare il criterio di verificazione per stabilire se la proposizione è vera o falsa.
Per far familiarizzare i ragazzi con il concetto di evento, essi sono stati invitati a scegliere, per ogni evento E preso in considerazione, una delle seguenti alternative:

(1) Il decisore, con l'informazione che possiede, può stabilire che E è vero. L'evento E si dice "certo";

(2) Il decisore, con l'informazione che possiede, può stabilire che E è falso. L'evento E si dice "impossibile";
(3) le informazioni in possesso del decisore non permettono di stabilire se E è vero o falso. L'evento si dice "aleatorio".

"*Un evento è una proposizione di cui può essere non conosciuto il valore di verità. Se tale valore è conosciuto ed è 1, l'evento si dice* ***certo****, se è 0, si dice* ***impossibile****, se non è conosciuto si dice* ***aleatorio****.*" (de Finetti, 1970, p.710)

In una sperimentazione effettuata in due prime e due quarte di una scuola primaria, per verificare la comprensione dei concetti di proposizione o evento, abbiamo proposto agli alunni le seguenti attività:

(1) lettura di frasi e loro riconoscimento come enunciati della logica bivalente, verificando il grado di convinzione di ciascun alunno sul fatto che valgono i principi del terzo escluso e non contraddizione;
(2) classificazione di ciascuno degli enunciati accettati come eventi in: *certo*, *impossibile*, *aleatorio,* evidenziando sia il criterio di verifica e sia lo stato di informazione.

3. La scommessa come punto di partenza per ottenere la probabilità soggettiva

Nel nostro percorso didattico, una volta preparati gli studenti alla comprensione dei concetti logici fondamentali, è apparso naturale introdurre la probabilità dal punto di vista soggettivo, più generale, non legato ad assunzioni, più o meno sottointese, di equiprobabilità di eventi di una particolare partizione dell'evento certo (de Finetti, 1970; Scozzafava, 1996, 2001; Coletti, Scozzafava, 2002; Maturo, 1993, 2008). Inoltre, la probabilità soggettiva è il fondamento della teoria razionale delle decisioni in condizioni di incertezza, come è stato evidenziato da Lindley (1970).

Da sottolineare che la probabilità soggettiva è meno dipendente dal calcolo, mette maggiormente in luce gli aspetti logici del ragionamento probabilistico e può essere introdotta facilmente e efficacemente in maniera ludica. Una dimensione fiabesca per introdurre la probabilità soggettiva, utile nelle prime classi, è in (Di Poccio, 2018).

L'idea definettiana di introdurre la probabilità attraverso le scommesse ha avuto un successo entusiastico da parte dei bambini, che, vedendo la scommessa come un gioco, hanno avuto lo stimolo per l'avvio alla comprensione dei fondamenti e delle procedure della logica dell'incerto.

Un aspetto molto significativo è stato quello di rinforzare la capacità dei ragazzi di stabilire collegamenti interdisciplinari, in quanto lo sforzo di comprensione logica degli enunciati, del loro collocamento spaziale e temporale, ha portato ad uno spontaneo approfondimento dei concetti grammaticali, sintattici, storici, ottenendo in particolare un arricchimento del vocabolario e una velocizzazione nel processo di assimilazione dei concetti espressi in forma analitica, scritta o verbale.

Per assegnare la probabilità soggettiva, un bambino ha assunto il ruolo di banco e gli altri il ruolo di scommettitori. Come monete sono state usate le figurine dei calciatori o della famiglia Simpson.

Figura 1

All'inizio sono stati presi in considerazione alcuni eventi legati alle squadre di calcio come i seguenti:

A = "Il Pescara Calcio vincerà la prossima partita",

B = "La Juventus vincerà domenica prossima",

C = "Il Milan vincerà la prossima partita in casa".

Successivamente sono stati considerati eventi legati alla vita quotidiana:

D = "Lunedì prossimo pioverà",

F = "Il maestro Alberto fra 15 giorni avrà i capelli rasati",

G = "La maestra Luciana a giugno avrà i capelli corti",

H = "Il prossimo mercoledì nella mensa della scuola si mangeranno le uova strapazzate",

L = "Fra due lunedì a mensa si mangerà la carne",

M = "L'anno prossimo a scuola arriveranno due maestri nuovi",

N = "L'anno prossimo la maestra comprerà una macchina nuova".

Una sperimentazione numericamente efficace avrebbe richiesto l'uso di 100 o almeno 50 figurine. Tuttavia, essendo in una prima elementare, è stato necessario limitarsi all'uso di 20 figurine, in quanto 20 rappresenta concretamente "*tutto un uomo*", il

numero delle sue dita di mani e piedi, e ciò porta gli alunni ad avere consapevolezza dei concetti di quantità e di numero.
Un bambino (lo scommettitore) doveva decidere la quantità di figurine P (la puntata) da puntare sul verificarsi dell'evento E considerato; in cambio il banco doveva pagare 20 figurine se l'evento E si verificava.

Figura 2

Il lavoro è stato organizzato nelle seguenti fasi:
Fase 1. Gli scommettitori sono stati lasciati liberi di decidere la loro puntata sugli eventi considerati, con la ovvia condizione di coerenza che la puntata (pagamento certo) non deve superare la vincita (ricavo possibile).
Fase 2. I bambini, sempre con la vincita fissa di 20 figurine, sono stati invitati a puntare anche sugli eventi contrari.
Fase 3. Si è aperta una discussione sul significato delle puntate sia sugli eventi e sia sui loro contrari. Ciò ci ha permesso di individuare per ogni bambino la *propensione*, l'*avversione* o l'*indifferenza* al rischio.
Per ogni evento E, e per ogni bambino che ha scommesso, indicando con S(E) e con T(E) le puntate, rispettivamente su E e sull'evento contrario $\neg$E, abbiamo calcolato il valore:

$$R(E) = (S(E) + T(E) - 20) / 20. \qquad (1)$$

Il numero R(E), per puntate che non superano la vincita, appartiene all'intervallo [-1, 1]. Esso è positivo in caso di propensione al rischio, negativo in caso di avversione al rischio e nullo per indifferenza al rischio.
Per semplicità, per evitare calcoli con la virgola, si è considerato al posto di R(E) il numero R*(E) = 100 R(E), ottenuto dalla formula R*(E) = 5 (S(E) + T(E) - 20). Ogni bambino, dal valore di R*(E), ha potuto rendersi conto del suo comportamento rispetto al rischio.
I risultati ottenuti nel primo ciclo di scommesse, relativamente agli eventi, C, F, D, sono stati i seguenti:

Scommettitori	Evento C	Evento ¬C	Evento F	Evento ¬F	Evento D	Evento ¬D
1 Alice	10	1	0	10	10	0
2 Nicolò	6	2	1	18	20	3
3 Filippo	3	1	0	10	10	20
4 Nadia	4	10	0	10	10	10
5 Francesco	10	9	10	0	20	3
6 Leonardo	8	2	20	1	19	0
7 Ludovica	9	1	0	10	10	8
8 Ilaria	1	20	0	20	20	1
9 Silvia	7	0	20	5	10	11
10 Alessio	20	0	0	12	30	19

Tabella 1

I valori dell'indice R* per gli eventi C, F, D sono i seguenti:

Scommettitori	Evento C	Evento F	Evento D	Media
1 Alice	-45	-50	-50	-48
2 Nicolò	-60	-5	15	-17
3 Filippo	-80	-50	50	-27
4 Nadia	-30	-50	0	-27
5 Francesco	-5	-50	15	-13
6 Leonardo	-50	5	-5	-17
7 Ludovica	-50	-50	-10	-37
8 Ilaria	5	0	15	3
9 Silvia	-66	25	5	-12
10 Alessio	0	-40	145	35
Media di R	-38	-27	19	-16

Tabella 2

I risultati della tabella sembrano contradditori. Nella valutazione degli eventi C e F i bambini mostrano in generale un'avversione al rischio, mentre per l'evento D si ha in media una propensione al rischio.

Probabilmente il bambino 10 (Alessio) pensava che la vincita fosse di 30 figurine perché il primo approccio al gioco era avvenuto con la possibile vincita di 30 figurine. Alcuni bambini (Alice e Ilaria) hanno avuto un comportamento costante per i vari eventi, la prima con marcata avversione al rischio, la seconda praticamente indifferente al rischio. Altri bambini (Filippo e Alessio) hanno cambiato nettamente atteggiamento nel passare dai primi due eventi al terzo.

4. **La coerenza delle scommesse e la probabilità soggettiva**

A partire dalle idee emerse nella fase precedente è stato introdotto il concetto di *coerenza* della scommessa.

Il *primo principio di coerenza* riguarda l'evento certo e l'evento impossibile. La puntata sull'evento certo deve essere uguale alla vincita e la puntata sull'evento impossibile deve essere nulla.

Il *secondo principio di coerenza* dice che, fra il giocatore e il banco, uno paga la puntata e l'altro la vincita. In altre parole, se la vincita è positiva, le puntate non possono essere negative.

I bambini sono stati invitati a riflettere sul fatto che, puntando contemporaneamente le somme S(E) e T(E) rispettivamente sull'evento E e sul suo contrario $\neg$E, con la vincita uguale alla stessa quantità di 20 figurine, allora possono verificarsi i seguenti casi:

(1) Se $S(E) + T(E) > 20$, allora si ha una perdita certa;
(2) Se $S(E) + T(E) < 20$, allora si ha una vincita certa;
(3) Se $S(E) + T(E) = 20$, allora non si vince e non si perde.

Per evitare le prime due circostanze inaccettabili, la prima dal banco, la seconda dal bambino, allora è necessario concordare che la somma delle due puntate deve essere uguale alla vincita (*terzo principio di coerenza*).

Tenendo conto dei principi di coerenza i bambini sono stati invitati ad aggiornare gradualmente (una figurina alla volta) le loro puntate fino ad arrivare ad un insieme di puntate coerenti. In una fase intermedia, prima di considerare i principi di coerenza, ci si è limitati a concedere al banco la facoltà di rifiutare le scommesse con una puntata troppo bassa.

Un esperimento di scommessa coerente è stato fatto con gli eventi G ed L. I bambini sono stati invitati a rispettare i principi di coerenza, in particolare la condizione $S(E) + T(E) = 20$ per ogni evento E considerato.

I risultati sono presentati nella seguente tabella 3.

L'atteggiamento dei bambini appare molto variabile. Molti bambini, precisamente i numeri 1, 3, 4, 6, 8 per l'evento G e i numeri 6, 7 per l'evento L, tendono a non considerare l'aleatorietà ma a considerare gli eventi come certi o impossibili.

Altri bambini, ossia i numeri 10 per l'evento G e 8, 10 per l'evento L si allontanano molto timidamente dall'idea di considerare gli eventi solo come certi o impossibili.

I bambini 2, 5, 7, 9 considerano come aleatorio l'evento G con valutazioni molto vicine fra loro. Le opinioni dei bambini sull'evento L appaiono divise in due contrapposte fazioni, una con alta fiducia sul verificarsi di L, uno con bassa fiducia. Solo il bambino 1 attribuisce una equiprobabilità a L e al suo contrario.

Scommettitori	Evento G	Evento ¬G	Evento L	Evento ¬L
1 Alice	0	20	10	10
2 Nicolò	12	8	4	16
3 Filippo	0	20	4	16
4 Nadia	0	20	18	2
5 Francesco	12	8	4	16
6 Leonardo	20	0	20	0
7 Ludovica	12	8	20	0
8 Ilaria	0	20	1	19
9 Silvia	10	10	17	3
10 Alessio	1	19	2	18

Tabella 3

A questo punto si introduce la definizione di probabilità soggettiva. Per ogni evento E, se S(E) e T(E) sono puntate, rispettivamente su E e sul suo contrario ¬E, i rapporti:

$$p(E) = S(E) / 20 \qquad q(E) = T(E) / 20 \tag{2}$$

sono le probabilità soggettive di E e di ¬E, rispettivamente.

È immediato far capire ai bambini che se la vincita invece di essere di 20 figurine, è di un numero V di figurine, le formule (1) e (2) vanno cambiate sostituendo V al posto di 20. La seconda condizione di coerenza diventa S(E) + T(E) = V.

I ragazzi, in una fase successiva, saranno in grado di ricavare che, indicando con Ω l'evento certo, con ∅ quello impossibile e con E un evento generico, in termini di probabilità le tre condizioni di coerenza si riducono alle formule:

$$p(\Omega) = 1,\ p(\varnothing) = 0,\ p(E) \geq 0,\ q(E) \geq 0,\ p(E) + q(E) = 1. \tag{3}$$

5. Un esperimento sul comportamento dei gruppi

Un significativo esperimento è stato condotto per vedere il comportamento dei gruppi. Una classe di 18 bambini è stata divisa in tre gruppi di 6 bambini.

A ciascun gruppo è stato chiesto di assegnare soggettivamente una probabilità agli eventi considerati nei paragrafi precedenti.

Nella seguente tabella 4 sono presentati i risultati ottenuti prima di introdurre il concetto di coerenza.

Scommettitori	Evento C	Evento ¬C	Evento F	Evento ¬F	Evento D	Evento ¬D
Gruppo 1	0	30	0	20	0	20
Gruppo 2	10	0	0	20	20	0
Gruppo 3	20	0	0	20	10	20

Tabella 4

In corrispondenza sono stati ottenuti i seguenti valori dell'indice R*

Scommettitori	Evento C	Evento F	Evento D	Media
Gruppo 1	50	0	0	17
Gruppo 2	-50	0	0	-17
Gruppo 3	0	0	50	17
Media	0	0	17	6

Tabella 5

La puntata sull'evento F è coerente per tutti i gruppi, quella sull'evento D è coerente per i primi due gruppi e con propensione al rischio per il terzo gruppo. Si può osservare che le puntate dei gruppi appaiono spesso discutibili poiché in quasi tutti i casi gli eventi sono stati considerati certi o impossibili, ossia i gruppi sono apparsi orientati a non tener conto dell'aleatorietà. Forse l'opinione del ragazzo che è stato implicitamente considerato il più autorevole dai colleghi è stata assunta acriticamente come verità.
Successivamente, una volta introdotto il concetto di coerenza, sono state proposte puntate coerenti sugli eventi:

G = "La maestra Luciana a giugno avrà i capelli corti",

L = "Fra due lunedì a mensa si mangerà la carne".

I risultati, presentati nella tabella 6, confermano l'attitudine dei gruppi a non valutare l'aleatorietà. Fa eccezione il comportamento del gruppo 3 per l'evento L, ma si osserva in questo caso un giudizio a priori di equiprobabilità senza una adeguata riflessione sulla maggiore facilità di verificarsi fra gli eventi L e ¬L.

Scommettitori	Evento G	Evento ¬G	Evento L	Evento ¬L
Gruppo 1	0	20	20	0
Gruppo 2	0	20	20	0
Gruppo 3	0	20	10	10

Tabella 6

6. La "battaglia gattale" come confronto fra probabilità statistica e soggettiva

Uno strumento giocoso da noi elaborato che si può utilizzare per rendere consapevoli i ragazzi sulla validità dei giudizi di probabilità soggettiva è quello che abbiamo chiamato "battaglia gattale" per la sua somiglianza con la nota "battaglia navale".

Si mostra ai ragazzi un tabellone in cui è disegnata la sagoma di un gatto (figura 3) o di una famiglia di gatti (figura 4) e si invitano a dare soggettivamente le probabilità degli eventi:
E = "Il gatto di figura 3 viene colpito";
¬E = Il gatto di figura 3 non viene colpito";
F = "La famiglia di gatti di figura 4 viene colpita",
¬F = "La famiglia di gatti di figura 4 non viene colpita".

Figura 3

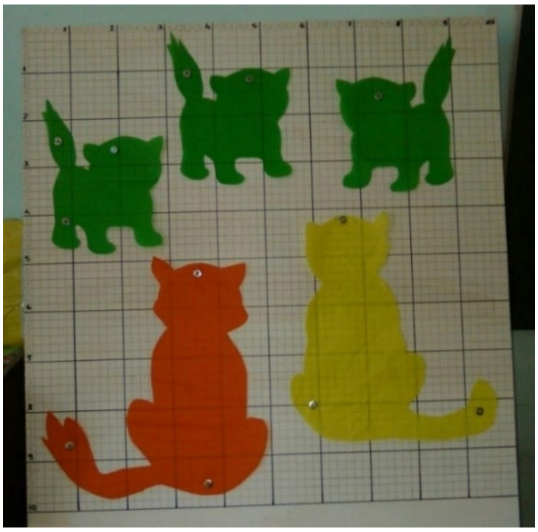


Figura 4

Gli esperimenti di formulazione della probabilità soggettiva degli eventi E ed F di figura 3 e figura 4 hanno dato risultati molto diversi, in quanto nel primo caso si tratta di un evento con probabilità bassa e nel secondo con probabilità alta, per cui entrano in gioco aspetti psicologici diversi.
Le probabilità di E e di F, di tipo geometrico, non possono essere calcolate con le usuali cognizioni di geometria, per cui l'unica alternativa alla probabilità soggettiva si ottiene

con la probabilità statistica per mezzo del metodo di Montecarlo, generando punti a caso nel tabellone e vedendo quanti di questi punti "colpiscono" il gatto o la famiglia di gatti. Un criterio per indurre i ragazzi a valutazioni ragionate di probabilità soggettiva è stato quello di promettere un premio o comunque una gratificazione a chi si è avvicinato di più alla probabilità statistica.

7. Conclusioni e ulteriori prospettive di ricerca

La ricerca svolta sembra evidenziare una buona attitudine da parte degli alunni intervistati a comprendere, almeno intuitivamente, il significato di *enunciato della logica bivalente, evento, enunciato linguistico, non enunciato linguistico*. Si evidenzia anche una certa capacità critica nell'analisi delle frasi.
Tuttavia, esiste talvolta una difficoltà interpretativa nel passaggio dall'aspetto intuitivo a quello analitico, ossia nella comprensione piena delle sfumature contenute in una frase.
Ad esempio, affermare che un enunciato è '*più vero che falso'* porta a una logica plurivalente, mentre spesso si attribuisce il giudizio '*più vero che falso*' ad un evento volendo intendere che '*è più probabile che sia vero piuttosto che sia falso*'.
Riteniamo che sia opportuno, anche nelle prime classi della Scuola Primaria, far capire la differenza fra i due concetti, per recuperare i significati del linguaggio parlato che si inserisce in un contesto molto più ampio rispetto al linguaggio restrittivo basato sulla logica bivalente.
La "battaglia gattale" è risultata essere un utile strumento per riflettere sulla portata ed i limiti della probabilità soggettiva. È stata anche efficace per mostrare come si può fare matematica rigorosa anche con l'uso di procedimenti empirici.
Per quanto riguarda la coerenza, le valutazioni di probabilità sugli eventi presentati nella "battaglia gattale" all'inizio sono state quasi tutte incoerenti, poi sono state corrette con l'ausilio dell'insegnante.
Il concetto di coerenza va ulteriormente approfondito con un altro principio di coerenza e ulteriori sperimentazioni. Il quarto (e ultimo) *principio di coerenza* riguarda tre eventi aleatori. Se A, B, C sono tre eventi aleatori tali che ciascuno è il contrario dell'unione degli altri due, allora facendo le puntate S(A), S(B), S(C), rispettivamente su A, B, C, in una scommessa con vincita fissa V, allora deve essere $S(A) + S(B) + S(C) = V$. Dividendo per V si ottiene la quarta condizione di coerenza in termini di probabilità:

$$p(A) + p(B) + p(C) = 1. \qquad (4)$$

Le condizioni di coerenza per 4 o più eventi tali che ognuno è il contrario dell'unione degli altri, oppure per eventi qualsiasi, sono conseguenza dei 4 principi di coerenza e quindi non è necessario introdurre altri principi.
A partire dalle 4 condizioni di coerenza si ottengono tutte le formule utili per i vari giochi basati su decisioni in condizioni di incertezza e che quindi utilizzano la probabilità soggettiva.

Bibliografia

Coletti G., Scozzafava R., (2002), *Probabilistic Logic in a Coherent Setting*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

De Finetti B., (1970), *Teoria delle Probabilità*, Einaudi, Torino,

Delli Rocili L., Maturo A., (2013a), Logica del certo e dell'incerto per la scuola primaria, *Science & Philosophy*, 1 (1), 37-58.

Delli Rocili L., Maturo A., (2013b), Probabilità e Statistica nella scuola primaria: esperienze didattiche e proposte, *Science & Philosophy*, 1 (2), 49-78.

Delli Rocili L., Maturo A., (2015). Interdisciplinarità, logica dell'incerto e logica fuzzy nella scuola primaria. *Science & Philosophy*, 3(2), pp.11-26.

Di Poccio A. M., (2016), Numeri in fabula. Le probabili avventure nel paese di Matelandia (pp. 78-79), 2^ edizione APAV, Pescara, 2018.

Fadini A., (1979), *Introduzione alla teoria degli insiemi sfocati*, Liguori Editore, Napoli.

Heyting, A., (1956), *Intuitionism: An Introduction*, Amsterdam: North-Holland Publishing, 3rd revised edition, 1971.

Lindley D. V., (1990), *La logica della decisione*, Il Saggiatore, Milano.

Maturo A., (1993), Struttura algebrica degli eventi generalizzati, *Periodico di Matematiche*, 4, 1993, p. 18-26.

Maturo A., (2008), La moderna visione interdisciplinare di Geometria, Logica e Probabilità in Bruno de Finetti**,** *Ratio Sociologica,* 2, 2008, pp. 39-62.

Reichenbach H., (1942), *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica*, tr. it. Einaudi, Torino, 1952

Russell B., (1962), *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milano.

Scozzafava R., (1996), *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*, Zanichelli, Bologna.

Scozzafava R., (2001), *Incertezza e probabilità. Significato, valutazione, applicazioni della probabilità soggettiva*, Zanichelli, Bologna.

Zadeh L. A. (1965). Fuzzy Sets. Information and Control. 8. 338-358.

Zadeh L. A. (1975), The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, Inf Sci 1975;8 Part I:199–-249, Part II 301–-357, Part III. Inf Sci 1975;9: 43–-80.

La geometria nelle indicazioni per la scuola dell'obbligo, con particolare riferimento alle trasformazioni geometriche

Ferdinando Casolaro[1], Paolo Rotondo[2]

[1]Dipartimento di Architettura Università di Napoli
email ferdinando.casolaro@unina.it
[2]Segretario Mathesis Pescara
email paolorotondo97@gmail.com

Sunto
In questo articolo si presenta un primo approccio allo studio delle Trasformazioni geometriche, con i primi elementi di Geometria analitica, per gli alunni del Primo Ciclo di studi. Un cenno è dato alla definizione di vettore con le relative operazioni elementari ed alle trasformazioni topologiche.

Parole chiave Omologia, piano cartesiano, vettore, trasformazioni geometriche.

1. Introduzione

La Geometria che viene proposta già dalla Scuola dell'infanzia si riferisce al Modello euclideo che troviamo nella brillante opera di Euclide "*gli Elementi*".
Negli ultimi tre secoli si sono sviluppati ulteriori Modelli di Geometria, per l'evoluzione dei risultati che hanno condotto ad una visione moderna del mondo fisico (Cundari, 1990-1991).
Precisamente, la Geometria euclidea è strutturata come Modello statico senza tener conto che l'Universo è in continuo movimento. Di ciò se ne era reso conto lo stesso Euclide che ha lasciato un'opera - *I fenomeni,* di cui c'è una traduzione pubblicata nel 1916 - in cui tratta di Geometria in movimento (Casolaro, Rotunno 2015).
Ad esempio, ne "*I fenomeni*" viene data, per la prima volta, una definizione dinamica di *sfera* come *superficie di rotazione di una circonferenza intorno al proprio diametro* e non con la definizione statica, che troviamo negli *"Elementi*", di *luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da un punto fisso detto centro.*
Non è un caso che tale opera sia stata tradotta all'inizio del XX secolo, quando erano già stati definiti i concetti essenziali di Geometria Proiettiva e Geometria Descrittiva (oltre ai risultati di Einstein sullo sviluppo della Teoria della Relatività), modelli che

permettono uno studio più scorrevole delle figure, ma non senza rigore, attraverso le Trasformazioni Geometriche.
A livello didattico, per lo studio delle Trasformazioni geometriche, è essenziale la conoscenza dei primi elementi di Geometria analitica, per cui la descrizione che segue si propone di costruire un percorso esaustivo - dall'infanzia alla Scuola secondaria di Primo grado - che permetta all'allievo di uscire alla fine del Primo Ciclo di istruzione con le conoscenze essenziali per affrontare gli impegni successivi.

2. Il primo approccio con la Geometria: l'Omologia

Il primo approccio con la Geometria che ha un bambino già all'età di sei/sette mesi è espresso da una parola che noi docenti di Matematica abbiamo imparato nei corsi universitari: l'*Omologia* (Casolaro, 2003).
Alcuni risultati pervenutici da più parti ci dicono che l'ombra del Sole sul pavimento, attraverso finestre o balconi, rappresenta uno dei primi momenti di attrazione per un bambino.
Ebbene, questa prima osservazione non rientra nel modello della geometria euclidea in quanto la trasformazione del rettangolo - che individua la sezione di una finestra o di un balcone - nella sua ombra sul pavimento conserva il parallelismo dei lati, ma non conserva l'ampiezza degli angoli.
Per comprendere e far comprendere ai bambini questo concetto, l'insegnante può procedere con i passi che indichiamo di seguito. Ovviamente ci si riferirà ad una bella giornata di sole, altrimenti i bambini non riuscirebbero a visualizzare l'ombra sul pavimento.

1. nella prima mattinata la maestra fa disegnare la figura della finestra e la sua ombra. Il disegno sarà del tipo della figura (2.1):

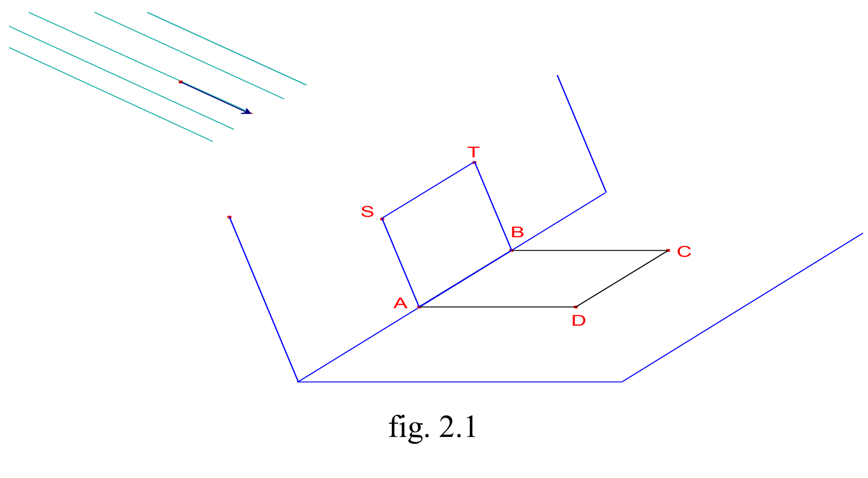


fig. 2.1

2. alcune ore dopo la maestra dice ai bambini di ripetere il disegno. È evidente che per gli effetti della rotazione della terra intorno al sole, la forma della figura sul piano orizzontale è cambiata fig. (2.2):

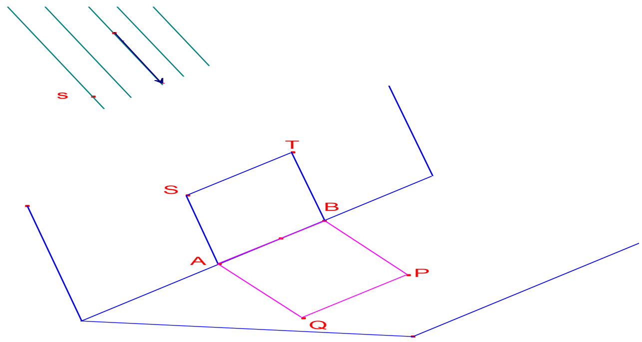


fig. 2.2

Sovrapponendo i due disegni, si osserva immediatamente che il rettangolo ABTS situato sulla parete orizzontale si muta in se stesso, mentre la figura rappresentata dal parallelogramma ABCD (ombra sul pavimento) si è trasformata nel parallelogramma ABPQ (fig. 2.3).
La trasformazione sul piano del pavimento, che muta ABCD in ABPQ, è detta *Omologia*.

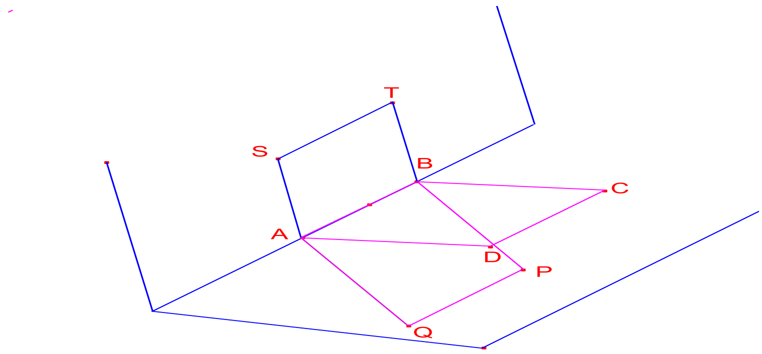


fig. 2.3

Pertanto l'omologia è la prima trasformazione geometrica che colpisce l'occhio di un bambino. È interessante far notare - magari agli alunni di età tra i 12 e 14 anni che hanno già una visione più avanzata - che la trasformazione è generata nello spazio tridimensionale (dai raggi del sole) ma si realizza nel piano, per cui rappresenta un esempio di *fusionismo* tra *geometria nello spazio* e *geometria nel piano*.

3. Definizione di vettore e concetto di iperpiano

In Matematica, un ***vettore*** è definito come classe di equivalenza di segmenti equipollenti (due segmenti del piano si dicono equipollenti se sono congruenti, paralleli ed equiversi). Una classe di equivalenza $\vec{v}$ di segmenti equipollenti prende il nome di ***vettore***.

In Fisica, una grandezza si può definire come ***vettore*** quando:
1) vale la legge del parallelogramma;
2) è invariante rispetto ai sistemi di riferimento ottenuti uno dall'altro per traslazione..
La 1) definisce le operazioni di addizione e sottrazione di due vettori, con la semplice rappresentazione grafica della costruzione del parallelogramma avente per lati i segmenti orientati che rappresentano i vettori nel piano.
Nella 2) compare la parola ***traslazione*** che sarà definita nel prossimo paragrafo come trasformazione geometrica. L'invarianza rispetto ai sistemi di riferimento per traslazione, significa che nei riferimenti cartesiani del piano costituiti da assi omologhi paralleli tra loro, le componenti del vettore sono le stesse.

Un altro concetto che riteniamo essenziale proporre già dall'ultimo anno della Scuola Primaria, seppure solo a livello intuitivo, è il significato di ***iperpiano*** di uno spazio S_n come sottospazio S_{n-1} con una dimensione in meno di S_n.
Ovviamente, ci si limita a dire che:
- la retta è uno spazio a una dimensione che indichiamo con S_1, come si può osservare dal riferimento cartesiano sulla retta in cui un punto è individuato da un solo numero (ascissa);
- il piano è uno spazio a due dimensioni che indichiamo con S_2 perché, nel riferimento cartesiano del piano, un punto è individuato da una coppia di numeri (ascissa e ordinata).
- Lo spazio fisico che indichiamo con S_3 è a tre dimensioni perché nel riferimento cartesiano dello spazio, un punto è individuato da tre numeri (ascissa, ordinata, quota).

Dalla definizione di ***iperpiano***, è evidente che:
- la retta S_1 è un iperpiano del piano S_2;
- il piano S_2 è un iperpiano dello spazio fisico S_3.

Non pensiamo che sia incomprensibile citare l'esistenza di uno spazio S_4 a quattro dimensioni con la quarta coordinata tempo di cui S_3 è un iperpiano.

4. Isometrie e congruenze

Si dice ***isometria*** tra il piano α e il piano β una corrispondenza biunivoca tale che, se a due punti A e B di α corrispondono due punti A' e B' di β, risulta:

$$d(A, B) = d(A', B')$$

Se α coincide con β (cioè se i due piani sono sovrapposti), l'isometria è una trasformazione del piano α in sè che porta due punti A e B in due punti A' e B' in modo che risulti:

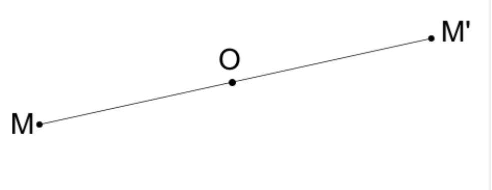
$$A\overline{B}=A'\overline{B}'$$

È evidente che il concetto di isometria è legato alla metrica in quanto coinvolge le distanze tra punti, cioè la misura.

Si dice ***congruenza*** tra una figura $\mathbf{F}_1$ del piano α e una figura $\mathbf{F}_2$ del piano β un movimento tra figure del piano che porta $\mathbf{F}_1$ a coincidere con $\mathbf{F}_2$.
Il concetto di congruenza caratterizza le trasformazioni del piano allo stesso modo delle isometrie ma non è legato a questioni metriche.
Poiché figure congruenti sono anche isometriche e figure isometriche sono anche congruenti, non faremo differenza tra isometria e congruenza (Casolaro F., Casolaro P., 2011).
Le principali isometrie sono:
a. *Simmetria centrale* (o rotazione di 180°);
b. *Simmetria assiale* (o ribaltamento);
c. *Traslazione*;
d. *Rotazione*.
Solo per completezza di trattazione, ma senza inoltrarci nei contenuti che non rientrano negli obiettivi di questo lavoro che è dedicato esclusivamente alle trasformazioni che si trattano nel Primo Ciclo di istruzione, richiamiamo le seguenti definizioni:
Def. - *L'insieme delle isometrie del piano forma gruppo rispetto al prodotto di trasformazioni ed è un sottogruppo del gruppo delle similitudini, e quindi anche sottogruppo del gruppo delle affinità, a sua volta sottogruppo delle omografie che rappresentano le più ampie trasformazioni geometriche lineari (cioè che mutano rette in rette) del piano*.
I docenti che vogliono approfondire le tematiche in oggetto, si possono riferire alla bibliografia (Casolaro I., Rotunno A. 2018). In ogni caso si fa presente che il concetto di *gruppo*, nella generalità delle strutture algebriche, rientra nelle Indicazioni nazionali per la Scuola secondaria di Primo grado, per cui non si esclude che un docente possa proporre questi semplici concetti.

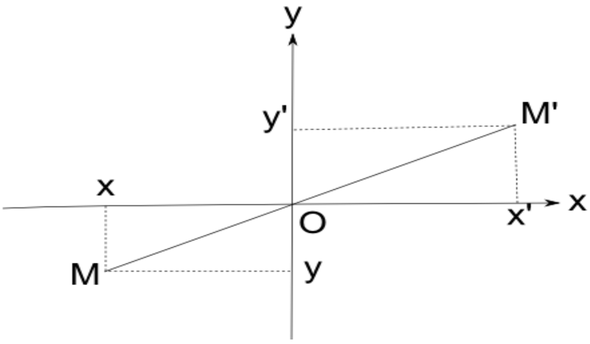
4a. Simmetria centrale
Si abbia un punto fisso O ed un punto qualunque M del piano. Si tracci il segmento MO, e lo si prolunghi oltre O fino a un punto M' tale che MO = OM'. Il punto M' è detto simmetrico di M rispetto al punto O che viene chiamato *centro di simmetria*.
La trasformazione così ottenuta è detta ***simmetria centrale*** che, per come è definita, è un'isometria in quanto conserva le distanze tra coppie di punti corrispondenti.
La precedente definizione può essere espressa vettorialmente:

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$$



In un sistema di riferimento O (*x, y*) di origine O, le equazioni della simmetria centrale con centro di simmetria nell'origine degli assi cartesiani sono:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$



Proprietà della simmetria centrale

Facendo uso di carta trasparente, di un regolo o di un compasso a punte fisse, si può constatare fisicamente, ciò che abbiamo espresso teoricamente che:

- la simmetria centrale conserva le distanze.
- la simmetria centrale conserva l'ampiezza degli angoli.

Assumeremo queste due proprietà come "postulati" della simmetria centrale.

Esercizi proposti

In molti testi di scuola secondaria di primo grado si trovano esercizi elementari sulla simmetria centrale, che possono essere rivisitati anche in un primo anno di Scuola secondaria di secondo grado (Linati P., Paladino L., 2011).

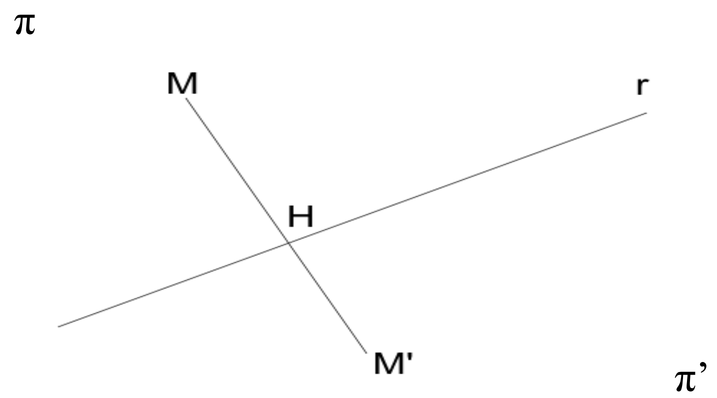
1. *(Anni 11-12)* - In un sistema di riferimento cartesiano O*x,y* si considerino i punti: *A*(+10; 0); *B*(-5;+5); *C*(5/3; -2), *ecc.* Trovare e rappresentare i punti *A*', *B*', *C*', …, simmetrici di *A*, *B*, *C* rispetto all'origine O.

2. *(Anni 13-14)* - Per ciascuna delle seguenti figure piane, dire se vi è un centro di simmetria:
quadrato, rettangolo, rombo, triangolo qualunque; triangolo equilatero; circonferenza.

3. *(Anni 13-14)* - In ciascuna figura avente un centro di simmetria, utilizzare le proprietà di conservazione di distanze ed angoli per dedurre le proprietà della figura stessa. *(scopo di questo esercizio può anche essere di mostrare come la simmetria può servire a scoprire e poi dimostrare le proprietà delle figure della geometria euclidea).*

4b. Simmetria assiale

Si abbia una retta fissata r ed un punto qualunque M del piano. Tracciamo da M la perpendicolare a r, che incontra la r in H. Si prolunghi il segmento MH di una lunghezza HM' uguale ad MH. La retta r è quindi l'asse del segmento MM'. Diremo che ***M' è il simmetrico di M rispetto alla retta r***. La retta r si chiama "*asse di simmetria*".



La retta r divide il piano in due semipiani (π) e (π'). Possiamo far ruotare il semipiano (π) intorno ad r in modo da sovrapporlo al semipiano (π'). Il segmento MH si sovrappone al segmento al segmento HM', ed M si sovrappone ad M'.

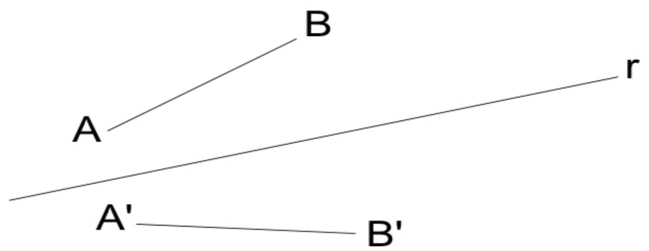
Sperimentalmente possiamo constatare che:

- due figure simmetriche rispetto ad una retta sono congruenti (o uguali).
- nella sovrapposizione di (π) su (π') gli angoli convessi hanno la stessa ampiezza ma in senso contrario.

Assumeremo come assioma: *la simmetria assiale conserva le distanze e le ampiezze degli angoli.*

Esercizi proposti

1. *(anni 11)* Costruire i segmenti simmetrici dei segmenti AB rispetto alle rette r, nei seguenti casi:

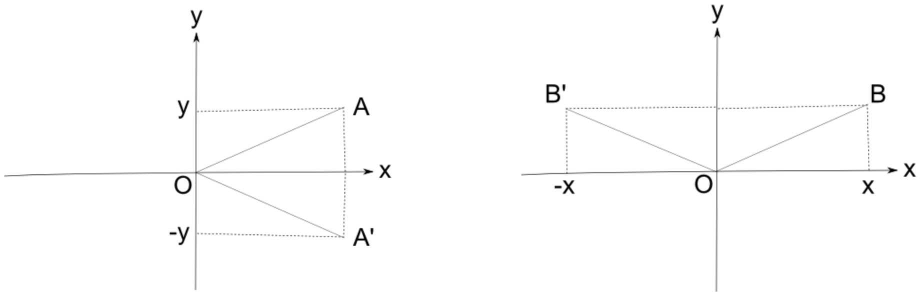


2. *(anni 11-12)* Cercare immagini di figure aventi assi di simmetria in architettura, in pittura, negli oggetti di tutti i giorni.

3. (anni 13) Nelle seguenti figure poligonali, dopo averle disegnate, riconoscere se vi sono uno o più assi di simmetria: triangolo isoscele; triangolo equilatero; quadrato *(R. 4*

assi); rettangolo; rombo; cerchio *(infiniti)*; cubo; tetraedro; parallelepipedo retto; piramide regolare; cono retto; sfera.
Per ciascuna di queste figure, enunciare alcune proprietà legate alla simmetria.

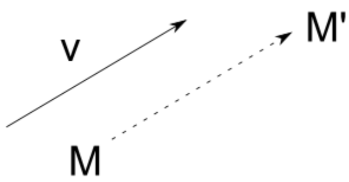
4. (*13-14 anni)* Cercare una relazione vettoriale che esprima la definizione di simmetria assiale.
Cercare le equazioni cartesiane delle simmetrie aventi come assi, rispettivamente, *l'asse delle x e l'asse delle y*, in un sistema di riferimento ortogonale e monometrico.



$$\text{R.}\quad \begin{pmatrix} x' = x \\ y' = -y \end{pmatrix} \quad , \qquad \begin{pmatrix} x' = -x \\ y' = y \end{pmatrix}.$$

4c. *Traslazioni*

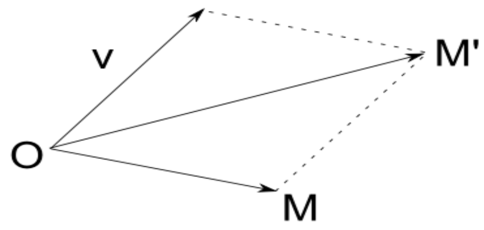
Si abbia un vettore $\vec{v}$ del piano S_2 o dello spazio S_3 . Ad un punto M, del piano o dello spazio, facciamo corrispondere un punto M' tale che: $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$;



Si definisce così una trasformazione del piano S_2 o dello spazio S_3, che chiamiamo ***traslazione di vettore*** $\vec{v}$, e che indichiamo con *t*:

$$t:\ M \to M' = t(M).$$

Se il piano (o lo spazio) è riferito ad un punto fisso O (origine), per la legge del parallelogramma, la precedente eguaglianza vettoriale si può scrivere:



$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{v}$$

Esercizi proposti

1. *(anni 12-14)* In un piano riferito ad un sistema ortogonale monometrico, si consideri il punto *A* (1;2). Scrivere le equazioni della traslazione di vettore $\overrightarrow{OA}$.

2. *(anni 12-14)* Trovare il vettore che trasla *P* (2,3) in *P'* (3, -2); scrivere le equazioni di tale traslazione.

3. *(anni 12-14)* Quale è il vettore del piano che manda il punto *M* (*x*. *y*) nel punto *M'*(*x'*,*y'*) tale che

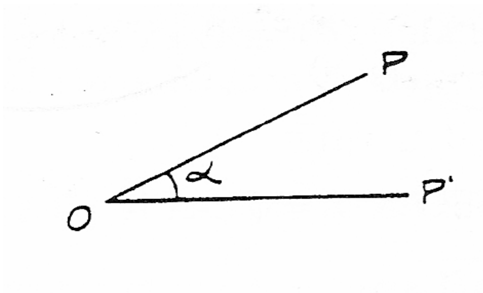
$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

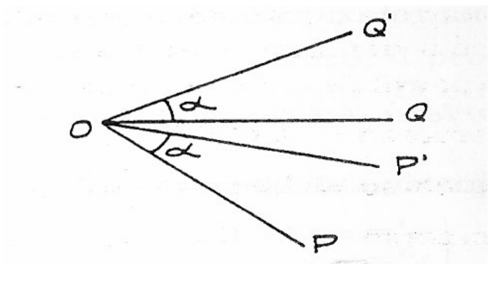
4d. Rotazioni

Dati, su un piano, un punto O ed un angolo orientato di ampiezza α, si dice rotazione di centro O ed ampiezza α, la corrispondenza del piano nella quale a O corrisponde O stesso e a qualsiasi altro punto *P* corrisponde *P'* tale che:

1) $\overline{OP} = \overline{OP'}$

2) $P\hat{O}P' = \alpha$





Ad esempio, ai punti P e Q del piano (in figura) corrispondono rispettivamente i punti P' e Q' in modo che $O\overline{P} = O\overline{P}'$ e $O\overline{Q} = O\overline{Q}'$; l'angolo $P\hat{O}P' = Q\hat{O}Q' = \alpha$.
Ovviamente, al punto O corrisponde O stesso.

Relativamente alla rotazione ci siamo limitati alla definizione e non proponiamo esercizi perché le equazioni della trasformazione richiedono i primi concetti di trigonometria che esulano dalla nostra trattazione.

5. Un cenno alle trasformazioni topologiche

Nei paragrafi precedenti abbiamo trattato le trasformazioni di figure che mutano una retta in un'altra retta, quindi segmenti in segmenti, angoli in angoli.
Queste trasformazioni sono dette ***lineari*** (o ***proiettive***) e la Geometria che le studia è la Geometria Proiettiva, di cui le ***similitudini*** e le ***isometrie*** - oggetto di studio per il primo ciclo di istruzione - sono dei casi particolari.
L'approfondimento delle ***affinità***, le cui proprietà sono più generali rispetto alle similitudini ed alle isometrie ma meno generali rispetto alle ***proiettività***, rientrano nelle Indicazioni nazionali relative al primo biennio della Scuola secondaria di secondo grado in quanto sono legate ai criteri di parallelismo ed alle questioni relative al quinto postulato di Euclide.
Nel caso in cui le trasformazioni lineari avvengono tra piani, la proiettività prende il nome di ***omografia***.

Dalla pratica quotidiana, sappiamo però che possiamo trasformare una figura di forma triangolare (quadrangolare o poligonale in generale) in una qualsiasi curva chiusa (anche aperta se operiamo un taglio) e viceversa. Ovviamente l'oggetto deve essere costituito da materiale deformabile.
È il caso, ad esempio, di un elastico circolare che si può trasformare in un segmento dopo aver effettuato un semplice taglio.
Trasformazioni di questo tipo sono dette "*trasformazioni topologiche*" e rientrano in una branca di Geometria detta Topologia.

*La **Topologia** studia le proprietà delle figure che sono invarianti rispetto alle trasformazioni che si realizzano in un piano (o nello spazio) ma che non conservano la linearità.*
Ad esempio, è topologica la deformazione di un foglio di gomma, abbastanza sottile da considerarlo parte di piano, senza piegarlo né strapparlo.
La figura che si ottiene è detta "*topologicamente equivalente*".

Ad esempio, sono topologicamente equivalenti le figure (5.1), (5.2), (5.3), ottenute una dall'altra per deformazione.

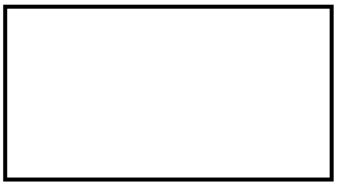


fig. 5.1

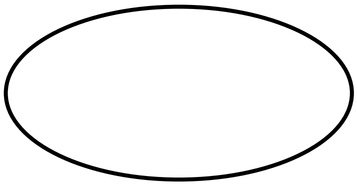


fig. 5.2

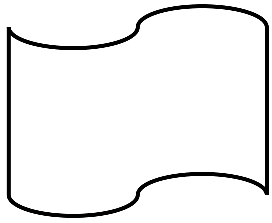


fig. 5.3

Se una figura è rappresentata da una curva con un punto *P* in cui la linea passa due volte (cosiddetta figura intrecciata), anche nella figura trasformata per il punto P', corrispondente di P, la linea passa due volte.
Un punto in cui la linea passa due (o più) volte è detto ***nodo***.

Proprietà delle trasformazioni topologiche
In una trasformazione topologica:
- a curve chiuse corrispondono curve chiuse;
- a curve aperte corrispondono curve aperte
- a curve intrecciate corrispondono curve intrecciate con lo stesso numero di nodi;
- se un punto è intersezione di due curve, il punto che gli corrisponde risulta intersezione delle curve corrispondenti.
- se un punto è interno [esterno] a una curva, rimane interno [esterno] alla sua trasformata.

6. Conclusioni

Riteniamo che questo lavoro possa essere una guida per un insegnamento della Geometria che tenga conto della realtà del mondo di oggi (Casolaro F., Paladino L., 2012).
Ci siamo limitati alle questioni relative al Primo ciclo di istruzione, ma abbiamo voluto chiaramente sottolineare l'importanza di una attività che conduce ad un insegnamento della Geometria che si svolge senza i tradizionali calcoli di perimetri ed aree. Riteniamo essenziale anche un cenno alle trasformazioni topologiche che rientrano nella vita giornaliera delle attività dei ragazzi.

Bibliografia

C. Cundari (1990-1991) - Atti del Progetto del M.P.I. e del Dipartimento di Progettazione e Rilievo dell'Università "La Sapienza" di Roma (11-15 dicembre 1990; 6-10 maggio 1991; 812 dicembre 1991): "*Disegno e Matematica per una didattica finalizzata alle nuove tecnologie*".

Casolaro F. (2003): "*Le trasformazioni omologiche nella Storia, nell'Arte, nella Didattica*", Convegno Internazionale "Matematica e Arte", Vasto, 2003; pagg. 129-148.

Casolaro F. Casolaro I. (2009): Appunti del Corso di Geometria al Dipartimento di Architettura dell'Università di Napoli Federico II.

Casolaro F., Prosperi R.: Atti della Scuola Estiva di Terni, (2011) "*La Matematica per la Scuola Secondaria di II grado*". Editore 2C Contact.

Linati P., Paladino L., (2011), "*Trasformazioni geometriche elementari nel piano S_2*". Atti della Scuola Estiva di Terni, (2011) "*La Matematica per la Scuola Secondaria di II grado*" pagg. 67-84 - Editore 2C Contact.

Casolaro F., Paladino L. (2012): "*Evolution of the geometry through the Arts*" - 11th International Conference APLIMAT 2012 - in the Faculty of Mechanical Engineering - Slovak University of Tecnology in Bratislava, pag. 481-490.

Casolaro F., Rotunno A. (2015): "Mathematics and Art: from the pictorial art to the linear transformations". University of Defence - Brno, Czech Republic, ottobre 2015.

Casolaro I., Rotunno A. (2018), "*L'insegnamento della Geometria Proiettiva nella Scuola secondaria di Primo e secondo grado*". Scuola di Formazione APAV-Mathesis, Rimini 2018. Quaderni APAV n. 1, 2018. ISBN 978-88-94350-104.

2^ Scuola Estiva di Formazione per i docenti del Primo Ciclo di Istruzione
"Insegnare Matematica: didattica, inclusione e cooperazione"
Pizzoferrato 22-23-24-25 luglio 2018

Logica e pensiero computazionale

Fabio Manuppella[1]

[1]Consulente informatico specializzato in accessibilità del web.
Email: fabiomanuppella@gmail.com - Sito Web: www.fabiomanuppella.it

Sunto

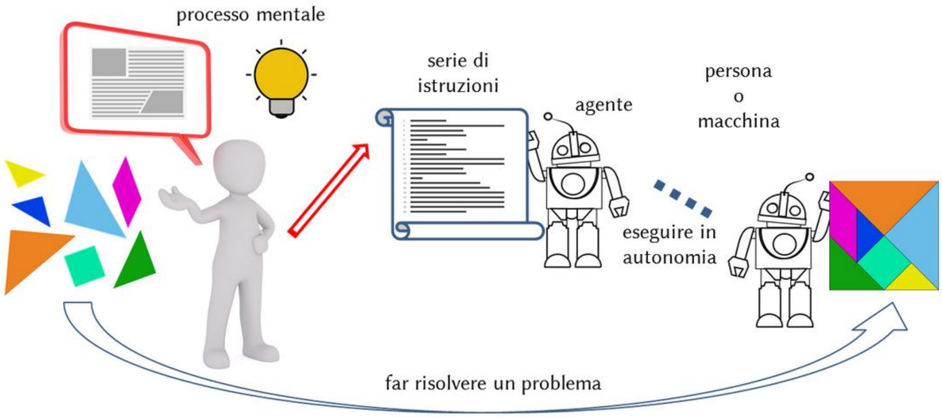
Non può esserci uso consapevole della tecnologia senza pensiero computazionale, una capacità da coltivare e applicare in modo interdisciplinare. Per questo il Coding diventa fondamentale ed è un'attività in cui l'Italia primeggia, grazie ai moltissimi insegnanti che si sono messi in gioco.

Parole Chiave: Coding, Logica, Pensiero computazionale, Informatica, Scratch

1. Logica, pensiero computazionale e Coding

La vita di tutti i giorni ci pone di fronte a una serie di scelte, spesso difficili. Siamo chiamati a risolvere problemi di varia natura e ad affrontare gli inevitabili imprevisti. Ogni volta che iniziamo a riflettere su cosa fare per risolvere un dato problema mettiamo in atto, in modo del tutto automatico, il pensiero computazionale, ovvero il processo mentale per la risoluzione di problemi, costituito dalla combinazione di metodi caratteristici e di strumenti intellettuali, che hanno tutti valore generale.
Per pensiero computazionale si intende una attitudine mentale, un processo mentale che consente di risolvere problemi di varia natura seguendo metodi e strumenti specifici.
Pensare in modo computazionale significa suddividere il processo decisionale in singoli step, ragionare passo passo sul modo migliore per raggiungere un obiettivo. Un comportamento che in realtà – quasi senza accorgercene – mettiamo in atto tutti i giorni, per esempio quando stabiliamo il percorso più breve per raggiungere una destinazione oppure, più semplicemente, quando giochiamo ai videogiochi e dobbiamo elaborare un piano per superare un livello.
I benefici del "pensiero computazionale" si estendono a tutte le professioni. Medici, avvocati, dirigenti di azienda, architetti, funzionari di amministrazioni – solo per citarne alcune – ogni giorno devono affrontare problemi complessi; ipotizzare soluzioni che prevedono più fasi e la collaborazione con altri colleghi o collaboratori; immaginare una descrizione chiara di cosa fare e quando farlo.
Senza una vera comprensione delle fondamenta culturali e scientifiche della disciplina informatica, che è alla base delle tecnologie digitali, rischiamo – soprattutto in Italia – di

essere consumatori passivi ed ignari di tali servizi e tecnologie, invece che soggetti consapevoli di tutti gli aspetti in gioco ed attori partecipi del loro sviluppo.



Il pensiero computazionale serve a trasformare una intuizione in un procedimento costruttivo che ci porti alla soluzione di un problema.

Non è un concetto esclusivamente informatico, come si potrebbe pensare, ma molto più ampio: è un'abilità (come scrivere, leggere e fare calcoli) che permette di acquisire elasticità mentale e capacità nel risolvere problemi.

Quando dal pensiero si passa all'azione, ovvero all'esecuzione vera e propria delle azioni cui si era pensato, si parla di Coding, oggi spesso indicato come la palestra del pensiero computazionale.

Il coding aiuta i più piccoli a pensare meglio e in modo creativo, stimola la loro curiosità attraverso quello che apparentemente può sembrare solo un gioco. Consente di imparare le basi della programmazione informatica, insegna a "dialogare" con il computer, a impartire alla macchina comandi in modo semplice e intuitivo.

Il segreto sta tutto nel metodo: poca teoria e tanta pratica.

L'obiettivo non è formare una generazione di futuri programmatori, ma educare i più piccoli al pensiero computazionale, che è la capacità di risolvere problemi – anche complessi – applicando la logica, ragionando passo-passo sulla strategia migliore per arrivare alla soluzione.

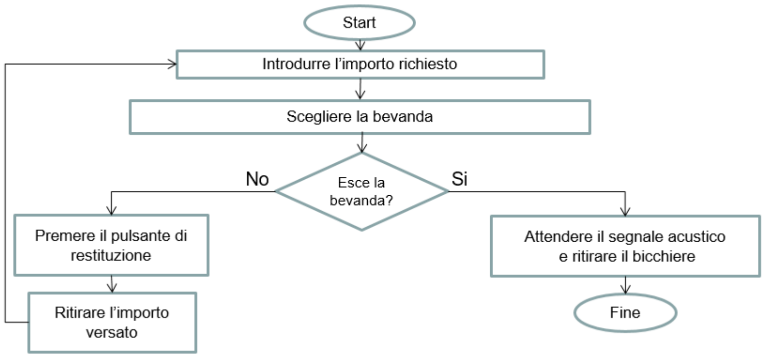
2. Le conoscenze preliminari

Nelle scuole primarie e secondarie di primo grado tutti i docenti possono affrontare nelle loro classi l'attività di Coding. Vi è, però, la necessità di alcune conoscenze preliminari per affrontare in maniera corretta l'argomento e non trovarsi, successivamente, in difficoltà.

La teoria degli algoritmi, la pseudo-codifica e i dati a blocchi sono un ottimo punto di partenza.

Riferendoci ad un computer, un **algoritmo** non è altro che una sequenza di istruzioni. Esso comunica con l'esterno acquisendo dati e restituendo i risultati della computazione.

Gli algoritmi possono essere rappresentati attraverso la pseudo-codifica o con i diagrammi a blocchi. Vediamo la differenza tra le due rappresentazioni con un esempio:

Scelta di una bevanda	
Pseudo-codifica	Diagramma a blocchi
1) Introdurre l'importo richiesto 2) Premere il pulsante di scelta della bevanda 3) Se esce la bevanda, attendere il segnale acustico e ritirare il bicchiere 4) Altrimenti, premere il pulsante per la restituzione e ritirare l'importo versato.	

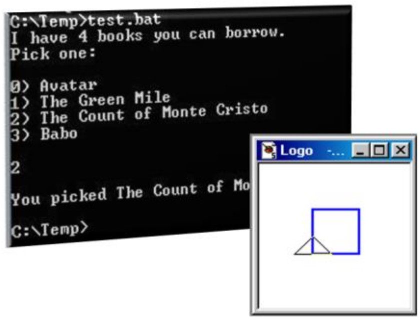
Come si evince dall'esempio, la rappresentazione a blocchi fornisce una descrizione molto più accurata dell'algoritmo. Infatti, osservando anche solo per un attimo lo schema, è possibile capire che è presente un blocco di inizio (blocco ovale), cinque istruzioni di azione (blocchi rettangolari), una condizione (blocco a forma di rombo) e un blocco di fine (blocco ovale). La pseudo-codifica, invece, si avvicina di più al linguaggio parlato, ma va letta per potersi fare un'idea almeno di massima su cosa fa l'algoritmo in questione.

Dopo aver rappresentato l'algoritmo da realizzare, si passa alla fase di coding e, quindi, ad impartire le varie istruzioni al calcolatore.

Il tentativo di introdurre la pratica del pensiero computazionale nelle nostre scuole non è una novità, ma risale a molti anni fa. Certo le prestazioni dei computer dell'epoca erano anni luce lontane da ciò che è possibile ottenere ai nostri giorni.

Facendo un veloce excursus storico, dobbiamo dire che nelle "scuole elementari" e "medie" del tempo (ovviamente le più avanzate) si lavorava soprattutto con due linguaggi "base"; il Logo per la scuola elementare ed il Basic per la scuola media, mentre si usava il Pascal nelle scuole superiori. Ma, tranne qualche raro caso di successo, l'introduzione della programmazione si è rivelata un fallimento, soprattutto perché si tendeva ad insegnare "la programmazione", mentre non deve e non può essere questo lo scopo dell'attività di coding.

Nell'immagine sottostante sono riportati gli output di due programmi realizzati rispettivamente in Pascal (schermo nero) e in Logo.



Dopo ore ed ore di impegno dei docenti e degli studenti, si riusciva a realizzare il solito banale programmino che prevedeva l'immissione di dati e una loro elaborazione con stampa a video dei risultati su enigmatiche ed "interessantissime" schermate a sfondo nero o verde con caratteri bianchi (i monitor di una volta non erano a colori).
A queste considerazioni va aggiunto che i linguaggi di programmazione hanno, in genere, una rapidissima evoluzione e ciò che oggi è stato imparato con tanta fatica e tanto dispendio di energie, si rivela essere domani di nessuna utilità perché obsoleto.
Poche lezioni sui diagrammi di flusso… non abituano certamente gli alunni ad adoperare il pensiero computazionale.
È necessario, quindi, un cambio di approccio.

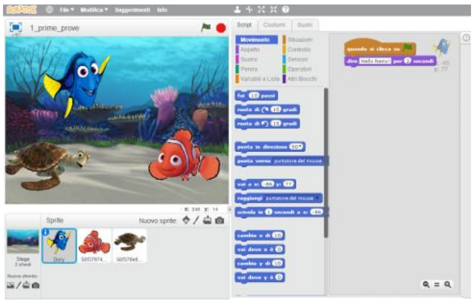
3. L'approccio ludico alla programmazione

La scelta di un approccio ludico è strategica poiché consente di attirare l'attenzione dei più piccoli che, pensando di giocare, cercano di risolvere un problema più o meno complesso per la realizzazione di un videogioco o di una fiaba illustrata e sonorizzata, scrivendo una serie di istruzioni che la macchina interpreta ed esegue.
Usando gli attuali software a disposizione, in brevissimo tempo (anche poco più di un'ora) si può creare un piccolo videogioco.
E, contrariamente a quanto accadeva negli anni scorsi, il risultato di questo lavoro è, in genere, per gli alunni, pieno di soddisfazioni: ricordiamo che essi non si accontenteranno di un semplice triangolino bianco su fondo verde che ha bisogno di un gran numero di istruzioni per disegnare a video un semplice quadrato (Logo).
Il videogioco realizzato deve essere "bello", possibilmente deve "suonare e parlare" e deve essere "impegnativo" per l'utente finale, altrimenti il giocatore "si stufa subito".
Questa è la situazione reale in cui ci troviamo quando affrontiamo la tematica nelle nostre classi.
I ragazzi via via maturano anche una presa di coscienza, iniziano, quindi, a vedere le cose da una prospettiva diversa. Nella realizzazione del prodotto finito verrà profuso un impegno sempre più stringente nel passare dalle prime versioni di prova a versioni sempre più avanzate e complesse. E che dire, poi, del lavoro cooperativo che si innesca nei gruppi che il docente avrà avuto cura di creare? Quale gruppo avrà realizzato il videogioco più interessante? Ma non ci limitiamo solo alla realizzazione di videogiochi;

si può realizzare al computer anche una lezione interattiva sulla spiegazione della struttura della cellula o la dimostrazione del Teorema di Pitagora o qualsiasi altra cosa possa venire in mente!
Per fare tutto ciò servono gli strumenti adatti. Esistono ormai diversi software che permettono la realizzazione di programmi più o meno complessi. Tra questi, quello che ha avuto più successo nelle scuole del primo ciclo di istruzione è Scratch.

4. Cosa è Scratch e come funziona

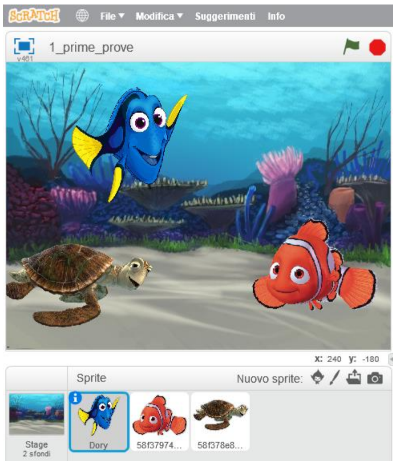
Scratch è uno strumento di programmazione visuale ideato al MIT (Massachusetts Institute of Technology), che permette di creare giochi e animazioni senza dover scrivere una sola riga di codice. Rende semplice e divertente la creazione di storie interattive, giochi e animazioni. È un software completamente gratuito e disponibile sia nella versione installabile sul PC, sia nella versione on-line. Ne esiste persino una versione "junior" per chi ancora non sa leggere (minori di 5 anni).



L'interfaccia di un progetto Scratch

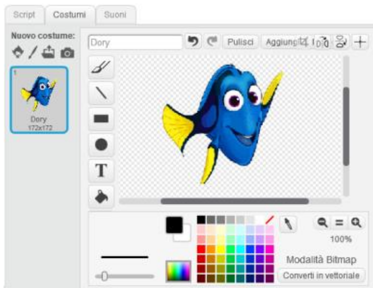
L'interfaccia di un progetto Scratch Junior

Scratch Junior è una app per il coding gratuita che si può scaricare e installare su tablet Android e su iPad. Nel primo caso è sufficiente avviare Google Play, cercare l'app e scaricarla. È necessario avere un tablet con display di almeno 7 pollici e Android 4.2 (Jelly Bean) o successivi. Nel secondo caso la stessa procedura va fatta dopo essersi connessi a iTunes.
Come si nota comparando le due schermate, il team di sviluppo di Scratch Junior ha fatto un importante lavoro di semplificazione dell'interfaccia grafica. Sono state rivisitate numerose funzionalità per renderne più semplice l'uso da parte dei più piccoli. Trattandosi di una app e non di software per PC, il team di sviluppo ha fatto un gran lavoro di ottimizzazione per i dispositivi mobili, per evitare o quanto meno ridurre il consumo delle batterie dei dispositivi e il loro surriscaldamento.



L’interfaccia di Scratch è particolarmente semplice e intuitiva:
in alto a sinistra si trova lo “stage”, ovvero l’area dove viene visualizzato l’output del programma.
Poco più sotto si trova l’elenco degli Sprite (oggetti da animare). Qui è possibile importare nuovi oggetti caricandoli dalla libreria grafica del programma, dal computer, dalla webcam o disegnandoli da zero. Nel caso in cui si lavori “offline” bisogna accontentarsi degli oggetti precaricati nella libreria di Scratch, che sono comunque tanti e organizzati in base alla categoria (animali, fantasia, lettere, persone, cose, trasporti) e in base al tema (castello, città, ballo, moda, volo, vacanza, musica, spazio, sport, fondali marini, camminare).

Al centro della schermata il software presenta tre etichette: **Script, Costumi** e **Suoni**.
La prima permette di sfogliare il catalogo dei mattoncini e scegliere quelli di cui si necessita. Ogni tipologia di mattoncino ha un suo colore identificativo; ciò rende la curva di apprendimento del software ancora più breve.

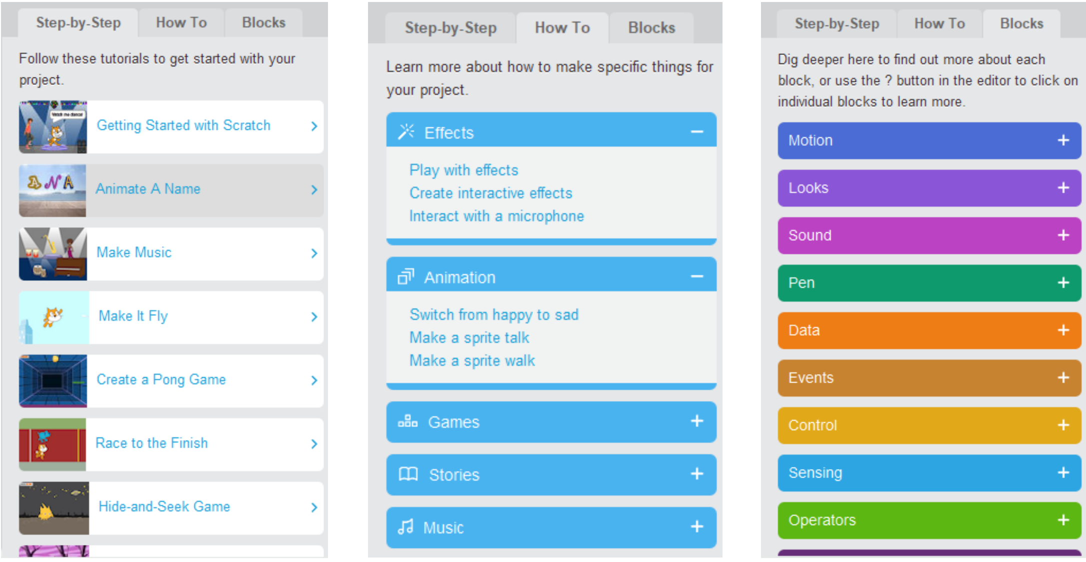


La seconda etichetta permette di disegnare da zero personaggi e sfondi (attività consigliata per gli alunni più piccoli, per i quali è più indicato sollecitarne la creatività) e modificare quelli precaricati nella libreria di Scratch; la terza, infine, permette di aggiungere effetti sonori all’animazione.
Come nel caso degli oggetti da animare e degli sfondi, è possibile importare effetti sonori dal computer e dalla galleria del programma. Questi ultimi sono suddivisi in categorie (animale, effetti, elettronica, umani, strumenti, loop musicali, note musicali, percussioni, canti). È possibile registrare direttamente i suoni tramite un editor avanzato e migliorarne la qualità regolando il volume del registrato, silenziando eventuali rumori di sottofondo e applicando effetti di dissolvenza.

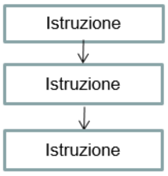
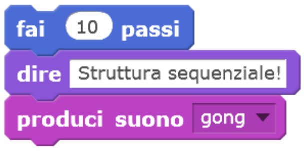
Per realizzare una vera e propria animazione basta sfogliare il catalogo dei mattoncini, scegliere uno ad uno quelli utili al progetto e trascinarli nella parte destra dello schermo, incastrandoli attraverso gli appositi intagli, come si fa con i Lego o con un semplice puzzle.
A ciascun mattoncino corrisponde un’azione, una linea di codice che non ha bisogno quindi di essere digitato. Basta muovere o assemblare i mattoncini tra di loro – nell’ordine giusto – e il gioco è fatto.

Facile a dirsi … ma vedremo durante il laboratorio che non è sempre semplice ottenere il risultato voluto!

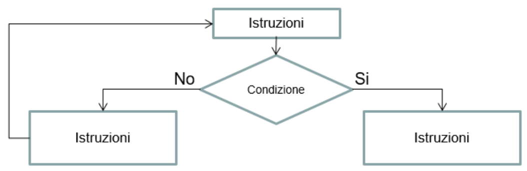
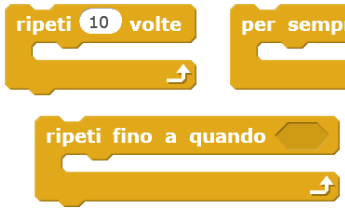
Cliccando, infine, sul punto interrogativo, è possibile accedere alla guida del software, ad oggi ancora interamente in inglese ma davvero semplice da seguire. Seguono le tre schermate del tutorial:



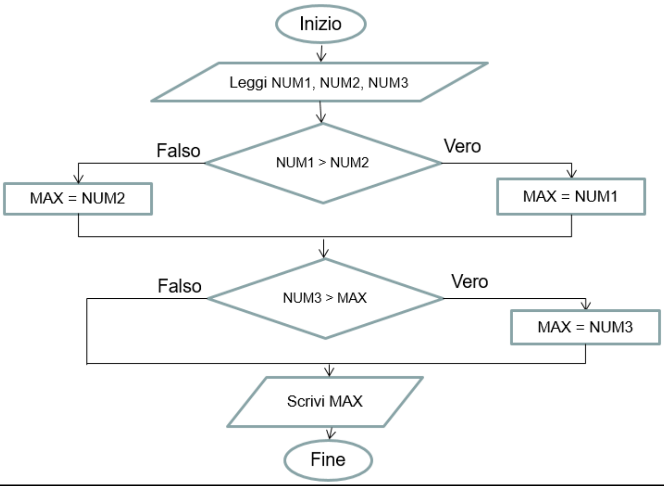
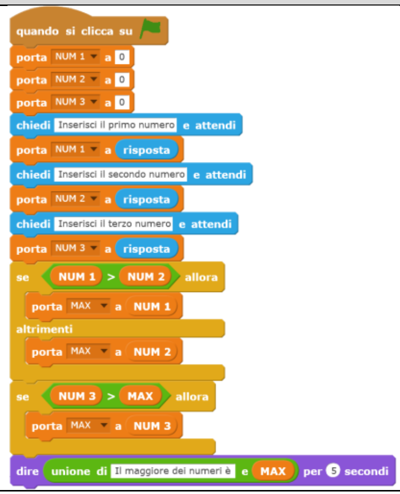
La relazione tra i diagrammi a blocchi e la logica di Scratch è forte; vediamo qualche esempio:

<table>
<tr><th colspan="2">Struttura sequenziale</th></tr>
<tr><th>Diagramma a blocchi</th><th>Scratch</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

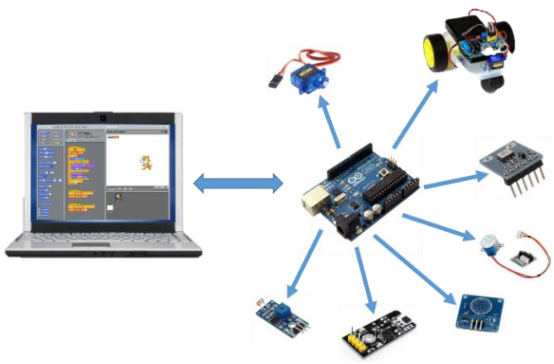
<table>
<tr><th colspan="2">Struttura di selezione</th></tr>
<tr><th>Diagramma a blocchi</th><th>Scratch</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Struttura di iterazione</th></tr>
<tr><th>Diagramma a blocchi</th><th>Scratch</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

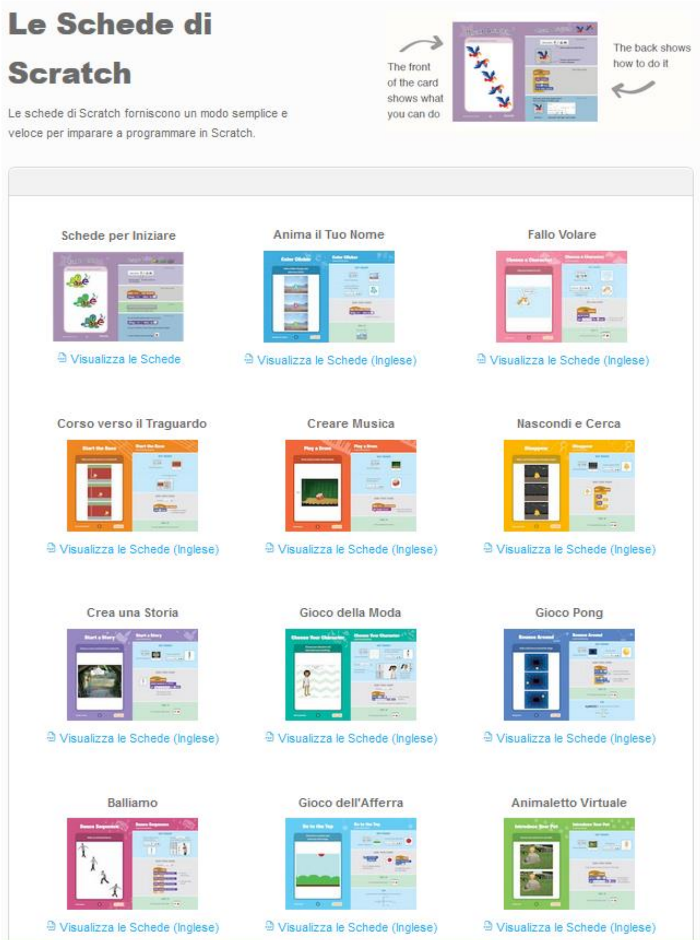
Vediamo ora un esempio più complesso:

<table>
<tr><th colspan="2">Calcolare il maggiore tra tre numeri</th></tr>
<tr><th>Diagramma a blocchi</th><th>Scratch</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

L'unico limite di Scratch è la fantasia: è possibile realizzare fumetti, karaoke, giochi a uno o più giocatori, animazioni, dimostrare teoremi…! È possibile perfino lavorare con dei robot e programmarli affinché eseguano una serie di azioni a comando. Il tutto senza scrivere una sola riga di codice.



Per facilitare il compito degli insegnanti nell'introduzione delle varie funzioni del programma, sono state realizzate le Scratch Cards, schede operative che spiegano, attraverso brevi esempi, il funzionamento del programma. Queste schede sono liberamente scaricabili dal sito del software (vedi link in Sitografia).



Per usare le card in classe basta distribuirle agli studenti e invitarli a scegliere il set di interesse. Affinché si crei quell'ambiente di partecipazione e di scambio di informazioni necessario per lo sviluppo delle competenze di problem solving, è importante incoraggiare gli studenti a collaborare tra loro, in gruppi o a coppie, alternandosi al computer. L'attività può essere resa ancor più interessante rivisitando i progetti già realizzati, anche da altri, o favorendo lo scambio degli stessi. Le card devono essere una risorsa opzionale oltre al tutorial online, ai libri e al materiale di supporto.

La versione attuale di Scratch (2.0) non è, purtroppo, compatibile con i dispositivi mobili, in quanto basata sulla tecnologia (ormai obsoleta) Adobe Flash.

Il team di sviluppo sta però lavorando da tempo alla versione 3.0 che si basa sulla tecnologia HTML5, che risolve i suddetti problemi di compatibilità.

È comunque già possibile testare la versione in sviluppo navigando (anche da dispositivo mobile) all'indirizzo https://preview.scratch.mit.edu/.

Per utilizzare la versione stabile è sufficiente accedere al sito del progetto. Si può lavorare anche "offline" scaricando il software sui computer del laboratorio.

Sono in sviluppo numerose funzionalità che permetteranno ampie possibilità di interfacciamento tra Scratch e l'ambiente esterno. La homepage del progetto è https://scratch.mit.edu.

5. Conclusioni: perché è così importante fare Coding a Scuola

In un mondo dove la tecnologia viene largamente impiegata in ogni settore è importante che i nostri allievi imparino che il computer non è solo uno strumento di intrattenimento ma una macchina che "ragiona" e che può essere istruita per risolvere le più disparate problematiche. È altresì necessario che essi escano dalla logica di meri fruitori diventando creatori di tecnologia e che inizino a concepire l'errore unicamente come tentativo svolto. La paura di fallire spesso impedisce loro di mettersi in gioco, diventa un blocco mentale che accompagna lo studente lungo tutta la propria carriera scolastica. L'approccio adatto, a mio avviso, è quello di *ragionare per errori successivi*, deve essere chiaro fin da subito che la costruzione di un programma, semplice o complesso che sia, richiede di affrontare diversi ostacoli, che vanno superati senza scoraggiarsi e senza perdersi d'animo. Queste sono tutte abilità importanti che non hanno a che fare solo con la programmazione ma con qualsiasi attività. Non ci aspettiamo di formare una generazione di nuovi programmatori ma di cittadini che sappiano affrontare i problemi ricercandone le soluzioni più adeguate.

6. L'esperienza di Palmoli (CH)

Questo lavoro nasce da varie esperienze fatte "sul campo", sia per interventi formativi tenuti con discenti appartenenti a vari ordini di scuola, sia con lezioni a studenti di seconda e terza media e, tutte, hanno dato segnali interessanti. L'ultima di queste esperienze di formazione sul Coding risale all'aprile scorso. Nell'ambito del progetto PON di inclusione e di lotta al disagio dal titolo "Gioco per contare di più" ho lavorato con i ragazzi delle classi seconda e terza media dell'Istituto Comprensivo Statale di Palmoli. Il corso realizzato ha avuto una durata di 10 ore divise in 4 incontri di due ore e trenta minuti ciascuno. Il diario operativo del corso è stato il seguente:

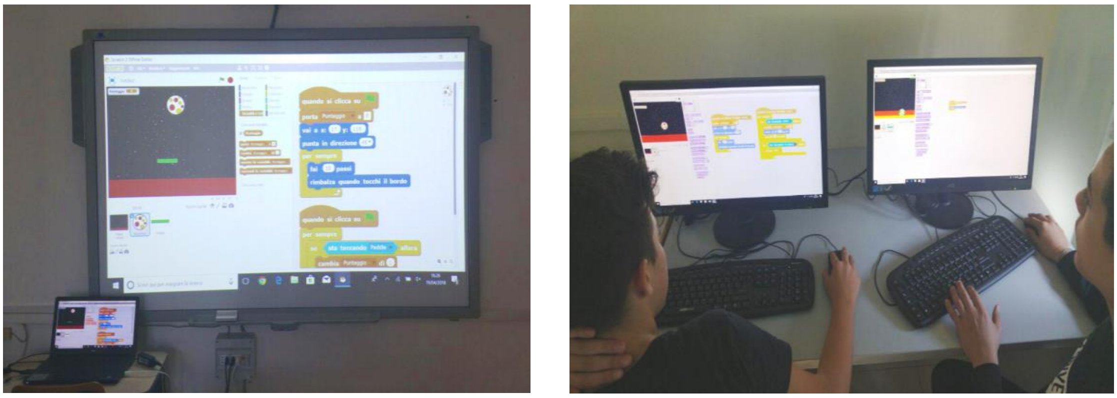
- 5/4/2018: presentazione di "Scratch" e primo approccio degli alunni con il software. Dopo aver visitato il Sito Web ufficiale del progetto sono stati mostrati numerosi esempi di giochi e di animazioni; i ragazzi, animati da un forte interesse per questa nuova esperienza, hanno iniziato, guidati, a sperimentare e a realizzare animazioni semplici. È da notare il fatto che, al termine della lezione, alcuni studenti hanno pensato di documentare il loro lavoro con brevi riprese video da mostrare successivamente a genitori ed amici.
- 12/4/2018: illustrazione delle funzionalità di base di Scratch e realizzazione di animazioni interattive e non.

In particolare, i ragazzi hanno imparato come si anima un personaggio, come cambiare lo sfondo dello stage in base a determinate condizioni logiche e come risparmiare tempo duplicando le istruzioni già impartite ad uno o più personaggi. Gli studenti hanno mostrato un crescente interesse verso il Coding ed hanno iniziato ad ottimizzare le animazioni realizzate, curandone i singoli dettagli.

- 19/4/2018: realizzazione di due animazioni complesse.
  Sono stati introdotti diversi concetti importanti, come quello delle variabili, delle condizioni di arresto dei livelli. I ragazzi hanno iniziato a ragionare in modo autonomo, a porsi problemi e a proporre valide soluzioni.
- 8/5/2018: realizzazione di due giochi interattivi.
  La complessità degli stessi ha consentito il ripasso di tutte le conoscenze apprese durante il corso. I lavori realizzati dai ragazzi sono stati raccolti per la dimostrazione finale, che si è tenuta alla presenza dei genitori il 9/6/2018.

Osservando le date in cui si è svolto il corso, si evidenziano alcuni aspetti degni di nota:

- Durante la prima lezione i ragazzi hanno iniziato a sperimentare le funzionalità del programma, lavorando soprattutto “di improvvisazione”. Si sono, però, ben presto accorti che non basta collegare “a caso” i mattoncini per realizzare l’animazione desiderata. Volutamente il corso è stato realizzato come attività “ludica”, senza inutili appesantimenti concettuali, irrealizzabili anche a causa della brevità del corso.
- Durante le prime tre lezioni, peraltro molto ravvicinate nel tempo, i ragazzi hanno realizzato uno o più progetti via via sempre più complessi, arrivando, durante l’ultima lezione a realizzare due giochi in cui è presente una discreta interattività.
- Fin da subito si è potuto notare un atteggiamento positivo e propositivo e un grande impegno nell’ottimizzazione e nella cura di ogni singolo dettaglio delle animazioni e dei giochi realizzati.



Nelle immagini sono mostrati due momenti del lavoro in laboratorio

I risultati raggiunti al termine del corso sono stati molto buoni, tenuto conto dell’esiguo numero di ore a disposizione (appena 10), dell’orario pomeridiano (dalla 14:30 alle 17:00, quindi dopo l’orario normale delle lezioni, con una breve sosta per il ritorno a casa per il pranzo) e della giovane età degli studenti (seconda e terza media). Essi hanno appreso che il computer non è solo uno strumento di intrattenimento ma una macchina che "ragiona" e che può essere istruita per risolvere problemi. Oltre al raggiungimento degli obiettivi prefissati, questo tipo di laboratorio ha creato una nuova occasione per sperimentare comportamenti collaborativi e di aiuto reciproco, competenze di cui gli studenti faranno tesoro nel prosieguo degli studi e nella vita di tutti i giorni.

NN. BB. I lavori realizzati durante l'esperienza di Palmoli verranno mostrati nel corso dell'esposizione teorica e sarà immediato notare i progressi fatti dagli studenti, a conferma del fatto che è possibile ottenere interessanti risultati anche impegnando poche ore di lavoro.

Bibliografia

Bogliolo A., (2017), *Il diario del Coding*, Giunti Scuola

Bogliolo A., (2016), *Coding in your classroom, now!*, Giunti

Giordano M., Moscetti C., (2016), *Coding e pensiero computazionale nella Scuola primaria*, La Spiga Edizioni

Woodcock J., Setford S., (2016), *Coding in Scratch: Games*

Sitografia

Sito Web di Scratch: https://scratch.mit.edu/

Download di Scratch: https://scratch.mit.edu/download

Anteprima della versione 3.0 di Scratch: https://preview.scratch.mit.edu/.

Comunità degli educatori di Scratch: http://scratched.gse.harvard.edu/

Scratch Cards: https://scratch.mit.edu/info/cards/

Scratch Cards aggiornate e tradotte in italiano: https://drive.google.com/open?id=1whq0JSqL-nQYg1azPwRLruKLVz1E2gFh

Sito Web di ScratchJr: http://scratchjr.org/

ScratchJr - Android:https://play.google.com/store/apps/details?id=org.scratchjr.android

ScratchJr - iOs: https://itunes.apple.com/au/app/scratchjr/id895485086?mt=8

Narrazione e apprendimento: scopriamo la matematica dell'incerto con il Digital Storytelling

Anna Maria Di Poccio[1]

[1]Accademia Piceno - Aprutina dei Velati (APAV), Via del Concilio, 24, 65121, Pescara, Italia
e-mail: anna.dipoccio@gmail.com

Sunto
Il mondo dell'incertezza porta a immaginare vari scenari possibili e fra essi quello del mondo della fantasia. Le storie possono essere un efficace ambiente di apprendimento per imparare divertendosi, per stimolare la capacità di razionalizzare, familiarizzare con la matematica del probabile, contestualizzare i problemi di decisioni in condizioni di incertezza e prevederne i risultati. L'impatto della narrazione digitale amplifica e promuove occasioni di apprendimento in ogni ambito disciplinare, consente la costruzione di diverse Literacies, facilita maggiormente la comprensione dei concetti astratti e concorre allo sviluppo delle competenze di problem posing/solving. Nel Digital Storytelling si individua un percorso didattico creativo-immaginativo che concorre ad arricchire e a personalizzare l'esperienza di apprendimento. Inoltre, aprire la strada alle pratiche digitali, significa coinvolgere, interessare, motivare gli studenti, facendo leva sulle loro emozioni.

Parole chiave: Narrazione; Ambiente di Apprendimento; Matematica dell'incerto; Digital Storytelling; Apprendimento-insegnamento.

1. Introduzione

Nella scuola di oggi emerge il bisogno di poter contare su itinerari didattici in cui il modello organizzativo scolastico non sia rigidamente pianificato, ma pronto a rispondere alla varietà dei bisogni e alle specificità di tutti gli allievi.
Promuovere l'intelligenza generale (Morin, 2000) risponde alla convinzione di pedagogisti e teorici dell'educazione a favorire ambienti didattici, capaci di supportare l'apprendimento attivo, accrescere la motivazione, stimolare le dinamiche di partecipazione, d'inclusione e di cittadinanza attiva. Raggiungere tutti gli studenti è di fondamentale importanza per garantire la possibilità di successo a scuola e nelle professioni. *La testa ben fatta* è la metafora di Morin (2000) che sintetizza una nuova forma di curriculum funzionale all'attitudine generale al porre e a trattare i problemi inerenti la vita reale, collegare i saperi e dare loro senso.

Inserire negli itinerari didattici i concetti della teoria della probabilità è essenziale per saper mettere in moto abilità e conoscenze, per arrivare a valutare molteplici informazioni e prendere decisioni in una società piena di incertezze come quella attuale.
Secondo alcuni studiosi e ricercatori (Delli Rocili, Maturo, 2013a, 2013b, 2015) includere la matematica del probabile nella formazione offre numerosi vantaggi. Secondo gli autori, l'insegnamento della disciplina, anche nelle prime classi di scuola primaria, migliora le intuizioni probabilistiche e i bambini imparano che la casualità non l'incontrano solo in una lezione di matematica ma anche nelle attività e nelle esperienze della vita quotidiana.
La relazione tra formazione e strumenti educativi è stata sempre molto stretta. I bambini di oggi crescono con un ampio ventaglio di dispositivi tecnologici che influenzano la sfera dell'educazione. Prendere in considerazione che i bambini del 21° secolo, chiamati "nativi digitali", percepiscano il mondo in modo diverso, multidimensionale, porta a ripensare le metodologie e le pratiche didattiche.
Ci si interroga sul perché tanti studenti facciano fatica ad apprendere, ci si interroga anche su come si debbano studiare e progettare percorsi educativi facilmente fruibili e traducibili in acquisizione di conoscenze, abilità, che vengono poi attivate produttivamente in direzioni nuove e contesti diversificati, in cui l'impiego di esse abbiano senso e significato.
I dati Ocse-Pisa (2015), confermati da INVALSI, certificano una povertà di conoscenze e competenze di base in campi del sapere irrinunciabili, soprattutto nella matematica. I ragazzi non sanno usare la matematica quotidiana, quella della realtà. La fatica ad apprendere, gli insuccessi e i continui fallimenti scolastici, se trascurati, possono determinare un disagio sociale con perdita di autostima e avversione per la materia. Ciò può condizionare gli atteggiamenti futuri con gravi conseguenze nella capacità di prendere decisioni per la propria vita e limitazioni per le scelte della carriera lavorativa. È essenzialmente un disagio che produce il rischio di non saper *dialogare con l'incertezza* (Morin, 2000) del tempo che stiamo vivendo.
Il passaggio dal paradigma dell'insegnamento a quello dell'apprendimento ha spostato l'attenzione sulla complessità dei meccanismi degli ambienti educativi, passando da una prospettiva trasmissiva a una costruttivista che affonda le radici nelle teorie sulla costruzione della conoscenza di Dewey, Piaget, Vygotskij.
Da questi principi la concezione generale dell'istruzione come processo progressivo, cumulativo, additivo è una visione miope con implicazioni che inevitabilmente rispondono ad esperienze di classe poco gratificanti. Nella pratica educativa si traducono in perdita di motivazione e partecipazione dello studente.
È, dunque, in questa complessa realtà che si giocano la credibilità della scuola e la professionalità degli insegnanti. Il compito preminente della scuola è trasmettere *cultura* e Bruner (1997) usa la metafora della *cassetta degli attrezzi* che ha una specifica funzione: fornire non solo gli strumenti con cui gli individui costruiscono e ricostruiscono la propria concezione del mondo e se stessi, ma anche la capacità di affrontare problemi complessi, ovvero, capirli, manipolarli e risolverli.

È fondamentale che l'insegnante abbia, nel set degli strumenti, vecchie e nuove procedure da modulare nel processo di apprendimento, in relazione ai bisogni del singolo allievo e all'interno dei gruppi. Noi sappiamo dalla moderna scienza cognitiva che la comprensione necessita di schemi per catturare l'immaginazione, strettamente collegati allo sviluppo di strumenti cognitivi, primo fra tutti, il linguaggio e il pensiero metaforico-figurativo (vedi Egan, 1986, 1988, 1988a, 2012).

I moderni indirizzi della scienza cognitiva e pedagogica, assegnano un importante ruolo alla dimensione immaginativa e alla competenza per il linguaggio figurato, basilari per la capacità di comprendere. La Levorato (1988) sostiene che la comprensione è prodotta dall'impiego di strutture di conoscenza che trasformano la realtà in rappresentazioni mentali, come modi di leggere sia i fenomeni complessi che le interpretazioni testuali. Ciò significa che la nostra comprensione è in gran parte metaforica e le narrazioni ne sono l'espressione. Sappiamo da un'ampia letteratura che l'universo narrativo sembra essere la strada privilegiata per avvicinare precocemente i bambini alla lingua scritta e ricavarne insieme *piacere e competenza* (Catarsi, 2001).

Se esistono differenti stili cognitivi (Gardner, 2011) e differenti strategie di apprendimento legati alle differenze individuali, alla personalità e alle relazioni sociali, c'è, allora, da chiedersi: quali situazioni-contesto siano didatticamente efficaci per facilitare e sostenere il processo di costruzione attiva della conoscenza; con quali modalità, la dimensione narrativa e in particolare il Digital Storytelling, possono risultare didatticamente interessanti per valorizzare il ruolo dell'allievo, impegnato emotivamente e cognitivamente nei processi di *problem posing/solving*; come attivare nel bambino, la fantasia, la creatività, l'immaginazione e sviluppare i diversi stili cognitivi per trovare soluzioni ai problemi che gli si presentano nell'esperienza quotidiana; come determinare positive attitudini per lo sviluppo del pensiero probabilistico nei bambini, fare previsioni, prendere decisioni in condizioni di incertezza e saperne prevedere i risultati.

Ebbene, non vi sono risposte univoche a queste domande perché non esiste una sola metodologia di insegnamento, una scelta univoca dal potere didattico miracoloso (D'Amore, 2016) ma, pur senza pretese di esaustività e, partendo dalla teorizzazione di Bruner e di Egan sull'importanza della narrazione nella trasmissione dei saperi, le storie e le narrazioni, costruite come strutture narrative che danno forma, senso e significato alla conoscenza, possono essere considerate come ambienti educativi di apprendimento. La narrazione digitale, che sostituisce la narrazione tradizionale, arricchisce e amplifica l'esperienza di apprendimento, migliora la cooperazione e la collaborazione in classe. Dunque, con l'uso dei media digitali e il protagonismo degli strumenti tecnologici in ogni ambito della vita quotidiana, diviene oggi inevitabile, per la scuola, rispondere al cambiamento con una nuova didattica, che sappia promuovere spazi e strumenti per l'esercizio della cittadinanza e fornire chiavi di accesso ai media e alla loro cultura.

2. Il potere della narrazione

La narrazione è forse il mezzo più potente con cui gli esseri umani organizzano la propria esperienza. Essa è nata con l'essere umano, una delle forme di discorso più potente ed efficace nella comunicazione. Noi tutti amiamo raccontare storie e ci raccontiamo da sempre. Noi ascoltiamo i racconti in continuazione, li raccontiamo con la stessa facilità con cui li comprendiamo, li modelliamo per adattarli ai nostri scopi e siamo così bravi a raccontare che questa facoltà sembra «naturale» quasi quanto il linguaggio (Bruner, 2002). Bruner (1992) afferma che la narrazione è insita nella prassi dell'interazione sociale prima di trovare espressione linguistica. Ciò che determina l'ordine di priorità in cui le forme grammaticali vengono assimilate dal bambino in tenera età è proprio la *spinta* a costruire una narrazione. Ciò significa che la caratteristica della *cultura* è il risultato di una negoziazione continua di significati in riferimento al contesto sociale di riferimento, e il bambino produce i significati e racconta a sé stesso e agli altri la sua esperienza con il mondo.

La narrativa, anche quella di fantasia, dà forma a cose del mondo reale e spesso conferisce loro addirittura un titolo alla realtà. Non sorprende che i racconti siano la moneta corrente di una cultura (Bruner, 2002). È, quindi, la modalità narrativa che ci consente di organizzare, ricordare e riflettere sull'esperienza in una forma negoziata e condivisa culturalmente. Bruner, (1992) forse più di tutti, affronta questi temi in vari testi, lui riconosce alla narrazione e alle storie un ruolo fondamentale per la loro capacità d'introdurre i bambini al mondo, oltre che per gli aspetti di tipo didattico-metodologico. Egli ipotizza l'esistenza di un pensiero narrativo, ovvero la capacità cognitiva dell'individuo di costituirsi una rappresentazione adeguata dei processi che aiutano a organizzare la propria esperienza e strutturare la propria vita.

Eppure, per la logica del senso comune, l'immaginazione, i vissuti emotivi, la fantasia e la creatività non sono elementi tipici del pensiero logico-paradigmatico ma, vanno confinate in ambito umanistico. Dato che, nel processo di apprendimento-insegnamento non si tratta di fare affidamento solo sul pensiero logico per costruire concetti e categorie generali, di trovare articolazioni gerarchiche tra queste, come pure di riconoscere nessi causali tra gli eventi (Smorti, 1995), ma anche scoprire le modalità per far comprendere quali competenze attivare per il ragionamento e la costruzione del significato delle azioni umane. E a tale proposito, Bruner (1988) esamina e compara il pensiero razionale e il pensiero narrativo, l'autore puntualizza che essi rispondono a due criteri differenti e due tipi di funzioni cognitive, complementari e irriducibili l'uno all'altro, all'interno del setting didattico. Se quelle appena descritte sono le peculiarità dell'istanza narrativa, riferite alla costruzione del sapere e alle pratiche della sua trasmissione, allora dobbiamo riconoscerne il vantaggio psicologico e le ricadute positive in termini di interesse e di motivazioni per avvenimenti che altrimenti risulterebbero poco avvincenti per gli studenti.

3. Le caratteristiche delle storie

Le storie, sia come strutture ideate dall'autore per raccontare l'avvicendarsi degli avvenimenti e delle imprese dei protagonisti, sia dal punto di vista cognitivo e emotivo, forniscono una situazione comunicativa coinvolgente in cui l'allievo muove il suo personale cammino interpretativo in relazione al problema proposto. Umberto Eco (1994) lo traduce splendidamente con la metafora delle *passeggiate nel bosco narrativo*. Assegna la centralità alla figura del *lettore*, che da fruitore passivo diventa protagonista attivo: traccia il proprio percorso nel *bosco narrativo* facendo inferenze e operando delle scelte, partecipa e coopera alla negoziazione dei significati con la propria personalità e sensibilità.
Una storia potremmo definirla come una successione di un fatto o di una serie di fatti, reali o di fantasia, che stabiliscono il significato degli elementi che la compongono. Per Chatman (1981), il discorso narrativo consiste in una sequenza coerente di enunciati (1981). Per Barthes (1969) il discorso è un insieme di frasi e non vi è nulla di più che non sia contenuto nelle frasi o unità elementari o enunciati. Queste unità (e qui Barthes riprende Propp e Todorov) possono essere distinte tra le *funzioni* che sono eventi con una correlazione e gli *indizi* che si riferiscono a concetti necessari per dare senso alla storia. Per i semiologi, l'enunciato è il «*segno*», cioè come l'unione di un *significante* (una parola, un'immagine, un oggetto) e di un *significato*, cioè cosa sta a significare all'interno di una determinata cultura, sia pure con ampi margini di differenti attribuzioni (Livolsi, 2006).
In linea generale, una storia presenta una sua struttura o grammatica, ha un inizio che genera un conflitto o aspettativa, un mezzo che lo complica e una fine che risolve il conflitto che ha messo in crisi l'ordine vigente. Ci chiediamo cosa succede dopo, immaginiamo e vogliamo scoprire come va a finire, ci immedesimiamo nella situazione problematica che i personaggi vivono nella storia. Chi ascolta o chi legge deve far luce sul significato degli eventi offerto dall'agire del protagonista o dei protagonisti in un susseguirsi di pensieri, azioni, ritmi, parole, frasi. Sono tutti elementi studiati per creare tensione, suscitare il nostro interesse, accendere la nostra curiosità.
A differenza di altri generi di testi come quelli argomentativi, una storia, si caratterizza per la sua forza emotiva che plasma il concatenarsi degli eventi. Come già abbiamo detto, essa orienta le nostre emozioni sul suo contenuto. È proprio a questo aspetto che siamo più interessati. Gli studi sulle neuroscienze rivelano proprio lo stretto legame tra gli aspetti emozionali, cognitivi e meta-cognitivi. Il linguaggio simbolico, con cui i bambini entrano in contatto, fin dalla prima classe della scuola primaria, troppo spesso è tutt'altro che chiaro. Pertanto, creare un'atmosfera confortevole, mistero, entusiasmo in aula, intorno ad un tema matematico, significa fornire sicurezza e soddisfazione, aiutando gli studenti alla decodifica dei difficili concetti astratti.

4. Il mondo dell'incerto tra probabilità e fiaba

Per un soggetto che pensa, agisce e opera scelte razionali, in condizione di incertezza, sono necessarie delle capacita appropriate di inferenza, atte ad individuare gli elementi chiave delle situazioni problematiche. Ciò richiede di saper valutare una grande quantità di informazioni, formulare ipotesi, porre domande e proporre soluzioni. Al bambino vanno offerte opportunità di apprendimento coinvolgenti e mirate per introdurre la probabilità e familiarizzare con situazioni incerte e soluzioni di problemi.

Egan, (1986, 2012) enfatizza alcuni strumenti cognitivi che caratterizzano l'apprendimento e l'insegnamento. Queste forme della comprensione determinate dalle loro caratteristiche, quali la metafora, la fantasia, il ritmo, la narrazione, le storie e i significati, le emozioni e il linguaggio orale, rappresentano gli *organi dell'immaginazione*. L'immaginazione è la capacità di pensare al *possibile*, caratteristica legata alla flessibilità del pensiero umano, alla capacità di formare *immagini* nella mente; con quest'ultime scatta l'interesse e il coinvolgimento emotivo. Questo mondo emotivo, immaginativo e metaforico non è distinto dalla razionalità ma si sviluppa parallelamente ad essa e la arricchisce. Dunque, può essere un modo per la definizione di un problema e la formulazione di ipotesi e previsioni.

Il processo che genera gli effetti positivi offerto dai testi narrativi e in particolare dai racconti più o meno verosimili o d'immaginazione, quali in particolare le favole, le fiabe e molta letteratura per ragazzi, è legato a una *cooperazione interpretativa* che coinvolge chi legge. Si tratta della comparazione tra il mondo di riferimento del *lettore*, la realtà e il mondo narrativo creato dal testo, il cosiddetto *mondo possibile* del racconto (Eco, 1979).

Le fiabe, da sempre ci hanno affascinato, quando le ascoltiamo ne esploriamo gli accadimenti, le sperimentiamo nella nostra immaginazione, partecipiamo alle vicissitudini del protagonista o dei protagonisti nelle diverse situazioni in cui si trovano, ne ricordiamo le azioni e i pensieri. Rodari (1973) ci racconta in modo avvincente nel libro *Grammatica della fantasia* il ruolo straordinario che la fiaba riveste nell'esperienza del bambino. Il *c'era una volta* della fiaba non è diverso dal *c'era una volta* della storia, anche se la realtà della fiaba, come il bambino scopre prestissimo, è diversa dalla realtà in cui egli vive. La fiaba ha per lui la stessa serietà e verità del gioco: gli serve per impegnarsi, per conoscersi, per misurarsi. Per esempio, per misurarsi con la paura (Rodari, 1973).

L'ascolto di storie narrate con l'adulto costituisce per il bambino uno strumento privilegiato per lo sviluppo linguistico e per la conoscenza del mondo (Levorato, 1988). Anche secondo altri autori, come Egan (2012), i racconti e le fiabe, sono un potente mezzo per l'apprendimento e lo sviluppo dell'immaginazione. Il teorico dell'educazione sottolinea che dovremmo alimentare la dimensione narrativa fin dalla primissima infanzia, combinando tutti gli elementi che la rendono così efficace nelle strategie di insegnamento e di apprendimento. E c'è un aspetto fondamentale che Egan enfatizza in certi tipi di narrazioni, quando delinea le implicazioni pratiche della sua teoria, vale a dire, che le storie coinvolgono intensamente la dimensione affettiva orientando le emozioni di chi ascolta ai loro contenuti, ciò induce alla ricerca di significati diversi e più profondi (Livolsi, 2006). La convinzione di Egan è che l'accesso più immediato e coinvolgente alla comprensione si raggiunge attraverso le emozioni e i pensieri più intimamente legati ai fenomeni da studiare.

I bambini si divertono con le storie in età molto precoce, sono attratti inizialmente dai colori e dalle immagini e poi dalle trame e i personaggi. Con le storie tutto sembra possibile. Si tratta, infatti, di un mezzo attraverso cui i bambini provano emozioni e divertimento e tutto ciò può essere un buon modo per aiutarli a scoprire l'importanza della matematica nelle loro vite. Il linguaggio matematico dell'adulto può intimidire un bambino, invece le storie e la narrazione rompono le barriere della comunicazione.
In linea generale possiamo affermare che l'analisi del contenuto delle fiabe porta a considerare che tutti i tipi di fiabe contengono concetti e connessioni matematiche. In esse troviamo elementi di geometria, di aritmetica, di algebra, nonché nozioni della teoria della probabilità.
Per esempio: *(...) Fata Isotta è sulle tracce della perfida strega per appropriarsi delle merende avvelenate che vuole rifilare agli abitanti di Matelandia. È più probabile che la fatina scelga il percorso giusto o quello sbagliato? E cammina in lungo e in largo nel bosco. — Fino ad adesso ho visto orme di coniglio, di volpe, di tasso, ma della strega niente! — borbotta Isotta — e mi tocca scegliere tra gli otto percorsi.* (Di Poccio, 2016)
È evidente come i bambini, che sono in una fase di familiarizzazione con le attività che si inseriscono in ambito probabilistico, attraverso il congegno narrativo possono sperimentare una nuova esperienza didattica con il gioco delle scelte multiple. Ciò consente ai bambini di riflettere sulle situazioni d'incertezza e sviluppare il vocabolario matematico che è parte essenziale dell'apprendimento. Attraverso la storia la parola *evento* assume senso e significato. Se prendiamo a riferimento il passo della fiaba citato, Fata Isotta dovrà scegliere quale sentiero percorrere quando arriva al bivio, se devia a destra si troverà davanti alcuni avvenimenti, se svolta a sinistra farà esperienze senz'altro diverse. E se andasse dritto si troverebbe a sperimentare altri fatti e situazioni.

5. La narrazione digitale come ambiente di apprendimento

Il Digital Storytelling, ovvero la moderna espressione dell’antica arte della narrazione, realizzata con i media digitali, testi, audio, musica, video, immagini, effetti, è un mezzo che integra la tecnologia in classe e permette allo studente di *imparare a imparare* e di sviluppare molte Literacies; consente un apprendimento personalizzato e una partecipazione efficaci, che deriva proprio dalla peculiarità gratificante dell’approccio narrativo. Esso offre la possibilità di personalizzare l’esperienza educativa e formativa e consente l’applicazione in numerosi contesti e su una miriade di argomenti. Le caratteristiche più importanti di una storia digitale ruotano intorno a una domanda su un tema specifico a cui viene data una risposta in modo creativo e divertente, i cui esiti facilitano la spiegazione di concetti astratti e la probabilità di eventi semplici (Robin, Özpinar, 2016, 2017).
La fiaba diventa, attraverso un progetto di narrazione digitale, un ambiente di apprendimento inteso come:

- lo spazio della *motivazione*, perché si è coinvolti di più se gli argomenti da apprendere sono situazioni reali vicino alla realtà dei bambini che possono esperire personalmente.
- lo spazio della *fantasia* e della *creatività*, perché attraverso il contesto narrativo i bambini si pongono domande, si pongono problemi e analizzano le diverse alternative, necessarie per risolverli.
- lo spazio delle *interazioni* e degli *scambi*, perché l'allievo impara a socializzare con gli insegnanti, con i compagni di classe e gli oggetti del sapere. Impara a confrontarsi e a negoziare scopi e interessi.
- lo spazio della *personalizzazione* degli apprendimenti, perché si attivano stimoli diversi che consentono, attraverso la modalità narrativa, lo sviluppo di ciascuno secondo le proprie capacità.
- lo spazio delle *intelligenze multiple*, perché ciascuno si esprime secondo profili cognitivi distinti.
- lo spazio della *trasversalità* delle competenze generali, perché si attiva l'interazione tra i diversi linguaggi, quelli della mente e del corpo, facendo emergere un'idea di persona come sistema integrato.
- lo spazio della *metacognizione*, perché stimola l'allievo al controllo e all'intervento sui propri processi cognitivi per facilitarne le attività.

6. Insegnare e apprendere con i media: come produrre una storia digitale

Le tecnologie didattiche si occupano di come si possa insegnare e apprendere in ambiente educativo attraverso l'uso dei media. Il DST costituisce un processo che presenta una narrazione che incorpora gli elementi dell'informazione, dell'educazione e dell'intrattenimento. Una storia digitale si basa sull'applicazione dei media digitali come l'audio, le immagini, le rappresentazioni grafiche, la musica, le foto, le animazioni, inclusi i testi e la voce del narratore.
Ciò comporta il saper controllare un ambiente digitale interattivo e gestire competenze e conoscenze sia digitali che di contenuto. Esse si fondano sulla capacità di ricercare le informazioni nella propria mente, di valutare e utilizzare queste informazioni per costruire la trama narrativa; l'attuazione del passaggio che comprende la socializzazione dell'esperienza e lo scambio di idee; l'attenzione a misurare l'impatto della storia digitale e la sua completezza in base all'argomento a cui si riferisce.
In generale, le storie digitali sono caratterizzate dalla loro brevità, dal voler comunicare con forza e comprensibilità alcuni significati. I lavori possono essere salvati e visualizzati sul computer o su un altro dispositivo in grado di riprodurre il file video, oppure, immesso on-line per essere visualizzato dai diversi browser web.

Un progetto di DST richiede una pianificazione: la creazione di una storia ; scelta della finalità del messaggio narrativo e a chi si vuole comunicarlo; composizione di uno storyboard che implica la scelta del genere e della sceneggiatura; la suddivisione e numerazione delle sequenze del testo; la creazione di grafiche; le riprese video, le foto e le musiche; il montaggio, il trattamento dei dati e il rispetto dei copyright; l'attività di editing; la divulgazione e la valutazione sul risultato.
I principali protagonisti della fiaba raccontata in *Numeri in Fabula. Le probabili avventure nel paese di Matelandia* (Di Poccio, 2016) sono sette folletti. Questi personaggi hanno una particolare personalità nella quale il bambino può facilmente identificarsi, pensare ed agire come loro. Sono personaggi di fantasia, infaticabili, leali onesti e coraggiosi, dalle abilità straordinarie. Hanno la particolare caratteristica di saper risolvere i problemi, infatti, sono capaci di una incrollabile concentrazione. Ne combinano di belle per sperimentare, verificare le ipotesi, porsi le domande sull'evento straordinario che sta per capitare alla città di Matelandia.
Dato che hanno raggiunto una forte capacità di operare sulla complessità dei fenomeni, pongono le domande che, proprio perché poste nella specificità delle connessioni logiche interne ed esterne agli avvenimenti, aiutano i bambini a individuare gli aspetti rilevanti di una situazione, consentendo loro di entrare nell'area di *sviluppo prossimale*. La storia è creata intorno a legami logici, perciò il divenire dei fatti è contraddistinto non per la successione temporale degli eventi narrativi, ma piuttosto per l'evolversi di quelle logico-problematiche. Se quindi, il processo di modellizzazione ha luogo in un ambiente di narrazione, rappresentato dal susseguirsi concatenato di sequenze logiche, i diversi aspetti delle conoscenze costruite, attraverso le vicende della storia, non saranno avvertite come un fatto isolato, anzi, saranno strettamente legate ad una fitta rete di relazioni. Anche se alcuni eventi si concludono, i bambini possono rivedere le situazioni problema e come sono state risolte, fissando la storia su un quaderno, disegnando i personaggi e le sequenze che la caratterizzano. Così, dopo che il bambino è stato in grado di esplorare i concetti, di operare sui significati, di giocare e manipolare il linguaggio, guidato dalla storia narrata, si accertano gli effetti sull'apprendimento e l'insegnante può considerare il processo di *internalizzazione* (Vygotskij, 1990).

7. Considerazioni conclusive

L'impiego della fiaba, della narrazione tradizionale e del Digital Storytelling nelle lezioni in aula, con le caratteristiche sopra descritte possono essere una fonte di diversi tipi di conoscenze e tra queste si afferma la competenza digitale o Digital Literacy. Si può concludere che sono ben visibili anche le connessioni che introducono il concetto di probabilità. Siamo infatti riusciti a stabilire alcuni criteri efficaci che possono servire per aiutare a costruire i significati matematici. Questo avviene perché l'organizzazione delle informazioni sono presentate attraverso attività coerenti, collegate tra loro e utilizzate per questo scopo. Le storie possono far vedere ai bambini come la matematica ci aiuta nei compiti quotidiani. Si tratta di esempi pratici dell'uso della matematica che pongono le basi per assimilare nuove idee e costruire un percorso di comprensione dei concetti astratti e per le fasi di sviluppo successive. Il sostegno all'insegnante nel processo attivo della costruzione di questi significati è sorretto dalle sequenze della struttura narrativa.

Le situazioni problema posti dagli avvenimenti della storia, le domande che i personaggi pongono rispetto agli argomenti matematici trattati e le azioni che li vedono protagonisti in attività specifiche, forniscono ai bambini la possibilità di operare in ambito probabilistico, prendendo spunto dai giochi proposti nella fiaba. Inoltre, integrando le lezioni in aula con il DST si offre anche l'occasione di avviare i bambini alla collaborazione e alla discussione, alla formulazione di ipotesi in situazione di incertezza, a sostenere le proprie idee e a misurarsi con le idee di altri. Infine, riteniamo che in futuro andrebbe implementato l'impiego delle storie in classe e l'uso della narrazione digitale. Gli studi più recenti rivelano (Robin, Özpinar, 2016, 2017) che l'uso del DST, pianificato e strutturato in una buona storia digitale, con metodi e tecniche adatti al livello di età del gruppo, produce risultati efficaci sul pensiero critico, sulla motivazione e sull'apprendimento attivo dei concetti matematici.

L'apprendimento della matematica sembra non avere nulla a che fare con le fiabe, le storie e le narrazioni, poiché, leggere, raccontare o produrre una storia in classe, risulta essere, il più delle volte, un fatto accessorio e non una procedura consolidata. Tutto ciò è una visione miope e poco lungimirante che non tiene conto dell'infinito potenziale matematico delle storie. Rodari sostiene, con alcune considerazioni che stanno alla base di questo lavoro, che le fiabe adempiono ad importanti funzioni educative, con effetti sulla motivazione e partecipazione attiva del discente. Infatti, l'autore non solo ne afferma l'importanza quando asserisce che le fiabe servono alla matematica come la matematica serve alle fiabe. Servono alla poesia, alla musica, all'utopia, all'impegno politico: insomma all'uomo intero, e non solo al fantasticatore (Rodari,1973). Le fiabe sono un autentico percorso di crescita e stimolo per la creatività, definita come sinonimo di «pensiero divergente», cioè capace di rompere continuamente gli schemi dell'esperienza. È creativa una mente sempre al lavoro, sempre a far domande.

L'autore scrive: — *E dopo?* — domandano i bambini, quando il narratore s'interrompe. Anche a fiaba finita, c'è sempre la possibilità di un «dopo» (Rodari, 1973). L'ambiente narrativo e l'insieme dei fattori affettivi-motivazionali sollecitano i bambini a proporre nuovi problemi e soluzioni. La storia continua con cambiamenti, avvenimenti e fatti inaspettati, cosa che coinvolge creativamente il discente in modo totale.

Un altro esempio dell'autore: — *Che cosa succederebbe se....* Quella della formulazione di una domanda, a proposito delle «ipotesi fantastiche» è una tecnica che conduce il bambino a rappresentarsi nuove realtà ricche di significato. Ed è così che può entrare con fantasia e immaginazione dentro il testo e alla sua «decodifica». Ciò non avviene sempre in modo univoco ma dal modo in cui ogni bambino percepisce il sapere e costruisce il significato dell'esperienza. Gli avvenimenti narrativi si moltiplicano spontaneamente all'infinito, suggerendo nuove domande, nuovi scenari e nuove interpretazioni secondo leggi private, personalissime.

Bibliografia

Barthes, R., (et al) (1969), L'analisi del racconto, Bompiani, Milano, in M. Livolsi, (2000), p.140, (a cura di), Manuale di sociologia della comunicazione, Roma-Bari, Laterza.

Bruner J. (1986), Actual minds, possible words, Cambridge, MA: Harvard University Press, La mente a più dimensioni, (R. Rini, Tr. it.) Editore Laterza, Roma-Bari, 1988.

Bruner J., (1990), Acts of meaning, Cambridge, MA: Harvard University Press, (tr. it.) La ricerca del significato, Bollati Boringhieri, Torino, 1992.

Bruner J., (1996), The Culture of Eucation, Harvard University Press, Cambridge (Mass.) (Trad. it. 1ed.) La cultura dell'educazione. Nuovi orizzonti per la scuola, Feltrinelli, Milano, 1997.

Bruner J., (2002), La fabbrica delle storie: diritto, letteratura, vita, Roma-Bari, Laterza.

Catarsi E., (2001), (a cura di), Lettura e narrazione all'asilo nido, Edizioni Junior, Bergamo, p. 48.

Chatman S., (1978), Story and Discourse, Cornell University Press, Ithaca (trad. it. Pratiche, Parma (1981), p.28, in M. Livolsi, (2000), p.140, (a cura di), Manuale di sociologia della comunicazione, Roma-Bari, Laterza.

D'Amore B., (2016), A proposito di "metodi di insegnamento" univoci. Errori pedagogici, epistemologici, didattici e semiotici delle metodologie univoche. *La vita scolastica web*. ISNN: 0042-7349

Delli Rocili L., Maturo A., (2017), Social problems and decision making for teaching approaches and relationship management in an elementary school, in *Mathematical Statistical Models and Qualitative Theories for Economic and Social Sciences*, Vol. 104, pp. 81-94, Springer International Publishing Switzerland.

Delli Rocili L., & Maturo A., (2015). Interdisciplinarity, logic of uncertainty and fuzzy logic in primary school. *Science & Philosophy*, 3(2), pp.11-26.

Delli Rocili L., Maturo A., (2013), Teaching mathematics to children: social aspects, psychological problems and decision-making models, in *Interdisciplinary approaches in social sciences*, pp. 243-255, Editura Universitatii A.I. Cuza, Iasi, Romania.

Delli Rocili L., Maturo A., (2013b), Probabilità e Statistica nella scuola primaria: esperienze didattiche e proposte, *Science & Philosophy*, 1 (2), 49-78, issn = 2282-7765.

Delli Rocili L., Maturo A., (2013a), Logica del certo e dell'incerto per la scuola primaria, *Science & Philosophy*, 1 (1), 37-58, issn = 2282-7765.

Delli Rocili L., Maturo A., (2013), Probabilità e Statistica nella Scuola Primaria: riflessioni sulle Indicazioni Nazionali, esperienze e proposte, *Periodico di Matematiche*, 5 (2) Serie XI, 5-12.

Di Poccio A. M., (2016), Numeri in fabula. Le probabili avventure nel paese di Matelandia (pp. 78-79), 2^ edizione APAV, Pescara, 2018.

Eco, U., (1979), Lector in fabula. La cooperazione interpretativa nei testi narrativi, Bompiani, Milano.

Eco, U., (1994), Sei passeggiate nei boschi narrativi, Bompiani, Milano, p. 54.

Egan, K., (1986), Teaching as Story Telling: an alternative approach to teaching and curriculum in the elementare school. Chicago:University of Chicago Press.

Egan, K., (1988), Primary Understanding. Education in Early Childhood. Routledge, New York.

Egan, K., (1988a). Teaching as Story Telling. Canadian Journal of Education / Revue canadienne de l'éducation. 13. 10.2307/1494927.

Egan, K., (1997), The Educated Mind: How Cognitive Tools Shape Our Understanding, The University of Chicago Press, (trad. it.) La comprensione multipla. Sviluppare una mente somatica, mitica, romantica, filosofica e ironica, Edizioni Erickson, Trento, (2012).

Gardner H., (2011), Educare al comprendere. Stereotipi infantili e apprendimento scolastico, Feltrinelli Editore, Milano, pp. 21-91-92-215-222-223-224.

Levorato, M. C., (1988), Racconti, storie e narrazioni. I processi di comprensione dei testi, Il Mulino, Bologna.

Livolsi M., (2006), Manuale di sociologia della comunicazione, Roma-Bari, Laterza, pp.134-138-140-141.

Morin E., (2000) La testa ben fatta. Riforma dell'insegnamento e riforma del pensiero, Cortina Editore, Milano, pp. 2-16-59.

Özpinar. I., (2017), Effects of Digital Storytelling in Mathematics Instruction on Academic Achievement and Examination of Teacher-Student Opinions on the Process, *Journal of Education and Training Studies*, Vol. 5, No. 10.

Robin, B. R., (2016), The Power of Digital Storytelling to Support Teaching and Learning, *Digital Education Review*, Number 30. University of Houston, USA.

Rodari, G. (1973), Grammatica della fantasia. Introduzione all'arte di inventare storie, Piccola Biblioteca Einaudi, Torino, pp. 6-19-142-143-144-170-171)

Smorti A., (1995), Il pensiero narrativo, Giunti, Firenze, p.93.

Vygotskij L. S., (1990), Pensiero e linguaggio. Ricerche psicologiche, a cura di L. Mecacci, Roma-Bari, Laterza.

2^ Scuola Estiva di Formazione per i docenti del Primo Ciclo di Istruzione
"Insegnare Matematica: didattica, inclusione e cooperazione"
Pizzoferrato 22-23-24-25 luglio 2018

"Se insegni, insegna anche a dubitare di ciò che insegni"
J. Ortega y Gasset (filosofo e saggista spagnolo - 1883-1955)

La magia delle quattro operazioni mediante giochi divertenti ed accattivanti per ragazzi dai 4 ai 14 anni

Agostino Zappacosta[1]

[1]Vice Presidente Mathesis di Pescara, già Docente di matematica presso diverse scuole secondarie
e-mail: agostino_zappacosta@libero.it

Sunto

Con la presentazione di alcuni semplici esempi, ci proponiamo di indicare soprattutto una metodologia di lavoro da utilizzare nella didattica della matematica per ragazzi dai 4 ai 14 anni. Questa metodologia si basa su tre punti:
1) Osservazione attenta della realtà da cui scaturiscono i problemi.
2) Analisi dei dati a disposizione individuando e selezionando solo quelli necessari e indispensabili per poter arrivare alla soluzione.
3) Riflessioni sul cammino percorso per arrivare a delle osservazioni e conclusioni più generali che ci permettano di mettere a punto, perfezionare, migliorando e/o eliminando, eventuali punti deboli incontrati in questo percorso.
Tutto questo lo devo a due grandi maestri che ho avuto la fortuna di incontrare: Bruno de Finetti, negli anni 1965-1970 presso l'Università di Roma; Emma Castelnuovo, dopo, negli anni 1970-1980 presso diverse scuole secondarie di primo grado dove insegnavo.

Parole chiave: Bruno de Finetti, Emma Castelnuovo, grandezza costante e variabile, filastrocca, domino, frottage, operazioni dirette e inverse, Torre di Hanoi, tabella.

1. Introduzione

Il Progetto Polimath.it (https<://areeweb.polito.it/didattica/polimath/htmlS/interventi), tra i molti siti che si trovano su internet (forse troppi), è quello che si avvicina di più al mio modo di intendere una didattica efficace della matematica, in generale e, in particolare, soprattutto quella rivolta agli alunni del I ciclo (scuola della infanzia, scuola primaria e secondaria di primo grado). Mi preme, a questo punto, ricordare due grandi maestri: Bruno de Finetti ed Emma Castelnuovo che ho preso come esempio e devo

essere loro riconoscente in quanto la lettura dei loro libri e le cose apprese nei loro seminari ed incontri, hanno agevolato e perfezionato la mia didattica della matematica.
Ricordo che Bruno de Finetti, conosciuto a Roma durante i miei studi universitari, con insistenza sosteneva la necessità di rendere più intuitiva la matematica. Del resto, nel titolo di un suo famoso libro “Matematica logico intuitiva” usa proprio due aggettivi che spiegano chiaramente questo concetto. Della sua intensa attività organizzativa, mi limito a ricordare solo due cose che più mi stanno a cuore: 1) a partire dal 1962 istituì delle gare matematiche per gli studenti delle scuole di Roma; 2) in quegli stessi anni preparò un volumetto di sole 72 pagine, edito dalla Casa Editrice Loescher nel 1967, dal titolo “Il saper vedere in Matematica”. In questo volumetto, di poche pagine, riuscì a condensare concetti profondi che risultarono utili a molti di noi, che da studenti, dopo qualche anno, saremmo diventati insegnanti.
Il secondo maestro che ho avuto è stata Emma Castelnuovo, conosciuta durante i miei primi anni di insegnamento (1970-75) presso diverse scuole secondarie di I grado della provincia di Chieti con incontri, seminari di studio ed esperienze molto interessanti. Come tutti sanno, Emma Castelnuovo e Bruno de Finetti collaborarono a lungo dando notevoli contributi e contribuirono non poco al rinnovamento della didattica della matematica.

 Bruno de Finetti (1906-1985) **Scheda 1**	“La Matematica nelle scuole è quasi sempre insegnata male. Ci si sofferma sulle minuzie più complicate e astruse mentre si trascurano le cose importanti.” Così si esprimeva Bruno de Finetti ben oltre mezzo secolo fa. E ancora: ” Riesce particolarmente pregiudizievole la tendenza a sopravvalutare - spesso, addirittura in modo esclusivo - la ragione che, a mio avviso, é invece utilissima solo a patto di venir considerata come un complemento atto a perfezionare tutte le altre facoltà istintive intuitive psicologiche (ma non - guai! - a surrogarle)”. E ancora: “Quel che è logico è esatto, ma non dice nulla.”

Nelle schede 1 e 2 ho sintetizzato, nei limiti del possibile, il pensiero relativo alla didattica della matematica, dei “Maestri” Bruno de Finetti ed Emma Castelnuovo.

 Emma Castelnuovo (1913-2014) **Scheda 2**	La didattica di Emma Castelnuovo viene spiegata molto bene già nella prefazione dei primi libri da lei pubblicati "…obiettivo principale del Corso di Geometria intuitiva è suscitare, attraverso l'osservazione di fatti riguardanti la tecnica, l'arte e la natura, l'interesse dell'alunno per le proprietà fondamentali delle figure geometriche e, con esso, il gusto e l'entusiasmo per la ricerca. E' necessario animare la naturale e istintiva curiosità che hanno i ragazzi dagli 11 ai 14 anni accompagnandoli nella scoperta delle verità matematiche, trasmettendo l'idea di averlo fatto per se stessi e, dall'altra parte, far sentire progressivamente la necessità di un ragionamento logico".

A questo punto merita di essere menzionato anche un altro "Bruno", parlo di Bruno d'Amore, che ha continuato l'opera iniziata da Emma Castelnuovo.
Sintetizzare in poche parole il contributo dato da Bruno D'Amore alla didattica della Matematica è quasi impossibile. Mi limito a riportare alcune risposte date ad una giornalista che lo intervistava in occasione della ventiseiesima edizione del convegno **"Incontri con la matematica"** che s'è svolta a San Pietro Terme in ottobre (2012), con la direzione scientifica dello stesso Bruno D'Amore, Martha I. Fandino Pinilla e Silvia Sbaragli.
Alla domanda: ***Matematica e scuola dell'infanzia: il convegno ha dato ampio spazio a questo rapporto. Perché?***
Così rispondeva:
"Prima di tutto perché io sono sempre stato e sempre sarò un fanatico sostenitore della scuola dell'infanzia come scuola. E poi perché le mie ricerche di varie decine di anni hanno mostrato che nella scuola dell'infanzia le discipline scientifiche sono fortemente educative non solo intrinsecamente, ma anche in generale, in moto trasversale."
E all'altra domanda: ***Quali proposte, novità, conferme sono emerse dalle relazioni e dai seminari.***
Così rispondeva:
"La grande conferma è che vale la pena pensare ad una matematica specifica per la scuola dell'infanzia; le novità sono le particolari proposte, sempre diverse, che giungono da tutta Italia, **insegnanti che si mettono in gioco**, ricercatori che raccontano le proprie esperienze scientifiche ma in modo utilizzabile. Si tratta di un momento magico, fortemente attrattivo. L'insistenza è sul fatto che **nella scuola dell'infanzia si può fare matematica**, e come. Certo, adatta al livello, all'età, ma in modo intelligente e significativo. Il bambino entra in un mondo che lo affascina, a fare attività che lo

portano in modo magico e fluido nella scuola elementare. Impara a parlare, a gestire il proprio linguaggio, a descrivere, ad ipotizzare."
Chiudo qui questa introduzione ricordando che il prossimo Convegno dal titolo "Incontri con la Matematica XXXII", si terrà nei giorni 16-17-18 novembre 2018 sempre a Castel S. Pietro (Bologna).

2. Scuola dell'infanzia

Nella scuola dell'infanzia i ragazzi di 3-4 anni generalmente sanno contare fino a 5 e quando arrivano verso i cinque anni sanno contare (a memoria) fino a 10. Però tutto questo con l'aiuto di esercizi interattivi, figure da colorare, video, audio, materiali integrativi, filastrocche, fumetti, tessere di domino dove al posto dei numeri ci sono immagini (animali, piante, case, persone, automobili, sedie, quaderni, pastelli, penne, ecc.), video (You Tube, Cartoni animati). Su internet si trova di tutto ed è l'insegnante che deve saper scegliere in base alla propria esperienza. In questa fase delicata, la matematica non deve essere presentata (questo vale anche per le altre discipline) come una materia a parte bensì inserita insieme alle altre nella realtà fantastica del bambino e l'insegnante e i genitori sono i registi più importanti per la formazione di questi bambini che vanno via via ad acquisire autonomia e personalità proprie.
Le filastrocche, sono utilissime, e completano in modo organico le "ninne-nanne" molto utilizzate dalle loro mamme quando i bambini avevano pochi mesi nonché dalle insegnanti degli asili-nido. Nella bibliografia ho riportato qualche sito che ho trovato interessante. Però molto materiale potrebbe e dovrebbe (come succede già in molte scuole) essere preparato dai ragazzi stessi con l'aiuto degli insegnanti e possibilmente con il coinvolgimento dei genitori. Insieme alle filastrocche che facilitano l'apprendimento dei numeri, delle stagioni, dei mesi, dei giorni della settimana, ecc, ci sono molti giochi in cui il ritmo, la cadenza, la corsa sono molto importanti anche per lo sviluppo psicomotorio. Conoscere le regole di un gioco, imparare a rispettarle, condividerle con i compagni, diventa interessante, piacevole e formativo. Durante i giochi i bambini fanno esperienze, commentano i successi, gli errori, incominciano a fare dei ragionamenti, delle supposizioni: è questo il momento giusto per farli riflettere, farli parlare, incuriosirli.
Qualsiasi attività deve essere accompagnata dall'uso di un linguaggio adatto alla loro età. L'insegnante per rendere maggiormente efficace il suo intervento educativo deve prestare molta attenzione nell'usare termini appropriati, accettarsi che quello che ha detto è stato compreso bene dai bambini. Avere molta pazienza, aspettare, osservando attentamente il viso dei bambini che si sforzano di elaborare un concetto, cercandodi esprimerlo a parole. Non dare subito la soluzione ma dei suggerimenti utili a "rilanciare" il ragionamento dei bambini. Una volta conclusa, quella esperienza fatta viene verbalizzata, raccontata, commentata, descritta in dettaglio dando la possibilità di commentarla adeguatamente.

Riporto nella scheda 3 due esempi di filastrocche sui numeri.

La filastrocca dei numeri (da:www.filastrocche.it) L'1 ha la visiera. Il 2 in ginocchio, prega. Il 3 è un cuore a metà ip-ip, ole', ola'. Il 4 è una sedia un po' strana: la usava la fata Morgana. Il 5 guarda a destra. Il 6 ha la pancia della maestra perciò vuole andare in palestra. Il 7 ha una bella cravatta e l'8 é una pista asfaltata. Il 9 ha un visino attento. Il 10 é tutto contento, perché forma un voto che fa felice la mamma, il babbo ed anche me!	**Filastrocche numeri da 1 a 12** da:(www.donnaclick.it/mamma/164869/7-**filastrocche**-sui-**numeri)** 1 è il sole che splende di giorno, 2 sono gli occhi che guardano intorno, 3 i magi che vanno, che vanno, 4 stagioni formano l'anno, 5 dita ci sono in una mano, 6 sono le zampe che ha una formica, 7 i colori dell'arcobaleno, 7 stelle ha l'Orsa Maggiore, la settimana ha 7 giornate, con 8 zampe, se voi le contate, si muove il ragno nella sua ragnatela, 9 i pianeti che girano in cielo, due mani insieme fan dieci dita, 11 e 11 fan la partita, 12 mesi formano un anno, conta e riconta fino a un altro anno
Scheda 3	

3. Scuola primaria

Si può iniziare a partire dalla prima classe con ordinamenti crescenti e decrescenti. Una stessa immagine di grandezza diversa (figure simili), viene presentata in modo disordinato e i ragazzi devono riordinarli dal più piccolo al più grande, partendo da sinistra andando verso destra (vedi fig. 1)

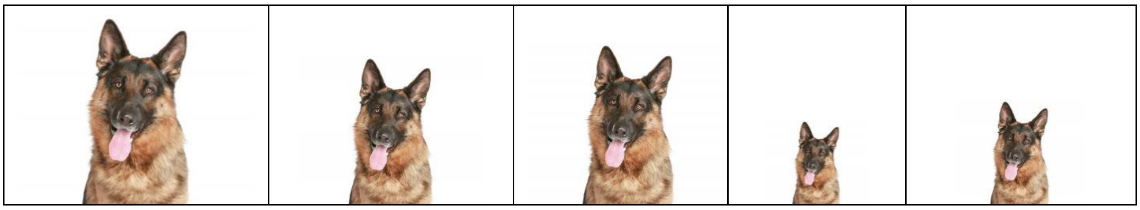


fig. 1

Lo stesso si può fare, per l'ordinamento decrescente, partendo dal più grande andando al più piccolo sempre partendo da sinistra andando verso destra.
Con semplici esempi si possono introdurre le operazioni di addizione (sottrazione) non usando ancora i numeri ma solo le immagini (adesso perfettamente uguali) e al posto dei simboli di addizione (+, −) adoperiamo le parole (aggiungo – tolgo o sinonimi).
L'uso delle tessere e figurine facilita il compito **(vedi fig.2, 3, 4 e 5**).

fig. 2

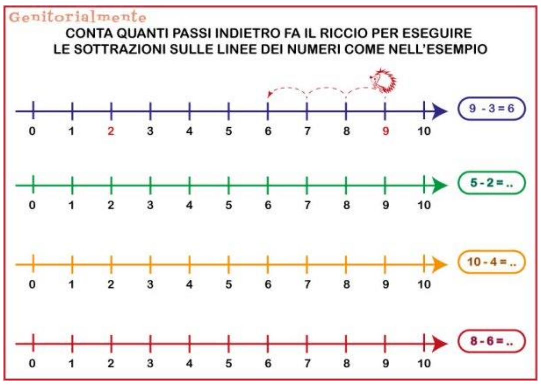
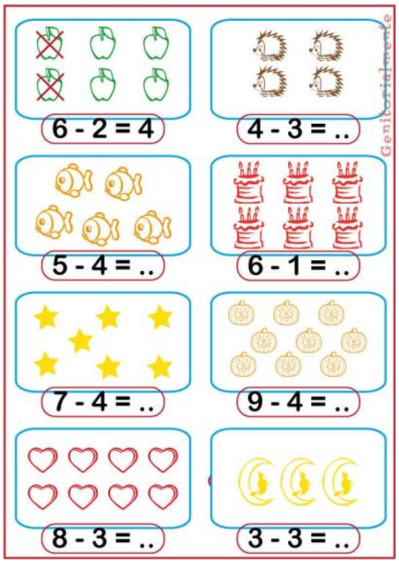


fig 3



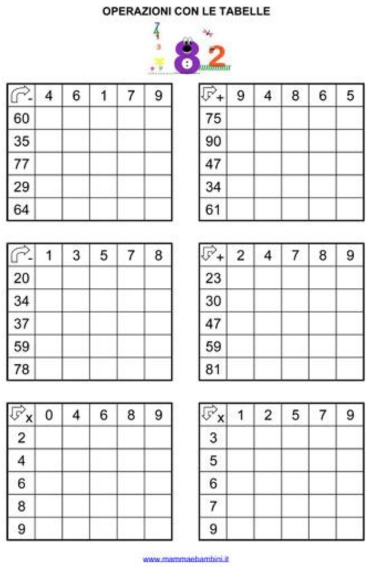


fig. 4

fig. 5

Proseguendo a piccoli passi, si introdurranno anche gli altri simboli di moltiplicazione e di divisione (×, ÷). Per il simbolo di divisione (÷) è utile ricordare che esso riassume i due modi di indicare le divisioni: i due puntini se i numeri sono scritti in orizzontale (8 **:** 4); una lineetta orizzontale o obliqua **(**/)o se i numeri sono scritti in verticale (le frazioni).

Già in seconda elementare si può iniziare ad usare la calcolatrice, mostrando loro che se digitiamo una frazione (per es. 1/5). la calcolatrice non mostra sul display la frazione ma il risultato (0,2). Man mano che procediamo con le classi terze, quarte e quinte, i numeri che intervengono nelle quattro operazioni aumentano nel numero di cifre e poi si iniziano anche ad utilizzare i numeri decimali (con la virgola).

Spesso la calcolatrice ha nella sua scheda elettronica già predisposto alcune operazioni automatiche (addizioni e moltiplicazioni ripetute). Se devo eseguire questa addizione: 13 + 13 + 13 + 13 basta digitare solo 13 seguito dal tasto + e senza indicare gli altri ×tasto, otterrò i risultati 26, 39, 52.

Naturalmente più semplicemente 52 si poteva ottenere facendo 13 × 4). Ottengo **tutti i multipli** di 13 (13 x 1; 13 × 2; 13 × 3 e 13 × 4).
Se invece devo eseguire la moltiplicazione con più termini non li chiamerò più moltiplicando e moltiplicatore ma semplicemente fattori.
Per quanto riguarda la prova del nove bisogna mettere in guardia i ragazzi che spesso non funziona perché si basa sulla somma delle cifre. Se calcolo 14 × 27 e sbaglio il calcolo scrivendo 738, la prova del nove non scopre l'errore. Infatti, 14 × 27 = 378.
Numerosi sono i giochi numerici che si trovano sui settimanali enigmistici e anche qui, l'insegnante deve fare una oculata scelta.
Ultimo consiglio: il testo di un problema di aritmetica deve essere chiaro, non deve date suggerimenti sull'operazione o operazioni necessarie per il suo svolgimento. (esempio: dirò: "devo distribuire tot caramelle a tutti gli alunni" e non "devo dividere queste…)
Spesso un semplice problema si presenta complicato perché abbiamo messo molti distrattori (dati abbondanti che servono a sviare l'attenzione dei ragazzi).

4. Scuola secondaria di I grado

Lo scopo di questi esercizi è quello di incuriosire i ragazzi con l'osservazione attenta di alcune tabelle che riportano i numeri primi da 2 a 100.000 e le potenze seconda, terza, quarta, quinta e sesta dei numeri da 1 a 1.000 e, nell'ultima colonna, le relative scomposizioni in fattori primi.
I ragazzi e non solo i ragazzi si preoccupano di trovare una formula che possa calcolare tutti i numeri primi.
Tra le varie formule presentate, io ho scelto questa:

$$6n \pm 1, n = (0, 1, 2, \dots)$$

Questa formula permette di trovare tutti i numeri primi maggiori di 3. In pratica, siccome 1 non è primo, partendo da 2 si elencano i numeri 2, 3, 4, 5, 6, …

Colonne					
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31
…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…

I numeri primi cercati si trovano a destra o a sinistra della colonna 5, dove sono elencati tutti i multipli di 6.

Questa formula, conosciuta da parecchio tempo, è stata da me utilizzata per spiegare la provenienza del numero 6. Sono arrivato alla conclusione che 6, per due motivi, è il "prediletto" dei numeri primi:

1. Perché è il prodotto dei primi due numeri primi (2 e 3);
2. Perché 6 è il primo numero "perfetto" e gode di due proprietà che solo lui ha

$$6 = 1 + 2 + 3 \text{ e } 6 = 1 \times 2 \times 3.$$

Coi numeri primi si possono fare tante osservazioni ed ogni Docente, insieme ai propri allievi, può scegliere tempi e argomenti funzionali alla sua attività educativa.
Per quanto riguarda, invece, le potenze, si può chiedere ai ragazzi di osservare attentamente la colonna 2 della tabella allegata (di cui sotto è pubblicato un estratto); si farà in modo di fargli scoprire le regolarità e le differenze.
L'osservazione attenta e guidata della tabella porterà alla scoperta di moltissime proprietà.

Potenze seconde terze quarte quinte dei numeri da 1 a 50

n	n^2	n^3	n^4	n^5	fatt. pr.
1	000 001	000 000 001	000 000 000 001	000 000 000 000 001	1
2	000 004	000 000 008	000 000 000 016	000 000 000 000 032	**2**
3	000 009	000 000 027	000 000 000 081	000 000 000 000 243	**3**
4	000 016	000 000 064	000 000 000 256	000 000 000 001 024	2^2
5	000 025	000 000 125	000 000 000 625	000 000 000 003 125	**5**
6	000 036	000 000 216	000 000 001 296	000 000 000 007 776	2.3
7	000 049	000 000 343	000 000 002 401	000 000 000 016 807	**7**
8	000 064	000 000 512	000 000 004 096	000 000 000 032 768	2^3
9	000 081	000 000 729	000 000 006 561	000 000 000 059 049	3^2
10	000 100	000 001 000	000 000 010 000	000 000 000 100 000	2.5
11	000 121	000 001 331	000 000 014 641	000 000 000 161 051	**11**
12	000 144	000 001 728	000 000 020 736	000 000 000 248 832	$2^2.3$
13	000 169	000 002 197	000 000 028 561	000 000 000 371 293	**13**
14	000 196	000 002 744	000 000 038 416	000 000 000 537 824	2.7
15	000 225	000 003 375	000 000 050 625	000 000 000 759 375	3.5
16	000 256	000 004 096	000 000 065 536	000 000 001 048 576	2^4
17	000 289	000 004 913	000 000 083 521	000 000 001 419 857	**17**
18	000 324	000 005 832	000 000 104 976	000 000 001 889 568	2.3^2
19	000 361	000 006 859	000 000 130 321	000 000 002 476 099	**19**
20	000 400	000 008 000	000 000 160 000	000 000 003 200 000	$2^2.5$
21	000 441	000 009 261	000 000 194 481	000 000 004 084 101	3.7
22	000 484	000 010 648	000 000 234 256	000 000 005 153 632	2.11
23	000 529	000 012 167	000 000 279 841	000 000 006 436 343	**23**
24	000 576	000 013 824	000 000 331 776	000 000 007 962 624	$2^3.3$
25	000 625	000 015 625	000 000 390 625	000 000 009 765 625	5^2
26	000 676	000 017 576	000 000 456 976	000 000 011 881 376	2.13
27	000 729	000 019 683	000 000 531 441	000 000 014 348 907	3^3
28	000 784	000 021 952	000 000 614 656	000 000 017 210 368	$2^2.7$
29	000 841	000 024 389	000 000 707 281	000 000 020 511 149	**29**
30	000 900	000 027 000	000 000 810 000	000 000 024 300 000	2.3.5
31	000 961	000 029 791	000 000 923 521	000 000 028 629 151	**31**
32	001 024	000 032 768	000 001 048 576	000 000 033 554 432	2^5
33	001 089	000 035 937	000 001 185 921	000 000 039 135 393	3.11
34	001 156	000 039 304	000 001 336 336	000 000 045 435 424	2.17
35	001 225	000 042 875	000 001 500 625	000 000 052 521 875	5.7
36	001 296	000 046 656	000 001 679 616	000 000 060 466 176	$2^2.3^2$
37	001 369	000 050 653	000 001 874 161	000 000 069 343 957	**37**
38	001 444	000 054 872	000 002 085 136	000 000 079 235 168	2.19
39	001 521	000 059 319	000 002 313 441	000 000 090 224 199	3.13
40	001 600	000 064 000	000 002 560 000	000 000 102 400 000	$2^3.5$
41	001 681	000 068 921	000 002 825 761	000 000 115 856 201	**41**
42	001 764	000 074 088	000 003 111 696	000 000 130 691 232	2.3.7
43	001 849	000 079 507	000 003 418 801	000 000 147 008 443	**43**
44	001 936	000 085 184	000 003 748 096	000 000 164 916 224	$2^2.11$
45	002 025	000 091 125	000 004 100 625	000 000 184 528 125	$3^2.5$
46	002 116	000 097 336	000 004 477 456	000 000 205 962 976	2.23
47	002 209	000 103 823	000 004 879 681	000 000 229 345 007	**47**
48	002 304	000 110 592	000 005 308 416	000 000 254 803 968	$2^4.3$
49	002 401	000 117 649	000 005 764 801	000 000 282 475 249	7^2
50	002 500	000 125 000	000 006 250 000	000 000 312 500 000	2.5^2

Potenze seconde terze quarte quinte dei numeri da 51 a 100

n	n^2	n^3	n^4	n^5	fatt. pr.
51	002 601	000 132 651	000 006 765 201	000 000 345 025 251	3.17
52	002 704	000 140 608	000 007 311 616	000 000 380 204 032	2^2.13
53	002 809	000 148 877	000 007 890 481	000 000 418 195 493	**53**
54	002 916	000 157 464	000 008 503 056	000 000 459 165 024	2.3^3
55	003 025	000 166 375	000 009 150 625	000 000 503 284 375	5.11
56	003 136	000 175 616	000 009 834 496	000 000 550 731 776	2^3.7
57	003 249	000 185 193	000 010 556 001	000 000 601 692 057	3.19
58	003 364	000 195 112	000 011 316 496	000 000 656 356 768	2.29
59	003 481	000 205 379	000 012 117 361	000 000 714 924 299	**59**
60	003 600	000 216 000	000 012 960 000	000 000 777 600 000	2^2.3.5
61	003 721	000 226 981	000 013 845 841	000 000 844 596 301	**61**
62	003 844	000 238 328	000 014 776 336	000 000 916 132 832	2.31
63	003 969	000 250 047	000 015 752 961	000 000 992 436 543	3^2.7
64	004 096	000 262 144	000 016 777 216	000 001 073 741 824	2^6
65	004 225	000 274 625	000 017 850 625	000 001 160 290 625	5.13
66	004 356	000 287 496	000 018 974 736	000 001 252 332 576	2.3.11
67	004 489	000 300 763	000 020 151 121	000 001 350 125 107	**67**
68	004 624	000 314 432	000 021 381 376	000 001 453 933 568	2^2.17
69	004 761	000 328 509	000 022 667 121	000 001 564 031 349	3.23
70	004 900	000 343 000	000 024 010 000	000 001 680 700 000	2.5.7
71	005 041	000 357 911	000 025 411 681	000 001 804 229 351	**71**
72	005 184	000 373 248	000 026 873 856	000 001 934 917 632	$2^3.3^2$
73	005 329	000 389 017	000 028 398 241	000 002 073 071 593	**73**
74	005 476	000 405 224	000 029 986 576	000 002 219 006 624	2.37
75	005 625	000 421 875	000 031 640 625	000 002 373 046 875	3.5^2
76	005 776	000 438 976	000 033 362 176	000 002 535 525 376	2^2.19
77	005 929	000 456 533	000 035 153 041	000 002 706 784 157	7.11
78	006 084	000 474 552	000 037 015 056	000 002 887 174 368	2.3.13
79	006 241	000 493 039	000 038 950 081	000 003 077 056 399	**79**
80	006 400	000 512 000	000 040 960 000	000 003 276 800 000	2^4.5
81	006 561	000 531 441	000 043 046 721	000 003 486 784 401	3^4
82	006 724	000 551 368	000 045 212 176	000 003 707 398 432	2.41
83	006 889	000 571 787	000 047 458 321	000 003 939 040 643	**83**
84	007 056	000 592 704	000 049 787 136	000 004 182 119 424	2^2.3.7
85	007 225	000 614 125	000 052 200 625	000 004 437 053 125	5.17
86	007 396	000 636 056	000 054 700 816	000 004 704 270 176	2.43
87	007 569	000 658 503	000 057 289 761	000 004 984 209 207	3.29
88	007 744	000 681 472	000 059 969 536	000 005 277 319 168	2^3.11
89	007 921	000 704 969	000 062 742 241	000 005 584 059 449	**89**
90	008 100	000 729 000	000 065 610 000	000 005 904 900 000	$2.3^2.5$
91	008 281	000 753 571	000 068 574 961	000 006 240 321 451	7.13
92	008 464	000 778 688	000 071 639 296	000 006 590 815 232	2^2.23
93	008 649	000 804 357	000 074 805 201	000 006 956 883 693	3.31
94	008 836	000 830 584	000 078 074 896	000 007 339 040 224	2.47
95	009 025	000 857 375	000 081 450 625	000 007 737 809 375	5.19
96	009 216	000 884 736	000 084 934 656	000 008 153 726 976	2^5.3
97	009 409	000 912 673	000 088 529 281	000 008 587 340 257	**97**
98	009 604	000 941 192	000 092 236 816	000 009 039 207 968	2.7^2
99	009 801	000 970 299	000 096 059 601	000 009 509 900 499	3^2.11
100	010 000	001 000 000	000 100 000 000	000 010 000 000 000	$2^2.5^2$

N. B. L'intera tabella (n da 1 a 1.000) è disponibile nei materiali forniti per le esercitazioni

Bibliografia

Bruno De Finetti (1967) Il saper vedere in matematica - Loescher Editore – Torino;

EAN: 9788820148010; ISBN: 8820148013; pagine: 72.

Bruno De Finetti (1959) Matematica logico intuitiva – Nozioni di matematiche complementari e di calcolo differenziale ed integrale – Edizioni Cremonese – Roma - EAN: 9788870833645; ISBN: 887083364X; pagine: 658.

Bruno De Finetti (2005) Matematica logico intuitiva – Nozioni di matematiche complementari e di calcolo differenziale ed integrale – Casa editrice Giuffrè – Roma - EAN: 9788814119507; ISBN: 8814119507; pagine: XXIII - 632.

Emma Castelnuovo - Geometria intuitiva per le scuole medie inferiori, Diversi Editori: Roma, Carabba, 1949; Firenze, La Nuova Italia, 1952; 1959.

Emma Castelnuovo (1962) - I numeri. Aritmetica pratica, Firenze, La Nuova Italia.

Emma Castelnuovo (1963) - Didattica matematica, Firenze, La Nuova Italia.

Emma Castelnuovo (1972) - Documenti di un'esposizione matematica. "Da bambini a uomini", Torino, Boringhieri.

Emma Castelnuovo (1977) – Mario Barra - Matematica nella realtà – Collana: Didattica. Proposte ed esperienze – Torino - Bollati Boringhieri - EAN: 9788833900827; ISBN: 8833900827; pagine: 291.

Emma Castelnuovo (2017) - Pentole, ombre, formiche. In viaggio con la matematica – UTET Università

Bruno d'Amore (a cura di) – Una Mostra matematica – come rendere operativi i nuovi programmi della scuola elementare – Giunti & Lisciani Editori – 1987 _ Teramo – ISBN 88-09-50010-5 pagine 230.

Bruno D'Amore – Ines Marazzani – Problemi e laboratori – Metodologie per l'apprendimento della matematica – Pitagora Bologna - 2011

ISBN-10: 8837118341; ISBN-13: 9788837118341 - Pagine: 176

Bruno Jannamorelli e Adelaide Strizzi (a cura di) - 3° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica – Sulmona 18- 19- 20 1prile 1997 – La ricerca in Didattica della Matematica: da ipotesi concrete ad esperienze didattiche – Edizioni quale vita – aprile 1997.

Sitografia

Elenco alcuni siti:

http://portalebambini.it/insegnanti/

http://portalebambini.it/frattage

http://www.macrolibrarsi.it

http://www.donnaclick.it

Bing Baking, Big Bunney's Colourful, videos Games for Kids, Girls – Baby Android (In inglese)

https:/www.youtube/watch?v = 0C0CIRr9UmM – [canzoni per bambini – impara i numeri, in cui i protagonisti sono animali (l'elefante che si dondolava, l'elefante con le ghette, la balena, i pulcini che fanno pio pio) oppure gli stessi bambini]

https://www.bing.com/videos
www.babymusic.it (canzoni con musica e testo divertenti)

https://www.youtube.com/watch?v=-8x4EyGOq04 (ci sono filastrocche belle, e cantate e musicate molto bene).

Spazio alla geometria

Diana Cipressi[1]

[1]Scuola Sec. 1° grado G. Mezzanotte, Chieti, Italia
Email: diana.cipressi@gmail.com

Sunto
Il tema della simmetria investe vari contesti quotidiani, anche non strettamente matematici. Ad esempio, la scrittura e la lettura di lettere e parole sono uno spunto di riflessione per formalizzare in ogni ordine di scuola concetti matematici rilevanti, con l'ausilio di materiali didattici di poco costo, come specchi e cartoncini.
Questo laboratorio didattico, progettato per una classe prima della scuola sec. di 1° grado, offre un'esperienza didattica trasferibile alla scuola Primaria; mette in risalto la padronanza di competenze in campo matematico, attese dall'alunno immaginato come apprendista guidato e incoraggiato dal suo maestro di "*Bottega*".
Lo spazio passa attraverso la percezione degli oggetti e la rappresentazione dei simboli e il linguaggio usato in un contesto naturale acquisisce una peculiarità disciplinare condivisa.

Parole Chiave: Specchio; simmetria assiale; lettere dell'alfabeto; varianti e invarianti.

1. Piano didattico

Competenze
- Riconosce e rappresenta forme geometriche del piano, relazioni e strutture che si trovano in natura o create dall'uomo
- Formula ipotesi, confrontandosi con il punto di vista degli altri, sostiene le proprie convinzioni, accetta di cambiare opinione riconoscendo un'argomentazione corretta
- Ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica

Obiettivi. L'alunno:
- Riconosce le proprietà invarianti della simmetria (forma e dimensioni, distanza dall'asse di simmetria, ampiezza degli angoli)
- Riconosce le proprietà varianti della simmetria (destra-sinistra, orario- antiorario)

- Sa trovare l’asse di simmetria di una lettera e di una parola
- Rappresenta l’immagine P’ di un punto P attraverso un asse di simmetria orizzontale, verticale o obliquo.
- Disegna figure simmetriche rispetto ad una retta

Metodologie

Il *Cooperative Learning* consente agli studenti di apprendere in piccoli gruppi, di aiutarsi reciprocamente e di acquisire atteggiamenti corresponsabili. Gli alunni si impegnano nella costruzione corresponsabile di un sapere condiviso.

La *didattica per problemi* promuove situazioni da analizzare grazie alla possibilità di maneggiare materiali strutturati, non con procedure meccaniche o mnemoniche ma con la curiosità di ricercare soluzioni non note.

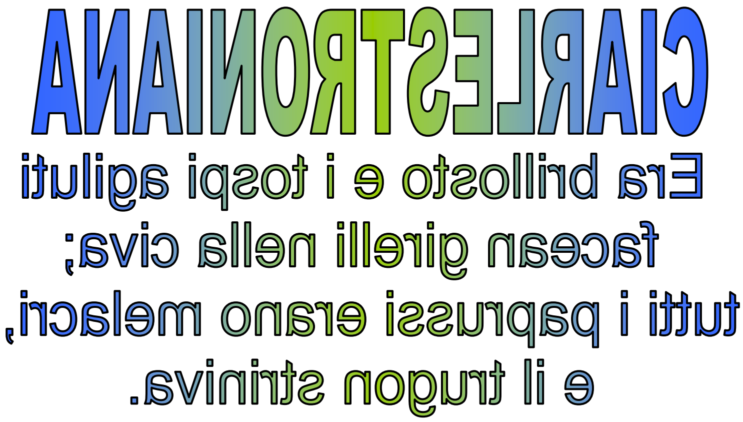
Attività

- Dal libro “*Through the looking-glass and what alice found there*” di Lewis Carroll
- Il gioco del mimo
- La geometria dell’alfabeto
- Dove sta l’immagine?
- Un messaggio allo specchio

2. Attraverso lo specchio

Dal libro “*Through the looking-glass and what alice found there*” di Lewis Carroll:

> Sul tavolo accanto ad Alice c’era in libro, mentre lei teneva d’occhio il Re Bianco, voltava le pagine per vedere se ci fosse qualche punto che potesse leggere “… perché è tutto in una lingua che non conosco” si disse. Era così.



> Ci si arrovellò per qualche tempo, ma da ultimo ebbe un’illuminazione.

“Ma certo! È un Libro dello Specchio! E se lo metto davanti ad uno specchio, le parole ridiventeranno normali”.

“Oh, mamma mia!” pensò Alice, alzandosi di scatto, “se non mi sbrigo, dovrò tornare dall’altra parte delle Specchio, prima di aver visto come è il resto della casa.”

- *Riuscite a leggere le parole?*
- *Come fanno a tornare normali le parole?*
- *Provate a riflettere la pagina del Libro di Alice allo specchio; riuscite a leggerla?*

3. Il gioco del mimo

Materiali: specchi rettangolari

A) Osservate davanti allo specchio la vostra immagine.

- *La forma che vedete nello specchio è uguale al vostro corpo?*
- *La vostra immagine nello specchio è dritta o capovolta?*
- *Quanto è alta vostra immagine nello specchio? Di più o meno rispetto alla statura?*
- *La vostra immagine nello specchio è più larga o più stretta?*

Discutete e annotate le osservazioni.

Le risposte non saranno suggerite né forzate.

La curiosità iniziale sarà invece uno stimolo verso la ricerca delle proprietà della riflessione.

Gli alunni inizieranno a valutare forma e dimensioni dell’immagine.

B) *Che cos’è che non va nelle vignette A, B e C?*

Fig. A

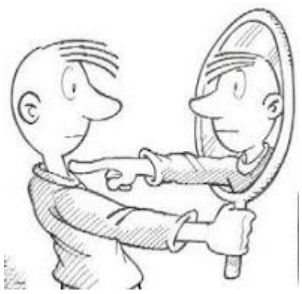


Fig. B

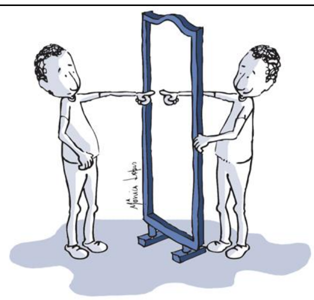
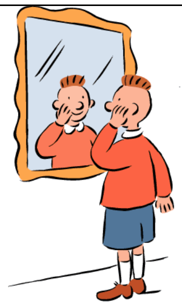


Fig. C

	- *Pinco-Panco alza la mano sinistra posandola sulla guancia sinistra. Anche il bambino riflesso nello specchio alza una mano. Quale?* - *La mano riflessa si posa sulla guancia destra o sinistra?* - *Verificate le risposte osservando i vostri movimenti riflessi attraverso lo specchio.*

C) Riunitevi a coppie e sistematevi in piedi uno di fronte all'altro.

Il gioco consiste nel ripetere i movimenti di un componente della coppia che ha dato il comando (ad es. il movimento di una mano) fingendo di essere l'immagine riflessa attraverso uno specchio.

- *Muovete una mano alla stessa distanza dallo specchio. Cosa deve fare l'immagine nello specchio?*
- *Muovere una mano spingendola verso lo specchio. Cosa farà l'immagine dello specchio?*
- *Annotate i movimenti in tabella:*

Movimento della mano	*Movimento dell'immagine riflessa*	*Schema grafico*	*C'è stato un cambiamento?*
Parallelo allo specchio dal basso verso l'alto	Parallelo allo specchio dal basso verso l'alto	↑ ↑	No
Parallelo allo specchio dall'alto verso il basso			
Perpendicolare allo specchio e verso di esso			
Perpendicolare allo specchio verso la persona			
Da destra verso sinistra			
In senso orario			

Gli alunni effettueranno diversi movimenti, cambiando la direzione e il verso (movimenti della mano paralleli, perpendicolari o obliqui allo specchio). Sarà un buon inizio per individuare gli *invarianti*, cioè quelle proprietà che non subiscono cambiamenti attraverso lo specchio.

Gli alunni discutono i risultati delle osservazioni e riassumono le proprietà invarianti o varianti:

Relazione	*Invariante*	*Variante*
È alto – è basso	X	
È vicino – è lontano	X	
È a destra – è a sinistra		X
È in senso orario		X

Concluderemo che la relazione destra-sinistra subisce una variazione ma non le relazioni di alto-basso e di vicino-lontano.

4. La geometria dell'alfabeto.

La domanda è: "*Quanta simmetria ha una lettera o una parola*?"

Materiali: Specchi rettangolari, lettere maiuscole su cartoncino.
Sul banco lo specchio sarà posto in posizione verticale e i cartoncini saranno riflessi parallelamente o perpendicolarmente al piano dello specchio.

A) Classificazione delle lettere in base al numero di assi di simmetria.

- *Notate che allo specchio alcune lettere sono leggibili e altre no?*
- *Potete tagliare a metà la lettera Y. In che modo?*
- *Disponete "mezza lettera" affianco allo specchio, appoggiando la piega sul bordo dello specchio. Che cosa notate?*
- *Potete ricomporre allo specchio la lettera C con una sua metà?*
- *È possibile con la lettera F?*

Usate lo specchio e classificate tutte le lettere in base alla loro simmetria:

n° assi di simmetria		***Lettere dell'alfabeto***									
0											
1	verticale										
	orizzontale										
2											

Ecco come dividere a metà la lettera Y e la lettera C:

Riflessione di metà lettera Y

Riflessione di metà lettera C

Le lettere dell'alfabeto (carattere Aharoni) sono raggruppati in base al numero di assi di simmetria:
Nessun asse di simmetria - F, G, L, N, P, Q, R, S, J, Z
1 asse di simmetria verticale - A, M, T, U, V, W, Y
1 asse di simmetria orizzontale - B, C, D, E, K
2 assi di simmetria - H, I, O, X.
La classificazione delle lettere varia rispetto al carattere usato.

B) Classificazione delle parole in base agli assi di simmetria.

- *Disponete alcune parole, davanti allo specchio, cambiandone l'orientamento. Che parola leggete nello specchio?*
- *Provate con le parole OTTO, ABC, ANNA, MATTO.*
- *Potete leggere allo specchio una parola formata da lettere simmetriche?*

Specchio verticale	OTTO ?	ABC ?
Specchio orizzontale	OTTO ?	ABC ?

- *La forma delle lettere riflesse nello specchio è cambiata?*
- *Le dimensioni delle lettere riflesse sono cambiate?*
- *La lettera B sta tra A e C. Nello specchio la posizione di B resta invariata?*

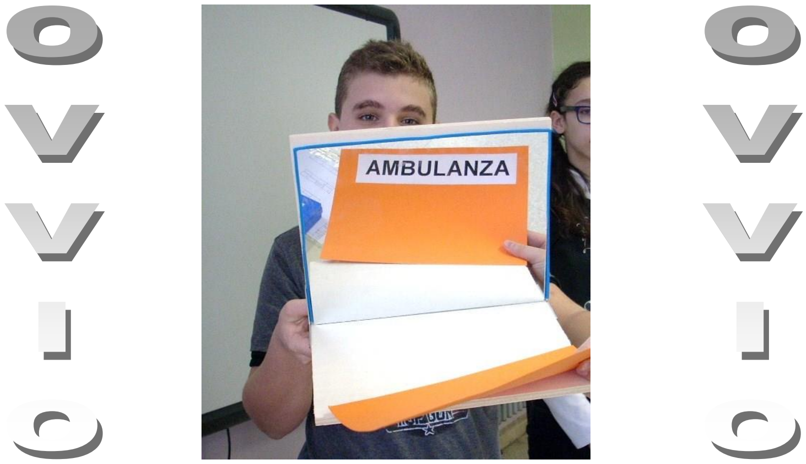
Si tratta di scoprire quando una parola può essere letta immutata allo specchio (ad esempio se le sue lettere hanno un'asse di simmetria verticale nel caso di OTTO e AMA). Gli alunni sperimentano attraverso lo specchio la lettura di altre parole.

Dal sito: http://www.matematita.it/materiale/ prendiamo uno spunto per alcune parole da leggere allo specchio, con significato uguale oppure diverso:

 Specchio parallelo alla parola	 Specchio perpendicolare alla parola	 Specchio perpendicolare alla parola

Una parola di specchio particolare è:

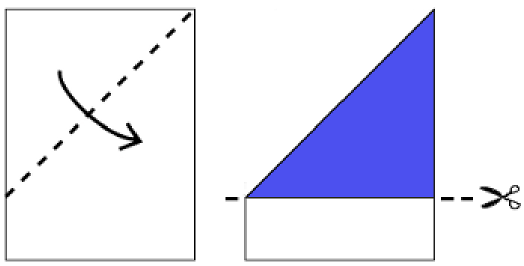
AMBULANZA



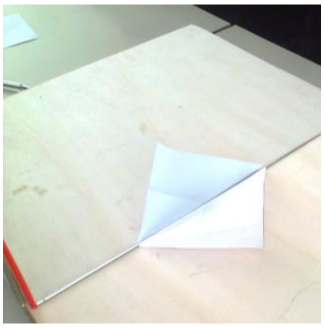
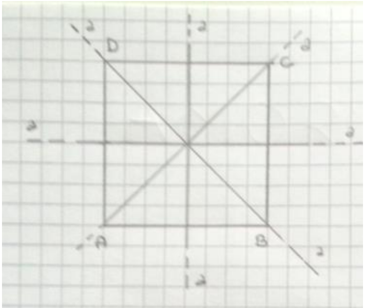
L’oggetto e la sua immagine si dicono *inversamente uguali*: sono uguali ma con la destra scambiata con la sinistra.
Per questo motivo la parola AMBULANZA è scritta al contrario: in modo che si legga correttamente quando riflessa dallo specchietto retrovisore.

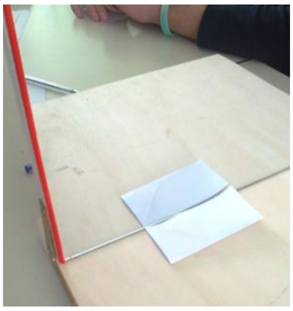
C) L’asse di simmetria

L’asse di simmetria di una figura è la retta che la divide in due parti uguali sovrapponibili. Piegando la figura lungo l’asse di simmetria tutti i punti coincidono perfettamente.
Sovrapponete il lato superiore di un foglio formato A4 sul lato destro del foglio stesso. Piegate il foglio e ritagliate la parte sporgente e riaprite il foglio. Ecco un quadrato diviso da una diagonale (asse di simmetria).

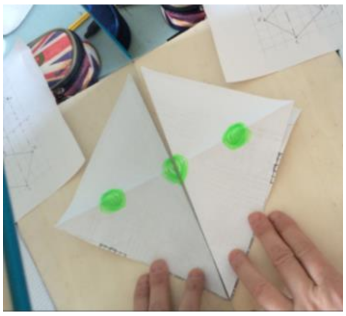
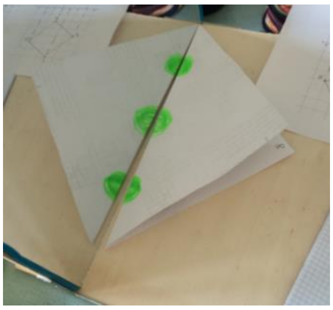
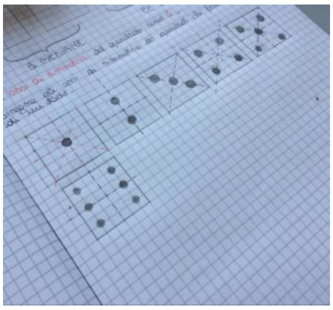


- *Cercate con la piegatura del foglio gli assi di simmetria del quadrato.*
- *Appoggiate la metà del quadrato affianco allo specchio e verificate se la piegatura è asse di simmetria.*

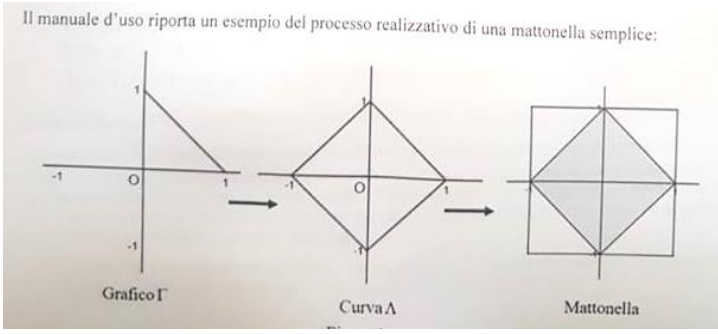



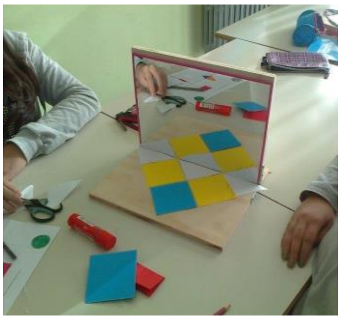


I quattro assi di simmetria del quadrato

Gli assi di simmetria delle facce di un dado

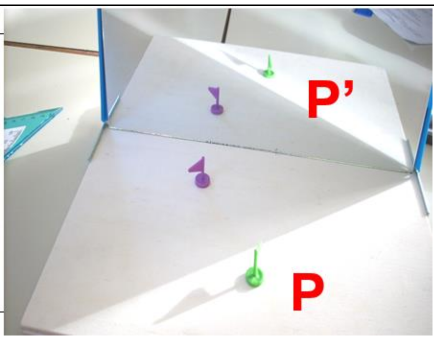

Il manuale d'uso riporta un esempio del processo realizzativo di una mattonella semplice:



Maturità scientifica 207-18

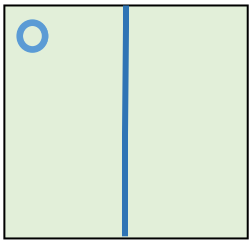
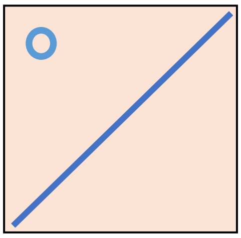
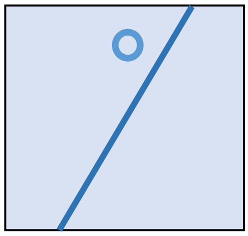
5. Dove sta l'immagine?

Si tratta di individuare un legame tra un oggetto e la sua immagine. Se una bandierina è posta in un punto P, quale sarà la posizione P' della sua immagine?
Materiali: specchio, bandierine (oppure oggetti puntiformi); fogli quadrati; righello.

	- *Avvicinate la bandierina P allo specchio; la distanza tra lo specchio e l'immagine P' è aumentata o diminuita?* - *Allontanate la bandierina P dallo specchio: la distanza tra lo specchio e l'immagine P' è aumentata o diminuita?*

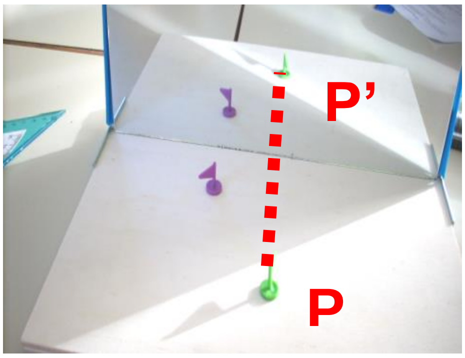
Non è immediato formalizzare ciò che viene osservato. Gli alunni focalizzano l'attenzione su alcuni aspetti del segmento PP', alcuni sulla sua lunghezza, altri sulla perpendicolarità rispetto allo specchio. La piegatura della carta ci può dare una mano:

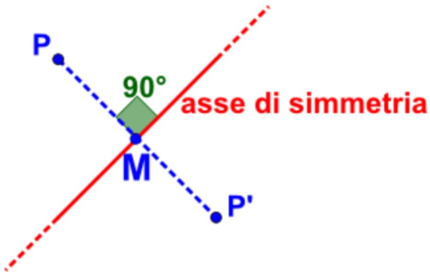
- *Piegate i fogli quadrati lungo la linea tracciata in figura.*
- *Bucate sul pallino P e fate un piccolo segno per collocare il simmetrico P'*
- *Riaprite il foglio e misurate la distanza tra il pallino e il segno.*

			
Distanza PP' (pallino-segno)	*…… cm*	*…… cm*	*…… cm*
Distanza PM (pallino-specchio)	*…… cm*	*…… cm*	*…… cm*

Dopo una discussione su come sono state eseguite le misurazioni, la classe potrà condividere la definizione di simmetrico.
Per disegnare il punto P' simmetrico di P si procede così:

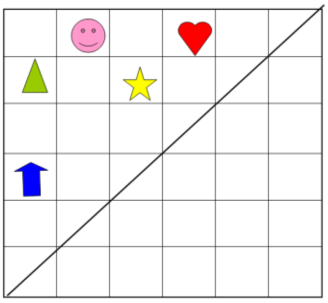
a) *Dal punto P si traccia la retta perpendicolare all'asse di simmetria.*
b) *Si indica con M il punto di intersezione tra le due rette.*
c) *Sulla retta PM si prende il punto P' in modo che PM sia uguale a MP'.*

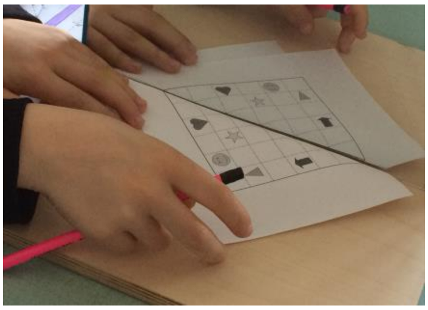




Gli alunni saranno messi alla prova, con la riflessione di griglie quadrettate:

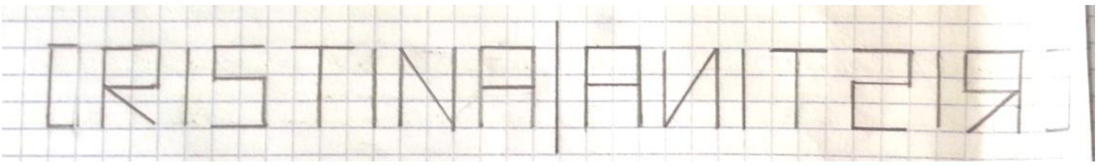
- *Disegnate sul foglio quadrettato le figure simmetriche delle cinque immagini colorate rispetto alla diagonale del foglio.*
- *Piegate il foglio sulla diagonale e verificate con lo specchio se il disegno è corretto.*
- *Quali difficoltà avete incontrato?*





6. Un messaggio allo specchio

- *Su un foglio a quadretti scrivete lettere o parole e disegnate la lettera simmetrica o la parola simmetrica.*
- *Verificate con lo specchio se avete scritto correttamente.*



- *Inviate un messaggio segreto ad un compagno; aspettate la sua risposta "segreta" e decodificate il messaggio ricevuto.*

Sitografia

Matematita http://specchi.mat.unimi.it/matematica/specchi/SCHEDAA_19_12_08.pdf

TuttoScuola
https://www.tuttoscuola.com/matematica-e-apprendimento-riflettere-la-realta-in-uno-specchio/

La camera degli specchi
https://www.youtube.com/watch?v=jf9Dcdz5GiE

Euclide. Il giornale di matematica dei giovani. N.19
8.3a – Chieti Scuola sec di 1° grado G. Mezzanotte Cipressi Diana
http://www.euclide-scuola.org/

Geometria sul geopiano: attività laboratoriali in compagnia di Euclide

Bruno Iannamorelli[1]

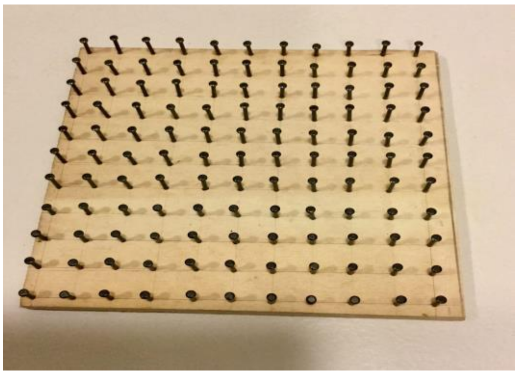
[1]Università degli Studi de L’Aquila, Dipartimento di Scienze Umane,
Viale Nizza, 2, 67100, L’Aquila, Italy
Email: jannab@tiscali.it

Sunto
Il geopiano viene utilizzato per calcolare le aree di figure insolite e per scoprire gradualmente il teorema di Pick con attività laboratoriali. Da un problema di quadratura di un rettangolo di stoffa si ha la possibilità di rivalutare un teorema di Euclide sempre con attività laboratoriali. Si cerca di evitare di imporre procedure con le regole stimolando invece i … perché.

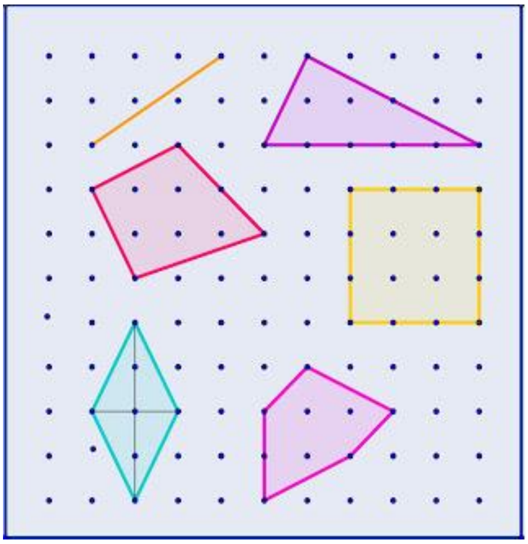
Parole chiave: geopiano, area di una superficie, teorema di Pick, quadratura di un rettangolo, secondo teorema di Euclide.

1. La geometria sul geopiano

Il geopiano è uno stumento didattico introdotto nelle scuole dal matematico egiziano Caleb Gattegno nel 1950 e abbastanza diffuso nella Scuola Primaria italiana. Può essere realizzato facilmente disegnando una griglia con maglie quadrate (3cm x 3cm) su una tavoletta di multistrato (40cm x 40cm o anche altre dimensioni) e piantando un chiodino a testa tonda su ogni nodo della griglia.



Con elastici colorati fatti passare intorno ai chiodini vengono rappresentate tante figure geometriche come rettangoli o triangoli, ma anche inusuali concave o convesse. Esistono alcune limitazioni: non si possono rappresentare cerchi o triangoli equilateri e altri poligoni regolari.



Sul geopiano ovviamente l'unità di area è un quadretto della griglia e, quindi, scoprire il modello aritmetico per calcolare l'area di un rettangolo è semplicissimo. Risulta semplice anche il passaggio al triangolo rettangolo e una bella attività laboratoriale è la scoperta del modello per calcolare l'area di un triangolo qualunque. Fatto questo si hanno tutti gli strumenti per calcolare l'area di una figura qualsiasi contornata da un elastico sul geopiano.

2. Avvio alla scoperta del teorema di Pick

Un'attività laboratoriale interessante consiste nel cercare una relazione tra l'area di una figura rappresentata sul geopiano e il numero di chiodi che si trovano all'interno o sul contorno di essa. Si comincia con figure rettangolari di altezza unitaria, si raccolgono le ipotesi dei bambini e poi si aumenta l'altezza dei rettangoli modificando l'ipotesi precedente.
Si compila una tabella riportando sulla prima colonna l'area del rettangolo, sulla seconda il numero di chiodi interni al rettangolo, sulla terza il numero di chiodi sul contorno e sulla quarta una formula che esprime l'area in funzione del numero di chiodi. La formula va discussa e modificata fino a quando se ne trova una che soddisfa tutti i casi presi in considerazione.
Non si ha la pretesa di aver scoperto il teorema di Pick con questa attività, ma si tratta di

una bella scoperta argomentata, sicuramente utile a stimolare la fantasia e la curiosità dei bambini.

Area	Chiodi interni	Chiodi sul contorno	Formula

La formula appena trovata può essere testata con figure più complicate del rettangolo e si scopre che funziona per qualunque figura rappresentata sul geopiano, purché non abbia buchi al suo interno (deve essere semplicemente connessa).
La soddisfazione dei bambini è enorme se confrontano il tempo impiegato a trovare l'area di una superficie applicando la formula di Pick con quello impiegato prima considerando la figura scomposta in rettangoli e triangoli.
Nella Scuola Secondaria di primo grado si può completare l'argomentazione del teorema di Pick partendo da un rettangolo e modificandolo con semplici spostamenti dell'elastico che lo contorna. Nelle figure che si ottengono cambia il numero di chiodi, si modifica la formula, ma l'area cambia allo stesso modo (Barra, Castelnuovo, 1976).

3. Un problema… di stoffa

Marta è una brava casalinga assillata dalla preoccupazione di risparmiare denaro per arrivare a fine mese. Una mattina, al mercato rionale, è attratta da un venditore di stoffe che offre a buon prezzo spezzoni di tessuti per tovaglie.
"Forse ho trovato la soluzione che cercavo per ricoprire il tavolo della taverna con una bella tovaglia!", pensa fulmineamente Marta e acquista il pezzo di tessuto che le piace di più.
Appena rientrata in casa, stende il tessuto sul tavolo della taverna ma… il tavolo è un quadrato 3m x 3m mentre il tessuto è un rettangolo 2m x 5m.
Marta si rende conto che il tessuto è più che sufficiente per ricoprire il tavolo, ma come bisogna tagliarlo e ricucirlo utilizzandolo interamente, senza buttarne via nemmeno un pezzettino? Inoltre è necessario che il numero di tagli sia il più piccolo possibile, in modo da economizzare il tempo per effettuare le cuciture.

Dopo qualche notte insonne, Marta trova la soluzione ottimale: con tre tagli ottiene cinque pezzi che, opportunamente accostati, formano un quadrato (Jannamorelli, 2013).

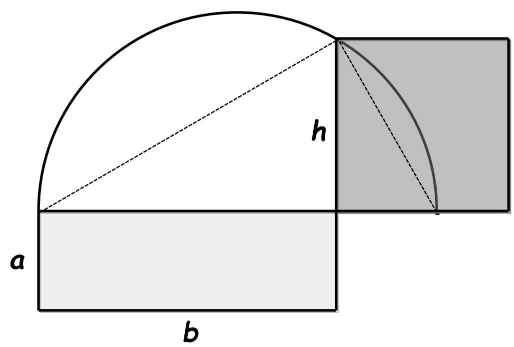
4. Ancora un problema

Marta racconta alla sua amica Carla la soluzione trovata per trasformare un rettangolo in un quadrato equivalente ad esso e, per puro caso, anche Carla da tempo vuole ricoprire un tavolo quadrato 4m x 4m. Passa qualche giorno e Carla chiede aiuto all'amica per quadrare un tessuto rettangolare 3m x 6m acquistato al mercato dal solito venditore.
Questa volta il problema si presenta più difficile e la soluzione di Marta fallisce.

Però Nicòl, la nipotina di Marta trova un'altra soluzione sempre con tre tagli….(Jannamorelli, 2013).

5. Il problema della quadratura di un rettangolo

Ancora una volta è Nicòl che risolve il problema di "quadrare" un rettangolo rivolgendosi a nonno Beppe, un professore di matematica in pensione.
"Se il rettangolo ha dimensioni a, b allora il quadrato ad esso equivalente ha il lato $h = \sqrt{ab}$ ". Questa è la conclusione della spiegazione di nonno Beppe, accompagnata da una figura che richiama a Nicòl il secondo teorema di Euclide. Dopo aver chiesto conferma al nonno se la figura da lui disegnata è proprio quella vista sul libro di Geometria, la ragazza esclama con forza: "Finalmente ho capito a cosa serve il secondo teorema di Euclide! Serve a quadrare un rettangolo" (Jannamorelli, 2010).

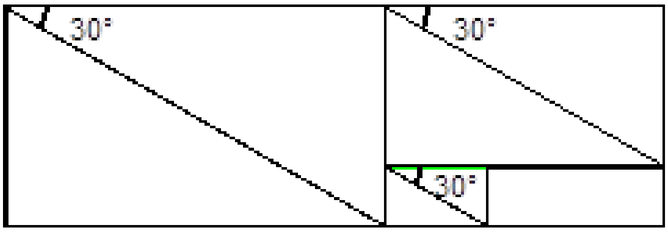


La soluzione trovata da Nicòl è applicabile a tutti i rettangoli di dimensioni a, b, con b=$2a$. Il quadrato equivalente al rettangolo ha il lato $l = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a \cdot 2a} = a\sqrt{2}$ come previsto da Euclide.

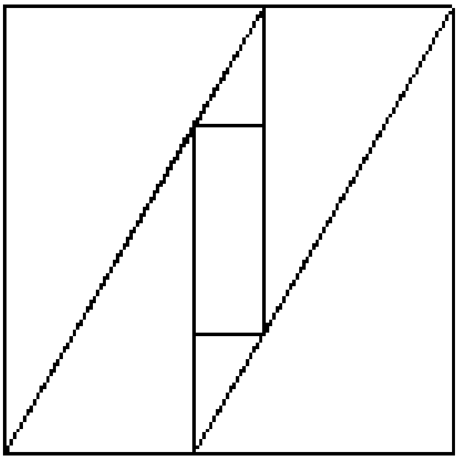
Il quadrato ottenuto con i tre tagli di Marta ha il lato $l = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10}$, sempre in accordo con il teorema di Euclide.

6. La Geometria non risolve tutto … però aiuta!

Quando sembra tutto risolto e in piazza non si parla più di quadrare rettangoli di stoffa, una mattina Francesca compra un pezzo di stoffa 30cm x 90cm per coprire un tavolo quadrato di lato 50cm. Ricordando la lezione del nonno di Nicòl, Francesca e le sue amiche sanno che il quadrato equivalente al rettangolo di stoffa deve avere il lato $l = \sqrt{90 \cdot 30} = 30\sqrt{3}$. Ben presto scoprono che, in questo caso, non si possono applicare né i tagli di Marta né quelli di Nicòl. Lo sconforto assale le sarte perché Euclide non suggerisce loro la soluzione. “Ho capito – esclama Nicòl – il teorema di Euclide ci dice come deve essere lungo il lato del quadrato, ma non risolve il problema pratico della realizzazione del quadrato”. “La geometria è solo teorica – rincara Marta – non risolve i problemi pratici!”.
Dopo svariati tentativi andati a vuoto, Nicòl si rivolge nuovamente a nonno Beppe il quale fornisce una soluzione con sei tagli.



Ecco il quadrato di lato $l = 30\sqrt{3}$



Le amiche di Nicòl si convincono che con la geometria è possibile risolvere problemi pratici diversi da quegli esercizi scolastici contrabbandati per problemi, ma bisogna conoscere gli strumenti di questa nobile disciplina. La soluzione trovata da nonno Beppe è stata facilitata dal secondo teorema di Euclide che gli ha fornito la lunghezza del lato del quadrato, ma poi bisogna saper costruire quel lato come altezza di un triangolo equilatero di lato 60.
"La soluzione di nonno Beppe è un Tangram a rovescio. Non ho i sette pezzi per ricostruire il quadrato come nel Tangram, ma devo ritagliare dal rettangolo i pezzi necessari a costruire un quadrato. È molto più interessante! Altro che i problemi sull'applicazione dei teoremi di Euclide che devo risolvere a scuola…"

Bibliografia

Barra M., Castelnuovo E., (1976), Matematica nella realtà. Torino: Boringhieri.

Jannamorelli B., (2010), Abbasso la matematica: regole e formule addio! Torre de'Nolfi: Qualevita

Jannamorelli B., (2013), Al mercato con Euclide, *Bollettino dei docenti di matematica*, Canton Ticino, Svizzera. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*. Feb. 2014. Paderno del Grappa.

www.lumacamens.it

CURRICULA BREVI DEI FORMATORI

FERDINANDO CASOLARO

Docente di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Architettura dell'Università "Federico II" di Napoli e presso il Dipartimento D.E.M.M. dell'Università del Sannio, è Presidente della sezione Mathesis di Napoli. Già professore di Matematica nella Scuola Secondaria di secondo grado e, dal 1988/89 in contemporanea docente a contratto presso varie Università. Autore di 93 pubblicazioni scientifiche e vari libri.
Editorial Board (Comitato Editoriale/Scientifico) e Scientific Coordinator of the student section (Coordinatore Scientifico della sezione studenti) della Rivista Scientifica Science&Philosophy. I suoi interessi di ricerca, riguardano questioni legate alle geometrie non euclidee, con particolare riferimento a modelli utilizzati per la Relatività Generale, alle geometrie finite con relativi gruppi di trasformazioni ed a tutte le questioni legate alla presentazione dell'Analisi Matematica attraverso gli aspetti grafici.

ANGELA CHIEFARI

Docente di scuola primaria dal 1986. Insegna presso il Convitto Nazionale "Pietro Giannone" di Benevento. Ha una pluriennale esperienza nella didattica della matematica, dell'informatica e sulla didattica innovativa. Ha partecipato a numerosi progetti di recupero e potenziamento di matematica, informatica, coding e robotica per alunni e docenti della scuola primaria. Fa parte del Team Innovazione e ha gestito per diversi anni il giornale telematico "Gioia di creare" e il sito dell'ex Istituto Comprensivo San Filippo di Benevento.
È stata relatrice al corso di formazione "Insegnare la matematica elementare a partire dall'esperienza" presso il Dipartimento DEMM dell'Università del Sannio. Ha presentato la relazione "La matematica della natura - la natura della matematica. I conigli di Fibonacci e la Divina proporzione" e "Logica, creatività e coding: l'arte della matematica e la matematica nell'arte" realizzato con gli alunni della sua scuola nell'ambito della manifestazione "Studenti in cattedra, docenti nei banchi", organizzata dalla sez. Mathesis di Castellammare di Stabia – Premio A. Morelli. È iscritta alla sez. Mathesis di Napoli.

DIANA CIPRESSI

Laureata in Matematica nel 1992 presso l'Università degli Studi di Milano, è docente di matematica e scienze nella scuola Sec. di 1° grado "G. Mezzanotte" di Chieti.
È autrice di Unità di Apprendimento (rivista "Scuola e didattica"; siti Didatticare e Tuttoscuola). Ha partecipato come relatore al Convegno Mathesis "La matematica nel

primo ciclo” di Chieti, al Convegno “Incontri con la matematica” di Castel San Pietro Terme, e altri. Ha ricevuto un premio nel Concorso Nazionale 2016 “Cesare Cancellieri” per la Didattica della matematica.

LUCIANA DELLI ROCILI

Luciana Delli Rocili è docente di Scuola Primaria dal 1978, di ruolo dal 1982. Da circa 10 anni collabora con il gruppo di ricerca coordinato dal prof. Antonio Maturo per la didattica della matematica. Autrice di 4 articoli su riviste scientifiche, 5 articoli su libri.
Ha presentato vari lavori a Convegni nazionali e internazionali ed è stata docente di Corsi Estivi per la didattica della Matematica nel primo ciclo.

ANNA MARIA DI POCCIO

Laureata in sociologia con una tesi in Statistica Sociale presso l'Università degli studi "G. D'Annunzio" di Chieti — Pescara. È illustratrice di libri per bambini e autrice di racconti e fiabe matematiche, conduce studi sull'uso delle storie e narrazioni nella didattica.
Ha partecipato a seminari, convegni, eventi scientifici di formazione, nazionali e internazionali sul tema "La Matematica nel primo ciclo: aspetti didattici, sociologici ed interdisciplinari". Ha pubblicato nel 2016 un libro illustrato dal titolo: "Numeri in fabula" — Le probabili avventure nel paese di Matelandia.
Negli ultimi anni è stata relatrice in numerosi eventi scientifici di formazione e convegni sulla didattica della matematica nel primo ciclo d'istruzione, sulla possibilità di utilizzare il contesto narrativo come modalità complementare significativa per migliorare l'apprendimento.
È impegnata nella ricerca di percorsi capaci di fornire contesti significativi e coinvolgenti per i discenti. È interessata a capire come le storie raccontate o lette possano favorire un apprendimento cognitivo e come gli ambienti di apprendimento narrativi possano risultare motivanti e stimolanti. Come pure è attenta a capire le ragioni che stanno dietro la costruzione dei significati. Su questi temi è interessata a comprendere meglio le potenzialità della narrativa e il legame tra emozioni, cognizione e motivazione intrinseca.

BRUNO IANNAMORELLI

Bruno Iannamorelli è docente a contratto di Didattica della Matematica presso il Dipartimento di Scienze Umane, corso di laurea in Scienze della Formazione Primaria dell’Università dell’Aquila. Già professore di Matematica e Fisica nei licei della provincia dell’Aquila. Presidente della Sezione Mathesis di Sulmona dal 1986 al 2002. Autore di diversi articoli e libri di divulgazione scientifica. I suoi interessi di ricerca riguardano la Didattica della Matematica, in particolare l'utilizzo della storia di questa disciplina per facilitarne l'apprendimento.

MARIO INNOCENZO MANDRONE

Laureato in Fisica (110/110), indirizzo cibernetico - informatico, presso l'Università degli Studi Federico II di Napoli. Docente di ruolo di Matematica e Fisica negli Istituti di Istruzione Superiore, in possesso delle abilitazioni in Matematica, Fisica, Fisica e laboratorio, Matematica e Fisica, Matematica Applicata. Docente a contratto per l'insegnamento della Fisica presso il Dipartimento di Scienze e Tecnologie e per Esercitazioni di Analisi Matematica, Dipartimento di Ingegneria dell'Università del Sannio. Ha collaborato con l'Università "G. D'Annunzio" di Chieti- Pescara, Facoltà di Architettura. Ha svolto attività di docenza nell'ambito dei progetti Ocse - Pisa di ricerca - azione per la valutazione degli apprendimenti. Relatore su tematiche di fisica moderna e contemporanea, di didattica, storia della matematica e di teoria delle decisioni in diversi convegni nazionali ed internazionali. Docente esperto nei corsi P.O.N. per matematica e fisica e nei corsi di preparazione per le prove Invalsi.
Ha pubblicato su riviste italiane e straniere (Ratio Mathematica; Science & Philosophy). È stato Presidente della sezione Mathesis di Benevento. Ha pubblicato recentemente (2017) il testo: "La terza cultura ed oltre. Questioni di metodo e di linguaggio. Riflessioni, considerazioni e divagazioni su questioni di matematica e fisica da un punto di vista storico ed epistemologico". È socio dell'Accademia Piceno - Aprutina dei Velati fondata nel 1598. È componente del comitato scientifico "Olimpiadi della Matematica- Premio A. Morelli", istituito dalla sez. Mathesis di Castellammare di Stabia.

FABIO MANUPPELLA

Laureato in Informatica Applicata presso l'Università degli Studi "Carlo Bo" di Urbino, da oltre 10 anni lavora come consulente informatico nel settore dell'Information Technology. Esperto nella gestione di piattaforme e-learning, progetta e realizza Learning Objects destinati alla pubblicazione sul Web e alla realizzazione di lezioni interattive compatibili con qualsiasi LIM. Installa e gestisce Siti Web per privati e Pubbliche Amministrazioni. Particolarmente esperto nelle problematiche dei Siti Scolastici è anche rappresentante regionale per l'Abruzzo della Comunità di pratica "Porte Aperte sul Web".
Si occupa di editoria 2.0: è responsabile della progettazione grafica e dell'impaginazione delle Riviste scientifiche "Housing Policies and Urban Economics" (HoPUE), "Ratio Mathematica" e "Science & Philosophy", edite dall'Accademia Piceno Aprutina dei Velati. Progetta e realizza anche e-book in formato epub e similari, compatibili con i vari dispositivi disponibili sul mercato. Tra i suoi interessi rientra la

Formazione a tutti i livelli, sia in presenza sia online su piattaforme e-learning di ultima generazione.
Particolare impegno ha avuto in interventi effettuati sugli studenti per veicolare i concetti relativi alle attività di Coding e Pensiero Computazionale, con progettazione e realizzazione di giochi interattivi e progetti multimediali.
È operatore culturale del Comune di Pescara e ultimamente è stato formatore nell'ambito dei progetti PON della Regione Abruzzo, con ricaduta su studenti delle scuole di ogni ordine e grado, docenti, animatori digitali, assistenti tecnici e amministrativi. Sperimentatore e relatore in vari convegni relativi alla Matematica e all'Informatica, organizzati sia dall'APAV che dalle Sezioni Mathesis di Pescara e di Napoli. Iscritto all'Albo Regionale dei Formatori PNSD dell'USR Abruzzo.

ANTONIO MATURO

Attualmente docente di Matematica presso il Dipartimento di Architettura dell'Università di Chieti - Pescara. Presidente della Mathesis di Pescara e vicepresidente dell'Accademia Piceno - Aprutina dei Velati. Già professore ordinario di Metodi Matematici per l'Economia e Direttore del Dipartimento di Scienze Sociali.
Autore di circa 170 pubblicazioni scientifiche e vari libri scientifici e didattici. Chief Editor delle riviste Ratio Mathematica fino al 2017, Science & Philosophy, Ratio Sociologica, Journal of Social Housing. Associate editor di varie riviste italiane e straniere.
I suoi interessi di ricerca riguardano soprattutto i modelli decisionali in condizioni di incertezza, la probabilità soggettiva, la logica fuzzy e la didattica della matematica.

FIORELLA PAONE

Dottoressa di Ricerca in Sociologia, specializzata sui temi dell'inclusione scolastica, l'educazione multi-modale e la didattica ludica (Ud'A). È, inoltre, specializzata in mediazione sociale e familiare (AIMEF) e Sociologia Clinica (UNITE).
Da circa 15 anni lavora in ambito scolastico in progetti di prevenzione della dispersione scolastica. In questo campo, si è occupata anche di formazione dei docenti con approfondimenti sulla didattica ludica, la pedagogia teatrale e la promozione della lettura (in collaborazione con il Programma nazionale Nati per Leggere). Attualmente è vincitrice di una borsa post-dottorato sui temi della pedagogia scolastica presso il Corso di Servizio Sociale dell'Università G. d'Annunzio di Chieti ed ha pubblicato numerosi saggi e articoli scientifici a livello nazionale (Franco Angeli ed.) e internazionale (Springer) sui temi dell'inclusione scolastica e dell'utilizzo dei linguaggi espressivi nella didattica ludica e multi-modale.

FRANCA ROSSETTI

Laureata in Economia e Commercio, indirizzo economico-politico presso l'Università Bocconi, Milano. Docente di ruolo di Matematica Applicata fino al 31 agosto 2010 presso ITIS Hensemberger di Monza.
Dal settembre 2010 ricopre il ruolo di formatore, per l'area tecnica e scientifica in occasione di corsi di aggiornamento per docenti della scuola primaria e secondaria di primo grado e in occasione di convegni in qualità di relatore su tematiche inerenti la didattica. Docente di corsi intensivi su tematiche di matematica applicata nei Campus estivi o invernali, organizzati dalla scuola di formazione scientifica Luigi Lagrange di Torino. Supervisore SILVIS presso l'Università di Bergamo. Ha tenuto il corso di esercitazioni di Statistica presso l'università Bocconi e l'Università Cattolica di Milano. Vincitrice nel 1995 del Premio per la didattica della Statistica e della Demografia conferito dalla Società Italiana di Statistica.
Ha partecipato a vari convegni in qualità di relatore, tra i quali "La storia della matematica entra in classe", L'Aquila, Ottobre 2015 e "Dalla statistica alla probabilità, l'apporto di Karl Pearson", Palermo, Novembre 2015.

PAOLO ROTONDO

Laureato presso l'Università di Pisa nel 1973 in "Matematica applicata" (indirizzo numerico), specializzatosi presso la stessa Università in "Calcolo automatico", insegna "Scienze matematiche" nella Scuola Media dal 1977 al 1993.
Nel corso dell'insegnamento si specializza in "Didattica della Matematica" presso il Dipartimento di Scienze dell'Educazione dell'Università di Roma "La Sapienza", partecipando successivamente ad una ricerca didattica sull'insegnamento del Calcolo delle Probabilità organizzata, su finanziamento del C.N.R., dal prof. R. Scozzafava negli anni 1990 e 1991.
Partecipa ai Convegni nazionali della società "MATHESIS" (di cui è segretario della sezione di Pescara) di Iseo (1990) e Cattolica (1991) nei quali tiene comunicazioni sulle proprie sperimentazioni nell'insegnamento della probabilità soggettiva in terza media, su cui pubblica anche un articolo sulla rivista "Induzioni" nel 1990.
Tra il 1988 ed il 1992 è aggiornatore per i maestri elementari sui nuovi programmi di matematica della Scuola Elementare, per conto dell'I.R.R.S.A.E. d'Abruzzo, tenendo corsi di aggiornamento in 10 Circoli Didattici delle quattro province della regione.
Dal settembre 1993 al 2010 è stato Dirigente Scolastico di Scuola Media in qualità di vincitore di concorso ordinario, in servizio nella provincia di Chieti dal 1993 al 2010, continuando ad interessarsi di didattica della matematica in seno alla Società "Mathesis" ed attraverso collaborazioni con Scuole pubbliche secondarie di primo e di secondo grado. Per alcuni anni è stato socio dell'Associazione 'ASFOR' (Associazione di docenti formatori di Pescara), per conto della quale ha svolto l'incarico di direttore di vari Corsi di aggiornamento per docenti di ogni ordine e grado, oltre a svolgere personalmente relazioni anche in altri Corsi.

RENATA SANTAROSSA

Laureata in matematica e specializzata in teorie e tecniche per l'impiego dei calcolatori elettronici, è stata docente di matematica e fisica, è stata docente dei corsi abilitanti per la matematica e la fisica, dal 2001 è stato docente supervisore alla SISS per l'abilitazione all'insegnamento della matematica e fisica presso il dipartimento di matematica Università di Napoli. È stata nominata dal MIUR nella commissione di docenti per la stesura delle Indicazioni Nazionali (2000), è stata tra gli autori delle attività del testo "La matematica per il cittadino" Dal 2009 dirigente scolastico in regione Lombardia, ha tenuto corsi di formazione per il MIUR. Nel corso della sua carriera è stata docente a contratto presso l'Università della Calabria e l'Università di Napoli. Ha pubblicato, su riviste scientifiche e internazionali, articoli di didattica della matematica.

AGOSTINO ZAPPACOSTA

Laureato in Economia e Commercio presso l'Università degli Studi "La Sapienza", dove ha frequentato i corsi dei Proff. Bruno De Finetti e Federico Caffè.
Attualmente in quiescenza, è stato docente prima nella Scuola Media e poi nell'Istituto Tecnico Commerciale. Ha insegnato nei corsi abilitanti speciali di Matematica Applicata negli anni dal 1999 al 2002 e nei corsi relativi al passaggio dalla scuola secondaria di primo grado al mondo del lavoro o alla scelta della scuola superiore o dell'università. Appassionato di giochi matematici, ha curato per oltre dieci anni i giochi di "Achille e la tartaruga", riservati agli alunni delle scuole italiane di ogni ordine e grado.
Cura attualmente con lo pseudonimo "Tino Costa, il mago dei numeri" sul sito matematicabruzzo.it della Mathesis di Pescara l'interessante rubrica dal titolo "Il problema del mese".

Notizie e curiosità sull’Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV)

Le prime notizie su un’Accademia dei Velati risalgono al lontano 1598. Essa fu fondata dal gesuita Sertorio Caputo ed ha operato per circa 300 anni come Accademia Arcadica.
L’attuale Accademia Piceno – Aprutina dei Velati in Teramo rinasce nel **1988** su iniziativa di un gruppo di professori universitari, con lo scopo di promuovere ricerche multidisciplinari in collaborazione tra i soci.

Perché “Velati”

L’appellativo di “**velati**” fu unanimemente accettato come indicativo della ricerca in collaborazione. Emerse infatti l’intenzione che il lavoro dell’intera equipe, del comitato dei fondatori ed organizzatori dei convegni si sarebbe svolto in gruppo ed in armonia e che sarebbe stato prediletto il lavoro comunitario in luogo di quello del singolo che si dichiarava **“velato”** nei confronti degli interessi culturali generali del gruppo.

Il Logo

La lapide delle “male lingue” o delle **“lingue trafitte”** è un bassorilievo in pietra del XV secolo che si trova nella città di Teramo e raffigura due volti di profilo che si fronteggiano, entrambi con le lingue sporgenti e trafitte da un compasso aperto; la lapide, a forma di scudo, è sormontata da un cartiglio, pure in pietra, sul quale è inciso il motto ***Alo parlare agi mesura*** ovvero misura le parole.

La pietra era un tempo murata sulla facciata di una casa medievale sita in Teramo, lungo il corso di Porta Romana, e appartenuta in origine a un esponente della famiglia di Antonello De Valle o ad un partigiano della sua fazione. Oggi la lapide è collocata nella sala consiliare del Municipio di Teramo.

I siti web

L’Accademia gestisce due siti web, www.apav.it e www.eiris.it.

- il primo è il sito istituzionale e riporta tutte le notizie relative alla vita dell’associazione e alle sue attività. Di particolare rilevanza è la sezione storica, che tiene traccia di tutte le attività pregresse dell’Accademia; al suo interno è presente l’enciclopedia on-line CSS (Comunicazione, Scienza e Società) contenente una miriade di voci in ciascuna delle quali sono contenuti articoli, commenti e immagini di vario tipo. Ad esempio, la voce cinema include le recensioni di più di 300 film riguardanti il dibattito su Comunicazioni Scienza e Società.
- l’altro sito, www.eiris.it è dedicato alle sue attività editoriali. In esso vengono pubblicate tre Riviste scientifiche, Ratio Mathematica, Science & Philosophy e HoPUE, tutte registrate al Tribunale di Pescara e dotate di ISSN e di e-ISSN, i quaderni operativi (di cui questo è l’ultimo esemplare) ed altre pubblicazioni di minore rilevanza, funzionali per le attività culturali esercitate.

Editore: Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo (APAV)
Via del Concilio n. 24, Pescara, Italy
Codice Fiscale: 92036140678 Partita IVA:02184450688

Siti web: www.apav.it ; www.eiris.it
Email: apavsegreteria@gmail.com, apavsegreteria@pec.it

www.apav.it
www.eiris.it

ISBN 978-88-943501-3-5
9 788894 350135