Accademia Piceno Aprutina dei Velati

CONVEGNO NAZIONALE - CORSO DI FORMAZIONE

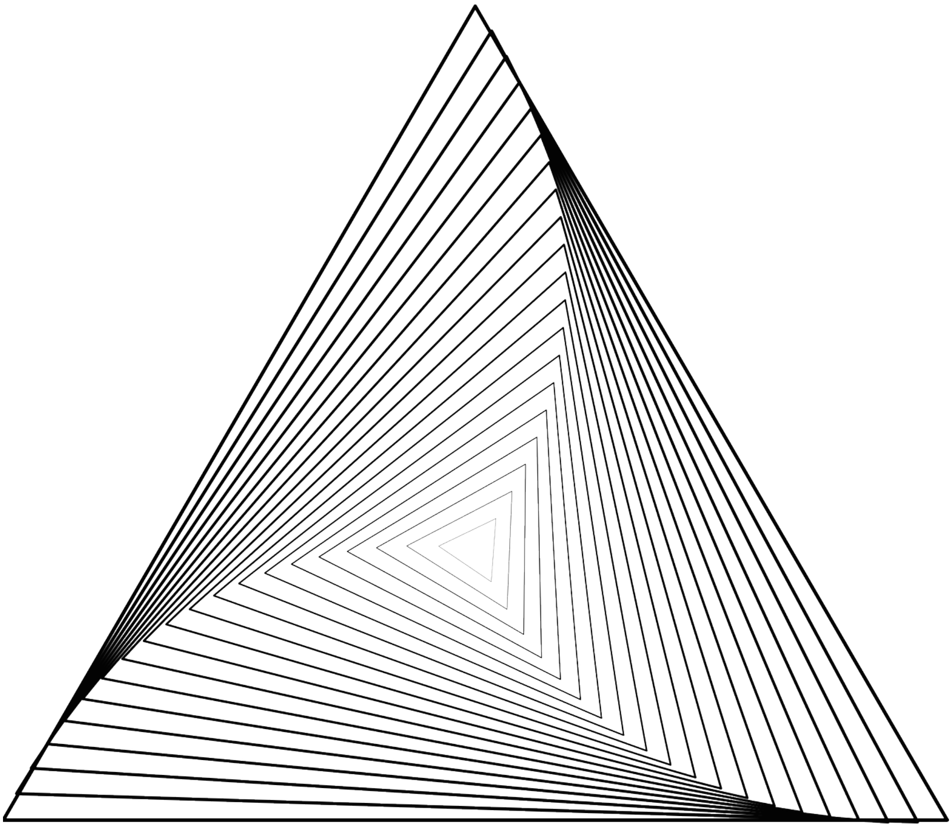
L'ATTUALITÀ DEGLI INSEGNAMENTI DEI GRANDI MAESTRI DELLA MATHESIS NELLA SECONDA METÀ DEL SECOLO XX

NUOVE PROSPETTIVE NELLA DIDATTICA E NEI FONDAMENTI DELLA MATEMATICA

RIMINI

20-21-22 APRILE

2018



APAV

CONVEGNO NAZIONALE ORGANIZZATO DALLE SEZIONI MATHESIS DI
Arezzo, Avellino, Bergamo, Camerino, Castellammare di Stabia, Catania, Crotone, Messina, Napoli, Parma, Pavia, Pescara, Serra San Bruno, Varese, Verona.

Comitato Scientifico

Loredana Biacino, Napoli
Silvana Bianchini, Firenze
Ferdinando Casolaro, Napoli
Luciano Corso, Verona
Franco Eugeni, già Presidente Nazionale
Giangiacomo Gerla, Salerno
Andrea Laforgia, già Presidente Nazionale
Antonio Maturo, Pescara
Angela Pesci, Pavia
Salvatore Rao, Napoli
Alfio Ragusa, Catania
Liliana Restuccia, Messina
Salvatore Sessa, Napoli
Massimo Squillante, Benevento
Carlo Toffalori, Camerino
Roberto Tortora, Napoli
Paola Vighi, Parma

Comitato Organizzatore

Renata Santarossa, Napoli
Giuseppe Manuppella, Pescara
Alberto Burato, Verona
Rita Casarella, Avellino
Antonio Criscuolo, Bergamo
Mariella Crotti, Bergamo
Antonella Fatai, Arezzo
Vincenzo Iorfida, Serra San Bruno
Paolo Linati, Varese
Mario Mandrone, Napoli
Antonello Placanica, Crotone
Elisa Savarese, Castellammare di Stabia
Luigi Togliani, Mantova
Alberto Trotta, Salerno

Curatori del testo:
Ferdinando Casolaro, Giuseppe Manuppella, Antonio Maturo

Impaginazione: Fabio Manuppella
Sito web: www.fabiomanuppella.it
email: fabiomanuppella@gmail.com

Copertina: Anna Maria Di Poccio
Sito web: www.annamariadipoccio.com
email: anna.dipoccio@gmail.com

PROGRAMMA DEL CONVEGNO / CORSO DI FORMAZIONE
L'attualità degli insegnamenti dei grandi Maestri della Mathesis nella seconda metà del secolo XX: nuove prospettive nella didattica e nei fondamenti della Matematica.

RIMINI, 20 – 22 aprile 2018

Venerdì, 20 aprile 2018

Dalle ore 14:00 Registrazione dei partecipanti.
Ore 14:30-15:00 Saluto del Presidente APAV, Giuseppe Manuppella e informazioni organizzative.
Ore 15:00-16:00 Apertura dei lavori: Presiede Giangiacomo Gerla
Franco Eugeni – Questioni di Geometria Analitica nell'insegnamento
Andrea Laforgia – "La matematica per deficienti", da de Finetti ai giorni nostri
Ore 16:00-17:00 Riflessioni sull'insegnamento/apprendimento della matematica: Presiede Carlo Toffalori
Massimo Squillante – Sfide didattiche: il pensiero critico nella Scuola e nell'Università
Angela Pesci – Attività tra pari nell'ora di Matematica: cosa imparano studenti e insegnanti

Ore 17:00 - 17:30 Coffee break

Ore 17:30 - 19:30 Applicazioni dell'Analisi Matematica: Presiede Luciano Corso
Silvana Bianchini – Alla ricerca di massimi e minimi in modo inconsueto
Mario Mandrone – Le curve celebri: applicazioni in ambito architettonico
Loredana Biacino – Un laboratorio PLS sulla successione di Fibonacci

Ore 20:00 Cena

Sabato, 21 aprile 2018
Ore 09:00 - 11:00 L'attualità degli insegnamenti dei matematici nella Mathesis del secolo XX: Presiede Salvatore Rao
Angelo Guerraggio – Una lunga e interessante storia, quella dei matematici italiani e della Mathesis
Lucilla Cannizzaro – Variabili, costanti e funzioni: l'azione di Emma Castelnuovo in classe
Carlo Toffalori – 1918 – 2018: Cantor e l'infinito per gli studenti di oggi
Paolo Linati – Il contributo di Oscar Chisini alla didattica

Ore 11:00 - 11:30 Coffee break

Ore 11:30 - 13:30 Geometria nella scuola secondaria di primo e secondo grado: Presiede Silvana Bianchini
Simonetta Di Sieno – Alla ricerca della geometria perduta. Riscoperte e nuove proposte
Giangiacomo Gerla – Aldo Morelli e la sua Geometria: non è un mondo per vecchi

Paola Vighi – Come non insegnare la Geometria nella Scuola Primaria: dale sagome alle figure geometriche

Ore 13:30 Pranzo

Ore 15:00 - 17:00 La Geometria oltre Euclide: Presiede Antonio Maturo
Alessandra Rotunno – L'insegnamento della Geometria Proiettiva nella Scuola Secondaria
Ferdinando Casolaro – Dall'insegnamento di Bruno Rizzi: Quale Geometria per lo spazio fisico
Giuseppe Conti e Alberto Trotta – I poliedri nella Storia, nell'Arte, nella Natura
Ilaria Veronesi – La Geometria cartesiana nello spazio

Ore 17:00 - 17:30 Coffee break

Ore 17:30-19:30 Bruno de Finetti e Angelo Fadini nell'insegnamento di oggi: Presiede Renata Santarossa
Antonio Maturo – Logica dell'incerto di Bruno de Finetti, logica sfumata di Angelo Fadini: confronto e sperimentazione nella Scuola Primaria
Luigi Tomasi – Il saper vedere in matematica: le proposte di Bruno de Finetti rivisitate con un software di matematica dinamica
Raffaele Prosperi – Un approccio per il Primo Ciclo: discussioni/risoluzioni problemi risolvibili con sistemi lineari

Ore 20:00 Cena Sociale
La serata sarà allietata da un accompagnamento musicale del duo Massimo/Ivano

Domenica 22 aprile 2018

Ore 09:00-11:00 Laboratorio di Matematica: Presiede Loredana Biacino
Antonio Criscuolo – Per un laboratorio di Geometria intuitiva: poligoni e poliedri con la piegatura della carta
Patrizia Dova – Costruzione dell'operazione di divisione: un percorso non sempre facile
Marco D'Errico – La Geometria dinamica in Emma Castelnuovo: perimetro e area

Ore 11:00 - 11:30 Coffee break

Ore 11:30 - 13:00 Laboratorio di Matematica: Presiede Antonia Travaglione
Vincenzo Iorfida – Modelli dinamici innovativi per le competenze trasversali nell'insegnamento della Matematica
Elisa Savarese – I giochi matematici per la scuola: il premio Aldo Morelli

Dibattito e Conclusioni

INDICE

SESSIONE 4
L’attualità degli insegnamenti dei matematici protagonisti della Mathesis della seconda metà del secolo XX

SESSIONE 5
Laboratorio di Matematica

DESCRIZIONE DEGLI ARGOMENTI

Ferdinando Casolaro

Nei giorni 20, 21 e 22 aprile 2018, la città di Rimini ha ospitato il Convegno con annesso Corso di Formazione per docenti di Matematica delle scuole di ogni ordine e grado sulle "*Nuove prospettive nella didattica e nei fondamenti della Matematica*", con particolare riferimento alla Logica come pilastro per la Formazione in ogni disciplina.
L'attività, ispirata agli insegnamenti dei grandi maestri della Mathesis nella seconda metà del XX secolo, è stata organizzata dall'Accademia Piceno – Aprutina dei Velati (APAV), ente accreditato per la formazione del personale della scuola, ai sensi della Direttiva 170/2016, in collaborazione con il coordinamento delle sezioni Mathesis di Arezzo, Avellino, Bergamo, Camerino, Castellammare di Stabia, Catania, Crotone, Messina, Napoli, Parma, Pavia, Pescara, Serra San Bruno, Varese, Verona.
Durante i lavori, coordinati dal Presidente dell'Accademia Giuseppe Manuppella e dal Direttore del Corso di Formazione, Dirigente Renata Santarossa, sono state affrontate molte questioni che caratterizzano i percorsi di insegnamento della Matematica, alla luce della normativa vigente.

Gli argomenti sono stati organizzati in cinque "*sessioni di lavoro*", con l'obiettivo di studiare in modo il più possibile completo le tematiche che sono oggetto dell'insegnamento della Matematica nelle Scuole di ogni ordine e grado:

1. *Riflessioni sull'insegnamento-apprendimento della Matematica*
2. *La Geometria con Euclide ed oltre Euclide.*
3. *Applicazioni dell'Analisi Matematica.*
4. *L'attualità degli insegnamenti dei matematici protagonisti della Mathesis della seconda metà del secolo XX.*
5. *Laboratorio di Matematica.*

Nella sessione "*Riflessioni sull'insegnamento-apprendimento della Matematica*" hanno relazionato Franco Eugeni, Andrea Laforgia, Angela Pesci, Raffaele Prosperi e Massimo Squillante con interventi su tematiche diverse, ma complementari per uno stimolo ad una critica riflessione sulle metodologie in atto, relativamente all'insegnamento delle varie discipline.

La sessione "*La Geometria con Euclide ed oltre Euclide*", si è svolta in due parti: nella prima parte gli interventi di Giangiacomo Gerla, Simonetta Di Sieno e Paola Vighi, hanno toccato in modo critico alcuni aspetti dell'insegnamento della Geometria euclidea; nella seconda parte si è discusso sugli ampliamenti del modello euclideo ed è stato posto l'accento sull'esigenza di utilizzare nella didattica i risultati degli ultimi 150 anni, con gli interventi di Ferdinando Casolaro, Giuseppe Conti, Alessandra Rotunno e

Ilaria Veronesi.

Nella sessione "*Applicazioni dell'Analisi Matematica*" hanno relazionato Loredana Biacino, Silvana Bianchini e Mario Mandrone che hanno toccato alcuni aspetti significativi delle applicazioni del calcolo differenziale e integrale.

Con gli interventi nella sessione "*L'attualità degli insegnamenti dei matematici protagonisti della Mathesis della seconda metà del secolo XX*", Lucilla Cannizzaro, Angelo Guerraggio, Paolo Linati, Antonio Maturo, Carlo Toffalori e Luigi Tomasi hanno sensibilizzato la platea all'interesse per la storia della Matematica, con particolare riferimento ai grandi maestri, evidenziando l'attualità delle proposte didattiche che hanno lasciato.

Infine, la sessione "*Laboratorio di Matematica*" ha visto presentazioni didattiche di Antonio Criscuolo, Patrizia Dova, Marco D'Errico, Vincenzo Iorfida con la conclusione di Elisa Savarese sulla funzione dei <*Giochi matematici*> con particolare riferimento al <*Premio Aldo Morelli*> organizzato annualmente dalla sezione Mathesis di Castellammare di Stabia.

I lavori si sono conclusi nella giornata di domenica 22 aprile con la consegna degli attestati ai docenti che hanno partecipato al Corso di Formazione, da parte del direttore del Corso Renata Santarossa e con la sintesi del Presidente APAV Giuseppe Manuppella che sottolinea come, dopo le esperienze della Scuola estiva di Pizzoferrato e del Convegno di novembre 2017 a Napoli su <Matematica, Natura e Architettura>, la collaborazione tra l'Accademia e le sezioni Mathesis per la Formazione è sempre più forte in quanto riunisce sempre più docenti che sentono l'esigenza di confrontarsi.

Prefazione

Questo convegno / corso di formazione si presenta molto articolato, in quanto vuole affrontare argomenti riferiti a tutti i rami della matematica e che rappresentano gli interessi di ricerca e di studio a cui ciascun maestro, *Emma Castelnuovo (1913 – 2014) Bruno de Finetti (1906 – Roma 1985), Angelo Fadini (Napoli 1910, Napoli 1992), Aldo Morelli (Napoli 1929 – Napoli 2005), Lucio Lombardo Radice (Catania 1916 – Bruxelles 1982), Bruno Rizzi (Tripoli 1935 – Roma 1995), Francesco Speranza (Milano 1932 - 1998),* si è particolarmente dedicato con abnegazione, impegno e senso di responsabilità verso le generazioni future.
Questa raccolta vuole essere un quaderno, nel quale si trovano spunti utili per metodi alternativi e "pratiche", a cui ispirarsi, a seconda delle esigenze della classe, nella prassi didattica.
Le relazioni presenti nel quaderno sono prevalentemente bozze di lavoro che saranno approfondite e perfezionate per la pubblicazione sulla rivista Science & Philosophy. Ciascun autore si assume la responsabilità del contenuto scientifico del proprio lavoro.
Si propongono attività che hanno l'unico scopo di guidare i corsisti ad affrontare alcune delle conoscenze degli obiettivi specifici di apprendimento (*Aritmetica e Algebra*, *Geometria*, *Relazioni e funzioni*, *Dati e Previsioni*, *Elementi di Informatica)*, i cui metodi usati nella trasposizione didattica, per linguaggio, per formalizzazione e per l'uso pratico, risultano essere più accessibili ai giovani e pertanto atti a stimolare l'interesse per le discipline scientifiche. Gli argomenti trattati, per contenuto e metodo, sono riferiti a studenti e studentesse di scuole di ogni ordine e grado.
Il riferimento ai grandi Maestri del secolo XX è principalmente un ricordo che permea tutti coloro che hanno avuto la fortuna di poter lavorare con loro, conoscerne la grande cultura e umanità. Alcuni dei relatori sono stati allievi, altri amici e altri ancora hanno studiato dai loro testi, ma noi vogliamo ricordare il contributo culturale che B. De Finetti, L. Lombardo Radice e B. Rizzi in quanto Presidenti Nazionali della Mathesis, nonchè E. Castelnuovo, A. Morelli (presidente della sezione Mathesis di Napoli) e F. Speranza, hanno dato alla scuola, avendo a cuore l' insegnamento della matematica.
Sono storie italiane del '900, esperienze di vita diverse che si intersecano tra successi e sofferenze, riscattate successivamente nel tempo, dalla volontà di quegli insegnanti che, con sensibilità, hanno fatto proprio il paradigma pedagogico che ha ispirato l'insegnamento della matematica di questi Maestri.
Le specifiche preferenze per i diversi rami della matematica, rende il pensiero di questi grandi Maestri molto attuale, essi hanno rappresentato e rappresentano una ricca fonte di conoscenze matematiche per gli studenti universitari che riconoscono in queste figure i profili di studiosi, di uomini e donne di cultura che hanno scritto la più recente storia della didattica della matematica e della nostra società.
Eppure la loro diversità accomuna un agire, una sensibilità, una proiezione verso il futuro che costituisce il loro comune denominatore.
B. de Finetti apprezzava l'insegnamento di Emma Castelnuovo che ha conosciuto quando, appena laureato, si trasferì a Roma e frequentava la casa di Guido Castelnuovo, padre di Emma. De Finetti, benchè sia conosciuto per i suoi studi sulla Teoria della probabilità che hanno portato ad associare il suo nome alla definizione *soggettiva* di probabilità, ha anche scritto articoli e tenuto interventi di didattica della Matematica riferiti a problemi di carattere sociale, economico e politico, il tutto sempre permeato da

numerosi riferimenti *interdisciplinari* e da considerazioni epistemologiche e filosofiche.
De Finetti è stato molto critico e duro su come venissero insegnate le materie scientifiche, basti pensare ai titoli molto esplicativi dei suoi articoli:*"Contro la matematica per deficienti", "Come liberare l'Italia dal morbo della trinomite", "La matematica non deve essere uno spauracchio".*
Nell'anno scolastico 1952-53, in occasione del temporaneo trasferimento a Roma con tutta la sua famiglia, de Finetti preferì che sua figlia Fulvia frequentasse la media del Liceo "Tasso", in particolare, la sezione in cui insegnava Emma Castelnuovo.
Questo episodio della vita di de Finetti ci fa capire la sua vicinanza alla famiglia Castelnuovo, in particolare quanta stima nutrisse per Emma, riconoscendole il ruolo di insegnante che riteneva essere molto vicina alle sue idee sull'insegnamento della matematica, tanto da "*rendere, l'odiata matematica, un piacere, una finestra aperta sul mondo"*. In de Finetti è stato sempre concreto e vivo l'interesse per la didattica, egli condivideva con Emma la necessità di rendere intuitiva la matematica, tanto da applicare lo stesso concetto anche alla didattica universitaria, schierandosi decisamente contro le posizioni bourbakiste nell' insegnamento della matematica. Nel 1974, in qualità di presidente della Mathesis, animò un gruppo di ricerca sulla didattica della matematica: di questo gruppo facevano parte Emma Castelnuovo, Lina Mancini Proia, Michele Pellerey, Bruno Rizzi. De Finetti fu tra i primi, intorno al 1960, a promuovere gare matematiche fra studenti per portare i concorrenti meglio classificati a partecipare a gare internazionali.
Emma Castelnuovo ha lavorato molto con il suo gruppo di ricerca con cui era solita discutere e riflettere sulle esperienze di insegnante. Infatti si era resa conto che qualcosa non andava nell'insegnamento della matematica, in particolar modo nei programmi. La geometria intuitiva che si insegnava alla scuola media era "*una riduzione del programma delle superiori che ricalca gli elementi di Euclide (300 a.c.)"*, una geometria ferma, statica e basata sui postulati, una geometria astratta. Emma invece usava dialogare con la classe su una geometria in movimento; l'azione ragionata sul concetto, la quale veniva interiorizzata dagli studenti e diventava teoria. É una concretezza fatta di figure geometriche costruite con asticciole colorate, solidi fatti con fili elastici, quadretti di legno, piccoli sacchi di juta pieni di fagioli, modellini fatti con bacchette sghembe che formano superfici curve, è una concretezza fatta anche con lo spago. Alla domanda <*che ci faceva Emma Castelnuovo con uno spago?*> è da apprezzare il valore educativo della risposta di Emma Castelnuovo, in occasione del suo novantesimo compleanno festeggiato a Roma presso la scuola media Tasso, evento voluto fortemente dall'allora sindaco Veltroni suo alunno, che è stata: <*Si possono dare a questa domanda tante risposte a seconda della fantasia*>. Un metodo attivo nell'insegnamento della geometria intuitiva che deve essere alimentato dalla creatività dell'insegnante e degli studenti.
Contemporaneo di Emma Castelnuovo è stato Lucio Lombardo Radice, ma, a differenza di Emma che impersonava alla perfezione il ruolo di insegnante/ricercatore (ruolo che la scuola di oggi richiede), la cui azione sociale era sempre orientata verso la cultura matematica, egli è stato un combattente, una persona che non ha mai rinunciato ad esprimere e sostenere a qualunque costo le sue idee. Lucio Lombardo Radice, nato a Catania, attribuiva, ai suoi genitori e all'ambiente nel quale è cresciuto, una grande importanza per la sua formazione. All'età di sette anni si è trasferito a Roma dove ha frequentato le scuole romane e nel 1938 si è iscritto alla facoltà di matematica dove è stato allievo di G. Castelnuovo (padre di Emma) e F. Enriques che sono stati i suoi

maestri, soprattutto per la loro "concezione umanistica della scienza". Convinto sostenitore dell'unità della cultura, ha scelto come indirizzo di ricerca quello dell'algebra astratta perché la riteneva "*la più potente carica innovatrice di pensiero"*.
Il valore culturale e sociale che L. Lombardo Radice attribuiva alla matematica ma, in generale alle scienze, ben si comprende attraverso questo scritto: "*Se avessi pensato (se pensassi) che la matematica è solo tecnica e non anche cultura generale; solo calcolo e non anche filosofia cioè pensiero valido per tutti, non avrei mai fatto il matematico (non continuerei a farlo)"*[1]. La vita di Lucio Lombardo Radice, a differenza degli altri Maestri è stata molto tormentata dalle vicende politiche del Paese. Attivista del partito Comunista, si è sempre esposto in prima linea non nascondendo le sue idee antifasciste che gli sono costate l'allontanamento dalla vita sociale e dalla stessa università. Ha provato anche il carcere per attività antifascista, allorquando, risultato idoneo a un concorso per assistente di matematiche complementari ha potuto prendere servizio nel dicembre del 1939, poi è stato condannato nuovamente dal tribunale speciale a numerosi anni di carcere.
L. Lombardo Radice si è occupato anche di problemi della scuola e di pedagogia come fermo sostenitore di una concezione pluralista della scuola statale. Nel 1946 partecipò alla costituzione dell'Associazione per la difesa della scuola nazionale e collaborò al periodico di quell'associazione, *Scuola democratica.* In rappresentanza dei comunisti, fece parte della Commissione nazionale di inchiesta sulle condizioni dell'istruzione in Italia, istituita dal ministero della Pubblica Istruzione (1947-49).
Dal punto di vista pedagogico non ha condiviso metodi come quello di Maria Montessori, che a suo avviso non insegnavano al bambino "la solidarietà, la collaborazione, la socialità, il vero spirito di iniziativa"; mentre rivalutava la pedagogia sovietica e il pensiero di A.S. Makarenko che al "*mito dell'educazione puramente naturale*" e individualistica di J.-J. Rousseau contrapponeva le esigenze di "*vita e di sviluppo della collettività*" e non del singolo. Leggendo i suoi scritti appare un precursore dell'attuale autonomia scolastica. Dai suoi scritti, si deduce che la scuola doveva essere unica, aperta a tutti, laica, ogni scuola doveva costituire un collettivo scolastico autonomo con una propria struttura e propri organi e prevedere anche la partecipazione degli studenti attraverso un Consiglio .
Un altro tema decisivo per lui era l'unità dell'insegnamento e del valore formativo sia delle scienze sia delle materie umanistiche. Riprende in qualche modo la corrente fusionista a cui si sono ispirati prima di lui de Finetti e successivamente anche B. Rizzi: l'interdisciplinarietà che sottolinea al tempo stesso la specificità delle discipline scientifiche, che davano "*la mentalità*" e "*l'abitudine del controllo di se stessi e delle proprie affermazioni*" e educa "*all'iniziativa intellettuale, alla scoperta, al coraggio del pensiero*". Da questa posizione cominciava la sua battaglia affinchè le scienze (intese come discipline scientifiche) avessero una presenza maggiore nella scuola, particolarmente nella media inferiore.
Per conoscere meglio la figura di de Finetti, risultano altrettanto importanti i tratti del suo carattere e del suo modo di rapportarsi agli altri: la coerenza delle sue idee e il suo impegno sociale, le sue battaglie contro le “storture e ingiustizie”, la sua capacità di applicare la logica e il rigore della Matematica alla vita di ogni giorno e ai contesti più disparati, la sua appassionata lotta per rinnovare i modi di insegnare la Matematica – come scrive nell'autobiografia – danno un'immagine “*della matematica intesa più come*

1 (L. Lombardo Radice, *Istituzioni di algebra astratta*, Milano 1965, p. X)

strumento per applicazioni (fisica, ingegneria, biologia, economia, statistica) e per l'approfondimento di questioni concettuali e critiche (logica, psicologia, probabilità, implicazioni gnoseologiche), piuttosto che come formalismo o come argomento astratto e assiomatizzato chiuso in se stesso".
L. Lombardo Radice ha ampliato il suo impegno per la scuola anche nell'università, dove si è battuto per la democratizzazione dell'insegnamento, istituendo, presso la facoltà di scienze, corsi serali per studenti lavoratori e un laboratorio di didattica della matematica e della scienza in collaborazione con Emma Castelnuovo, Lina Mancini Proia e altri insegnanti delle scuole secondarie. E' evidente che l'università romana, in tempi diversi, è stata per Emma Castelnuovo, de Finetti, L. Lombardo Radice, B. Rizzi una palestra in cui si affrontavano le questioni di didattica della matematica, commentando i programmi ministeriali, il metodo, la pedagogia e rivisitandone i contenuti in linea con i fattori ambientali, culturali ed economici degli allievi di quel tempo. Infatti, poi, negli anni cinquanta, L. Lombardo Radice ha collaborato alla riforma della scuola dell'obbligo facendo parte della commissione che ne elaborò il progetto, e per questo fu ritenuto competente per dirigere una nuova rivista rivolta agli insegnanti, *Riforma della scuola*, nata nel novembre 1955 (di cui rimase direttore fino alla morte) e anche in questo ambiente continua la sua battaglia perché le scienze avessero una presenza maggiore nella scuola, particolarmente nella media inferiore.
L'attività propriamente scientifica di L. Lombardo Radice spazia dalla geometria analitica (prima cattedra avuta), all'analisi algebrica e infinitesimale, alla teoria dei numeri, geometria superiore, algebra, algebra superiore, matematiche complementari, storia della matematica. Fra i nostri Maestri forse Lucio Lombardo Radice è stato tra quelli che non si sono dedicati solo alla matematica, infatti, per citare solo alcuni dei suoi più significativi impegni extrauniversitari: curò la stampa del giornale *Pugno chiuso,* dopo la liberazione di Roma è entrato nella redazione de *L'Unità* ed è stato consulente scientifico per il filmato in tre puntate "*Non ho tempo"* su É. Galois.
Bruno Rizzi da giovane, si inserisce a metà secolo XX, nello stesso contesto universitario romano dei precedenti Maestri, in particolare, sull'esempio di de Finetti, suo amico, aderì a quella corrente della didattica della matematica chiamata "*fusionismo*"di cui i suoi numerosi scritti, articoli e conferenze ne sono pregni. Lo stesso B. Rizzi, in qualità di Presidente Nazionale della Mathesis, ha scritto nell'articolo "*de Finetti e il Periodico di Matematiche*" della Mathesis: il fusionismo "*nasce come quella corrente della didattica che vuole principalmente la completa fusione degli argomenti geometrici e di quelli analitici (aritmetici, algebrici, etc.) tradizionalmente tenuti separati, spesso addirittura con bigottismo puristico quasi per timore che al contatto si contaminassero a vicenda*".
B. Rizzi ha recepito il punto di vista fusionista e lo ha arricchito delle esperienze didattiche avute prima come docente di scuola "superiore" e successivamente come docente universitario nel cui ambito ha percorso tutti i gradi della carriera. Molto vicini a B. Rizzi, umanamente e professionalmente sono stati gli ex studenti, docenti che hanno collaborato con lui e che oggi lo ricordano come "il Maestro" che parlava di fondamenti di matematica e di come scrivere la matematica. Cito solo alcuni che lo hanno frequentato più assiduamente e anche fuori dal contesto istituzionale: Emilio Ambrisi, Ferdinando Casolaro, Ciro D'Aniello, Celia Di Foggia.
La Mathesis, la logica a più valori e la novità nell'insegnamento della matematica nelle Facoltà di Architettura sono legate, a Napoli e a Pescara, alla figura di Angelo Fadini, successore di de Finetti alla Presidenza Nazionale della Mathesis.

Angelo Fadini era un grande innovatore e precursore dei tempi attuali. Aveva avuto l'intuizione che la Matematica nella Facoltà di Architettura non poteva ridursi ai due Corsi tradizionali di Analisi Matematica e Geometria Analitica I e II, sostanzialmente finalizzati a fornire la base matematica per gli argomenti di Fisica, Statica, Scienze delle Costruzioni e simili.
Per lui la Matematica non doveva avere un ruolo subordinato ad altre discipline, ma aveva il compito di dare delle strutture logiche da utilizzare soprattutto nei Corsi che apparivano più lontani dalla Matematica, come ad esempio quelli di Composizione Architettonica ed Urbanistica. Bisognava introdurre una nuova Matematica, in grado di aiutare a trattare situazioni confuse ed incerte, per le quali le tradizionali Analisi Matematica e Geometria Analitica non potevano essere di nessun aiuto. A tale scopo era riuscito, unico in Italia, a far istituire, alla Facoltà di Architettura di Napoli, un nuovo corso da tenersi nel terzo anno, denominato Complementi di Matematica.
A. Fadini, A. Morelli e F. Speranza sono figli del loro tempo e ciascuno, con le propie propensioni e conoscenze, è riescito a connotare la propria esperienza di vita contribuendo ad attualizzate il pensiero matematico, attribuendo alla Matematica un ruolo fonfamentale nella cultura, nella costruzione del sapere umano, un sapere problematico e in evoluzione.
Tutta la comunità scientifica del dipartimento di matematica di Napoli, ha beneficiato della presenza di Aldo Morelli, che ha coordinato il nucleo di ricerca in didattica della matematica. A. Morelli, allievo di Carlo Miranda e di Alfredo Franchetta, con cui ha pubblicato negli anni Sessanta il suo primo volume, "*Esercizi di geometria*", fino al 1985 è stato professore incaricato di Geometria nelle facoltà di Scienze e di Ingegneria dell'Università "Federico II" di Napoli e contemporaneamente docente di Matematica e Fisica presso il liceo "G. Galilei" di Napoli; è stato da sempre presidente della sezione Mathesis di Napoli; dal 1985 è stato professore associato di Matematiche Complementari presso la facoltà di Scienze dell'Università "Federico II". Per molti anni, convinto sostenitore del ruolo formativo della matematica in particolare della geometria, nei processi di apprendimento degli studenti, non ha mai trascurato gli aspetti storici della matematica da cui traeva ispirazione per rielaborae i contenuti e svilupparli, superando la barriera delle difficoltà del loro apprendimento. Il nucleo di ricerca sulla didattica della matematica, guidato da A. Morelli, *"il professore"*è stato sempre molto attivo e produttivo. Sono relatori in questo contesto formativo alcuni degli allievi di A. Morelli: Ferdinando Casolaro, Romano Gatto, Giangiacomo Gerla, Alessandra Rotunno, Renata Santarossa, Elesa Savarese professionalmente cresciuti, diventati docenti di scuola secondaria o universitari o dirigenti scolastici, i quali rivivono quotidianamente in aula, gli insegnamenti "*del professore"*.
Altra personalità è stata quella di F. Speranza che, superando gli ostacoli di natura epistemologica, ha sempre sostenuto il non isolamento della matematica. Il carattere distintivo della sua attività di ricerca didattica è stato quello di cercare le interazioni della Matematica non solo con la Fisica o le Scienze ma anche, e specialmente, con la Linguistica, la Psicologia, la Filosofia, le Arti figurative. Purtroppo non ha avuto il tempo di sviluppare in modo adeguato quest'ultima sua proposta a cui però, pare, che si stiano dedicando altri studiosi che nel corso degli studi di ricerca gli sono stati vicini.

Renata Santarossa

SESSIONE 1
Riflessioni sull’insegnamento-apprendimento della Matematica

Luoghi geometrici e curve algebriche[1]

Franco Eugeni

Università degli Studi di Teramo
eugenif3@gmail.com

Abstract

Il lavoro presenta lo studio di due luoghi geometrici. È ben noto che detti F ed F' due punti da chiamarsi *fuochi* sono solitamente studiati i luoghi dei punti P del piano per i quali PF+PF' e |PF-PF'| sono costanti: l'*ellisse* e l'*iperbole*. Meno noti sono invece i luoghi dei punti per i quali sono costanti il quoziente e il prodotto $\frac{PF}{PF'}$ *e* $PF \cdot PF'$ (Curva di Cassini). Il primo luogo è una circonferenza e presenta spunti molto interessanti per un ottimo studente di Liceo Scientifico, nei quali può cimentarsi anche con l'aiuto del Docente. Il secondo luogo è più complesso e presenta spunti di altro genere. Ma è ottimo per una esperienza di laboratorio matematico.

Parole chiave: Luoghi geometrici, curve algebriche, lemniscata, curva di Cassini.

1. Introduzione

Si descrive lo studio di due luoghi geometrici che danno luogo a due curve algebriche.
Il primo luogo presentato, pur essendo notevolmente semplice, presenta spunti molto interessanti per uno studente. Trattasi infatti di una equazione del tipo:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

che, sotto la condizione $a^2 + b^2 + c > 0$, è l'equazione di una circonferenza. Lo studente, ricordato questo punto critico, può cimentarsi in una discussione sui due parametri, in funzione dei quali il luogo varia, discussione possibile da scoprire da parte di un ottimo studente di Liceo Scientifico, e nel quale uno studente meno abile può cimentarsi con l'aiuto del Docente (Berzolari L. 1951).
Il secondo luogo è più complesso e presenta spunti di altro genere. Trattasi infatti di una quartica rientrante nella famiglia delle cosiddette quartiche bi-circolari, aventi la

[1] L'autore ringrazia il prof. Ferdinando Casolaro per gli utili consigli e la revisione di questa nota.

caratteristica del complesso dei termini di quarto grado della forma: $\left(x^2 + y^2\right)^2$. Quindi si tratta di un genere di curva che non presentando rami che si estendono all'infinito non può che comporsi di circuiti chiusi. La curva di cui proponiamo lo studio ha un interesse storico notevole in quanto è nota in letteratura come la curva del cui studio si occupò l'astronomo Gian-Domenico Cassini (1625 –1712), attorno al 1680, e che presenta casi particolari notevoli. La curva in questione dipende da due parametri, e lo studio e la discussione dei casi particolari non sono banali. Uno di questi casi e la famosa *Lemniscata*[2] di Jakob Bernoulli (1654 –1705), riscoperta dallo stesso nel 1694. Una seconda classe di casi particolari è la classe degli *ovali* di Cassini o *ovali* o *cassini ani* (Chisini O, Enriques F. 1934) che furono proposti come sostituti alle orbite ellittiche dei pianeti circolanti attorno al sole, in luogo delle orbite ellittiche Johannes von *Kepler* (1571 –1630), al tempo italianizzato in Keplero.
Dal punto di vista della Storia della Matematica (Kline M. 1991) è molto interessante riscoprire i profili di questi illustri matematici che operarono in questo periodo che va dalla fine del 1500 agli albori del primo settecento, per comprendere come fin da quei tempi la connessione tra i campi di ricerca fosse ricca e di elevato spessore. In appendice riporteremo alcune sintesi di questi profili, in particolare quello di Cassini. Ancor oggi infatti, il nome di Cassini è legato a progetti di studio ed esplorazione del pianeta Saturno, pianeta del quale il Cassini si occupò a suo tempo.
Lo studio del secondo luogo permette ad uno studente che si cimenti in una vera palestra laboratoriale, di riscoprire da queste poche righe da me presentate, il calcolo solo indicato, assieme all'insieme delle considerazioni di geometria analitica che ne derivano, di impadronirsi di tecniche utili per lo studio di curve e luoghi geometrici nei quali vi è spesso l'utilizzo di una creatività che conduce a comprendere la *bellezza della matematica.* Naturalmente il comprendere questo aspetto è cosa purtroppo riservata a pochi, viviamo oggi in un mondo che si occupa di altro, studiare la curva di Cassini non è forse argomento di interesse di massa, ma forse il Docente può utilizzare a questo mio scritto, per incuriosire qualche studente che può essere interessato veramente a questi aspetti creativi della geometria analitica (Chisini O. 1920).

2. Il primo luogo

E' ben noto che detti F ed F' due punti da chiamarsi *fuochi* sono solitamente studiati i luoghi dei punti P del piano per i quali PF+PF' e |PF-PF'| sono costanti[3], luoghi che sono rispettivamente l'*ellisse* e l'*iperbole*.

---

[2] la parola **lemniscàta** si riferisce a ogni curva che abbia la forma di otto rovesciato. La sua etimologia deriva dal vocabolo latino lemniscus, che nell'antica Roma rappresentava una sorta di nastro ornamentale per le corone.

[3] Per questioni di notazioni PF e PF' denotano le misure assolute dei segmenti, si è omessa la sopra-lineatura per ragioni tipografiche.

Meno noti sono invece i luoghi dei punti per i quali sono costanti il quoziente PF/PF' e il prodotto PF x PF' (Chisini O, Enriques F. 1934).
Il primo di questi, il *luogo-quoziente,* fornisce una interessante *pseudo-circonferenza* ed è pure interessante la discussione che emerge per assicurarci della sua effettiva esistenza come circonferenza e della sua collocazione nel piano. Dalla relazione:

$$\frac{PF}{PF'} = \cos t$$

Si consiglia di porre il quadrato della costante pari ad (h+1)/(h-1), ma il luogo può essere ugualmente discusso chiamando la costante con un solo simbolo. Così come accade per l'ellisse o per l'iperbole assumiamo le coordinate dei fuochi come F' (-c,0) ed F(c,0). Il luogo in esame con semplici calcoli si esprime allora con l'equazione:

$$\frac{(x-c)^2 + y^2}{(x+c)^2 + y^2} = \frac{h+1}{h-1}$$

che sviluppata ulteriormente si scrive nella forma:

$$(x+ch)^2 + y^2 = c^2 \cdot (h^2 - 1)$$

Dunque una circonferenza di centro C (- *ch, 0*) e quadrato del raggio $c^2(x^2-1)$, allora che sia $h^2 - 1 > 0$. Tutto questo è non difficile per lo studente, ma varie altre considerazioni possono nascere o essere suggerite. Ad esempio può notarsi o farsi notare che, quando la circonferenza esiste, non interseca l'asse *y*. Al variare di *h*, per valori esterni all'intervallo (-1,1), può notarsi come varia la collocazione della circonferenza nel piano.

3. Il secondo luogo-prodotto: la curva di Cassini.

Più complesso è lo studio del secondo luogo, il luogo-prodotto, esso da luogo ad una complessa curva che fu studiata dall'astronomo Gian-Domenico Cassini (1625 –1712), attorno al 1680, e che presenta casi particolari notevoli quale ad esempio la famosa Lemniscata di Jakob Bernoulli (1654 –1705), riscoperta dallo stesso nel 1694, e gli ovali cassiniani, che furono proposti come sostituti alle orbite ellittiche di Johannes von *Kepler* (1571 –1630). Tuttavia è possibile con vari accorgimenti, permettere ad un bravo studente di Liceo Scientifico, di comprendere e utilizzare, anche in altri casi, le metodiche empiriche che utilizziamo in questo caso. Dalla relazione[4] :

PF x PF'= *cost* := a^2

assumendo le coordinate dei fuochi nella forma F' (-*c*, *0*) ed F(*c, 0*), si ha:

[4] Si faccia notare che il simbolo := significa "eguale per definizione" e che porre la costante pari al quadrato di a significa solo rimarcare la positività del rapporto di segmenti.

$$\left[(x-c)^2+y^2\right]\cdot\left[(x+c)^2+y^2\right]=a^4$$

da cui:

$$\left(x^2+y^2\right)^2-2c^2\left(x^2-y^2\right)=a^4-c^4$$

che è l'equazione della quartica bi-circolare[5], studiata da Cassini.
Si distinguono tre casi a seconda che sia:

$$a^4>c^4,\quad a^4=c^4\quad a^4<c^4.$$

Il primo caso è *a = c,* caso in cui la curva si riduce alla famosa *lemniscata di Bernoulli* :

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2c^2\left(x^2-y^2\right)$$

E' immediato porre lo studente davanti ad alcune considerazioni che facilitano lo studio della *lemniscata*:

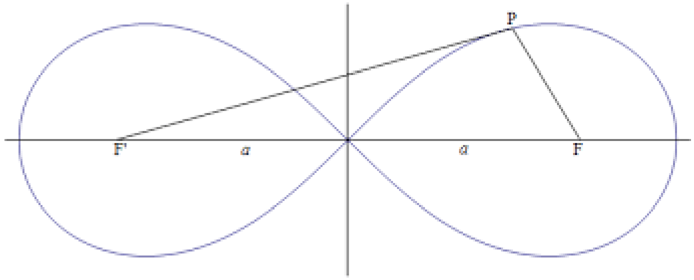
1. la curva non ha rami all'infinito, quindi si compone di circuiti chiusi.
2. la curva presenta solo termini con potenze pari, dunque è simmetrica rispetto all'asse *y* (cambiando *x* in -*x* l'equazione non cambia), è simmetrica rispetto all'asse *x* (cambiando *y* in -*y* l'equazione non cambia) , dunque è simmetrica anche rispetto all'origine, punto comune ai due assi di simmetria.
3. la curva interseca l'asse delle *x* (per *y* = 0) oltre che nell'origine anche in due punti facilmente calcolabili.
4. la curva non interseca l'asse *y* (per *x* = 0) tranne che nell'origine.
5. occorre che sia $x^2 - y^2 > 0$, ed è immediato verificare[6] che i punti per i quali ciò accade sono quelli degli angoli definiti dalle due rette che contengono l'asse *x*.
6. ponendo *y* = *k* (oppure *x* = *k*) otteniamo una equazione biquadratica in *x* (in *y*) che fornisce limitazioni per *k*.

La curva assume la forma grafica seguente:

---

[5] La parte in parentisi del complesso dei termini di secondo grado è il complesso dei termini di secondo grado della circonferenza ed esprime il fatto che i punti all'infinito della circonferenza i cosiddetti *punti ciclici* (0,1, i), (0,1,-i) del pianoampliato e complessificato, qui sono contati due volte, anzi sono punti doppi della quartica e sono *punti impropri e immaginari*, di qui il nome. Questa spiegazione esula da una trattazione per le scuole secondarie.

[6] Disegnando nel piano le due bisettrici è faciele notare che nascono quattro angoli, all'interno degli angoli i punti assumono il medesimo valore positivo o negativo annullandosi sulle rette. Per cambiare segno i punti devono passare per lo zero, quindi attraversare le rette (per ragioni di continuità della funzione $z = x^2 - y^2$).



Le limitazioni fornite al punto 6 forniscono il massimo e il minimo lungo l'asse y, pari ai valori $\frac{c}{2}$ e $-\frac{c}{2}$ rispettivamente[7].

Tale massimo può essere calcolato anche passando a coordinate polari. Posto:

$$x = \rho \cos \theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

si ottiene la forma polare della lemniscata data dalla:

$$\rho^2 = 2c^2 \cos 2\theta,$$

da cui può ottenersi y in funzione di θ e calcolare, per altra via i valori del massimo e del minimo[8].

Interessante notare che l'origine è un ***nodo*** le cui tangenti si ottengono eguagliando a zero il complesso dei termini di grado più basso[9], cioè

$$x^2 - y^2 = 0.$$

Tuttavia se noi consideriamo una generica retta per l'origine $y = mx$ ed intersechiamo con la curva otteniamo soluzioni coincidenti per $m^2=1$.

Il secondo caso in esame è $a > c$; riprendiamo l'equazione:

$$\left(x^2+y^2\right)^2 - 2c^2\left(x^2-y^2\right) = a^4 - c^4$$

che si scrive anche

$$\left(x^2+y^2+c^2\right)^2 - 4c^2x^2 = a^4$$

ed anche in forma polare

$$\rho^4 - 2c^2\cos 2\vartheta + c^4 - a^4 = 0$$

Fermo restando le considerazioni relative ai punti 1 e 2 incontrati per la *lemniscata*, anche in questo caso per $y = 0$, si ha, solamente[10], $x^2 = c^2 + a^2$, che fornisce due

[7] Basta porre y=k e annullare il discriminante della biquadratica in x che si ottiene.

[8] Tuttavia tale via risulta essere meno agevole.

[9] La regola è generale, se nella equazione di una curva algebrica manca il termine noto, il complesso dei termini di gradi più basso eguagliato a zero è il prodotto delle equazioni delle tangenti nell'origine, eventualmente immaginarie.

[10] Infatti si deve scartare la soluzione proveniente da $x^2 = c^2 - a^2$, essendo il secondo menbro di questa relazione negativo per l'ipotesi $a>c$.

intersezioni sull'asse delle x. Analogamente per x = 0, si ha solamente: $y^2 = c^2 + a^2$, che fornisce due sole intersezioni sull'asse delle y. La curva è dunque contenuta interamente nel quadrato individuato dalle parallele agli assi condotte da queste intersezioni.
Intersecando con $x = k$ si trova, per la radice di y^2, nella biquadratica in y, una soluzione sempre negativa da scartare ed una seconda che è accettabile con la condizione

$$0 < k^2 < c^2 + a^2,$$

che è sempre verificata.
Quindi la retta $x = k$ ha esattamente due intersezioni con la curva.
Intersecando con $y = k$ si trova, per la radice di x^2, nella biquadratica in x, che ci sono esattamente due soluzioni quando è $c^2 < a^2 < 2c^2$.
Dalla

$$\left(x^2 + y^2 + c^2\right)^2 - 4c^2x^2 = a^4$$

si ottiene (scartando il segno – davanti alla radice)

$$y^2 = -\left(x^2 + c^2\right) + \left(4c^2x^2 + a^4\right)^{\frac{1}{2}}$$

da cui deve necessariamente aversi:

$$4c^2x^2 + a^4 > \left(x^2 + c^2\right)^2 \quad 4c^2x^2 + a^4 > \left(x^2 + c^2\right)^2$$

$$\left(x^2 + c^2\right)^2 < a^4 \quad \left(x^2 + c^2\right)^2 < a^4$$

$$c^2 - a^2 < x^2 < c^2 + a^2$$

Che, con la prima relazione sempre positiva (essendo a<c) rimane:

$$x^2 < c^2 + a^2$$

che definisce una striscia entro cui è la curva in esame. Lo studio della equazione biquadratica in x, con $y = k$, fornisce la natura delle intersezioni che al variare dei parametri si differenziano in vario modo.

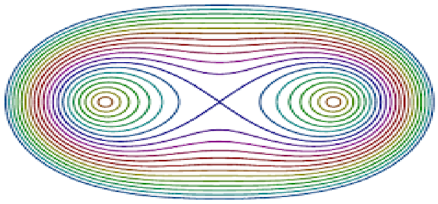
Nel terzo caso in esame è a < c. Ne segue che nella precedente

$$c^2 - a^2 < x^2 < c^2 + a^2$$

è significativa solo la:

$$c^2 - a^2 < x^2$$

e la curva esiste per valori esterni all'intervallo definito dalla precedente disequazione e la curva si spezza in due parti.
I casi trattati si riassumono graficamente nella figura seguente:



Quanto esposto in questa nota si differenzia da quanto esposto nella maggior parte dei siti disponibili sull'argomento.

Note Biografiche

Gian-Domenico Cassini (1625 –1712), nacque a Perinaldo, in provincia di Imperia. Fu essenzialmente un astronomo, vissuto a lungo a Parigi in Francia ove morì nel 1712. Nel 1650 ottenne la cattedra di astronomia all'Università di Bologna, dove iniziò le sue osservazioni sulle superfici dei pianeti, scoprendo la rotazione di Marte e di Giove. La meridiana della Basilica di San Petronio è una sua opera che aveva l'obiettivo di calcolare il momento esatto dell'equinozio. Nel 1669 fu chiamato a Parigi a dirigere il nuovo osservatorio appena in costruzione. Da quell'osservatorio scoprì l'esistenza dei quattro satelliti di Saturno e comprese la geometria degli anelli del pianeta, che divise in due zone concentriche (*divisione di* Cassini). Determinò, con buona precisione, il valore della parallasse solare. Studiò inoltre la luce zodiacale e ne riconobbe il carattere cosmico, condusse osservazioni sulle macchie solari e realizzò anche una carta della Luna. Insieme al Richer, appositamente distaccato in Cajenna, calcolò il valore della distanza di Marte e in collaborazione con G. F. Maraldi compilò un catalogo delle stelle fisse. A lui si deve la sistematica opera di correzione della cartografia francese: imponente lavoro che, completato dal figlio e dai nipoti, si concretizzerà nel rilievo topografico della Francia. Continuò la sua opera fino a tardissima età, lavorando anche quando fu colpito da cecità (Kline M. 1991).

Jakob Bernoulli (1654-1705) è il capostipite di una lunga e gloriosa famiglia di matematici e fisici. Fratello maggiore di Johannes I (1667-1748) e di Nicolaus I (1686-1759). Johannes I fu padre dei tre: Nicolaus II (1695-1726) Daniel (1700-1782) e Johannes II (1710-1790). Interessante studiare il contributo dei membri di questa famiglia, peraltro facilmente reperibili (Kline M. 1991).

Conclusione

Con questa nota si è voluto riprendere un argomento che in passato ha rappresentato il nocciolo centrale per superare gli esami di abilitazione all'insegnamento della

Matematica negli indirizzi di Scuola secondaria. Oggi questi temi sono completamente scomparsi sia dai corsi universitari che dai corsi di Formazione (Chisini O, Enriques F. 1934).
Personalmente ritengo che questa branca della Matematica - la Geometria algebrica - abbia un grosso significato nella didattica perché permette di individuare il legame tra la rappresentazione analitica e la visualizzazione geometrica. E' questo il motivo per cui ho ritenuto di trattare il tema in questo Corso per la Formazione dei docenti.

Bibliografia

Chisini O. 1920, "*Sugli incroci delle curve di diramazione per una funzione algebrica di due variabili*". Rendiconto Matematica Accademia Lincei 1920, pagg. 127-130.

Chisini O. 1951, "*Singolarità delle curve algebriche piane*". Periodico di Matematiche 1951, pagg. 142-166.

Chisini O, Enriques F. 1934. "*Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*", 4 volume, Zanichelli 1934.

C. Ciliberto, C. Fontanari 2015: "*Curve algebriche piane e sghembe*". Corso del prof. G. Castelnuovo 1922–23, Unione Matematica Italiana, Bologna, 2015.

Berzolari L. 1951, *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi*. Ed. Hoepli 1951.

Kline M. 1991, *Storia del pensiero matematico*, G. Einaudi Editore 1991

Attività tra pari nell'ora di matematica: cosa imparano studenti ed insegnanti

Angela Pesci

Presidente della Sezione Mathesis di Pavia
angela.pesci@unipv.it

Abstract

Il contributo propone riflessioni personali scaturite da studi su esperienze didattiche basate su due modelli di collaborazione fra studenti (tutoraggio tra pari e gruppi collaborativi) nell'insegnamento/apprendimento della matematica. Si mettono in evidenza ricadute positive su insegnanti e studenti, insieme alla complessità richiesta dalle metodologie collaborative.

Parole chiave: Matematica, tutoraggio fra pari, gruppi collaborativi.

1. Introduzione[1]

Da quando ho iniziato ad occuparmi di questioni legate all'insegnamento-apprendimento della matematica, a partire dagli studi che ho svolto in occasione della mia tesi di laurea e continuati poi senza interruzione fino ad oggi, grazie alle opportunità che il lavoro universitario mi ha offerto, ho avuto la fortuna di avere come riferimento figure importanti cui ispirarmi, alle quali certamente sono collegate alcune principali idee che ho poi sviluppato, approfondendole ed interpretandole personalmente.

[1] Questo contributo ripropone, con modifiche e aggiunte, la conferenza "Imparare collaborando", non pubblicata, presentata al Seminario Nazionale GRIMeD 2016, svoltosi a Taranto nei giorni 8-10 aprile 2016.

Solo per citare un esempio, ed in collegamento al tema del Convegno, devo certamente molto ad Emma Castelnuovo, i cui testi per la scuola media (allora si chiamava così), insieme a "Didattica della matematica" (Ed. La Nuova Italia, Firenze) del 1963[2], sui quali il mio relatore di tesi, Mario Ferrari, mi diede l'opportunità di meditare a lungo agli inizi degli anni '70, sono stati per me il punto di partenza per cominciare a pensare ad un insegnamento-apprendimento della matematica diverso dal tradizionale, cioè fondato sull'esplorazione attiva, sulla riflessione su azioni e oggetti concreti e sulla discussione e condivisione delle proprie scoperte con i compagni e con l'insegnante.

È proprio il tema della collaborazione tra studenti e degli effetti di alcune specifiche modalità collaborative messe in atto in classe dall'insegnante di matematica che mi ha incuriosito negli ultimi quindici anni: questo contributo propone dunque alcune riflessioni scaturite dall'analisi di esperienze didattiche svolte secondo tali metodologie. Tali esperienze si sono sviluppate in classi di scuola secondaria di primo e secondo grado, in stretta collaborazione con le rispettive docenti di matematica e l'occasione è spesso stata quella di esplorare aspetti specifici del tema citato per tesi di laurea in matematica, di cui sono stata relatrice.

Sono dunque particolarmente riconoscente alle insegnanti che hanno collaborato con entusiasmo alla progettazione e messa in atto delle esperienze didattiche nelle loro classi, in particolare a Rita Bagnari, Anna Baldrighi, Claudia Bellinzona e Maria Cristina Torresani, con alcune delle quali ho anche elaborato alcuni dei contributi elencati in Bibliografia.

Sono particolarmente riconoscente anche agli studenti e alle studentesse universitarie che hanno aderito con partecipazione ed impegno ai temi di studio che concordavamo per le loro tesi, attraverso opportune indagini e sperimentazioni didattiche, seguite ovviamente dalle analisi degli esiti ottenuti e dalle conseguenti riflessioni per studi ed esperienze successive. È dunque con molta gratitudine che mi piace elencare qui, in ordine cronologico, queste tesi di laurea in Matematica, tutte collegate a modelli di insegnamento-apprendimento collaborativo:

- Fattori Alba, *Il teorema di Pitagora nella scuola secondaria superiore: un'esperienza di apprendimento cooperativo*, Università di Pavia, A.A. 2000/2001
- Farina Giorgia, *Le isometrie con Cabri–Géomètre: un'esperienza di apprendimento cooperativo nella scuola secondaria superiore*, Università di Pavia, A.A. 2001/2002
- Boli Ilaria, *Una esperienza di "tutoring" su equazioni e disequazione di secondo grado*, Università di Pavia, A.A. 2006/2007
- Rocco Laura, *Il Peer Tutoring nel recupero in matematica. Sviluppo e analisi di una esperienza didattica*, Università di Pavia, A.A. 2008/2009

[2] Nel 2017 questo testo è stato riproposto, a cura di F. Arzarello e M. Bartolini Bussi, in una nuova edizione nella collana *Nuove Convergenze* (UTET), grazie alla decisione dell'UMI-CIIM, ed è quindi ora di nuovo disponibile.

- Camera Michela, *Aspetti cognitivi e metacognitivi in un'esperienza di problem solving*, Università di Pavia, A.A. 2009/2010
- Giraudi Laura, *Modalità collaborative nell'insegnamento della matematica per sviluppare la competenza nell'argomentazione*, Università di Pavia, A.A. 2011/2012
- De Virgilis Roberto, *Problem solving e attività collaborative,* Università di Pavia, A.A. 2012/2013
- Ceravolo Valeria, *La didattica inclusiva della matematica nella scuola secondaria di secondo grado. Analisi di un'esperienza*, Università di Pavia, A.A. 2015/2016

Ulteriori occasioni per approfondire il tema della collaborazione fra pari nell'educazione matematica sono state anche le mie partecipazioni a cinque progetti "Borse di ricerca per insegnanti" tra il 2002 e il 2010, sviluppati con convenzioni tra la Direzione Scolastica Regionale per la Lombardia e l'Università di Pavia, su temi relativi all'apprendimento cooperativo e al tutoraggio fra pari nella lezione di matematica nella scuola secondaria.
Mi sono stati molto preziosi, infine, come momenti di riflessione e arricchimento reciproco sia i numerosi corsi di formazione e aggiornamento per insegnanti che ho svolto in questi anni sul tema della collaborazione fra studenti nella lezione di matematica sia ovviamente il corso di "Didattica della matematica"[3] per gli studenti del corso di laurea in Matematica che ho tenuto all'Università di Pavia fino all'anno accademico 2015-16, sia i corsi per l'abilitazione degli insegnanti di matematica (SILSIS, TFA, PAS) attuati dall'Università di Pavia, durante i quali ho potuto condividere e far conoscere le potenzialità delle modalità collaborative che avevo studiato, sviluppato e sperimentato.

2. Due modelli collaborativi: il tutoraggio fra pari e i gruppi collaborativi

Le principali idee di riferimento che hanno sempre fatto da sfondo agli studi e alle esperienze didattiche che ho citato al punto precedente si riferiscono a teorie ampiamente condivise in letteratura. La collaborazione fra pari, che vede come momenti centrali la comunicazione, la discussione, il confronto e la condivisione, si collega palesemente al costruttivismo sociale e alla convinzione che, in base alla stretta connessione tra ragione ed emozione, ogni atto conoscitivo coinvolga in modo globale

[3] Le dispense per questo corso sono scaricabili dalla rete e il Capitolo 7, in particolare, è dedicato ai modelli collaborativi. Attualmente si trovano alla pagina
http://matematica.unipv.it/attach/431D4A3EF2FB0500/file/Dispense_Didattica_2015.pdf

le persone, ad ogni età, con le loro percezioni, credenze, aspettative e soprattutto con le loro storie di vita. I modelli collaborativi che ho studiato e realizzato in classe si sono sempre focalizzati in modo esplicito, dunque, sia sulla dimensione disciplinare sia sulla dimensione affettivo-relazionale.

Per quanto riguarda gli aspetti della matematica oggetto dell'attività collaborativa degli studenti, il riferimento fondamentale ed ampiamente condiviso è quello al *problem posing* e al *problem solving* come modalità da privilegiare nel far matematica a scuola. E' sufficiente ricordare qui come le attuali Indicazioni Ministeriali, sia per il primo ciclo sia per la scuola secondaria di secondo grado, abbiano da tempo evidenziato questo aspetto per l'educazione scientifica; in particolare, per la matematica, si è auspicata la realizzazione del *Laboratorio* "inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive." (G.U. 5 febbraio 2013, pag. 51). E' evidente che tutto ciò risulta perfettamente coerente sia con la metodologia del lavoro fra pari sia con un'attività di indagine e di esplorazione come quella richiesta quando si affrontano problemi autentici.

Presento ora in sintesi le caratteristiche di due modelli di collaborazione fra pari, che si fondano entrambi sulle idee appena descritte ma che si differenziano per la modalità con cui vengono realizzati in classe e anche per le situazioni didattiche che li rendono opportuni.

Quando l'insegnante si accorge che su uno specifico argomento matematico una parte della classe ha raggiunto una certa consapevolezza ma un'altra parte invece manifesta carenze e difficoltà, il *tutoraggio* fra due o tre compagni può costituire una interessante opportunità: di recupero per chi ne ha bisogno e di potenziamento per gli altri. Questa modalità di collaborazione è di solito adottata non solo per il recupero ma anche quando si voglia ad esempio attuare un'attività di soluzione di problemi, di solito non molto complessi, su cui poi sviluppare un confronto e una discussione di classe.

Il tutoraggio è risultato particolarmente interessante per favorire la riflessione metacognitiva degli studenti, cioè un ripensamento sulle proprie e altrui strategie di pensiero, sulle proprie risorse, sia cognitive che relazionali. A conclusione di un'attività svolta a gruppetti di due o tre studenti, prima ancora di condividere e discutere gli esiti ottenuti in ogni gruppetto, è risultato sempre molto produttivo, infatti, far compilare ad ogni studente, questa volta individualmente, una scheda di questo tipo:

a) *Quale è stata la difficoltà maggiore che hai incontrato nel lavorare insieme al compagno/a per risolvere il problema?*
   - ❑ *Condividere la comprensione del testo*
   - ❑ *Capire a fondo la strategia risolutiva dell'altro/a*
   - ❑ *Comunicare le ragioni della mia strategia di soluzione*
   - ❑ *Altro* ....

b) Quale è stata l'idea (o il passaggio) fondamentale che vi ha permesso di concludere?
....
c) Se hai aiutato il compagno/a, spiega il suggerimento che hai dato:
……………………………………………………………………………………
d) Se hai ricevuto un aiuto dal compagno/a, spiega il suggerimento che hai ricevuto:
…………………………………………………………………………….....

Come risulta evidente, le domande sono sufficientemente aperte e danno la possibilità ad ogni studente sia di ripensare alle caratteristiche disciplinari del compito sia di riflettere sulla modalità collaborativa attuata e di scrivere i loro pensieri. Nelle esperienze svolte, da risposte sbrigative iniziali si va di solito verso osservazioni più dettagliate e puntuali: abbiamo sempre constatato che la riflessione metacognitiva, a seguito di un'attività di tutoraggio, risulta facilitata e potenziata.

Dai protocolli degli studenti sono rilevabili elementi (sul piano disciplinare e interpersonale) che altrimenti risulterebbero nascosti, come ad esempio la loro consapevolezza su difficoltà e limiti propri e dei compagni, o sulle risorse proprie e dei compagni oppure la descrizione di alcuni aspetti specifici positivi da poter far emergere e valorizzare (come la capacità di mediare opinioni o di coinvolgere compagni timidi o l'abitudine ad essere precisi in una scrittura o in una schematizzazione).

Tutto ciò risulta molto prezioso per la riflessione dell'insegnante, che ha la possibilità di rivedere criticamente le proprie scelte didattiche e le strategie metodologiche messe in atto, anche per una riprogettazione degli interventi didattici successivi.

Nelle esperienze di insegnamento della matematica sviluppate attraverso sistematiche attività di tutoraggio si è rilevato che non solo chi deve recuperare o è in difficoltà ne può trarre notevoli benefici ma anche chi ha di solito buone prestazioni riesce a migliorare il suo profilo, andando a potenziare la capacità di comunicazione e di argomentazione delle proprie idee.

Il secondo modello di collaborazione fra pari che intendo descrivere è quello dei *gruppi collaborativi*, che prevede gruppi costituiti ciascuno da 5 studenti (o un minimo di 4 e un massimo di 6 per ragioni numeriche). Questo modello, elaborato da Lino Vianello circa vent'anni fa, è stato per me il riferimento fondamentale per le esperienze didattiche di insegnamento/apprendimento della matematica basate sulla collaborazione e soprattutto sull'assegnazione dei ruoli che il modello prevede[4].

In ogni gruppo, costituito appunto da 5 studenti, ognuno ricopre un ruolo differente, mentre allo stesso tempo svolge il compito matematico che l'insegnante ha progettato, uguale per tutti i gruppi. In accordo al fatto che sia necessario dare pari rilievo allo

[4] La descrizione dei ruoli che qui presento e della modalità in *gruppi collaborativi* è molto sintetica: per dettagli rimando chi fosse interessato al Capitolo 7 delle dispense che ho citato nella nota 1. La stessa osservazione vale per il modello del *tutoraggio*, anch'esso ampiamente descritto nello stesso Capitolo 7.

sviluppo di competenze disciplinari e relazionali, ci sono due ruoli che si dedicano in modo specifico a questi aspetti: l'*Orientato al compito* e l'*Orientato al gruppo*. Il primo ha come obiettivo che il suo gruppo raggiunga il miglior risultato possibile in relazione al compito matematico assegnato dall'insegnante; il secondo deve far in modo che il clima relazionale del gruppo sia il migliore possibile, così da consentire un'attività efficace, partecipata e condivisa.
La *Memoria* scrive sulla scheda del compito, preparata dall'insegnante e distribuita a ciascun gruppo, le risposte alle domande del compito, una volta che siano state discusse e condivise dai vari componenti; il *Relatore* è lo studente che, a conclusione delle attività in gruppo, propone a tutta la classe la versione finale scritta dalla *Memoria:* è una sorta di portavoce del gruppo, che espone l'esito del lavoro a tutti i compagni e all'insegnante, così che si possa poi procedere a confrontare e discutere gli esiti di tutti i gruppi; il quinto ruolo è quello dell'*Osservatore*, che ha il compito di notare (e scrivere su un apposito foglio) se ciascun membro del suo gruppo sia stato capace di svolgere il suo ruolo in modo opportuno: è lo studente che a conclusione del lavoro dei gruppi legge a tutta la classe il suo giudizio su come sia stata sviluppata l'attività, notando eventuali carenze e proponendo valutazioni personali. Si tratta di un ruolo molto delicato, che abitua ad essere consapevoli di come ci si sente nello svolgersi di un'attività e ad esprimere ciò che si percepisce in un modo che possa essere comprensibile agli altri e costruttivo per le attività successive.
La chiave di questa struttura organizzativa è il riconoscimento di un ruolo ad una persona da parte degli altri. In questo modo ognuno sviluppa la propria autonomia nel prendere decisioni, valutare e controllare, perché è autorizzato dagli altri a svolgere determinati compiti, quelli specifici del suo ruolo. La ripartizione di compiti sociali e disciplinari nel gruppo secondo i ruoli favorisce collaborazione e interdipendenza, assicura che le abilità individuali vengano condivise e riduce la possibilità che qualcuno si rifiuti di collaborare o domini gli altri.
Risulta importante, inoltre, che ognuno abbia la possibilità di ricoprire ruoli diversi, così da sviluppare e talvolta scoprire e potenziare le proprie risorse, da mettere in gioco in modo differente a seconda del ruolo che si svolge.
In questo tipo di organizzazione l'attività dell'insegnante risulta molto complessa. C'è una fase importante fuori dalla classe, che riguarda ad esempio la scelta dei criteri secondo cui formare i gruppi o la scelta del compito da proporre (che non può essere un banale esercizio ma un problema abbastanza complesso e sufficientemente articolato, adatto ad esigere le risorse del gruppo) o la preparazione del materiale didattico coerente al compito assegnato.
In classe, poi, durante l'attività collaborativa, è essenziale che l'insegnante non dia suggerimenti sulle strategie da seguire o precisazioni agli studenti: se il compito è stato formulato in modo adeguato, il gruppo deve essere in grado di interpretarlo e di prendere eventuali decisioni nel caso di interpretazioni non univoche. L'attività non deve fornire necessariamente un prodotto concluso da parte di ogni gruppo: sarà poi nella fase successiva, di messa in comune di strategie, osservazioni, risultati, che si

arriverà ad un prodotto finale, condiviso da tutti con consapevolezza proprio a seguito del confronto fra pari all'interno dei gruppi. E' in effetti la discussione di classe, che segue le esposizioni dei *Relatori* e degli *Osservatori* di ogni gruppo, la terza fase importante che vede l'insegnante come motore principale del suo svolgersi: in base a ciò che i gruppi avranno prodotto ed esposto, sarà sua responsabilità quella di orientare la riflessione e la discussione di classe a partire dagli esiti di tipo disciplinare o dalle notazioni di tipo interpersonale presentate, scegliendo cosa percepisce più opportuno in funzione degli esiti che intende prioritari in quel momento per la sua classe.

3. Cosa imparano gli studenti e cosa imparano gli insegnanti in attività collaborative

In base alle esperienze sviluppate nella scuola secondaria e centrate sull'utilizzo sistematico di attività di collaborazione fra pari, nella modalità del tutoraggio fra pari o dei gruppi collaborativi, ho potuto constatare che sono numerosi gli aspetti positivi rilevabili, sia in riferimento agli sia in riferimento agli insegnanti.
In relazione alla disciplina di studio, la matematica, gli studenti manifestano una maggiore consapevolezza sui contenuti discussi in gruppo, una maggiore padronanza linguistica nella comunicazione sia con i pari che con l'insegnante, la capacità di riflettere sulle strategie e sugli errori propri o dei compagni, una maggiore autonomia nel lavoro in classe e a casa e una buona capacità di gestione del tempo di esecuzione di un lavoro, mettendo in atto la flessibilità necessaria.
In riferimento alle relazioni interpersonali, gli studenti sviluppano attenzione verso i compagni, si abituano ad ascoltarli e ad intervenire in modo opportuno, si dimostrano più capaci di condividere risorse, riescono a vivere in modo partecipato sia i momenti di successo che quelli di fallimento, con la consapevolezza di non essere da soli ma di far parte di una squadra.
Un aspetto che merita un po' di attenzione e su cui mi vorrei soffermare è quello della ricaduta positiva che le attività collaborative possono avere, come verificato nelle esperienze studiate, sulla resilienza degli studenti. In ambito socio-educativo la resilienza si riferisce alla capacità che ognuno ha di superare ostacoli e adeguarsi alle avversità durante il corso della propria vita. La letteratura mette in evidenza che si tratta di una capacità universale, che consente a una persona, a un gruppo o a una comunità di prevenire, minimizzare o superare le conseguenze negative di una avversità. È importante perché consente di affrontare e superare momenti difficili della vita, uscendone rafforzati o anche trasformati.
In riferimento al periodo scolastico, possiamo dire che i momenti difficili per uno studente, dunque i fattori di rischio che potrebbero portarlo a fallimenti, sono i risultati scadenti ottenuti a scuola, il coinvolgimento in compiti di livello basso (cioè troppo

semplici) e le basse aspettative degli insegnanti nei propri confronti. Gli studenti esposti a questi fattori di rischio hanno maggiore necessità, rispetto agli altri, di sviluppare la propria resilienza, così da essere capaci di reagire positivamente alle situazioni avverse e progredire con successo nella loro crescita personale.
La letteratura evidenzia che per potenziare la resilienza degli studenti è indispensabile la loro partecipazione in strutture sociali positive, cioè gli studenti devono avere un luogo cui appartenere, nel quale condividere attività con altri e potenziare il senso della propria esistenza lavorando per un progetto.
E' evidente, dopo quanto si è detto, che le modalità collaborative realizzate in classe come si è descritto, possiedono proprio tutte le caratteristiche che un ambiente dovrebbe offrire per potenziare la resilienza degli studenti.
Nelle esperienze didattiche svolte nella scuola secondaria più volte citate, quando si sono richieste valutazioni personali sulle attività svolte a studenti in difficoltà (per insuccessi negli esiti scolastici o per gravi problemi nelle relazioni personali con i compagni), la maggior parte di loro ha espresso valutazioni molto positive sulle esperienze svolte in collaborazione con i compagni e nelle loro parole si sono rintracciati[5] espliciti riferimenti alla consapevolezza di avere avuto regole chiare, compiti da svolgere e incoraggiamenti all'autonomia; di essersi sentiti autonomi e responsabili e orgogliosi di quanto producevano; di essere stati capaci di comunicare e accordarsi con i compagni.
Vorrei ora descrivere ciò che anche gli insegnanti imparano, dopo un po' di esperienze di attività collaborative proposte in classe, sulla base di quanto ho potuto notare personalmente nel corso delle numerose attività didattiche progettate, condivise e realizzate insieme a loro.
Anzitutto, l'esigenza di scegliere contenuti specifici cui dedicare uno spazio e un tempo piuttosto ampi, come quelli richiesti dalle attività di collaborazione, seguite necessariamente da un adeguato confronto, da discussioni e riflessioni collettive, impone all'insegnante un ripensamento della disciplina, all'interno della quale occorre individuare i concetti, le procedure e le proprietà irrinunciabili, cui abbia senso dedicare l'attività collaborativa, evitando o riducendo parti giudicate meno essenziali o in ogni caso recuperabili in momenti didattici successivi. È noto che i contenuti presenti nei libri di testo non hanno tutti la stessa valenza educativa ma una loro esposizione frontale da parte dell'insegnante non richiederebbe la stessa riflessione: la sua dimestichezza con la materia non lo rende sempre consapevole delle differenti risorse che gli studenti devono mettere in gioco nel caso di concetti complessi. Risulta così che l'insegnante possa descrivere, con gli stessi tempi, concetti essenziali e complessi e concetti invece più semplici e a volte non così essenziali. In sostanza, dover scegliere su cosa investire tempo ed energia risulta un processo non banale ma molto interessante da affrontare, perché esige un ripensamento epistemologico di tutta la disciplina da insegnare, in funzione di ciò che si giudica davvero centrale e che si vuole dunque rimanga agli

[5] Il lavoro di Baldrighi, Bellinzona, Pesci, Polo del 2011 in Bibliografia si riferisce a questa analisi.

studenti delle proprie classi. Gli insegnanti imparano a sviluppare riflessioni di questo tipo, diventando più consapevoli della valenza dei contenuti specifici del loro insegnamento.
Un'altra conseguenza positiva che ho potuto osservare, negli insegnanti che si abituano ad inserire attività collaborative nella progettazione del loro percorso, è una migliore relazione con il tempo a disposizione: mentre all'inizio hanno l'impressione che il tempo dedicato al lavoro a gruppi sia troppo ampio, pian piano si accorgono che le ore dedicate ad attività in cui tutti sono coinvolti in un discorso comune, in cui ciascuno ha la possibilità di manifestare il proprio consenso o dissenso e in cui tutti si riconoscono in un prodotto finale, diventato loro personale patrimonio di conoscenza, sono ore investite in modo molto produttivo. Spesso gli insegnanti testimoniano che gli studenti propongono collegamenti inaspettati oppure affrontano più rapidamente del solito parti di teoria, proprio in collegamento a temi trattati in attività collaborative, che lasciano sempre tracce molto stabili. In sintesi, dunque, ho notato una relazione più rilassata con il tempo a disposizione, che gli insegnanti imparano a gestire in modo sempre più flessibile e fruttuoso.
Tenuto conto che le attività di collaborazione fra pari, come si è notato, esigono attenzione sia agli aspetti disciplinari che a quelli sociali, è proprio nell'osservazione degli aspetti sociali che nei primi tempi gli insegnanti non si sentono pronti: durante lo svolgersi di tali attività occorre infatti rilevare se ci sono difficoltà di comunicazione, di comprensione reciproca, di rispetto delle più semplici norme civili e decidere di conseguenza se e come dedicare a questi problemi adeguati momenti di confronto fra studenti. E' quasi inutile osservare che difficilmente la preparazione professionale di un insegnante comprende tali aspetti, tuttavia devo dire che a fronte di un iniziale disorientamento nel gestire specifiche difficoltà legate alle relazioni interpersonali, l'insegnante che riesce a proporre le eventuali problematiche alla classe stessa, ascoltando con sincera apertura le prospettive di soluzione offerte in varie occasioni dagli studenti, si accorge che questi momenti sono davvero cruciali, non solo per migliorare il clima della classe ma anche per costruire in modo più coinvolgente la conoscenza matematica in gioco. La proposta di attività collaborative ai propri studenti risulta quindi una buona occasione, per l'insegnante, di imparare ad osservare, valutare e migliorare le relazioni sociali nella sua classe.
In conclusione, imparare a gestire adeguatamente nelle proprie classi attività di tipo collaborativo risulta molto impegnativo perché richiede di ripensare a fondo alla disciplina che si insegna, di ristrutturare le proprie azioni didattiche e di saper porre attenzione anche alle relazioni interpersonali. Tuttavia gli esiti che si ottengono in termini di crescita e soddisfazione personale, sia da parte degli studenti che da parte degli insegnanti, sono sempre così confortanti da spronare a proseguire in queste direzioni.

Bibliografia

Baldrighi A., Bellinzona C., (2004), Esperienze di apprendimento cooperativo: le equazioni di secondo grado, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 27A-B n. 6, 773-784

Baldrighi A., Bellinzona C., Pesci A., (2005), L'evoluzione disciplinare e sociale di alcuni alunni in difficoltà durante esperienze di apprendimento cooperativo, *Atti del Convegno Nazionale n. 14 Matematica & Difficoltà,* A. Davoli, B. Piochi, P. Sandri (a cura di), Bologna, Pitagora, 104-109

Baldrighi A., Bellinzona C., Pesci A., (2007), Una esperienza sull'intreccio di linguaggi per un uso consapevole di simboli matematici, *Atti del Convegno Nazionale n. 15 Matematica & Difficoltà,* R. Imperiale, B. Piochi, P. Sandri (a cura di), Bologna, Pitagora, 60-65

Baldrighi A., Bellinzona C., Pesci A., Polo M., (2011), Promoting resilience in students through cooperative learning experiences. A work in progress, *Current State of Research on Mathematical Beliefs XVI*, *Proceedings of the MAVI-16 Conference, Tallin, Estonia,* K. Kislenko (Ed.), 7-26

Baldrighi A., Fattori A., Pesci A., (2004), Un'esperienza di apprendimento cooperativo nella scuola secondaria superiore: il teorema di Pitagora, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 27B n. 2, 125-146

Baldrighi A., Pesci A. (2011), L'attività di tutoraggio in matematica: esempi di schede per la riflessione metacognitiva degli studenti, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 34B, n. 1, 67-86.

Bellinzona C., Torresani M., (2011), Una esperienza didattica al triennio superiore per valorizzare le risorse di tutti, *Matematica&Difficoltà n. 16,* Imperiale R., Pesci A., Sandri P., Vighi P. (a cura di), Bologna, Pitagora, 115-120.

Cohen E. G., (1999), *Organizzare i gruppi cooperativi,* Trento, Erickson.

Comoglio M., Cardoso M. A. (1996), *Insegnamento e apprendimento in gruppo: il cooperative learning*, LAS, Roma

Locatello S., Meloni G., (2003), *Apprendimento collaborativo in matematica*, Bologna, Pitagora.

Pesci A. (2004), Insegnare e apprendere cooperando: esperienze e prospettive, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 27 A-B n. 6, 637-670

Pesci A., (2011a), Sollecitare la riflessione metacognitiva in attività di tutoraggio per valorizzare le risorse di tutti gli studenti, *Matematica&Difficoltà n. 16,* Imperiale R., Pesci A., Sandri P., Vighi P. (a cura di), Bologna, Pitagora, 69-78

Pesci A., (2011b), Studi di esperienze collaborative in presenza per una loro eventuale implementazione on-line, *TD-Tecnologie Didattiche*, 19 (3), 183-188.

Pesci A., (2015), *I suggerimenti della ricerca in didattica della matematica per la pratica scolastica - Quinta edizione*, Dispense per il corso di Didattica della matematica, Università di Pavia,
http://matematica.unipv.it/attach/431D4A3EF2FB0500/file/Dispense_Didattica_2015.pdf

Vianello L. (2003), La relazione tra intelligenze ed autonomia, *Matematica e Difficoltà n. 12*, Longo P., Davoli A., Sandri P. (a cura di) , Bologna, Pitagora, pp. 27-40.

Un approccio per il primo ciclo: discussioni/soluzioni di problemi risolvibili con sistemi lineari

Raffaele Prosperi

Università "Federico II" di Napoli, Dipartimento di Architettura,
ITI "F. Giordani", Caserta
raffaele.prosperi@unina.it

Abstract

Si propone un approccio per la didattica per competenze per il primo ciclo, basato sugli Episodi di Apprendimento Situato (EAS), per far discutere e risolvere agli alunni in modo algebrico intuitivo problemi con due incognite (in classi successive modellizzabili con sistemi lineari di due equazioni in due incognite), analizzando situazioni di vita quotidiana della sfera di interesse dell'alunno, differenziando eventualmente gli ambiti di applicazione per gruppi di alunni. Si presenta il modello didattico basato sugli EAS e sulla valutazione delle competenze e una serie di possibili applicazioni.

Parole chiave: didattica, EAS, inclusione, sistemi.

1. Premessa

La Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006 segnala alla scuola in generale e ai docenti in particolare che per poter partecipare attivamente alla società attuale, "complessa, interessata da rapidi e imprevedibili cambiamenti nella cultura, nella scienza e nella tecnologia", i giovani devono assolutamente abbinare ad alcune conoscenze teoriche e abilità tecniche, "disponibilità all'apprendimento continuo, all'assunzione di iniziative autonome, alla responsabilità e alla flessibilità"; cioè, devono acquisire ***competenze***, intese come "combinazione di conoscenze, abilità e atteggiamenti appropriati al contesto", "sapere in azione".
Di conseguenza, l'attività di insegnamento/apprendimento non può e non deve più trasmettere nozioni, dati, formule e definizioni da imparare a memoria; deve consentire ai ragazzi di imparare in modo significativo, autonomo e responsabile, di fare ricerca e di essere curiosi, di fare ipotesi, di collaborare, di affrontare e risolvere problemi insieme, così come di progettare in modo autonomo.
Le competenze di cittadinanza chiedono alla scuola di prevedere ambienti di apprendimento che consentano di fare ricerca e di indagare, di individuare e risolvere

problemi, di discutere, collaborare con altri nel gestire situazioni, riflettere sul proprio operato e valutare le proprie azioni.
Il lavoro in classe è centrato sull'esperienza, contestualizzata nella realtà, ed è sviluppato in modo significativo attraverso l'attuazione di compiti significativi. Di certo non è possibile escludere conoscenze e competenze relative ai vari assi disciplinari, ma questi devono essere acquisiti durante lo svolgimento di un'attività specifica su problemi situati, non come imposizione frontale prima di approcciare una lunga serie di procedimenti meccanici di applicazione teorica e formale. Il formalismo, ovviamente, non va trascurato, ma dovrebbe essere previsto in una fase finale di recupero e inquadramento delle conoscenze e delle competenze acquisite. I compiti (significativi) di realtà situata incrementano notevolmente interesse, motivazione e coinvolgimento degli alunni.
Al docente è richiesta una posizione notevolmente differente rispetto a quella adottata nel recente passato, ma, purtroppo, nel presente, in particolar modo nelle scuole secondarie, ciò spesso non avviene: il docente deve essere un motivatore, un coach, un tutor, un moderatore; non deve porsi di fronte alla classe, se non in brevi casi di riepilogo o di coordinamento o di correzione di errori sistematici, ma deve agire all'interno dei gruppi, consigliare, spronare.

2. Le competenze nella Didattica della Matematica

Nell'ambito più specifico di una Didattica della Matematica corretta, efficace, inclusiva, orientata all'acquisizione delle competenze, alle competenze specifiche di asse (competenza matematica e competenze di base in scienza e tecnologia) sono direttamente collegate: la competenza digitale, imparare a imparare, competenze sociali e civiche.
Ciò comporta che l'insegnante di Matematica, a qualunque livello, deve modificare il proprio approccio alla disciplina passando da mero trasmettitore di formule, definizioni, teoremi, algoritmi meccanici di applicazione a problemi formali, senza alcun collegamento con la realtà situata degli alunni di oggi, a utilizzatore di metodologie di insegnamento/apprendimento in linea con i risultati richiesti. Deve individuare gli ambiti di interesse degli alunni e i loro stili di apprendimento e proporre situazioni problematiche affrontabili con le competenze acquisite a buon livello da parte dei discenti; non avrebbe senso, ad esempio, presentare un problema modellizzabile e risolvibile con un sistema lineare ad alunni che non hanno competenze sufficienti su polinomi ed equazioni, così come non rispetterebbe le richieste di tutte le Indicazioni e Linee Guida che ci vengono fornite da organismi nazionali e internazionali.

3. Un esempio

Riprendendo l'ultimo esempio, ho riscontrato personalmente in un numero elevatissimo

di casi nelle scuole della mia regione (la Campania) che i sistemi lineari sono trattati con lo stesso identico approccio che è stato utilizzato ai tempi in cui sono stato alunno (all'incirca quarantacinque anni fa): presentazione teorica dei sistemi, senza neanche soffermarsi sulla "***lettura***" del sistema, senza mai (o quasi) farlo individuare dagli alunni come modello per la descrizione formale di un problema lineare a più incognite, che ne permetta in primis una discussione sull'esistenza di soluzioni e sul loro numero, in secundis l'individuazione delle soluzioni stesse ove esistano.
Molte settimane vengono normalmente dedicate alla risoluzione con i vari metodi, omettendo spesso la verifica e quasi sempre il confronto tra i metodi stessi; risoluzione, quindi, meccanica, asettica, che pone gli alunni in concorrenza con calcolatrici tascabili di bassissimo costo, oltre che con innumerevoli software gratuiti, che ne sarebbero sempre ovvi sostituti in qualsiasi ambito lavorativo.
Tale approccio privilegia gli alunni con determinati stili di apprendimento, cioè quelli in grado di partire da una presentazione teorica e formale di un problema, di sviluppare abilità algoritmiche ripetitive (inutili al giorno d'oggi) e di essere in grado, posti davanti ad un problema reale, di individuare il modello adatto a descriverlo, di saperlo derivare e risolvere, discutendone i risultati. Gli alunni con tali caratteristiche sono in numero sempre inferiore, e anche la corrispondente attività nella società è sempre meno richiesta; ad oggi la ***teoria delle intelligenze multiple*** di Howard Gardner sostiene l'esistenza di altre diverse forme di intelligenza oltre a quelle logico-matematica, ed è il caso di favorire lo sviluppo del maggior numero di esse in una persona in formazione.
A ciò si aggiunga che molti alunni giungono al periodo in cui secondo i docenti "il programma" (cosa ovviamente non prevista dalle Indicazioni Nazionali e per nulla condivisa dall'autore e da quanti ritengono necessario un nuovo approccio alla didattica in generale e alla disciplina in particolare) prevede la necessità di svolgere i Sistemi Lineari senza le necessarie conoscenze, competenze e abilità, e sull'altare del "Programma" viene sacrificato l'apprendimento dei più.

4. Una proposta

Uno degli approcci che meglio sembra compendiare richieste su competenze, stili di apprendimento, compiti di realtà è rappresentato dagli EAS (Episodi di Apprendimento Situato) proposti a più riprese dal Prof. Pier Cesare Rivoltella, docente ordinario di Didattica e Tecnologie dell'istruzione e dell'apprendimento presso l'Università Cattolica del Sacro Cuore con le videolezioni del Corso di formazione "Didattica per competenze e metodo EAS" - modulo 2 e nel suo testo "Fare didattica con gli EAS".
Nel caso della didattica dei sistemi lineari, le insospettate capacità mostrate a più riprese dagli alunni dai sei ai dieci anni permettono senz'altro un possibile approccio che potrebbe prevedere:

a. la presentazione di un problema appartenente alla sfera degli interessi degli alunni, possibilmente anche problemi diversi secondo le preferenze di gruppi di alunni

presentati in modo differente (testo scritto, filmato, rappresentazione, grafico, disegno, schema, ecc.) secondo gli stili di apprendimento;
b. una discussione (brainstorming) di gruppo o di classe con osservazioni sulle informazioni disponibili, sulla possibilità di aggregarle per ottenerne di ulteriori;
c. la proposta di modelli di descrizione;
d. una discussione sull'applicazione del modello e sull'esistenza di eventuali soluzioni;
e. un metodo per la risoluzione.

Tale approccio permetterebbe di far sviluppare competenze sulla risoluzione di problemi lineari anche in ordini e gradi di scuola inferiori rispetto a quello in cui si ritiene che gli alunni abbiano le conoscenze e le competenze necessarie; in particolar modo, ovviamente senza un elevato formalismo e senza fornire eccessive definizioni, può essere proposto agli alunni di una scuola primaria (ovviamente degli ultimi anni) un problema in cui si consegna una confezione (acquistata presso il rivenditore preferito) con vari oggetti di due tipi differenti (ad esempio penne e matite, caramelle e cioccolatini, ecc.) indicandone il costo totale e si richiede agli alunni se tali informazioni sono sufficienti ad individuare il prezzo singolo degli oggetti di ciascun tipo o quali possibili risposte possono essere fornite sulla base delle informazioni di cui si è venuti a conoscenza.
Si guidano parzialmente gli alunni, se in difficoltà, a prendere in considerazione la possibilità di acquistare un'altra scatola, chiedendo di discutere le caratteristiche in termini di numero oggetti in essa contenuti e del costo complessivo per stabilire se possa fornire altre informazioni utili alla risoluzione del problema. Senza parlare di sistemi compatibili, determinati, impossibili, ecc., si può giungere ad una descrizione delle proprietà delle due confezioni affinché si possano stabilire univocamente i prezzi dei due tipi di oggetti e all'individuazione di soluzioni che non forniscono informazioni aggiuntive o che addirittura vanno in contrasto tra loro.
Al termine, almeno agli alunni che hanno mostrato particolare predisposizione nella risoluzione del problema, si può proporre un caso con tre confezioni, sempre ciascuna con due soli tipi di oggetti.
Nel prosieguo degli studi, man mano che le nuove competenze acquisite lo consentono, si possono introdurre nuovi concetti e nuovi punti di vista (come le intersezioni tra rette o tra piani alla secondaria di II grado) e potenziare il grado di formalismo del problema.

Bibliografia

Gardner H., (1987).*Formae mentis.* Milano: Feltrinelli.

Rivoltella P.C., (2015). *La didattica per competenze.* Milano: La Scuola.

Rivoltella P.C., Rossi P. G., (2017). *L'agire didattico: manuale per l'insegnante*. Milano: La Scuola.

SESSIONE 2
Applicazioni dell’Analisi Matematica

Un laboratorio sulla successione di Fibonacci

Loredana Biacino

Università “Federico II” di Napoli
Dipartimento “R. Caccioppoli”, Via Cinthia, 80126 Napoli.
loredana.biacino2@unina.it

Abstract

Si riportano i punti essenziali di un laboratorio sulla successione di Fibonacci per studenti del quarto anno della scuola secondaria che si è tenuto lo scorso febbraio nell’ambito del PLS di Matematica della “Federico II”. Sono state introdotte procedure relative a limiti in un modo informale ma rigoroso, definendo ad esempio il numero aureo come elemento di separazione di una coppia di insiemi separati e contigui di numeri razionali.

Parole chiave: Successione di Fibonacci, coppie di insiemi separati e contigui, numero aureo, sezione aurea, spirale logaritmica o equiangola, spirale aurea.

1. Introduzione

Il laboratorio, condotto insieme con la Prof.ssa Ester Giarrusso, aveva lo scopo di introdurre i ragazzi al concetto di limite in maniera informale ma rigorosa: il numero aureo è stato infatti introdotto come elemento di separazione di una coppia di insiemi separati e contigui di numeri razionali. Il discorso svolto può essere portato in una classe quarta (come di fatto è avvenuto) o in una classe quinta.

I ragazzi debbono avere familiarità con le nozioni di successione, di successione crescente o decrescente, di coppia di insiemi contigui. Tutte queste informazioni sono state date prima del laboratorio o durante il suo svolgimento.

Abbiamo quindi presentato l’argomento del laboratorio, la successione di Fibonacci.

Leonardo Pisano (Pisa c.1170-1240), detto Fibonacci, uno dei più grandi matematici che ci siano stati, prese spunto dalla prolificità dei conigli per proporre, nel Cap. XII del suo Liber Abaci[1], scritto nel 1202, il seguente problema, uno dei tanti in un libro che è

[1] Una recente traduzione in inglese è citata in Bibliografia

una vera miniera di problemi di ogni tipo, molti legati a questioni di carattere mercantile e di cambio, altri di carattere aritmetico, come equazioni, vari radicali etc[2]...

Un tale mise una coppia di conigli in un luogo che era circondato da ogni parte da una parete per sapere quante coppie da essa fossero prodotte in un anno, la loro natura essendo che ogni mese fosse prodotta un'altra coppia e che cominciassero a figliare il secondo mese dopo la nascita.

Il problema può essere formalizzato al seguente modo:
1. Nel primo mese, abbiamo solo la coppia di partenza, non ancora atta a generare.
2. Nel secondo mese la coppia di partenza è pronta a generare un'altra coppia di conigli.
3. Nel terzo mese la coppia di partenza ha generato una coppia di conigli, non ancora atta a generare. Quindi le coppie sono 2 di cui una sola è fertile.
4. Nel quarto mese la coppia di partenza ha generato un'altra coppia di conigli. La coppia ottenuta al passo 3 è diventata fertile, ma non ha ancora generato *figliato*. Quindi le coppie ora sono 3, di cui 2 fertili.
5. Nel quinto mese, le due coppie fertili hanno generato un'altra coppia ciascuna. Quindi le coppie di conigli sono diventate 5; le due coppie appena nate non sono fertili, mentre le altre 3 lo sono.

Seguendo questa procedura, si ottengono 8 coppie presenti al sesto mese, 13 al settimo, 21 all'ottavo, 34 al nono, 55 al decimo, 89 all'undicesimo. Alla fine dell'anno quindi le coppie sono 144.
Anche Fibonacci calcola il numero di conigli che si ottengono con la data legge dopo un anno, ma diversamente dallo schema precedente, suppone la prima coppia fertile in partenza così che alla fine del primo mese le coppie sono già 2 e proseguendo nel modo indicato trova che alla fine di un anno le coppie saranno 377. Poi abbandona la questione e non ci torna più su. Fibonacci si ferma alla considerazione di un numero finito di passi, la generalizzazione ad un numero infinito di passi è avvenuta in seguito ed è di questa che ci siamo occupati.
Ai ragazzi è stato consegnato un questionario cui rispondere, attività che è stata svolta parte nei banchi, parte alla lavagna, integrata da nostri interventi. Il questionario è riportato al paragrafo 6 di questo articolo.

2. Definizione e proprietà della successione di Fibonacci

La successione di Fibonacci (così detta dal matematico francese dell'800 Edouard Lucas) è definita, ponendo:

[2] Per notizie di carattere storico su Fibonacci ai ragazzi che fossero interessati è stato consigliato il testo di P. D. Napolitani citato in Bibliografia.

$F_1=1;\ F_2=1;$

(1) $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$.

Essa costituisce il primo esempio nella storia di una successione definita per ricorsione. Possiamo scrivere di seguito i suoi primi termini al seguente modo:

1, 1, 2, 3, ,5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610 ......

Troviamo via via nello scrivere i termini della successione che essi crescono senza limite; la successione tende all'infinito, nel senso che i termini diventano sempre più grandi scavalcando qualunque numero sia stato prefissato. Usando gli smartphone gli studenti hanno potuto verificare che se ad es. fissiamo $M=100$ vediamo che tutti i termini della successione sono maggiori di 100 a partire da $F_{12}=144$; se fissiamo $M=1000$ a partire da $F_{17}=1597$ tutti i termini della successione sono maggiori di 1000; e così via, siccome i termini della successione crescono molto più velocemente di quanto crescano i numeri naturali si verifica che dato M c'é un termine della successione F_r più grande di M e tutti i termini F_n con $n>r$, essendo maggiori di F_r, sono a loro volta maggiori di M.

Poiché ci si è resi conto che la successione cresce in modo molto rapido, alcuni studenti hanno ipotizzato che la crescita fosse esponenziale. Abbiamo risposto che si può verificare che è quasi esponenziale. Non è stata esposta la formula di Binet, valida per ogni $n \in N$:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

che avrebbe potuto pienamente risolvere la questione, per non complicare l'esposizione e non distogliere l'attenzione dallo scopo principale della trattazione.

E' stata invece studiata accuratamente la successione di termine generale:

(2) $x_n=\frac{F_{n+1}}{F_n}$,

cioè la successione: 1, 2, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21, 55/34, 89/55, ...

Osserviamo che dividendo ambo i membri della (1) per F_{n+1} si ottiene:

(3) $x_{n+1}= 1 + \frac{1}{x_n}$.

I ragazzi hanno calcolato con gli smartphone i primi termini della successione (x_n) cercando di ordinarli:

$x_1=1< x_3=1{,}5 < x_5=\frac{8}{5} =1{,}6 < x_7=\frac{21}{13}=1{,}615384 < x_9=\frac{55}{34} =1{,}6176< x_{11}=\frac{144}{89} =1{,}6179 < x_{13}=\frac{377}{233} =1{,}618026<$ ...... $< x_{14}=\frac{610}{377}= 1{,}618037< x_{12} =\frac{233}{144}=1{,}61805 < x_{10} =\frac{89}{55}=1{,}6181< x_8 =\frac{34}{21}=1{,}61904 < x_6= \frac{13}{8}=1{,}625 < x_4=\frac{5}{3} =1{,}\overline{6} < x_2=2.$

Abbiamo chiesto agli studenti di disporre questi numeri su una retta: ovviamente la cosa comporta delle difficoltà!

Però si sono resi conto che, per lo meno relativamente ai termini che abbiamo calcolato:

1) le x con indice dispari crescono;

2) le x con indice pari decrescono;

3) tutte le x con indice dispari sono più piccole di tutte le x con indice pari;

4) i termini vanno sempre più avvicinandosi tra loro.

Un ragazzo, disponendo i numeri sulla retta e osservando il comportamento degli elementi di indice dispari e di quelli di indice pari ha esclamato: “Cosa c’é qua in mezzo?” E ha inserito un punto interrogativo nel ristrettissimo spazio che separava gli elementi di un tipo da quelli dell’altro tipo.
È nata a questo punto una sorta di attesa. La precedente attività pratica era infatti un procedimento euristico: ora c’era bisogno di una verifica di carattere logico-aritmetico per determinare l’andamento della successione. Ai ragazzi era stata consegnata una scheda, tipo questionario, che si allega, dove tutto il percorso era suddiviso in una serie di verifiche. Una di queste consisteva nel provare che, date le frazioni:
$y_1=\frac{a}{b}$, $y_2=\frac{a+b}{a}$, $y_3=\frac{2a+b}{a+b}$, $y_4=\frac{3a+2b}{2a+b}$, $y_5=\frac{5a+3b}{3a+2b}$ con a e b interi maggiori o eguali a 1, risulta, dato che sono tutte diverse tra loro:
1’) $y_1<y_3$ equivale a $y_3<y_5$;
2’) o $y_{2n-1}<y_{2n}$ per $n=1,2$ oppure $y_{2n-1}>y_{2n}$ per $n=1,2$.
La dimostrazione di 1’) é evidente in quanto $y_1<y_3$ equivale a $a^2<b(a+b)$; ma ciò equivale a $y_3<y_5$. Anche la dimostrazione di 2’) è semplice perché $y_1<y_2$ equivale a $a^2<b(a+b)$ e quindi è equivalente a $y_3<y_4$.
Si possono ora dimostrare le 1) e 2) in generale: infatti da 1’) segue che poiché $x_1<x_3$ è anche $x_3<x_5$ e così via, cioè tutti i termini della successione x_n con n dispari crescono; alla stessa maniera, poiché $x_2>x_4$ é anche $x_4>x_6$ e così via, cioè tutti i termini della successione con indice pari decrescono. Non è stato usato il principio d’induzione matematica, affidandosi all’intuizione.
Analogamente la 3) discende dalla 2’) in quanto, essendo $x_1<x_2$ tutti i termini con indice dispari sono inferiori a tutti i termini con indice pari.
Resta da dimostrare la 4). Dalla (3) si ricava, per $n>1$:

$$(4) \qquad |x_{n+1}-x_n|=\frac{|x_n-x_{n-1}|}{x_n x_{n-1}} < \frac{4}{9}|x_n-x_{n-1}|<\left(\frac{4}{9}\right)^2|x_{n-1}-x_{n-2}|<\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}|x_2-x_3| < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Quindi la differenza a primo membro può rendersi piccola quanto si vuole, prendendo n opportunamente grande. Infatti consideriamo la successione $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \frac{1}{2^{n-1}}, \dots$. Ogni termine si ottiene dal precedente dividendolo a metà: è evidente che comunque piccolo si fissi un numero positivo, $\varepsilon>0$, si può trovare un termine della successione che sia più piccolo di ε[3]. Basta risolvere la disequazione $\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon$, equivalente a $2^{n-1}>\frac{1}{\varepsilon}$ che ha come soluzione tutti i numeri naturali $n>\log_2(\frac{1}{\varepsilon})+1$.
Possiamo allora fare il punto della situazione; consideriamo i due insiemi:

$$A=\{x_{2n-1},\ n\in N\}; \quad B=\{x_{2n},\ n\in N\}.$$

Per la 3) si tratta di due insiemi separati, A è il minorante, B il maggiorante. Inoltre, per ogni $\varepsilon>0$ si può determinare un $n\in N$ tale che $|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$, cioè i due insiemi A e B sono contigui: quindi esiste uno ed un solo elemento separatore, cioè un numero reale, che indichiamo con ϕ, tale che $x_{2n-1} \leq \phi \leq x_{2k}$ per ogni $n\in N$ e $k\in N$.

[3] Questa proprietà è già presente negli Elementi di Euclide, Libro 10, Proposizione 1.

Dagli elementi della successione (x_n) si deducono subito delle informazioni su ϕ; la sua parte intera è *1*, la prima cifra decimale è *6*, la seconda *1*, la terza *8*, la quarta *0* e ci si rende conto che proseguendo nel nostro calcolo si possono ottenere tante cifre decimali esatte quante se ne vogliono.
E' facile ora vedere ϕ come limite della successione (x_n). Infatti dato un qualunque intervallo $]\ \phi-h,\ \phi+h[$, poiché ϕ appartiene all'intervallo i cui estremi sono x_{n+1} e x_n per ogni *n*, per la (4) se consideriamo *r* tale che sia $2^{r-1}>\frac{1}{h}$ allora $x_n\ \varepsilon\ ]\ \phi-h,\ \phi+h[$ per $n>r$ e quindi ϕ è il limite della successione (x_n).
Trattandosi di ragazzi di quarta, non abbiamo svolto considerazioni del tipo precedente, ma abbiamo considerato ϕ come limite di (x_n) in modo intuitivo, senza usare la parola limite. Infatti nella relazione (3) i termini della successione (x_n) sono comunque prossimi a ϕ, prendendo *n* opportunamente grande, e quindi possiamo sostituire ϕ al loro posto commettendo un errore piccolo quanto si vuole e quindi sostanzialmente nullo. Pertanto:

(4) $$\phi=1+\frac{1}{\phi}.$$

Una ragazza ha osservato che nella (3) compaiono x_n e x_{n-1}, e tali termini non danno contributo diverso nella (4). E' la stessa osservazione che ci siamo sentiti tante volte fare relativamente ai limiti, in situazioni analoghe! I ragazzi hanno avuto così modo di rendersi conto che quanto più grande è *n* tanto è minore la differenza tra x_n e x_{n-1}, a tal punto da poter essere trascurata.
Dalla (4) si trae:

(5) $$\phi^2=\phi+1.$$

Risolvendo la (5) si ottiene, scartando la radice negativa, $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}618033\ ....$
Si tratta di un numero irrazionale, come i ragazzi hanno dimostrato. Il numero ϕ è noto come numero aureo, perché dalla (4), ponendo

$$x=\frac{1}{\phi}=\phi-1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0{,}618033\ ....$$

otteniamo

(6) $$x^2=1-x,$$

cioè *x* é la sezione aurea dell'unità, la lunghezza di un segmento medio proporzionale tra il segmento unitario e la rimanente parte.
Il discorso si può ripetere per un segmento di lunghezza *L* la cui sezione aurea è allora data da $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}L = L.0{,}618033\ ....$
Gli studenti hanno costruito, con qualche suggerimento, la sezione aurea di un segmento. Inoltre ne hanno stabilito le prime proprietà, quali:
Se y è la sezione aurea di L, allora L-y è la sezione aurea di y e L è la sezione aurea di L+x.
Si è poi solo accennato alla seguente questione:
Cosa si può dire di una successione tipo Fibonacci che comincia con due qualsiasi numeri invece che con 1 e 1?

Consideriamo ad esempio la successione costruita partendo dai due numeri *7* e *9*; si tratta della successione $H_1=7, H_2=9, H_{n+1}=H_n+H_{n-1}$ per $n>2$; i cui primi termini sono:

7, 9, 16, 25, 41, 66, 107, 173, 280, ...

Costruiamo poi la successione (z_n) ponendo $z_n=\frac{H_{n+1}}{H_n}$ per ogni $n\in N$. Risulta:

$z_1=\frac{9}{7}=1{,}28;\ z_2=\frac{16}{9}=1{,}77;\ z_3=\frac{25}{16}=1{,}5625;\ z_4=\frac{41}{25}=1{,}64;\ z_5=\frac{66}{41}=1{,}609;\ z_6=\frac{107}{66}=1{,}62;$ $z_7=\frac{173}{107}=1{,}6168;\ z_8=\frac{280}{173}=1{,}6184;$ *etc....*

Osserviamo che $z_1<z_3$ e $z_4<z_2$ e inoltre i termini con indice dispari sono minori dei termini con indice pari. Quindi, da 1') segue che sarà anche $z_3<z_5$ e così via, cioè tutti i termini della successione (z_n) con n dispari crescono; alla stessa maniera, sarà anche $z_4>z_6$ e così via, cioè tutti i termini della successione con indice pari decrescono. Inoltre, anche in questo caso, fissato un numero piccolo a piacere, $\varepsilon>0$, esiste un n per cui $z_{2n}-z_{2n-1}<\varepsilon$. Quindi anche in questo caso, come nel caso della successione (x_n), è individuato un numero, diciamolo S, che si constata immediatamente coincidere con ϕ. Infatti anche in tale caso si ha: $z_n=1+\frac{1}{z_{n-1}}$, da cui segue $S=\phi$[4]. E così, anche in questo caso si perviene dopo circa una decina di passi a una buona approssimazione di ϕ.

L'andamento della successione (x_n) (come quello della successione (z_n)) è sorprendentemente molto disciplinato e armonioso: infatti i suoi termini alternativamente stanno a sinistra o a destra di ϕ, e vi si avvicinano indefinitamente da un lato e dall'altro sempre di più. E poi il valore ϕ è riconosciuto sin dall'antichità come simbolo di perfezione e regola di bellezza. La successione (x_n) in sé fornisce un esempio abbastanza semplice di quella che a volte vien detta la bellezza della matematica, l'elemento cui si avvicina essendo esso stesso metro di bellezza. Il suo andamento suggerisce la visione di una bella scalinata a due rampe, a sinistra e a destra, che portano allo stesso incantevole ingresso.

3. La formula per il calcolo approssimato dei numeri di Fibonacci

Si riporta ora, per completezza e con qualche osservazione, la formula dimostrata da Jacques Binet (Rennes 1786-Parigi 1856)[5] nel 1843, ma già nota ad Eulero, de Moivre e Daniel Bernoulli:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{7}$$

[4] Lucas, nel testo citato in Bibliografia, considera anche, al posto della successione di Fibonacci, la successione 2, 1, 3, 4, 7, 11, ... definita dall'essere $V_0=2$, $V_1=1$, $V_{n+1}=V_{n-1}+V_n$ per $n\geq 1$ e prova che, per ogni n si ha: $V_n=\phi^n+(1-\phi)^n$.

[5] Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t.19, 1844.

valida per ogni $n \in N$. Essa può essere dimostrata per induzione: infatti per $n=1$ é $F_1=1$; per $n=2$, $F_2=1$; se poi la formula è vera per $n-1$ e per n essa è vera anche per $n+1$. Infatti:

$$F_n+F_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Questa formula è utile per il calcolo approssimato dei valori di F_n per n grande. Infatti per tali valori il termine $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ diventa trascurabile e quindi $F_n \cong \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, relazione che permette facilmente di pervenire al valore corretto, essendo questo intero. Ad esempio, per $n=11$ si ricava: $F_{11} \cong 89{,}0538$, essendo $F_{11}=89$.

Ora consideriamo una successione generalizzata di Fibonacci:

$$a,\ b,\ a+b,\ a+2b,\ 2a+3b,\ 3a+5b,\ \ldots..$$

I termini di questa successione sono:

$G_1=a$, $G_2=b$, $G_{n+1}=G_n+G_{n-1}$, con a e b interi e $n>1$.

E' evidente che si ha:

$G_1=a$, $G_2=b$, $G_{n+1}=aF_{n-1}+bF_n$.

Quindi, per la formula di Binet si può scrivere, per $n>1$:

$$G_{n+1}=a\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]+b\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

che si può ordinare ottenendo:

$$G_{n+1}=\frac{2a+b+b\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\frac{2a+b-b\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \tag{8}$$

Ovviamente per $a=b=1$ si riottiene la formula di Binet; se invece si pone $a=2$ e $b=1$ si ottiene

$$\frac{2a+b+b\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}==\frac{1+\sqrt{5}}{2};\quad \frac{2a+b-b\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

e quindi

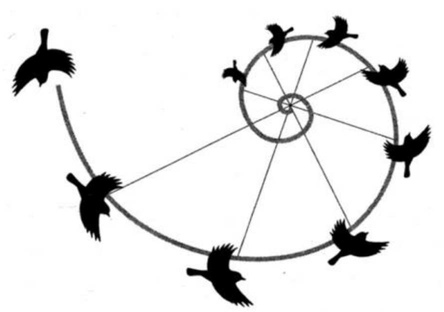
$$G_{n+1}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

cioè l'espressione determinata dal matematico francese Edouard Lucas per il termine generale della successione $V_o=2$, $V_1=1$, $V_{n+1}=V_n+V_{n-1}$.

4. La spirale aurea

Una spirale di equazione $r=r(t)=ab^t$ in coordinate polari, con $a>0$, $b>0$, $b\neq 1$ e dove t è l'angolo e r misura la distanza del punto variabile P dal punto 0, detto *polo* della spirale, si dice *spirale logaritmica*. Infatti essa ha anche equazione $t=\log_b\frac{r}{a}$. Non bisogna confondere la spirale logaritmica con la spirale di Archimede, che ha equazione

r=r(t)=at; mentre nella prima la distanza delle spire dall'origine aumenta in progressione geometrica, nella seconda esse sono egualmente distanziate .
La spirale logaritmica introdotta da Cartesio fu da lui detta *spirale equiangola*, in quanto tracciando un raggio uscente dal polo questo interseca la curva formando angoli eguali. Il falco pellegrino usa questa proprietà quando caccia: infatti, invece di percorrere il tratto rettilineo che lo divide dalla preda, che è il più breve e tra l'altro gli permetterebbe di correre a una velocità maggiore, percorre una traiettoria a forma di spirale: questo perché i suoi occhi non vedono innanzi, ma lateralmente e quindi il falcone può tenere sott'occhio la preda osservandola sempre sotto lo stesso angolo pur tenendo la testa dritta.



La dimostrazione di questa proprietà richiede la conoscenza di un po' di calcolo differenziale e pertanto non se ne è parlato nel laboratorio. Essa però può essere proposta in una classe quinta: consideriamo un punto P tale che $r=r(t)=ab^t$ e il punto vicino Q tale che $r=r(t+\Delta t)=ab^{t+\Delta t}$ e sul segmento OQ consideriamo un punto R tale che $OR=OP$. Allora il segmento PR può essere confuso con un arco di circonferenza di centro O e raggio OP e quindi $PR=r(t)\Delta t$. Nel triangolo PQR si ha: $QR=PR\,tg\,\tau$, τ essendo l'angolo che PQ forma con PR, inoltre $QR=r(t+\Delta t)-r(r)$, quindi $tg\,\tau=\frac{b^{\Delta t}-1}{\Delta t}$. Pertanto, passando al limite, la $tg\,\tau$ tende alla derivata di b^t calcolata in $t=0$, cioè a $log b$, e quindi è indipendente dal punto P da cui siamo partiti. Inoltre la retta PR tende alla normale a OP. Ne segue che anche l'angolo che la tangente geometrica, posizione limite di PQ al tendere a zero di Δt, forma con tale normale e quindi con OP è costante al variare di P.
Una spirale logaritmica tale che i raggi successivi corrispondenti ai valori $t=0$, $t=\frac{\pi}{2}$, $t=\pi$ etc... stiano nel rapporto aureo ϕ si dice *spirale aurea*. In una qualunque spirale logaritmica i raggi successivi corrispondenti ai precedenti valori di t stanno nel medesimo rapporto $b^{\frac{\pi}{2}}$. Quindi nel caso della spirale aurea b deve essere tale che $b^{\frac{\pi}{2}}=\phi$.
Troviamo spirali logaritmiche nei girasoli e nelle pigne (nella parte centrale del fiore o nel fondo della pigna – come anche nell'ananas e nel cavolo- c'è una disposizione delle brattee in due famiglie distinte di spirali), nelle conchiglie, nei vortici degli uragani, nelle spirali galattiche, etc...
Nel corso del laboratorio stata costruita la spirale di Fibonacci (per la quale si rimanda ai testi di Corbalàn e di Mario Livio in Bibliografia) e si è osservato che essa fornisce una buona approssimazione della spirale aurea.

5. Una proprietà della successione di Fibonacci

La successione di Fibonacci gode di un grande numero di proprietà; se ne sono citate alcune, verificando la loro validità in alcuni casi particolari. Ad esempio:

Dati comunque tre numeri consecutivi di Fibonacci, F_{n-1}, F_n, F_{n+1} si ha:

$$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} \mp 1.$$

Questa proprietà dà luogo ad un paradosso, che è stato oggetto di discussione.
Infatti è stata proposta una dimostrazione dell'equivalenza del quadrato di lato 8 e del rettangolo di lati 5 e 13 mediante un'opportuna scomposizione delle due figure in parti apparentemente eguali: alcuni ragazzi hanno subito saputo spiegare l'errore in modo convincente. Inoltre alcuni hanno anche chiesto se il + e il – nella formula si succedano alternativamente, fatto che è stato stabilito facendo un certo numero di verifiche.

6. Questionario

1 - La successione di Fibonacci è definita al seguente modo: $F_1=1$, $F_2=1$, $F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$ per ogni $n \in N$.
Sai determinare, servendoti di una calcolatrice, n tale che sia $F_n>100$? $F_n>1.000$? $F_n>10.000$? Secondo te è possibile, senza effettuare calcoli, dire che esiste n tale che $F_n>10^9$? Perché?
I primi due termini sono dispari, il terzo è pari, i successivi due sono dispari e sono seguiti da un pari; si può affermare che in generale si alternano due termini consecutivi dispari con uno pari?

2 - Considera la successione (x_n) definita ponendo $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$; calcola con una calcolatrice quanto valgono i termini di questa successione per $n=1, 2,...,9$.
Dopo aver introdotto un riferimento cartesiano sulla retta, disponi i punti che hanno per ascisse i valori precedentemente calcolati. Cosa osservi? Come sono ordinati i nove punti?

3 - Si considerino cinque numeri così definiti:

$y_1=\frac{a}{b}$, $y_2=\frac{a+b}{a}$, $y_3=\frac{2a+b}{a+b}$, $y_4=\frac{3a+2b}{2a+b}$, $y_5=\frac{5a+3b}{3a+2b}$ con a e b interi >1:

Dimostrare che
$y_1<y_3$ è equivalente a $y_3<y_5$; e
$y_1<y_2$ è equivalente a $y_3<y_4$.
Si può concludere che se $y_1>y_3$ allora $y_3>y_5$? e se $y_1>y_2$ allora $y_3>y_4$?

4 - Considera la successione $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots\ldots$ Dato un numero positivo $\varepsilon>0$, si può trovare un termine della successione che sia più piccolo di ε? Se sì, quanti sono i termini più piccoli di ε?

Sapresti calcolare, servendoti dell'intuito e di una rappresentazione geometrica, il risultato della somma degli infiniti termini $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+ \dots \frac{1}{2^n}+\dots\dots?$

5 - Sapresti dimostrare che se x è la sezione aurea di L allora L-x è la sezione aurea di x e L è la sezione aurea di $L+x$?

6 - Dato il segmento *AB* di lunghezza *L* si consideri il triangolo rettangolo in *B* di cateti *AB=L* e *BC=L/2*: sull'ipotenusa *AC* si stacchi a partire da *C* un segmento eguale a *BC*, sia *DC*; si riporti quindi su *AB* a partire da *A* il segmento *AE* eguale a *AD*. Dimostrare che *AE* è la sezione aurea di *AB*.

7 - Dimostrare che $\sqrt{5}$ è un numero irrazionale, cioè non esiste nessun numero razionale $\frac{p}{q}$ tale che $\left(\frac{p}{q}\right)^2=5$.

Bibliografia

Fernando Corbalàn, *La sezione aurea,* Mondo Matematico, 2011.

Mario Livio, *La sezione aurea*, Rizzoli, 2003.

Edouard Lucas, *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise,* Bollettino di Bibliografia e di Storia Sci.Mat.Fis., Roma, Tomo X, marzo, aprile e maggio 1877.

Pier Daniele Napolitani, *Fibonacci, La rinascita della matematica in occidente*, Grandangolo, 2016.

L. E. Sigler, *Fibonacci's Liber Abbaci,* Springer, 2003.

Alla ricerca di massimi e minimi in modo inconsueto

Silvana Bianchini

Presidente Mathesis Firenze
Dipartimento di Matematica e Informatica “Ulisse Dini” Firenze
s.bianchini@tim.it

Abstract

I problemi di massimo e di minimo vengono affrontati al quinto anno con l’uso della derivata. Nella presente attività si propongono agli studenti, negli anni antecedenti, casi di situazioni reali e non, invitandoli a scoprire sperimentalmente, osservando e riflettendo, l’esistenza del massimo o del minimo, educando così i ragazzi a “Saper vedere in matematica”, come consigliava Bruno De Finetti. Il calcolo del valore del massimo o del minimo viene determinato geometricamente o seguendo un metodo di Maria Gaetana Agnesi che fa uso della geometria analitica.

Parole chiave: Massimo, Minimo, Geogebra

1. Introduzione

I problemi di massimo e minimo sono interessanti e, volendo anche belli, perché domandano un qualcosa che suscita curiosità: si cerca il modo di rendere massima o minima una quantità; una ricerca che ha affascinato da sempre l’uomo.
Il concetto di massimo e di minimo lo si ritrova nei problemi più antichi. Negli elementi di Euclide (IV - III sec. a. C.) è presente una proposizione nella quale si fa riferimento al massimo di una grandezza geometrica (Proposizione 27 libro VI), Apollonio (III-II sec. a.C.) studia il problema della minima o massima distanza di un punto da una conica, il matematico Zenodoro, attivo in Atene probabilmente nella prima metà del II sec. d.C., affronta i problemi sulle proprietà isoperimetriche dei poligoni regolari e del cerchio. Nel Medioevo si assiste anche all’applicazione di questi concetti nella ristrutturazione delle città che vengono circondate da cinta murarie per la difesa. L’obiettivo: racchiudere la città in un perimetro minimo.

Pianta medievale di Milano

Nei secoli successivi continua l'attenzione a questo tipo di problemi. E non poteva essere diversamente se la natura stessa si comporta, come dice Pierre de Fermat, scegliendo le vie più veloci e se, come afferma Eulero, **"nulla accade nell'universo senza che si renda evidente una qualche regola di minimo e di massimo"**.
Solitamente questi problemi si affrontano al quinto anno dopo aver trattato le proprietà delle derivate. Mi domando se abbia senso aspettare proprio l'ultimo anno, quando gli studenti si trovano in una situazione didatticamente non favorevole per il poco tempo a disposizione che li induce a memorizzare il procedimento di calcolo e a non rendersi conto di come la natura geometrica del massimo e minimo sia strettamente legata all'espressione analitica. Ritengo auspicabile iniziare a lavorare su questo tipo di problemi già nel secondo biennio.

2. Problema di massimo di Regiomontano

Nel XV secolo comincia a modificarsi la concezione medioevale della natura e dell'uomo e si gettano le basi di quella rivoluzione culturale che avrà inizio nei secoli successivi e che coinvolgerà non solo l'arte e la letteratura, ma anche la matematica, sia per quanto riguarda la geometria che l'algebra: il Rinascimento. Gli studiosi di questo periodo, letterati, artisti e scienziati, aspirano a rifondare la civiltà moderna su quella antica e sulle tradizioni. Centro di questa nuova impostazione di pensiero è l'Italia ed è in questo Paese che letterati, artisti e scienziati vengono per respirare questa nuova atmosfera. Dalla Germania scende a Roma, per passare poi a Padova, a Ferrara e infine a Venezia, un giovane matematico e astronomo, Giovanni Müller (1436-1476) che si farà chiamare Regiomontano, da Regiomons, nome latino della sua città di nascita (Könisgsberg in Franconia).
Autore di un compendio dell'Almagesto di Tolomeo "Epitome" e del trattato di trigonometria "De Triangolis omnibus libri V", si è dedicato anche ad altri tipi di lavori mostrando interesse a ricerche più teoriche oltre che all'astronomia e alla geometria.

Nella corrispondenza epistolare che Regiomontano ebbe con il suo compaesano Cristian Roder, emerge un problema di massimo particolarmente significativo, definito dal Loria, storico della matematica, "il primo problema del genere che appaia nella letteratura dopo Apollonio".

"In quale punto della superficie terrestre un'asta sospesa verticalmente appare più lunga? Ovvero in quale punto l'angolo di visuale risulta massimo?"

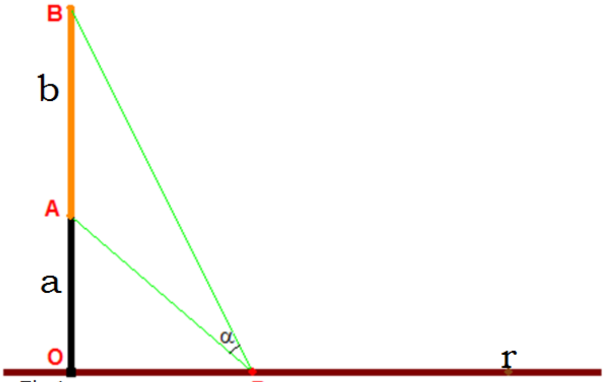


Fig.1

Sia **AB** un'asta verticale, **O** la proiezione di **A** sulla retta orizzontale **r**, detta linea di terra. Nella Fig.1 è **AB = b**, **OA = a**, rispetto ad una unità di misura u. Si tratta di individuare su r il punto P tale che l'angolo APB sia massimo(Fig.1).

3. Riflettere per giungere ad un risultato

"**Riflettere per giungere ad un risultato**" è il titolo con cui inizia il primo paragrafo del libro IL "SAPER VEDERE" IN MATEMATICA scritto, per gli studenti della scuola secondaria di primo e secondo grado, dal grande Maestro Bruno De Finetti, docente universitario, creatore dell'interpretazione soggettivistica della probabilità. Il riflettere guida l'allievo a "capire e scoprire" cosa bisogna guardare e osservare per dominare il problema. In questo modo gli alunni si muovono verso la comprensione del problema e la gioia del capire li porta ad amare la matematica. L'autore propone un'educazione allo studio della matematica innovativo, quasi rivoluzionario, avente il pregio di instaurare un continuo passaggio dal concreto all'astratto e viceversa. Ritengo che un'educazione al saper vedere sia ancora oggi attuale e che si debba seguire nell'insegnamento, perché responsabilizza gli studenti e li rende attori nello scenario matematico.

4. Come risolvere il problema?

Come muoversi in classe? Conviene guidare i ragazzi in un percorso didattico che proceda dal concreto all'astratto seguendo un'impostazione sperimentale e operativa: l'aula diventa così un laboratorio in cui gli alunni sperimentano, ragionano, scoprono, applicano e risolvono.

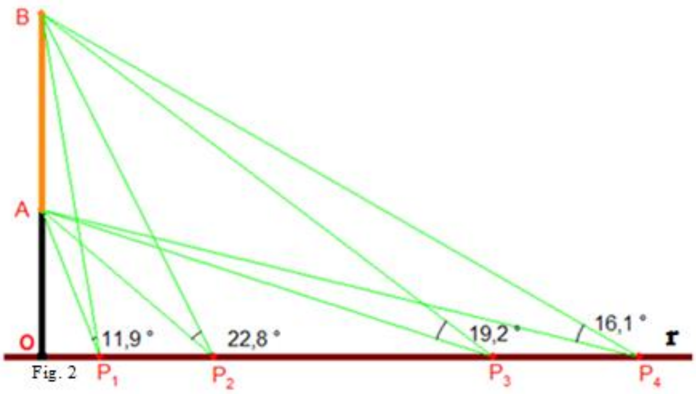


Fig. 2

Gli studenti disegnano su dei fogli trasparenti, in più punti della linea di terra r, gli angoli di visuale con cui viene vista l'asta e ne misurano l'ampiezza con un goniometro. Rilevano che, man mano ci si allontana dall'asta, le ampiezze degli angoli prima crescono e poi decrescono e pertanto deducono l'esistenza del valore massimo dell'ampiezza dell'angolo (Fig.2).

Come trovarlo?

Si invita i ragazzi a ricercare una visione che aiuti a comprendere meglio la situazione.

Si suggerisce di rivedere le proprietà degli angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco: tutti gli angoli alla circonferenza che insistono su uno stesso arco sono congruenti. Si rendono conto che il luogo dei punti che vedono l'asta AB sotto uno stesso angolo è l'arco ACB, (Fig.3).

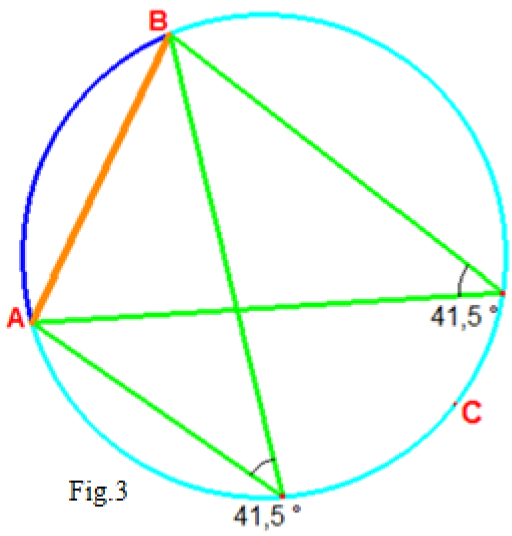


Fig.3

La visione, come scrive Piero Della Francesca (1415-1492) nel suo libro De Prospectiva Pingendi, avviene per angoli:

- "Ogni quantità se rappresenta socto angolo all'occhio"
- "Tutte le cose vedute socto un medesimo angolo, […] s'appresentano a l'occhio equali"

– Se da un puncto se partissero linee a do base equali et una fosse più propinqua che l’altra, la più propinqua farà maggiore angolo nel dicto punto” (Fig.4)

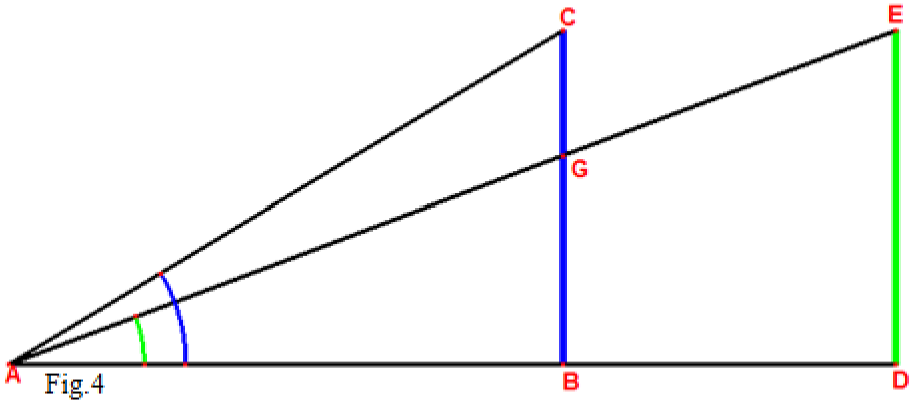


Fig.4

Le precedenti considerazioni servono per rappresentare in modo adeguato, utilizzando il software Geogebra, il problema della visione dell’asta per capirne la dinamica che fa pervenire alla soluzione.
Nelle immagini che seguono (Fig.5, Fig.6, Fig.7, risalta che man mano che i punti P e Q della linea di terra r si avvicinano, gli angoli alla circonferenza di vertice P e Q, aumentano la loro ampiezza, pur rimanendo sempre uguali tra loro; quando P viene coincidere con Q, la circonferenza diventa tangente e l’angolo risulta massimo.

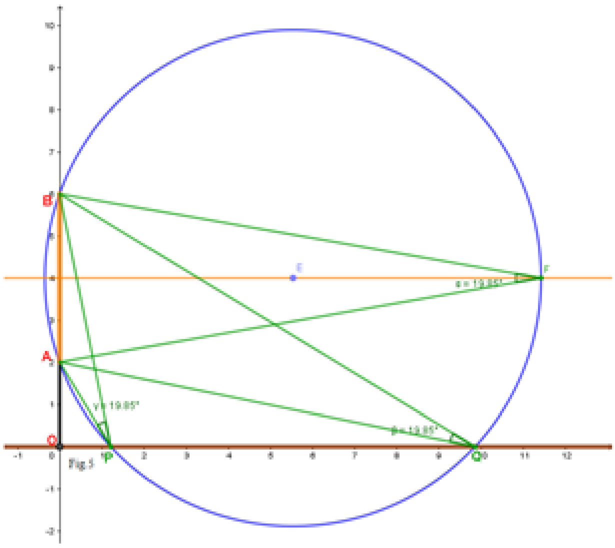
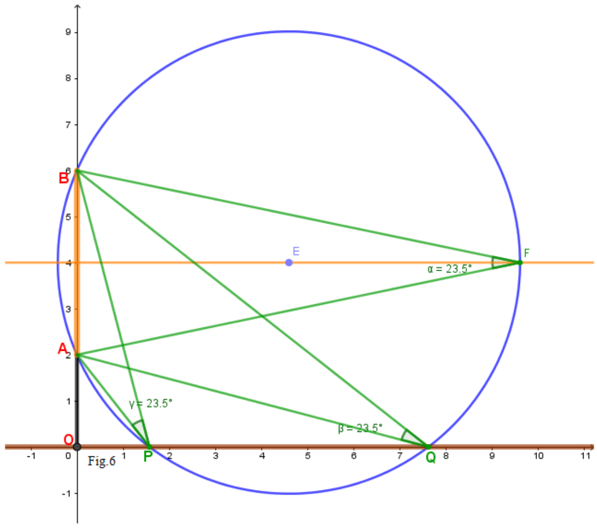
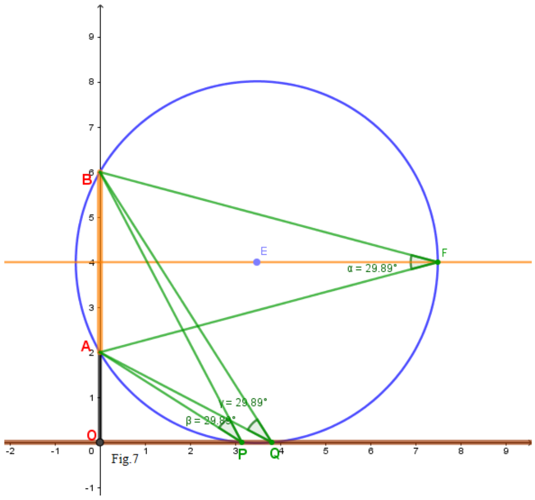
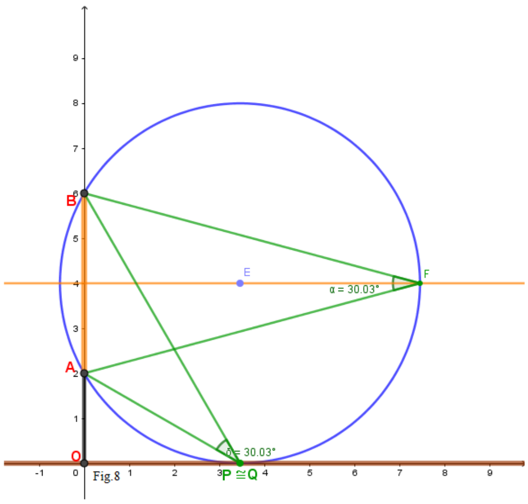


Fig.5

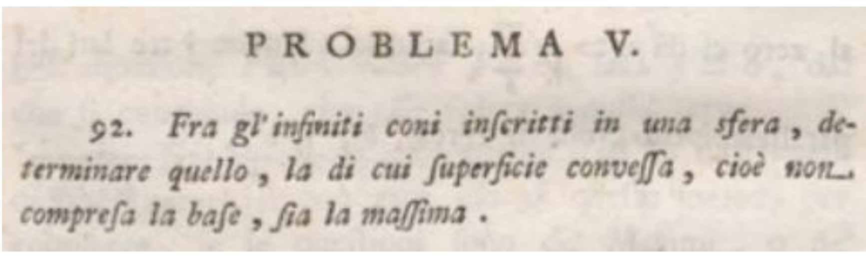






Il punto di visuale massima è il **punto di contatto** della circonferenza tangente alla linea di terra che, per il teorema della tangente e della secante, si trova ad una distanza $\overline{OP}$ tale che $\overline{OP}^2 = \overline{OA} * \overline{OB} = a(a+b)$ $\rightarrow \overline{OP} = \sqrt{a(a+b)}$.

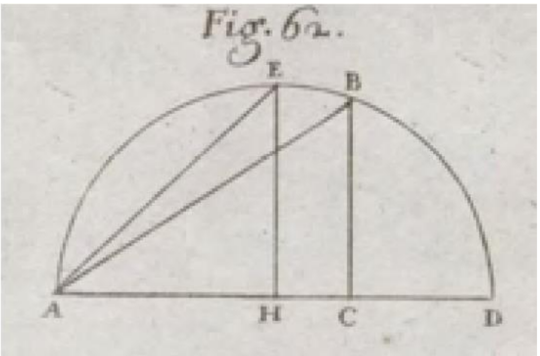
5. Un problema di Maria Gaetana Agnesi



PROBLEMA V.

92. *Fra gl' infiniti coni inscritti in una sfera, determinare quello, la di cui superficie convessa, cioè non compresa la base, sia la massima.*

Il problema, tratto dalle Instituzioni Analitiche ad uso della gioventù italiana 1748 di Maria Gaetana Agnesi, richiede di ricercare, tra gli infiniti coni retti inscritti in una sfera, quello avente superficie laterale massima. Come si muoveranno i ragazzi a fronte di tale richiesta? Alcuni, almeno i più fragili, disegnano una sfera e il cono inscritto: una figura che non esplicita il procedimento da seguire. Maria Gaetana trasferisce il problema dallo spazio al piano: disegna una semicirconferenza e due triangoli rettangoli in essa inscritti, facendo riflettere che, nella rotazione completa attorno al diametro, il semicerchio genera la sfera e i triangoli rettangoli i coni (Fig.62)



Infiniti sono i punti sulla semicirconferenza, infiniti saranno i triangoli rettangoli e infiniti i coni. In tal modo suggerisce un metodo di approccio che guida ad una interpretazione del quesito che ne semplificare la risoluzione. Archimede dimostra che le superfici dei coni iscritti stanno tra loro come i prodotti $(AE)\cdot(EH)$, $(AB)\cdot(BC)$; indicando con S_1 e S_2 le superfici laterali dei coni vale la proporzione: $S_1:S_2=(AE)\cdot(EH):(AB)\cdot(BC)$. Anche questa volta il problema si affronta in modo laboratoriale.
Quale la via da seguire? Determinare sul diametro il punto H che rende il prodotto $(AE)\cdot(EH)$ massimo: la superficie laterale del cono sarà massima, quando sarà massimo il prodotto $(AE)\cdot(EH)$. Con Geogebra gli studenti creeranno una successione di figure che, al variare di E sulla semicirconferenza, mostrano che il prodotto $(AE)\cdot(EC)$ prima cresce e poi decresce, provando così l'esistenza del massimo per tale prodotto.
Con un procedimento che fa uso della geometria analitica, Maria Gaetana vuole mostrare ai giovani come sia possibile determinare i massimi e i minimi ***"senza l'aiuto del calcolo differenziale"***, ma servendosi solo della geometria analitica, sia pure solo per le curve espresse da equazioni algebriche, **"*quantunque il calcolo degli infinitesimi sia il più semplice, il più breve, ed il più universale*"**. Il suo scopo è quello di educare i ragazzi a risolvere, quando si presenta la possibilità, lo stesso quesito con metodi diversi.

Bibliografia

Maria Gaetana Agnesi - *Instituzioni Analitiche ad uso della gioventù italiana* - 1748;

Gino Loria – *Storia delle matematiche* - Hoepli-1982;

Piero della Francesca- *De Prospectiva Pingendi* - Le lettere Firenze 1984

Le curve celebri
“ La catenaria: considerazioni su una curva matematica ed applicazioni in ambito architettonico”

Mario Innocenzo Mandrone

Dipartimento di Scienze e Tecnologie - Università degli studi del Sannio
almavit@libero.it

Abstract

Prendendo spunto da un problema proposto nella prova scritta di Matematica della sessione ordinaria 2003 dell’Esame di Stato nei Licei Scientifici sperimentali – Piano Nazionale Informatica - si propone una visione didattica interdisciplinare di una curva particolarmente interessante: la catenaria, nei suoi risvolti non solo matematici e fisici ma anche in applicazioni in ambito architettonico. L’argomento, in realtà, potrebbe essere inserito nella fase di “fortificazione” e “sistemazione” di concetti inerenti lo studio di funzioni, il calcolo di integrali, la risoluzione di equazioni differenziali, la modellizzazione in Fisica e la storia dell’arte contemporanea. Sarà presentata, nelle linee essenziali, una possibile trattazione della problematica da un punto di vista didattico analizzando anche la situazione fisica che porta all’equazione della curva attraverso le leggi della meccanica classica, in particolare applicando le leggi della Statica ed utilizzando le condizioni di equilibrio di un corpo sospeso. Ed infine il problema di determinare l’espressione analitica della catenaria sarà affrontato e risolto anche da un punto di vista meccanico, utilizzando la proprietà che una corda di lunghezza assegnata L, sospesa in due punti e soggetta all’azione della sola forza gravitazionale, deve possedere energia potenziale minima. Tale metodo conduce all’impiego di tecniche di analisi funzionale, la qual cosa, però, esula dagli scopi del presenta lavoro.

Parole chiave: Curve algebriche, Catenaria, Parabola

1. Introduzione

In matematica e in architettura si impiega il termine “catenaria” per indicare la curva il cui andamento è quello di una catena o corda di densità uniforme e perfettamente flessibile sorretta per i suoi due estremi, soggetta unicamente all’azione della sua forza peso. In realtà non si tratta di una curva ma di una famiglia di curve, ognuna della quali è determinata dalle coordinate dei suoi estremi e dalla sua lunghezza. I matematici si sono sempre mostrati affascinati dalla forma che assume una corda o una catena soggetta al proprio peso cercando di individuare l'equazione della curva che potesse descrivere tale andamento. Così, per esempio, già in alcune annotazioni di Leonardo da Vinci possiamo incontrare schemi di catene penzolanti. La prova che la risoluzione del problema non era per nulla facile la abbiamo se si pensa che un uomo dello spessore intellettuale di Galileo commise un errore nella soluzione della problematica visto che, nel 1638, nel "Dialoghi sopra due nuove scienze", affermò che una "catena sospesa "assume un andamento parabolico. Certo è che, quando Galileo realizzò gli esperimenti che lo condussero a tale risultato, il saggio di Pisa già aveva 74 anni ed era quasi cieco. Anche se l'andamento della parabola somiglia molto a quello della catenaria, le due curve sono differenti posto che, mentre la parabola è descritta da una equazione quadratica, l'espressione della catenaria coinvolge funzioni iperboliche. Nel 1669, il matematico tedesco Joachin Jungius riuscì a dimostrare che una "catena pendente" non assume la forma di una parabola. Dovettero passare, però, quasi 60 anni, dalla morte di Galileo, avvenuta nel 1642, per ottenere la soluzione corretta. Difatti, nel 1690, lo svizzero Jakob Bernoulli propose una sfida nella prestigiosa "Acta Eruditorum", invitando i matematici dell'epoca a scoprire quale fosse la "vera formula" matematica che potesse descrivere l'andamento che assume una "catena sospesa". La risposta non tardò ad arrivare e, già nel 1691, il problema fu risolto, in maniera indipendente, dal fratello minore Johnn Bernoulli, con il quale aveva grande rivalità, e da Gottfried Leibniz e Christian Huygens Fu proprio durante queste investigazioni che Huygens impiegò per la prima volta il termine "catenaria" per designare questa famiglia di curve, in una memoria indirizzata a Leibniz. Questo termine, che deriva dal latino "catena", si è imposto ad altri sinonimi quali "curva funicolare" o "rolletta". Nello stesso anno in cui il problema fu risolto (1691), David Gregory scrisse uno dei suoi primi trattati su questa famiglia di curve e, più tardi, nel 1774, Leonardo Eulero dimostrò che la catenaria è quella curva che, ruotata intorno all' asse x, genera nello spazio tridimensionale una figura detta "catenoide", una superficie di rotazione avente area minima. Dallo studio di tali problemi si sviluppa la teoria delle superfici minime; la data di nascita ufficiale è il 1762, anno di pubblicazione della memoria di Lagrange" Essai d' une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies". In questa pubblicazione Lagrange determina l'equazione differenziale che deve essere necessariamente soddisfatta da tutti i punti della superficie che minimizza l'area per un assegnato contorno nello spazio. L'equazione trovata viene chiamata equazione di Eulero-Lagrange o anche "equazione delle superfici minime". La costruzione di superfici minime vincolate in uno o più punti riveste un ruolo fondamentale nelle applicazioni in ambito architettonico in quanto permettono di migliorare l'edificazione degli spazi disponibili. In architettura, infatti, la fabbricazione di edifici che ottimizzassero costi, materiali, ma soprattutto gli spazi, costituiva un grosso problema in un periodo di grande crescita demografica dovuta al boom economico. L'architetto che più di altri utilizzò la teoria delle superfici minime a tale scopo fu Otto

Frei. Per la creazione di superfici minime viene utilizzato un software liberamente disponibile in rete: Surface Evolver.

2. La catenaria nell' antichità

Mentre in Occidente bisogna attendere il secolo XIX per iniziare ad utilizzare la catenaria in Architettura, in Oriente l'impiego di queste strutture era più comune nell'architettura dell'Islam. Un esempio di quanto detto lo si può evincere dalla sorprendente somiglianza che possiamo notare tra la cupola della "Mezquita de la Roca" (Moschea della Roccia) di Gerusalemme e una perfetta cupola catenaria. Anche precedentemente, nell'Africa nord-orientale, per esempio in Sudan, si costruivano ampie abitazioni circolari coperte da una cupola catenaria, aventi una straordinaria resistenza una volta chiusa la cupola . Lo sviluppo di questa tecnica nacque in risposta alla scarsità del legno. In questo zona, difatti, il legno era così scarso e prezioso da non poterlo utilizzare su larga scala per la costruzione di abitazioni. Una situazione analoga si verifica a latitudini più settentrionali. Difatti esistono studi che sembrano mostrare che gli igloo degli eschimesi- canadesi non sono emisferi, come di solito li rappresentiamo, ma la loro morfologia è più vicina a catenoidi di rivoluzione con un rapporto ottimale altezza / diametro. Paradossalmente ci sono esempi di catenarie nelle società più povere e in quelle più ricche. Ad esempio, l'enorme resistenza e stabilità delle volte catenarie fa sì che esse vengano attualmente utilizzate per coprire i reattori nelle centrali nucleari. Indipendentemente da ciò, esistono prove inconfutabili che nell'antichità si costruivano intuitivamente, nei grandi edifici, archi stabili aventi la curvatura delle catenarie capovolte. Probabilmente il miglior esempio che possiamo fornire è rappresentato dal Grande Arco di Ctesiphon (Ctesifonte) o Taaq-i Kisra che è l'unico resto visibile della antica città di Ctesiphon nella Persia antica, l'attuale l'Iraq Questo arco, costruito senza cassero, faceva parte del palazzo imperiale della città che per sette secoli fu la capitale dei Seleucidi, Parthi e Sassanidi, popoli che fecero da baluardo all'espansione dell'impero romano. È degno di nota che le inondazioni che avvennero in quell'area durante il secolo scorso, hanno abbattuto una delle ali della costruzione esistente, ma non l'arco grande che ancora oggi è possibile ammirare.

3. Il problema

La prima parte del secondo problema dell'Esame di Stato del 2003 risultava così formulata: Sia

$$f(x) = a * 2^{x} + b * 2^{-x} + c$$

con a, b, c numeri reali. Si determinino a, b, c in modo che : 1) la funzione sia pari;2) $f(0) = 2$; 3) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2ln2}$. Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a, b, c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G."

Dalle condizioni poste dal problema risulta: $\begin{cases} a\,(2^x + 2^{-x}) = b\,(2^x + 2^{-x}) \\ a + b + c = 2 \\ \frac{a}{\ln 2} + \frac{b}{\ln 2} + c = \frac{3}{2\ln 2} \end{cases}$

Risolvendo il sistema si ottiene:

$$a = b = 1\,;\; c = 0$$

Pertanto la funzione richiesta è:

$$f(x) = 2^x + 2^{-x}$$

Si osservi, ora, che:

$$Y = f(x) = 2^x + 2^{-x} = e^{x\ln 2} + e^{-x\ln 2} = 2\,cosh\,(x\ln 2)$$

ove $cosh\; g(x)$ rappresenta la funzione coseno iperbolico definita da :

$$cosh\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Considerata la dilatazione definita da:

$$\begin{cases} X = (2\ln 2)\,x \\ Y = y \end{cases}$$

la curva del problema può essere riscritta come:

$$Y = 2cosh\left(\frac{X}{2}\right)$$

che individua, appunto, un esempio di curva catenaria.

4. La "fisica" della catenaria ovvero l'equazione della catenaria dedotta da considerazioni di carattere fisico

Presentiamo, nelle linee essenziali, una possibile trattazione della problematica da un punto di vista didattico, analizzando la situazione fisica che porta alla equazione della catenaria. Si consideri, pertanto, una corda sottile, inestensibile e perfettamente flessibile di lunghezza L, disposta in un piano verticale e sospesa agli estremi situati ad una stessa altezza rispetto ad un piano orizzontale e distanti K>0. Sia ρ la densità lineare della corda supposta costante. Scelto un opportuno sistema di riferimento avente l'origine O nel punto più basso della catenaria, si consideri un tratto di corda s avente estremi coincidenti col punto O e con un generico punto A ; Su di esso agiscono tre forze : 1) Una forza orizzontale (tensione) , agente lungo la tangente in O alla curva ,dovuta alla trazione esercitata sul punto O dalla corda; 2) Una forza T, agente lungo la tangente in A alla corda e diretta verso l'alto. Tale forza forma un angolo ϑ rispetto all'asse delle ascisse. Essa dipende alla reazione vincolare della corda; 3) La forza peso del tratto di corda considerato, applicata nel baricentro di quest'ultimo. La condizione di equilibrio impone che la somma vettoriale delle tre forze agenti sia nulla:

$$\vec{T} - \vec{T_0} + \vec{P} = \vec{0}$$

Considerando, pertanto, le componenti cartesiane dei vettori

$$\begin{cases} -T_0 + T\cos\vartheta = 0 \\ T\ sen\ \vartheta - \rho s g = 0 \end{cases}$$

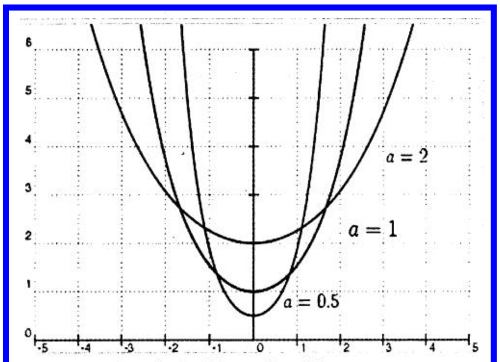
e, posto: $v = \frac{ds}{dx}$ $ed\ a = \frac{T_0}{\rho g}$, si ottiene la seguente equazione differenziale

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{a} * \left(\sqrt{1+v^2}\right)$$

che può essere integrata per separazione di variabili, ottenendo:

$$y(x) = a\left(\frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2} - 1\right)$$

L'equazione così ottenuta è quella di una catenaria e rappresenta, dal punto di vista fisico, il luogo dei punti della corda considerata sottoposta all'azione della sola forza peso, in condizione di equilibrio. Si riporta il grafico della catenaria ottenuto per diversi valori del parametro a.



Catenaries for different values of the parameter

5. La parabola e la catenaria

È possibile stabilire un legame tra una parabola e la catenaria, pur esprimendo le due curve situazioni matematiche indubbiamente diverse, studiando il luogo geometrico dei punti del piano descritto dal fuoco di una parabola quando essa rotola su un opportuno asse. A tale scopo consideriamo, in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, la parabola avente asse di simmetria coincidente con l'asse y, vertice V nell'origine e fuoco nel punto F(0,a) con a>0. Come è noto, tale parabola ha equazione : $y = \frac{x^2}{4a}$. Il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola in un suo punto generico P $(x_0\ , y_0)$ si ottiene calcolando la derivata prima della funzione in x_0. Si ottiene:

$$m = f'(x_0) = \frac{x_0}{2a} = tg\, \vartheta$$

essendo ϑ l'angolo formato dalla retta tangente alla parabola nel punto P con l'asse delle ascisse. Si supponga ora che la parabola rotoli, senza strisciare, sull'asse delle ascisse. Durante il moto la curva interseca l'asse delle ascisse in un suo punto P (variabile) ad una distanza dall'origine pari alla lunghezza dell'arco VP ed è tale che la sua tangente in P coincide con l'asse x. Ovviamente il rotolamento avviene sia in senso orario che antiorario. In tale ipotesi, è possibile determinare le coordinate cartesiane del fuoco della parabola in funzione di un parametro ottenendo in tal modo l'equazione parametrica della curva. Eliminando tale parametro si perviene all'equazione cartesiana della curva data da :

$$y(x) = a * \left(\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}}{2} \right) = a * cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

che rappresenta, appunto, l'equazione della catenaria.

6. Altre vie per arrivare alla catenaria

a) La trattrice

La trattrice fu studiata da Huygens. Si tratta di una curva di origine fisico-matematica che gode della proprietà "equitangenziale". Ciò significa che i segmenti di tangenza compresi tra i punti della curva e le intersezioni di questi col suo asintoto hanno lunghezza costante. L'area compresa tra la trattrice e il suo asintoto ha un valore finito. L'evoluta della trattrice è la curva catenaria, dove per evoluta di una curva si intende il luogo geometrico dei centri dei suoi cerchi osculatori. Il legame tra la trattrice e la catenaria è messo bene in evidenza dalla seguente proprietà: le rette perpendicolari alla prima curva (trattrice) risultano essere tangenti alla seconda (catenaria). Quando invece la trattrice ruota intorno al l'asintoto, essa dà origine ad una superficie di curvatura negativa, denominata "pseudosfera", usata da Beltrami nel 1868 nell'ambito delle geometrie non euclidee. Per interpretare ciò è necessario introdurre la nozione di geodetica. In matematica, e più precisamente in geometria differenziale, una **geodetica** è la curva più breve che congiunge due punti di uno spazio. Lo spazio in questione può essere una superficie, una più generale varietà riemanniana o un ancor più generale uno spazio metrico. In fisica, le geodetiche ricoprono un ruolo importante nello studio dei moti dei corpi in presenza di campi gravitazionali, dal momento che la relatività generale interpreta la forza gravitazionale come una deformazione dello spazio-tempo quadridimensionale.

b) La Clinoide

Dal greco "inclinare", la clinoide è la curva che registra l'inclinazione di qualche fenomeno. L'equazione cartesiana della curva è

$$y = be^{\frac{x}{a}} + ce^{-\frac{x}{a}}$$

Ponendo $b = 0 \;\; o \;\; c = 0$ si ottiene una curva esponenziale. Con $b = c = \frac{a}{2}$ si ha la catenaria. Quindi, la catenaria è un caso particolare di clinoide.

c) La curva Velaria

La velaria è la curva formata dal profilo di un drappo rettangolare di vela sottoposta alla pressione del vento, a prescindere dalla gravità. Fu studiata per la prima volta da **Giacomo Bernoulli**, il quale scoprì che la velaria non è altro che una catenaria ruotata di 90°.

7. Applicazione in ambito architettonico

L'interesse della catenaria va al di là delle applicazioni in matematica e fisica. Numerose sono le applicazioni in vari ambiti dell´architettura. Infatti la catenaria è stata spesso utilizzata per realizzare manufatti e strutture architettoniche per il fatto che ha la proprietà di avere in ogni suo punto una distribuzione uniforme del suo peso totale. Le strutture realizzate secondo tale curva subiscono soltanto sforzi a trazione, come le funi di sostegno nei ponti sospesi, oppure, in alternativa, a compressione, quando la struttura realizzata ha la forma di una catenaria rovesciata, come nelle strutture di cupole. Ne sono un esempio la cupola della cattedrale di St. Paul a Londra progettata da Robert Hooke (colui che studiò le leggi dell´elasticità) e la Sagrada Familia a Barcellona, progettata da Gaudì. Inoltre numerosi ponti sono realizzati con la struttura di una catenaria rovesciata tra cui ricordiamo il ponte di Santa Trinita a Firenze e il famoso Gateway Arch, dell´architetto finlandese Saarinen, posto nel parco del Jefferson National Expansion Memorial. Nonostante le applicazioni della catenaria siano numerose, in Architettura nessuno è mai stato in grado di utilizzarla con così tanta frequenza, abilità e consapevolezza come Gaudì. Gaudì non appartiene ad alcun movimento, o scuola, o stile, o tempo: ha sempre cercato la sua ispirazione nella Natura, in particolare in quella del Mediterraneo. Accanto alla grande capacità di osservazione, aveva anche la qualità di privilegiare sempre l'assoluta funzionalità delle cose che realizzava. Mentre gli architetti hanno sempre utilizzato la geometria euclidea, in quanto "facile" da disegnare, Gaudì, utilizzando la Geometria della

Natura, fatta di superfici tridimensionali composte (come il paraboloide iperbolico, l'iperboloide, il conoide, l'elicoide e l'arco catenario), diventa senza dubbio un architetto unico nel suo genere. Uno degli esempi più frequenti e più semplici dell'applicazione di questa Nuova Geometria ci viene offerto dall' arco catenario. La caratteristica fondamentale di quest' arco è che la linea di pressione è uniformemente distribuita su tutta la superficie, e corrisponde esattamente con la linea della catenaria. Ciò vuol dire che con il minimo materiale si ottiene la massima resistenza. In questo senso l'arco catenario è funzionale, ma è anche piacevole, e lo è proprio in virtù della sua funzionalità e spontaneità. Un notevolissimo esempio di applicazione di questi principi è visibile nella Sagrada Famillia, per la cui realizzazione Gaudì fa ampio uso dell'arco catenario. *La chiesa* avrebbe dovuto avere una dimensione di 180x 80 metri, per una capacità di 14.000 persone. Nel progetto erano previste tre facciate e diciotto torri. Le 18 torri avrebbero dovuto simboleggiare i 12 apostoli, i 4 evangelisti, la Vergine e Gesù. Le tre facciate sono così denominate: 1) la facciata della Natività, l'unica che l'architetto riuscì a completare,2) la facciata della Passione ove è possibile notare il cosiddetto "quadrato magico", in quanto la somma dei numeri per righe e diagonali dà lo stesso risultato "33" a simboleggiare gli anni di Cristo; 3) la facciata della Gloria, non ancora ultimata. Alla morte dell'architetto, nel 1928, risultava terminata solo la prima delle quattro torri della facciata della Natività, portata a compimento solo dieci anni più tardi. Nel 1976, sulla base di un disegno di Gaudì, venne conclusa anche la facciata della Passione, ma i lavori procedevano con grande lentezza a causa delle ristrettezze finanziarie. La chiesa è stata consacrata, ma non conclusa, il 7 Novembre 2010 da papa Benedetto XVI, che l'ha elevata al rango di Basilica minore. Secondo previsioni la fine dei lavori dovrebbe essere datata 2026.

In genere la catenaria è la forma assunta dai tradizionali ponti sospesi di liane o di tronchi, come avviene, seppur in versione moderna, per il ponte realizzato a Kusma, in Nepal, inaugurato nel 2010 e diventato una grande attrazione turistica con i suoi 135 m di altezza a strapiombo sopra il fiume Kaligandaki. In attesa di scoprire le nuove forme avveniristiche dei ponti futuri, segnaliamo il ponte più recente, costruito in Cina (ottobre 2015) a Yuntaishan con la base interamente in vetro, adatto per essere attraversato solo dai più temerari. In esso sembra concretizzarsi quanto scrive l'architetto Giulio Pizzetti sul ponte come simbolo di mediazione tra terra e cielo (da cui il termine Pontifex, "costruttore di ponti", attribuito al pontefice): «Balzo verso l'infinito e l'inconoscibile, tentativo di ricongiungimento con il soprannaturale e l'ultraterreno».

Nei moderni ponti strallati, dove i tiranti non vengono più disposti a sorreggere verticalmente l'impalcato, ma sono collocati ad arpa o a ventaglio sui piloni, le forme si modificano e appaiono rettilinee. I ponti strallati si stanno imponendo come soluzione ideale per superare le medie e grandi lunghezze. L'idea di sorreggere una trave con funi inclinate (gli stralli) è antichissima: i ponti levatoi medioevali e, molto prima, i picchi delle navi egiziane, ne sono un esempio. Le prime applicazioni di tale sistema nella costruzione di ponti apparvero sin dai secoli XVII e XIX. La prima realizzazione conosciuta, del 1784, è un ponte a Freyberg dovuta al carpentiere tedesco Immanuel Loscher.

Bibliografia

Casolaro F., Santarossa R.1997: "*Geometrie non euclidee e geometria differenziale: note didattiche*", Congresso Nazionale Mathesis Caserta 1997 - pag. 213-219.

Galilei, G. (1990) *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze,* a cura di E. Giusti, Einaudi, Torino.

Boyer, C. (1982) *Storia della matematica,* Mondadori, Milano.

Kline, M. (1991) *Storia del pensiero matematico,* Einaudi, Torino.

Cresci, L. (1998) *Le curve celebri, invito alla storia della matematica attraverso le curve piane più affascinanti*, Muzzio, Padova

Cresci, L. (2005) *Le curve matematiche tra curiosità e divertimento*, Hoepli, Milano.

Courant R., Robbins, H. (2000) *Che cos'è la matematica?*, Bollati Boringhieri, Torino

Levi-Civita T., Amaldi, L. (1974) *Lezioni di Meccanica razionale*, Zanichelli, Bologna.

Loria, G. (1930) *Curve piane speciali, algebriche e trascendenti*, II, Hoepli, Milano.

SESSIONE 3
La Geometria con Euclide ed oltre Euclide

Quale Geometria per lo spazio fisico?

Ferdinando Casolaro

Università degli Studi di Napoli Federico II
Dipartimento di Architettura - Via Forno Vecchio 36, Napoli
ferdinando.casolaro@unina.it

Nel ricordo di Aldo Morelli e Bruno Rizzi, miei Maestri di Scienza ed Vita.

Abstract

Si propone un percorso didattico che, attraverso interrelazioni tra Matematica e Fisica, ci consente di introdurre nella Scuola Secondaria di secondo grado concetti che fino a qualche anno fa erano oggetto di studio nei corsi universitari di Geometria e di Fisica Matematica. Per i dettagli sulla teoria degli spazi vettoriali si rimanda alla bibliografia.

Parole chiave: Vettori, spazio vettoriale, prodotto scalare, differenziale, spazio curvo, Relatività

1. Introduzione

Nelle Scuole secondarie di secondo grado, fino a qualche anno fa, si insegnava la Fisica classica senza alcun cenno agli sviluppi dell'ultimo secolo.
La Geometria su cui poggia la Fisica classica è essenzialmente quella euclidea, i cui elementi fondamentali sono noti agli studenti già dalla Scuola del Primo Ciclo e dal primo biennio del secondo Ciclo. Pertanto, attraverso la Geometria euclidea il docente può rappresentare analiticamente e graficamente i fenomeni fisici.
Nelle Indicazioni nazionali per i licei e nelle Linee guida per gli Istituti tecnici, sono inseriti quegli elementi della Fisica sviluppatesi principalmente nella prima metà del XX secolo, quali Teoria della Relatività, Fisica Quantistica, Ottica moderna (Casolaro F., Paladino L. 2012).
Personalmente ritengo che uno studio corretto della Teoria della Relatività Generale debba partire dalla conoscenza della Geometria su cui essa si fonda, cioè la Geometria sullo spazio curvo con riferimento al modello di Riemann.
La descrizione del modello, di seguito proposto, si basa su uno studio esaustivo del calcolo vettoriale.
La "*teoria dei vettori*" è alla base del primo ampliamento della *Geometria euclidea* in quanto caratterizza la *geometria affine*, il cui gruppo di trasformazioni conserva il

parallelismo tra rette (come il gruppo euclideo) ma non conserva l'ampiezza degli angoli (Casolaro F., Cirillo L., Prosperi R. 2016).

2. Definizione di vettore e concetto di iperpiano

In Matematica, un vettore è definito come classe di equivalenza di segmenti equipollenti (*due segmenti del piano si dicono equipollenti se sono congruenti, paralleli ed equiversi*).

Una classe di equivalenza $\vec{v}$ di segmenti equipollenti prende il nome di vettore.

In Fisica, una grandezza si può definire come vettore quando:
1) vale la legge del parallelogramma;
2) è invariante rispetto ai sistemi di riferimento che si ottengono uno dall'altro per traslazione (Casolaro F. 1995)

Nel modello euclideo la costruzione di uno spazio a n dimensioni, che indicheremo con S_n, richiede la conoscenza di *n* vettori linearmente indipendenti (base), in quanto tutti gli altri vettori dello spazio si esprimono come combinazione lineare di essi. In tale contesto i sottospazi di S_n di dimensione *n-1* sono detti *iperpiani* e si esprimono mediante equazione lineare di primo grado a *n* incognite (Casolaro F. Casolaro I. 2009).

Ad esempio, una retta di un piano (iperpiano S_1 di uno spazio S_2) è rappresentata da un'equazione di primo grado a due incognite del tipo $ax+by+c=0$, dove i coefficienti *a*, *b* delle incognite sono le componenti di un vettore ortogonale a tutti i vettori aventi la direzione della retta.

Allo stesso modo, un piano S_2 in uno spazio tridimensionale rappresenta un iperpiano di S_3 ed è rappresentato da un'equazione di primo grado a tre incognite del tipo: $ax+by+cz+d=0$.

In generale, un iperpiano di uno spazio S_n è rappresentato da un'equazione di primo grado ad *n+1* incognite del tipo

$$a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+q=0$$

Un sottospazio di S_n ad *n-2* dimensioni è rappresentato da un sistema lineare di due equazioni di primo grado ad *n* incognite (intersezione di due iperpiani di S_n) del tipo:

$$a_{10}x_0+a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n+q_1=0$$
$$a_{20}x_0+a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n+q_2=0$$

in cui la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12}...a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22}...a_{2n} \end{pmatrix}$$

ha rango ρ(A) = 2. Ad esempio, una retta è rappresentata in S_3 da un sistema di due equazioni di primo grado a tre incognite (intersezione di due piani) del tipo:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 + d_2 = 0 \end{cases}$$

In generale, un sottospazio di S_n ad *n-k* dimensioni è rappresentato da un sistema lineare di *k* equazioni ad *n* incognite del tipo:

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + q_1 = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + q_2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k0}x_0 + a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n + q_k = 0 \end{cases}$$

in cui la matrice:

$$B = \begin{pmatrix} a_{10} \ a_{11} \ ....a_{1n} \\ a_{20} \ a_{21}.........a_{2n} \\ .... \\ a_{k0} \ a_{k1}..........a_{kn} \end{pmatrix}$$

ha rango ρ(B) = *k*.

Riferendoci all'Universo che ci circonda, già dalla scuola Primaria si caratterizza la retta (e il fascio di rette ad essa parallele) come "*ente geometrico ad una dimensione*" (spazio S_1), il piano (fascio di piani ad esso paralleli) "*ente geometrico a due dimensioni*" (spazio S_2) e lo spazio tridimensionale (identificato con lo spazio geometrico che ci circonda) "*ente a tre dimensioni*" (spazio S_3) (Casolaro, 2002).

Definiremo in un secondo momento il cosiddetto "*spazio quadridimensionale di Minkowski*" su cui *Einstein* ha sviluppato la Teoria della Relatività Generale (Casolaro F., Pisano R. 2012).

Dal punto di vista fisico, un vettore non nullo $\vec{u}$ è caratterizzato dal *modulo*, che è un numero reale positivo, da una *direzione* che è un fascio di rette parallele alla retta d'azione del vettore e da un *verso* che indichiamo con i segni più o meno.

Se $\vec{u}$ è un vettore non nullo di S_1, ogni altro vettore $\vec{v}$ di S_1, si può esprimere come prodotto del vettore $\vec{u}$ per il numero reale α:

$$\vec{v} = \alpha \vec{u} \qquad (2.1)$$

Infatti, in uno spazio ad una dimensione, tutti i vettori hanno la stessa direzione, per cui basta operare solo sul modulo e sul verso (che è individuato dal segno più o meno che precede il modulo); dunque, in S_1 il numero reale $\alpha = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ si può identificare come rapporto tra i numeri reali $|\vec{v}| \ e \ |\vec{u}|$, moduli, rispettivamente, di. $\vec{v} \ e \ \vec{u}$.

Definizione1: *Due vettori* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *del piano si dicono linearmente dipendenti se hanno la stessa direzione. In tal caso, sussiste tra essi la (2.1).*

Dalla (2.1) si ha:

$$\alpha\vec{u} + (-1)\vec{v} = \vec{0} \qquad (2.2)$$

cioè: "*se due vettori sono linearmente dipendenti, esiste una combinazione lineare di essi con numeri reali (scalari) non nulli che dà il vettore nullo*".

Allora, per ogni coppia di vettori rappresentati da segmenti orientati paralleli, posso dire che "*fissato il primo vettore, l'altro si ottiene da esso moltiplicandolo per un numero reale*"; Pertanto, *il sistema massimo di vettori linearmente indipendenti, di uno spazio* S_1 *è costituito da un solo vettore* $\vec{u}$ *non nullo*; la conoscenza di $\vec{u}$ è sufficiente per la costruzione dello spazio S_1.

Definizione 2: *Tre vettori* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *dello spazio* S_3 *si dicono linearmente dipendenti se hanno la stessa giacitura, cioè se esiste un piano che contiene i segmenti orientati che li rappresentano .*

La giacitura individuata da due vettori non paralleli $\vec{u}_1$ *e* $\vec{u}_2$ definisce, dunque, tutti e soli i vettori linearmente dipendenti dal sistema $\{u_1, u_2\}$.

Infatti, se $\vec{u}_1$ *e* $\vec{u}_2$ sono due vettori non paralleli e non nulli del piano, un qualsiasi vettore $\vec{w}$, appartenente al piano individuato da $\vec{u}_1$ *e* $\vec{u}_2$, si può decomporre lungo le direzioni di essi, cioè, si può esprimere come somma di due vettori $\alpha_1\vec{u}_1$, linearmente dipendente da $\vec{u}_1$ ed $\alpha_2\vec{u}_2$, linearmente dipendente da $\vec{u}_2$ (fig. 2.1).

$$\vec{w} = \alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\,\vec{u}_2 \qquad (2.3)$$

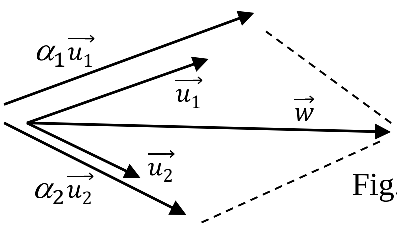


Fig. 2.1

che, con $\alpha_3 = -1$, diventa:

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 = \vec{0} . \qquad (2.4)$$

Pertanto, *se tre vettori di* S_3 *sono linearmente dipendenti, esiste una combinazione lineare di essi con numeri reali (scalari) non nulli che dà il vettore nullo, cioè la* (2.4).
Generalizzando la (2.2) e la (2.4) a spazi a n dimensioni ($\forall$ n >3) si ha:
Se n vettori di uno spazio vettoriale S_n *sono linearmente dipendenti, esiste un iperpiano* S_{n-1} *che li contiene. In tal caso, gli n vettori si possono esprimere mediante una combinazione lineare di essi con numeri reali (scalari) non nulli che dà il vettore nullo.*
Dalla teoria sui sistemi lineari, sappiamo che sussiste una relazione tra la dipendenza lineare di vettori e il determinante della matrice delle componenti in un ipotetico sistema cartesiano a *n* dimensioni. Tale relazione che permette di individuare il rango di una matrice attraverso il calcolo del determinante, è espressa dal seguente:

Teorema 2.1: "*Se n vettori di uno spazio* S_n *sono linearmente dipendenti, la matrice costituita dalle componenti degli n vettori ha determinante nullo*":
Di tale teorema risulta didatticamente significativa la dimostrazione che segue riferita al caso di *n* = 2. Non riteniamo opportuno proporre nella scuola secondaria la dimostrazione generalizzata ad *n* qualsiasi che si ottiene per induzione.

Teorema 2.2: "*Se due vettori del piano sono linearmente dipendenti, la matrice costituita dalle componenti dei vettori ha determinante nullo*":
Infatti, se $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ *e* $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ sono due vettori del piano rappresentati dai segmenti orientati $\vec{AC}$ *e* $\vec{A'C'}$ in fig. 2.2, si vede facilmente che formano con le loro componenti due triangoli simili ABC *e* $A'B'C'$, per cui risulta di seguito:

AB : A'B' = AC : A'C', cioè: $a_x : a_y = b_x : b_y$

$$a_x\,b_y = a_y\,b_x \quad \Rightarrow \quad a_x\,b_y - a_y\,b_x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = 0$$

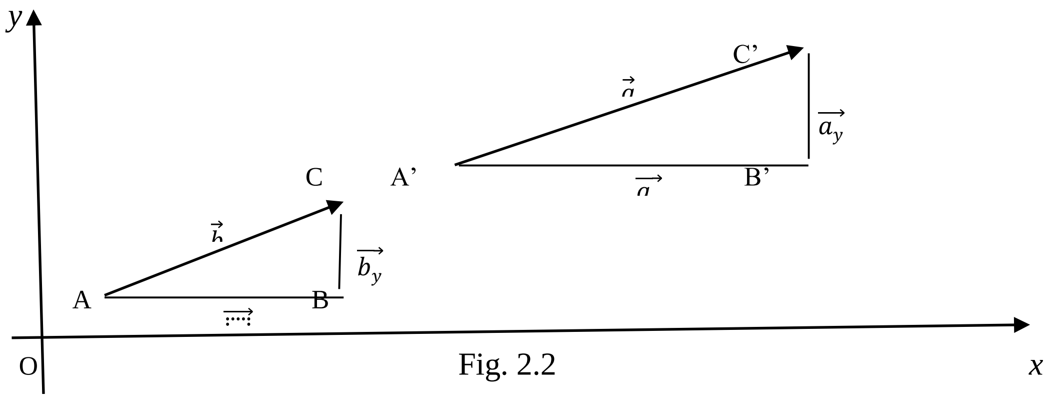


Fig. 2.2

3. Prodotto scalare tra vettori. Questioni analitiche

Se $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ *e* $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ sono due vettori del piano rappresentati da segmenti orientati che formano un angolo α, si definisce prodotto scalare tra $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$, il prodotto dei moduli per il coseno dell'angolo α:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha \qquad (3.1)$$

In un riferimento cartesiano del piano il prodotto scalare si esprime come somma dei prodotti delle singole componenti:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y \qquad (3.2)$$

Tale relazione, considerando la proprietà associativa e le proprietà distributive delle operazioni di uno spazio vettoriale (Casolaro F., Casolaro I. 2009), si può giustificare moltiplicando tra loro i due vettori espressi nella rappresentazione cartesiana:

$$\left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j}\right) \times \left(b_x\vec{i} + b_y\vec{j}\right) = a_x b_x \left(\vec{i} \times \vec{i}\right) + a_x b_y \left(\vec{i} \times \vec{j}\right) + a_y b_x \left(\vec{j} \times \vec{i}\right) + a_y b_y \left(\vec{j} \times \vec{j}\right)$$

da cui, con $\vec{i} \circ \vec{i} = \vec{j} \circ \vec{j} = 1, \quad \vec{\mathrm{i}} \circ \vec{\mathrm{j}} = \vec{\mathrm{j}} \circ \vec{\mathrm{i}} = 0$, si ha la (3.2).

La (3.2) è alla base del passaggio dallo spazio piatto allo spazio curvo secondo un percorso che di seguito esponiamo mediante l'insegnamento per problemi.

Problema 3.1: *In un riferimento cartesiano del piano, sia P(x, y) un punto diverso dall'origine, in modo che il segmento orientato* $\vec{OP}$ *identifichi il vettore che ha per componenti rispettivamente le coordinate x ed y di P. Se* $\vec{n}\ (a, b)$ *è un vettore ortogonale ad* $\vec{OP}$, *si individui il luogo geometrico dei punti P(x, y) del piano tale che il segmento orientato* $\vec{OP}$ *sia perpendicolare a* $\vec{n}\ (a, b)$.

La soluzione è conseguenza della definizione di prodotto scalare:

$$.\ \vec{n} \perp \vec{OP} \ \Rightarrow\ \vec{n} \circ \vec{OP} = 0, \qquad cio\grave{e}: \ \ a\,x + b\,y = 0 \qquad (3.3)$$

che è l'*equazione della retta OP che individua, dunque, il luogo geometrico dei punti P(x, y) del piano tali che il segmento OP è perpendicolare alla direzione del vettore* $\vec{n}\ (a,\ b)$, come è noto dalle nozioni elementari di geometria analitica sulla retta.

Se "*curvassi*" questa retta, otterrei un arco, ed il vettore perpendicolare in ogni punto alla retta tangente all'arco, non avrebbe più direzione costante, e quindi le componenti *a* e *b* del vettore $\vec{n}\ (a,\ b)$ risulterebbero funzioni delle coordinate del punto nel piano.

Anche per il piano in S_3, si può fissare un riferimento cartesiano ed un punto *P(x,y,z)* diverso dall'origine, in modo che il segmento orientato $\vec{OP}$ identifichi il vettore che ha per componenti le coordinate *x, y, z di P.* In analogia al problema 3.1, si ha:

Problema 3.2: *In un riferimento cartesiano dello spazio, sia P(x, y, z) un punto diverso dall'origine, in modo che il segmento orientato* $\vec{OP}$ *identifichi il vettore che ha per componenti rispettivamente le coordinate x, y, z di P. Se* $\vec{n}\ (a,b,c)$ *è un vettore ortogonale ad* $\vec{OP}$*, si individui il luogo geometrico dei punti P(x, y, z) di* S_3 *tale che il segmento orientato* $\vec{OP}$ *sia perpendicolare a* $\vec{n}\ (a,b,c)$.

Con procedimento analogo al problema 1, si ha:

$$\vec{n} \perp \vec{OP} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} \circ \vec{OP} = 0, \qquad cioè: \quad ax + by + cz = 0 \qquad (3.4)$$

che è l'equazione del piano perpendicolare alla direzione del vettore $\vec{n}\ (a,b,c)$.

Anche in questo caso concludo che *i vettori perpendicolari al piano in ogni punto, hanno la stessa direzione, per cui le loro componenti differiscono solo per un fattore moltiplicativo*. Così di seguito, operando *su spazi piatti, di dimensione tre, quattro, …ecc, i vettori perpendicolari allo spazio hanno tutti la stessa direzione*.
Se consideriamo, invece, uno spazio curvo, la direzione del vettore perpendicolare allo spazio cambia in ogni punto, per cui le componenti del vettore normale allo spazio in un punto (*al piano tangente la superficie in quel punto*) sono funzioni delle coordinate.

4. Modello geometrico in uno spazio a curvatura non nulla.

Considerata una superficie come spazio in sé, si può costruire su di essa una Geometria analoga a quella del piano associando ai concetti intuitivi di *punto, piano e retta,* rispettivamente, i concetti di *punto* stesso*, superficie e geodetica.* Ovviamente l'analogo del *segmento rettilineo* sarà *l'arco di geodetica* (Casolaro F., Santarossa R. 1997) .
Alla relazione di *uguaglianza* tra figure, in geometria euclidea:
Due figure piane sono uguali, se possono farsi corrispondere punto per punto in modo che le distanze rettilinee fra le coppie di punti corrispondenti, siano uguali,
corrisponde, per la geometria non euclidea:
Due figure su una superficie sono uguali se possono farsi corrispondere punto per punto in modo che le distanze geodetiche fra coppie di punti corrispondenti sono uguali.
- Le proprietà fondamentali dell'uguaglianza fra archi geodetici e angoli, corrispondono ai postulati della congruenza tra segmenti ed angoli.

Per strutturare una Geometria su uno spazio curvo e proporre un modello analitico analogo a quello sullo spazio piatto che è rappresentato da equazioni lineari di primo grado, dobbiamo tener conto dei seguenti elementi (Casolaro F., Pisano R. 2006):

1. Se S è una qualsiasi superficie non piatta, i vettori perpendicolari alla superficie (*piano tangente*) in ogni punto hanno direzioni diverse per cui, riferendoci ad esempio all'equazione di un piano, i coefficienti *a, b, c* dell'espressione analitica di primo grado non sono costanti e vanno sostituite da funzioni $g_1(x,y,z)$; $g_2(x,y,z)$; $g_3(x,y,z)$.

2. Il passaggio dall'analisi globale all'analisi locale, sostituendo alle variabili *x, y, z* , i differenziali *dx, dy, dz*.

3. Una qualche intuizione sul concetto di curvatura.

Relativamente ai punti 1. e 2. - riferendoci sempre all'equazione di un piano S_2 in uno spazio S_3 - l'equazione *ax + by + cz = 0*, con *a, b, c* costanti - che abbiamo ottenuto come prodotto scalare di vettori perpendicolari tra loro, si trasforma in:

$$g_1(x,y,z)\,dx + g_2(x,y,z)\,dy + g_3(x,y,z)\,dz = 0 \qquad (4.1)$$

ottenuta ancora come prodotto scalare tra il vettore infinitesimo $d\vec{s} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ e il vettore $\vec{n} = (x,y,z)\,\vec{i} + g_2(x,y,z)\,\vec{j} + g_3(x,y,z)\,\vec{\mathrm{k}}$, le cui componenti sono funzioni del punto.

Relativamente al punto 3., la definizione rigorosa di *curvatura* richiede conoscenze che esulano da un'esposizione elementare. Però, come per i concetti di retta e di piano in geometria euclidea, riteniamo che si possa lasciare all'intuito dello studente di immaginare quelle superfici a curvatura zero (*il piano*), a curvatura costante (*la sfera*), a curvatura variabile (*ellissoide, o banale esempio dell'uovo*).
Rimandando alla bibliografia (Casolaro F., Santarossa R. 1997), la caratterizzazione relativa alla suddivisione delle geometrie in base alla curvatura (non essenziale per il nostro scopo), ci limitiamo a far presente che ci riferiremo ad un modello di Geometria di tipo ellittico, analogo a quello di Riemann, che trova applicazione nello spazio fisico.

5. Modello di Riemann ed estensione della geometria alla Fisica

Il modello formulato nel 1854 da Riemann (*geometria ellittica)*, si può considerare una estensione della geometria differenziale di Gauss.
Riemann adottò l'approccio analitico proprio perché riteneva che *nelle dimostrazioni geometriche si potesse essere indotti ad assumere come verità ciò che è soltanto una nostra percezione, in quanto conosciamo lo spazio solo localmente*; da qui lo studio del comportamento locale dello spazio, cioè l'approccio *metrico-differenziale*.
Nella parte finale del suo lavoro, Riemann, applica allo spazio ordinario i suoi risultati, concludendo che *lo spazio fisico è una varietà (diciamo spazio) a tre dimensioni a curvatura costante dove la Geometria non si può astrarre dall'evoluzione fisica.*
Riferendoci, ad esempio, ad uno spazio a quattro dimensioni S_4, un'equazione lineare in quattro incognite del tipo (Casolaro F., Pisano R. 2011):

$$g_1(x,y,z,t)\,dx + g_2(x,y,z,t)\,dy + g_3(x,y,z,t)\,dz + g_4(x,y,z,t)\,dt = 0 \qquad (5.1)$$

ottenuta dal prodotto scalare tra il vettore $\vec{g}\left(g_1, g_2, g_3, g_4\right)$ normale alla superficie S_4 ed il vettore $d\vec{s}$ (*dx, dy, dz, dt*) spostamento infinitesimo su S_4, individua un iperpiano

S_3 di S_4, in cui le g_i ($i = 1,...,4$) sono funzioni delle coordinate (x, y, z, t) analoghe a quelle introdotte da Riemann per la sua geometria non euclidea, in cui la metrica è definita da

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{4} g_{ij} dx_i dx_j \quad . \quad (5.2) \qquad \text{con } dx_i\, dx_j = \begin{cases} 0, & \forall i \neq j \\ 1, & \forall i = j \end{cases}$$

$$dx_i\, dx_j = \begin{cases} 0, & \forall i \neq j \\ 1, & \forall i = j \end{cases}$$

Allo stesso modo, i sistemi:

$$\begin{cases} g_{11}dx + g_{12}dy + g_{13}dz + g_{14}dt = 0 \\ g_{21}dx + g_{22}dy + g_{23}dz + g_{24}dt = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} g_{11}dx + g_{12}dy + g_{13}dz + g_{14}dt = 0 \\ g_{21}dx + g_{22}dy + g_{23}dz + g_{24}dt = 0 \\ g_{31}dx + g_{32}dy + g_{33}dz + g_{34}dt = 0 \end{cases}$$

in cui le matrici

$$A_1 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \end{pmatrix}$$

hanno rango $\rho(A_1) = 2$, $\rho(A_2) = 3$, rappresentano, rispettivamente, uno spazio S_2 (analogo al piano euclideo) iperpiano di S_3, ed uno spazio S_1 (analogo alla retta euclidea) iperpiano di S_2.

Nell'idea di Einstein, le funzioni g_{ij}, che nelle (4.1) e (5.1) rappresentano i coefficienti delle variabili *dx, dy, dz, dt,* incorporano gli effetti delle masse gravitazionali nello spazio. Tali effetti, provocando una curvatura in ogni punto, sono la causa del cambiamento di direzione del vettore normale alla superficie in quel punto.

Con l'introduzione della *coordinata-tempo*, si ha poi una più corretta analisi dell'universo, identificato col cosiddetto *spazio-tempo quadridimensionale (x, y, z, t) di Minkovsky*, in cui l'insieme dei *punti-eventi (x, y, z, t)* definisce un continuo a quattro dimensioni che rappresenta uno spazio geometrico S_4.

In tale ottica, lo spazio S_3 dei punti *(x, y, z)* del modello euclideo, visto come sottospazio di S_4, può essere assimilato ad un iperpiano dello *spazio-tempo di Minkovsky*.

Se analizziamo la struttura dei sottospazi di S_4, in analogia al modello analitico euclideo, possiamo trarre le seguenti conclusioni:

- per t = 0 (ovvero dt = costante), si ha l'iperpiano S_3, che è lo spazio geometrico euclideo tridimensionale, in cui valgono le leggi della cinematica classica;

- se invece è costante una delle coordinate x, y, z, si hanno iperpiani S_3 di S_4 che caratterizzano modelli cinematici relativistici su S_2, analogo del piano euclideo.

In tale ottica, l'insieme dei punti *P(x, y, 0, t)* ≡ *P(x, y, t)* è un S_3, le cui coordinate (*x,y,t*) individuano i *punti-eventi del piano* S_2*(x, y)* che è prolungato alla cinematica con l'introduzione della coordinata tempo (Casolaro F., 1997).
In tale contesto, bisogna tener conto che la metrica è definita da:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 \qquad (3.4)$$

Tale relazione si può giustificare geometricamente, aggiungendo alla terna reale (*O,x,y,z*) del riferimento di S_3, un quarto asse immaginario ortogonale ad S_3 in cui la coordinata tempo è moltiplicata per l'unità immaginaria *i* e, per uniformità dimensionale, per la velocità della luce *c*.

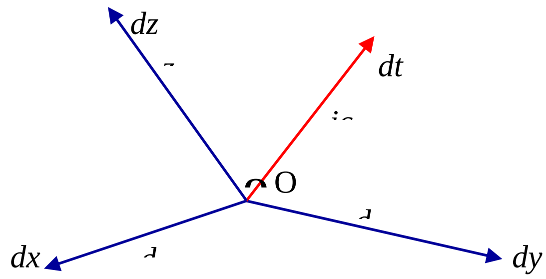


Fig. 3.1

Il vettore $\overline{ds}$ ha allora componenti (*dx, dy, dz, icdt*) (fig. 3.1) e quindi la metrica è
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + i^2c^2dt^2 \quad = \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\, dt^2 ,$$

6. Conclusione

Ciò porta a concludere che *la Geometria non si può astrarre dall'evoluzione fisica.* Infatti, secondo la concezione classica, la geometria esprime un insieme di proprietà relative al *movimento dei corpi* ed alla *propagazione della luce*, che si ottengono facendo astrazione dal *tempo* e dalle *forze*. Quindi, con un'estensione della geometria alla cinematica (che è la teoria del movimento rispetto allo spazio-tempo) e successivamente alla dinamica (con l'introduzione delle forze) si avranno approssimazioni che ci avvicinano man mano ad un grado più concreto della realtà fisica, che troverà poi un'ulteriore correzione con la *Teoria della Relatività generale*. Con tale teoria, Einstein sollevò anche una questione più ampia

legata al significato delle g_{ij} il cui uso incorporava gli effetti gravitazionali delle masse nello spazio. Infatti, *le geodetiche del suo spazio-tempo sono precisamente le traiettorie degli oggetti che si muovono liberamente (come ad esempio la traiettoria della terra intorno al sole), analogamente alla legge newtoniana che ci fa individuare la retta come traiettoria descritta da un punto, non soggetto a forze, con velocità uniforme*.
Dunque, il modello newtoniano che assegna una legge per il moto libero di un punto e vi aggiunge poi una forza, risulta essere solo un'astrazione nella nuova costruzione della dinamica di Einstein (Casolaro F., Pisano R. 2012).
Tale concezione sarebbe reale se la materia fosse composta da piccole masse, poste a distanza tale una dall'altra da potersi muovere senza subirne la reciproca influenza; invece *la materia si muove sotto l'influenza di altra materia che, secondo la dinamica newtoniana è la causa delle forze gravitazionali* (Casolaro F., Trotta A. 2017).

Bibliografia

Casolaro F. 1995: "*La Matematica nello insegnamento della Fisica*". Atti del Convegno Nazionale Mathesis 1995, Roma, pag. 363-368.

Casolaro F. 1997: "*Modello geometrico non euclideo per lo spazio fisico*", Convegno "Metodi di rappresentazione e incertezza in Architettura", Pescara, 1997 - pag.103-106.

Casolaro F., Santarossa R.1997: "*Geometrie non euclidee e geometria differenziale: note didattiche*", Congresso Nazionale Mathesis Caserta 1997 - pag. 213-219.

Casolaro F. 2002, *Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo*". Congresso Nazionale Mathesis Bergamo 2002, pag.185-198.

Casolaro F., Pisano R. 2006: "*Riflessioni sulla geometria nella Teoria della relatività*", XXVI Congresso Nazionale di Storia della Fisica e Astronomia SISFA, pag. 221-231.

Casolaro F. 2008: "*L'evoluzione della Matematica attraverso quattro congetture fondamentali sull'osservazione del mondo fisico*". Convegno AIF 2008, pag. 71-83.

Casolaro F., Pisano R. 2011: "*An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics*", History Research pag. 47-60.

Casolaro F., Paladino L. 2012: "*Evolution of the geometry through the Arts*".- 11th *International Conference APLIMAT*. Slovak University in Bratislava, pag. 481-490.

Casolaro F., Pisano R. 2012: "*An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics*" - History Research, pag. 57-65.

Casolaro F. Cirillo L., Prosperi R. 2016, "*Groups of Transformations with a Finite Number of Isometries: the Cases of Tetrahedron and Cube*". Ratio-Matematica, Volume 31 - 2016, pagg. 93-110.

Casolaro F., Trotta A. 2017, "*Il modello standard ed oltre ... Il bosone di Higgs*" Accademia Peloritana, settembre 2017.

I poliedri nella storia, nell'arte e nella natura

Giuseppe Conti [1] **Alberto Trotta**[2] **Francesco Conti**[3]

[1]Università degli Studi di Firenze - Dipartimento di Matematica - Viale Morgagni 67/A, Firenze
gconti@unifi.it

[2]IISS Santa Caterina-Amendola - Salerno
albertotrotta@virgilio.it

[3]Via G. B. Romagnosi 14 - 50134 Firenze
franci8conti@gmail.com

Abstract

In questo articolo gli autori intendono esporre un argomento molto importante della geometria dello spazio: i poliedri. Dopo avere introdotto la loro definizione, sarà mostrata la loro presenza, nella natura, nella vita quotidiana e nell'arte, partendo dall'antica Grecia fino ad arrivare ai nostri giorni. Anzitutto tratteremo i poliedri regolari; successivamente introdurremo la interessante ed importante famiglia, soprattutto nelle applicazioni, dei poliedri archimedei.

Parole chiave: Poliedri, figure convesse e concave, tassellazione dello spazio, rettangolo aureo, relazione di Eulero.

1. Introduzione

In questi ultimi tempi abbiamo assistito, nell'insegnamento della matematica, ad un progressivo abbandono, da parte di molti docenti, degli argomenti riguardanti la geometria dello spazio. Riteniamo che questa carenza sia abbastanza grave non solo per motivi culturali, ma anche per il fatto che, affrontando quasi esclusivamente la geometria del piano, si abitua lo studente a ragionare soltanto in due dimensioni, privandolo di una visione tridimensionale. Partendo da questo presupposto, vogliamo dare un contributo alla divulgazione della geometria dello spazio, affrontando, in maniera un po' diversa da quella tradizionale, un argomento molto importante della geometria solida: i poliedri. Non intendiamo, dunque, presentare un trattato sui poliedri, ma mostrare che questi hanno molte affascinanti, interessanti e divertenti applicazioni nell'arte, nella natura ed anche nella vita quotidiana.

2. I poliedri regolari

Ricordiamo che un **poliedro** (**convesso**) si dice **regolare** se tutte le sue facce sono poligoni regolari, congruenti fra loro, ed in ogni vertice arriva lo stesso numero di facce.
Proclo, storico della matematica del V secolo dopo Cristo, attribuisce a Pitagora la scoperta dei poliedri regolari; Proclo afferma: "Egli (Pitagora) scoprì il fatto degli irrazionali e la costruzione delle figure cosmiche (i poliedri regolari)".
In realtà i pitagorici conoscevano il **tetraedro**, il **cubo** e il **dodecaedro**.
In seguito i greci introdussero anche l'**ottaedro** e l'**icosaedro** (Brusotti, 1955).
La loro scoperta può essere ricondotta al fatto che nella Magna Grecia si rinvenivano facilmente cristalli di pirite che hanno la forma di un cubo, di un ottaedro e di un dodecaedro (anche se non regolare).
Successivamente **Teeteto** (circa 410 a. C.) dimostrò che i poliedri regolari sono soltanto questi cinque (Brusotti, 1955); la dimostrazione è abbastanza semplice e si basa essenzialmente sul fatto che la somma delle facce di un angoloide è minore (strettamente) di un angolo giro.
I cinque tipi di poliedri regolari sono detti anche **solidi platonici,** poiché **Platone** ne parla esplicitamente nella sua opera *Il Timeo* (Frajese, 1951). Secondo Platone, ognuno di questi solidi doveva corrispondere alla struttura degli elementi fondamentali della materia. Infatti, il tetraedro fu abbinato al fuoco, l'ottaedro all'aria e l'icosaedro all'acqua, il cubo alla terra e il dodecaedro alla quintessenza.
Fra i poliedri regolari, il cubo era considerato dal greco **Filolao** (480-400 a.C.) il più perfetto, perché possiamo vedere che, fra i numeri delle sue facce, vertici e spigoli, intercorrono i rapporti musicali di ottava (12/6 = 2/1), quinta (12/8 = 3/2) e quarta (8/6 = 4/3) (Conti et Al, 2017)
Per il fatto che il dodecaedro era associato alla quintessenza, **Salvator Dalì** ambientò il suo famoso dipinto, *Ultima cena,* all'interno di questo poliedro. Inoltre, tutto il dipinto è contenuto in un **rettangolo aureo** (Livio, 2003). Questo fatto non è casuale; infatti **Luca Pacioli**, nel suo famoso volume *De divina proportione*, stampato a Venezia (1509), scoprì che i centri delle facce di un dodecaedro determinano tre rettangoli aurei; inoltre, egli dimostrò che i 12 anche i vertici dell'icosaedro formano tre rettangoli aurei.
Il *De divina proportione* è diviso in tre parti (Sgarbi, 1982); la terza parte è ripresa quasi integralmente dal libro di **Piero della Francesca**: *Libellus de quinque corporibus regularibus*, che tratta i cinque poliedri regolari. Notiamo che Luca Pacioli era allievo di Piero della Francesca ed entrambi erano originari di Borgo San Sepolcro.
Nel suo trattato Piero sostiene che il mondo è pieno di corpi complessi o senza una particolare forma, ma ognuno di essi può essere ridotto ai cinque poliedri regolari che rappresentano la forma eterna, l'eterna perfezione.
I disegni dei solidi presenti nel libro di Luca Pacioli sono opera di **Leonardo da Vinci**. Sottolineiamo che nei disegni di Leonardo, come in quelli di Piero della Francesca, si nota una profonda conoscenza delle regole prospettiche. Il *Libellus de quinque corporibus regularibus* (1482-1492) è successivo al *De prospectiva pingendi* (1472-1475), dove

Piero mostra le regole della prospettiva, già presenti nel primo libro del *De pictura* (l'edizione in volgare è del 1435), nel quale Leon Battista Alberti espone i principi geometrici e le applicazioni della prospettiva che aveva appreso da Brunelleschi.
Nei libri di Pacioli e di Piero della Francesca si trovano molte figure e disegni esplicativi. Oggi questo fatto ci appare scontato, ma a quei tempi le cose andavano diversamente: infatti gli umanisti dell'epoca ritenevano che le parole fossero sufficiente per spiegare i concetti geometrici.
I poliedri regolari sono presenti in vari aspetti dell'arte, della natura e della vita quotidiana a partire dall'antichità fino ai giorni nostri.
La prima notizia, che si ha di questi poliedri, proviene da un sito **neolitico** in **Scozia**, dove sono state trovate figure di argilla, la cui forma si avvicina moltissimo ai poliedri regolari, risalenti al 2000 a. C. circa. Si ritiene che questi oggetti fossero elementi decorativi o, forse, destinati ad una specie di gioco. L'origine di questi pezzi può essere estetica, mistica oppure religiosa, ma è anche possibile che siano stati osservati in natura sotto forma di scheletri di animali marini, come i **Radiolari**. Infatti gli scheletri di alcuni Radiolari hanno la forma di poliedri regolari (D'Arcy, 2003) ed esistono in natura cristalli di fluorite e di pirite che, come già detto, possono avere la forma di un cubo, di un ottaedro e di un dodecaedro.
Sono stati trovati, soprattutto nel nord della Francia ed in Germania, numerosi oggetti d'**epoca romana**, risalenti a II e III secolo d. C., che hanno la forma di un dodecaedro e di un icosaedro regolari. Non è noto quale fosse l'uso di questi manufatti; sono state avanzate numerose ipotesi sul loro impiego, ma la loro funzione rimane ancora oggi un mistero, tenendo anche conto che non sono presenti in alcun'altra opera di epoca romana.
Alcuni contenitori di sostanze liquide hanno la forma di un tetraedro regolare; le prime confezioni con questa conformazione risalgono alla ditta **Tetra Pak** (1952).
La **molecola di metano** CH_4 ha una struttura tetraedrica.
Dalla variazione della sola struttura cristallina nascono le enormi differenze tra la **grafite** ed il **diamante**; nella grafite gli atomi di carbonio formano degli esagoni disposti su piani paralleli fra loro (da qui deriva la tenerezza della grafite), dove ognuno di questi esagoni si lega ad altri tre; nei diamanti gli atomi di carbonio, invece, formano dei tetraedri regolari.
Il **tetrapode** è una struttura, di solito in cemento armato, utilizzata come frangiflutti; i suoi estremi si trovano nei vertici di un tetraedro regolare. Con la sua forma dissipa in maniera efficiente la forza delle onde, permettendo all'acqua di fluire attorno alla struttura piuttosto che contro essa.
L'**Atomium** è una costruzione in acciaio che rappresenta i 9 atomi di un cristallo di ferro; questo atomo è rappresentato da otto sfere, che si trovano nei vertici di un cubo; la nona sfera è collocata nel centro del cubo. Venne innalzato in occasione dell'Esposizione Universale di Bruxelles del 1958.
Nel **Cloruro di sodio** NaCl lo ione Cl^- deve essere circondato da sei vicini ioni di Na^+ in coordinazione ottaedrica; ugualmente Cl^- ha intorno a sé sei ioni Na^+, anch'essi coordinati ottaedricamente con lo ione Cl^-.

Una struttura ottaedrica si trova anche nella molecola di **Esafluoruro di Zolfo** SF_6. Lo Zolfo sta nel centro ed il Fluoro nei vertici dell'ottaedro.
Esistono altoparlanti aventi la forma di un dodecaedro, come il **Dodecahedron Loudspeaker**; con la sua conformazione questo altoparlante distribuisce il suono in maniera uniforme in ogni direzione.
L'ingegnere **Eduardo Torroja** progettò nel 1951 un edificio a forma di dodecaedro per l'Università di Madrid. Come afferma lo stesso Torroja, esso era costruito in maniera semplice ed economica mediante giunzione di lastre prefabbricate pentagonali.
Vogliamo notare che nelle **Isole Faroe** esistono degli igloo a forma di dodecaedro.
Nel **Museo Galileo** di Firenze si trovano diversi orologi solari dodecaedrici.
L'icosaedro si trova frequentemente in natura. Esso è la sagoma dell'involucro esterno (capside) di molti **virus**; il capside è la struttura proteica che racchiude l'acido nucleico del virus e lo protegge dall'ambiente esterno. Il motivo per cui i virus hanno il loro involucro di forma icosaedrica dipende dal fatto che, essendo un poliedro regolare, i codici genetici per la riproduzione degli stessi virus sono più semplici (Du Sautoy, 2007).
Inoltre, fra i cinque poliedri regolari, l'icosaedro è quello che, a parità di superficie esterna, racchiude il volume più grande, essendo quello che più si avvicina alla sfera.
Infine, **Keplero** aveva creato un modello del sistema solare basato sui poliedri regolari, pubblicato nel trattato scientifico: *Mysterium cosmographicum* (1596).
Come sappiamo, Keplero fu il primo a sostenere nel 1609 che le orbite dei pianeti sono ellittiche: tuttavia, al tempo della pubblicazione *Mysterium cosmographicum,* egli le considerava ancora circolari, in accordo con l'opinione del tempo (Folicaldi, 2005).
Egli affermava: "L'orbita della Terra è la misura di tutte le cose. Si circoscriva attorno ad essa un dodecaedro, e il cerchio che lo contiene è l'orbita di Marte; attorno a Marte si circoscriva un tetraedro, e il cerchio che lo contiene è l'orbita di Giove; si circoscriva attorno a Giove un cubo, e il cerchio che lo contiene è l'orbita di Saturno. Poi si inscriva nell'orbita terrestre un icosaedro, e il cerchio contenuto sarà l'orbita di Venere, e ancora si inscriva all'interno dell'orbita di Venere un ottaedro e il cerchio contenuto sarà l'orbita di Mercurio."
In seguito Keplero stesso abbandonò questa teoria, in quanto le distanze fra i pianeti, ottenute con l'impiego dei solidi platonici, era in disaccordo con le osservazioni astronomiche.

3. I poliedri archimedei

Spesso si afferma che la palla è rotonda, ma questo non è sempre vero. Un pallone di calcio non è una sfera perfetta; esso è composto da pezzi che s'inarcano verso l'esterno quando lo gonfiamo, facendogli assumere così una forma simile ad una sfera.
Per dare una risposta esauriente dal punto di vista pratico e geometrico alla forma del pallone da calcio, occorre anzitutto tornare indietro nel tempo.

Nel terzo secolo a. C. **Archimede** definì e studiò i **poliedri semiregolari**, chiamati in suo onore anche **poliedri archimedei** (Brusotti, 1955).
Si definisce **poliedro** (o **solido**) **archimedeo** un poliedro convesso che soddisfa le proprietà seguenti:
1) le sue facce, di almeno due tipi distinti, sono poligoni regolari e, di conseguenza, i suoi spigoli sono tutti congruenti;
2) le facce devono essere disposte nello stesso ordine intorno a ciascun vertice;
3) il solido non è un poliedro regolare, né un prisma, né un antiprisma.
Ricordiamo che l'**antiprisma** è un poliedro formato da due poligoni regolari, paralleli fra loro, con n lati ($n > 3$), chiamati basi, e da $2n$ triangoli equilateri che congiungono ciascun lato di una base con il vertice opposto dell'altra base, opportunamente ruotata rispetto alla prima. Dunque, a differenza dei prismi, le basi di un antiprisma sono connesse da triangoli invece che da rettangoli.
I solidi archimedei sono in tutto 13 e sono tutti inscrivibili in una sfera. Cinque di questi (**tetraedro troncato, cubo troncato, ottaedro troncato, dodecaedro troncato, icosaedro troncato**) possono essere ottenuti per *troncamento*, tagliando, cioè, gli angoli dei cinque solidi platonici in modo che gli spigoli del poliedro così ottenuto siano tutti uguali fra loro. Gli altri otto sono: il **cubottaedro**, il **cubottaedro troncato**, l'**icosidodecaedro**, l'**icosidodecaedro troncato**, il **rombicosidodecaedro**, il **rombicubottaedro**, il **cubottaedro camuso** e l'**icosidodecaedro camuso**.
Il **pallone da calcio** non è altro che un icosaedro troncato; esso è formato da 90 spigoli, 60 vertici, 12 facce pentagonali e 20 facce esagonali.
La storia del pallone di calcio è davvero molto interessante. Questo design fu portato alla ribalta dalla ditta **Adidas** per il Campionato Europeo di calcio del 1968 e per la Coppa del mondo di calcio del 1970 in Messico. Esso fu chiamato **Telstar**, dal nome del satellite che assicurava i collegamenti televisivi intercontinentali. Furono scelti i **pentagoni neri** e gli **esagoni bianchi** per assicurare una migliore visione televisiva (in bianco e nero) rispetto al classico pallone a strisce di cuoio marrone. Inoltre, l'icosaedro troncato rappresenta il miglior equilibrio fra numero di facce ed approssimazione della sfera; infatti, un poliedro con un numero inferiore di facce approssima peggio la sfera, mentre, con numero maggiore, l'approssimazione è migliore ma diventa più complicata la sua realizzazione a causa dei troppi pezzi da assemblare
Vorremmo notare che anche Leonardo da Vinci disegnò un icosaedro troncato, nel già citato libro *De divina proporzione*, con il nome di **Ycocedron Abscisus solidus**.
La storia del "pallone di calcio" non è ancora finita. Nel 1985 i chimici **H. W. Kroto**, **R. F. Curl** e **R. E. Smalley** ottennero un composto le cui molecole erano formate da 60 atomi di carbonio, legati in modo da formare la molecola C_{60}. In questa molecola gli atomi di carbonio sono disposti in modo da formare i 60 vertici dell'icosaedro troncato, cioè proprio il pallone da calcio. Per questa scoperta i tre scienziati sopra citati ricevettero nel 1996 il premio Nobel per la Chimica.
Tale molecola, che è utilizzata in campo medico, nell'industria litografica e nella meccanica come lubrificante, è stata chiamata **fullerene** o **buckyball**, in onore

dell'architetto statunitense **Buckmister Fuller**, che aveva costruito vari edifici con cupole **geodetiche**, le quali erano poliedri, spesso con facce pentagonali ed esagonali.
I solidi archimedei si trovano anche nel problema della **tassellazione dello spazio**. Nel 1887 Lord Kelvin si chiese come si potesse eseguire una tassellazione dello spazio con poliedri di uguale volume, aventi superficie minima. Lord Kelvin pensava che questi poliedri dovessero avere la forma di un **ottaedro troncato** (notiamo che questo solido archimedeo possiede 6 facce quadrate, 8 esagonali, 36 spigoli e 24 vertici). Tuttavia non dette la dimostrazione di tale risultato, il quale per più di un secolo rimase una congettura, poiché non si riusciva a trovare né una dimostrazione, né un controesempio.
Soltanto nel 1993 i fisici **R. Phelan** e **D. Wearie** del Trinity College di Dublino hanno trovato due poliedri irregolari di uguale volume, un dodecaedro irregolare con facce pentagonali, e un tetracadecaedro formato da 2 esagoni e 12 pentagoni con i lati tutti diversi, che tassellano lo spazio. L'area della superficie della configurazione di Weaire-Phelan è inferiore a quella della struttura di Kelvin dello 0, 3%, ma non è stato ancora dimostrato che essa sia la soluzione della congettura di Kelvin. Notiamo che a questa struttura si sono ispirati i progettisti del **Centro Acquatico di Pechino**.
Anche alcuni orologi solari esposti nel Museo Galileo a Firenze hanno la forma di un ottaedro troncato.
Nel Museo Nazionale di Capodimonte a Napoli si trova un dipinto che ritrae Luca Pacioli, dove sono raffigurati un dodecaedro e un rombicubottaedro. Notiamo che un rombicubottaedro è stato disegnato da Leonardo nel già citato libro di Luca Pacioli.
Anche l'edificio (inaugurato nel 2006) che ospita la **Biblioteca Nazionale di Minsk** ha la forma di un rombicubottaedro.

4. Conclusione

Esistono molti altri tipi di poliedri. Interessanti, sia dal punto di vista geometrico, sia nelle applicazioni, sono i **solidi di Catalan**, che si ottengono congiungendo i centri delle facce dei poliedri archimedei (**poliedri duali**).
Ad esempio, il **cristallo di Andradite** (ed anche quello di **Granato**) è un solido di Catalan, chiamato **dodecaedro rombico**, poiché possiede 12 facce a forma di rombo ed è il duale di un solido archimedeo: il cubottaedro. Osserviamo che anche il dodecaedro rombico può tassellare lo spazio.
Ci sono poi i **poliedri regolari non convessi**, detti anche **poliedri di Keplero-Poinsot**, uno dei quali era stato riprodotto già da Paolo Uccello (1397-1475) nella Basilica di San Marco a Venezia. (Sala et Al, 2012),
Un interessante esempio di poliedro non convesso è l'elemento terminale della **Lanterna** della cupola della **Sagrestia Nuova** di Michelangelo a Firenze. Esso si realizza a partire da un dodecaedro, dove, su ogni faccia (pentagonale), si costruisce una piramide avente quella faccia come base; pur non essendo un poliedro convesso, anche per esso vale la

relazione di Eulero. Osserviamo che anche questo solido è raffigurato da Leonardo da Vinci nel *De divina proportione*, con il nome di **Duodecedron elevatus solidus**.

Bibliografia

L. Brusotti (1955), *Poligoni e poliedri*. Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi, Volume II – Parte 1ª, Editore Ulrico Hoepli, Milano, pp. 255-322.

F. Folicaldi a cura di (2005), *Il Numero e le sue Forme*, Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze, Nardini Editore, Firenze.

A. Frajese (1951), *La matematica nel mondo antico*, Editrice Studium, Roma.

V. Sgarbi (1982), *De divina proportione*, FMR n. 9, Franco Maria Ricci, Milano.

G. Conti, B. Sedili, A. Trotta (2017), *Matematica, musica e architettura*, Science & Philosophy, Vol. 5 (1), pp. 129-148.

D'Arcy W. Thompson (2003), *Crescita e forma*, Bollati Boringhieri, Torino.

M. Livio (2003), *La sezione aurea*, Rizzoli Editore, Milano.

M. Du Sautoy (2007), *Il disordine perfetto*, Saggi BUR, Rizzoli Editore, Milano.

N. Sala, G. Cappellato (2012), *Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura,* Franco Angeli Editore, Milano.

Aldo Morelli e la “sua” geometria euclidea (non è un mondo per vecchi)

Giangiacomo Gerla

Università di Salerno
Dipartimento di Matematica, Via Giovanni Paolo II 132, 84084 Fisciano (SA)
ggerla@unisa.it

Abstract

Chi ha conosciuto il Professore Aldo Morelli ricorderà la sua grande passione per la geometria euclidea testimoniata, tra l’altro, da testi scolastici da lui amorevolmente preparati (si veda Morelli 1989). Pertanto in onore ed in ricordo del Professor Aldo Morelli in questo articolo parlerò dell’equiscomponibilità, un tipico capitolo della geometria euclidea. Successivamente parlerò della “point-free geometry”, argomento di cui mi occupo da tempo, che vuole essere un modo nuovo di rivedere la geometria euclidea. Questo sia per evidenziare le potenzialità didattiche del metodo sintetico sia per mostrare alcuni aspetti moderni di tale geometria che non è certamente un argomento “per vecchi” nostalgici. Su tale argomento suggerisco un mio articolo divulgativo del 2006 in cui si può trovare la seguente dedica che mi piace ripetere:

“Dedicato al mio amico Aldo Morelli che a volte mi viene in mente con dolcezza”.

Parole chiave: geometria euclidea, equiscomponibilità, punto, regione, oggetti matematici, ruolo dell’intuizione.

1. Introduzione.

Comincerò a parlare di equiscomponibilità: un tipico argomento di geometria euclidea e lo farò in una forma che indica un possibile percorso che potrebbe essere proposto a studenti della primaria ed adattato per quelle delle scuole medie. Mi manterrò quindi ad un livello elementare con una “didattica per problemi” in cui credeva fortemente il Professor Morelli. Accennerò solo all’inizio del percorso: una trattazione più completa si trova su Gerla 2014. Parlerò poi di “point-free geometry” che è legata alla questione di quali siano le nozioni primitive e quali quelle derivate in geometria e capovolge il punto di vista attuale per cui le figure geometriche sono insiemi di punti.

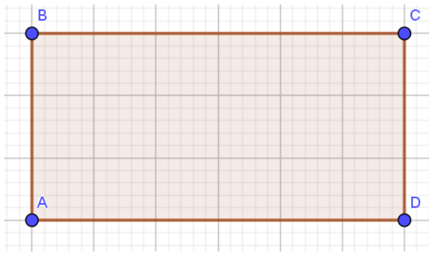
2. Equiscomponibilità

Ricordo che due figure geometriche F e G si dicono “equiscomponibili” se:

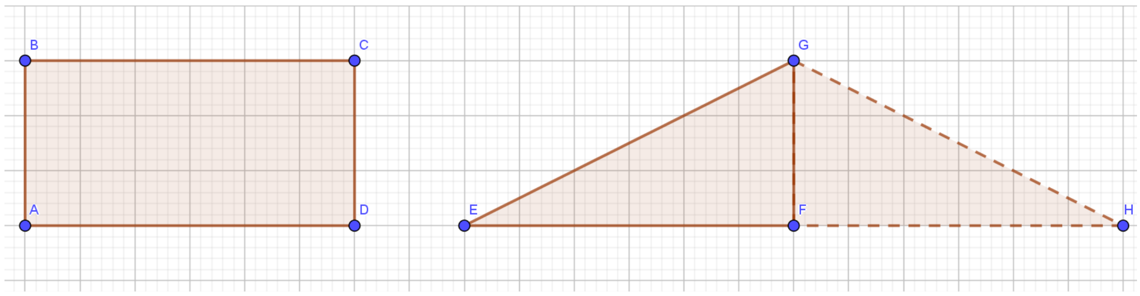
1. è possibile, con un paio di forbici, tagliare F in un numero finito di pezzi
2. spostare successivamente tali pezzi e ricomporli in modo da ottenere G.

Nella scuola elementare l’equiscomponibilità può essere vista come un gioco. Le sue regole prevedono che se la figura F è tagliata in pezzi allora nel ricostruire G tutti i pezzi devono essere utilizzati. Questa nozione è importante per il calcolo delle aree perché due figure equiscomponibili hanno la stessa area.
Ad esempio si potrebbe partire dal problema seguente:

Problema 1. Trasformare un rettangolo ABCD in un triangolo.



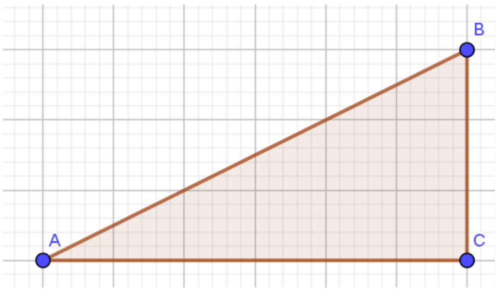
In una scuola elementare questo problema si può affrontare facendo fare agli studenti un po’ di tentativi con fogli rettangolari di carta e con forbici. Una volta trovata la soluzione è opportuno chiedere di procedere ad una descrizione verbale e scritta delle operazioni fatte e ad una giustificazione del procedimento. Una soluzione immediata è tagliare lungo una diagonale per poi ricomporre opportunamente (si guardi la seguente figura).



Un secondo problema potrebbe essere il seguente:

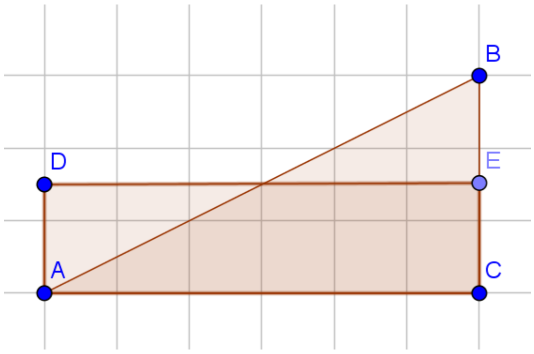
Problema 2. Dato un triangolo isoscele trasformarlo in un rettangolo.

Dovrebbe apparire che la soluzione del problema 1 è invertibile e diventare soluzione del problema 2. Basta leggere la figura da destra a sinistra. In altre parole la relazione di equiscomponibilità è simmetrica. Poiché si mostra che è anche riflessiva e transitiva, siamo in presenza di una relazione di equivalenza. Si pone poi il problema se tutti i triangoli si possano trasformare in rettangoli. Dalla discussione con gli studenti dovrebbe emergere che la soluzione del problema 2 si può applicare solo ai triangoli isosceli. Che fare allora se si parte da un qualunque triangolo? Proviamo un caso semplice: il triangolo rettangolo.

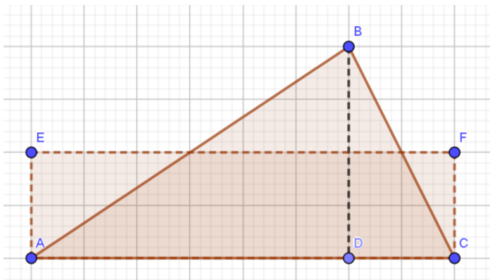


Problema 3. Trasformare un triangolo rettangolo in un rettangolo.

Si può suggerire che ci servono angoli retti e quindi che è opportuno tagliare la fastidiosa punta in B. Il taglio dovrebbe creare un nuovo angolo retto in modo da avvicinarci alla forma del rettangolo, la punta dovrebbe essere tagliata in modo da non avere un triangolino troppo piccolo o troppo grande. A furia di tentativi si dovrebbe scoprire che il taglio deve essere fatto non troppo in basso e non troppo in alto e possibilmente deve essere perpendicolare a BC. La soluzione consiste nel tagliare a metà altezza il triangolo rettangolo e poi ruotare opportunamente il piccolo triangolo ottenuto. tagliare orizzontalmente a metà altezza il triangolo e ruotare opportunamente il triangolino superiore OEI intorno al punto O.



Passiamo ora ad un qualunque triangolo ABC.



Problema 4. Trasformare un triangolo in rettangolo.

La soluzione si ottiene scegliendo come base il lato maggiore AC in modo che gli angoli alla base siano acuti e poi tagliandolo lungo l’altezza. Si ottengono due diversi triangoli rettangoli. Possiamo poi ridurre tali triangoli a due rettangoli e poi unire tali rettangoli. In definitiva abbiamo provato che ogni triangolo si può trasformare in un rettangolo. Procedendo in questo modo è possibile, alla fine di un percorso che termina nel primo biennio delle superiori, giungere a provare i seguenti teoremi.

Teorema. Due figure a contorni rettilinei che hanno la stessa area sono equiscomponibili.

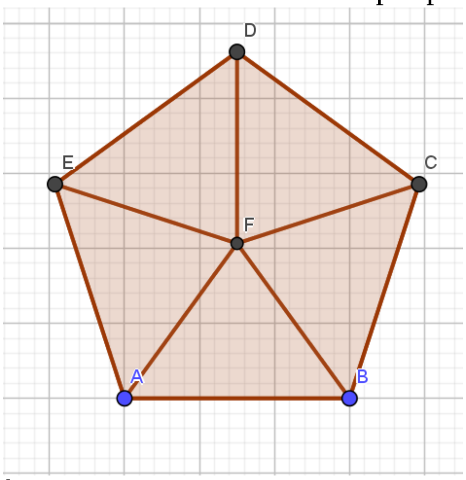
Teorema. (Misurare = trovare un rettangolo unitario equivalente). Ogni figura *F* a contorni rettilinei è equiscomponibile ad un rettangolo. Fissata un’unità di misura, si può ottenere che il rettangolo abbia lato unitario.

Teorema (Misurare = trovare un quadrato equivalente). Ogni figura a contorni rettilinei è equiscomponibile ad un quadrato.

Per una teoria sintetica della misura (*scissors measures*). L'equiscomponibilità è una relazione di equivalenza ed in ogni classe di equivalenza è presente uno ed "un solo" rettangolo di lato unitario ed uno ed "un solo" quadrato. Allora il significato dei due teoremi precedenti è ogni figura a contorni rettilinei ammette una riduzione a "forma normale" ad un rettangolo di lato unitario (o ad un quadrato). Non è difficile definire nell'insieme dei rettangoli unitari e nell'insieme dei quadrati un ordinamento ed un'operazione di addizione. Tale modo di procedere costituisce una teoria della misura di carattere puramente sintetico in cui non si utilizzano numeri reali e suggerisce una direzione di ricerca per misurazione come riduzione a forma normale (vedi Hales 2005).

3. Point-free geometry

Naturalmente la definizione che abbiamo sopra dato di equiscomponibilità in termini di forbici, pezzi di carta, tagli e spostamenti non sarebbe accettata dalla maggior parte dei matematici. Una definizione più precisa, in cui si assume che una figura sia un insieme di punti, è la seguente:



Definizione. F ed G sono equiscomponibili se esiste una partizione finita $F_1,\ldots,F_n$ di F ed una partizione finita $G_1, \ldots, G_n$ di G con F_i è isometrico a G_i.

Tuttavia tale definizione, pur apparendo più rigorosa, presenta notevoli problemi. Ad esempio, consideriamo un pentagono regolare e scomponiamolo in cinque triangoli come in figura. È la scomposizione utilizzata per provare la formula per l'area dei poligoni regolari:

area = perimetro per apotema diviso due.

Si pone tuttavia il problema di dire con più precisione che tipo di partizione determinano tali triangoli. Infatti per avere una partizione i triangoli devono essere insiemi disgiunti e la loro unione deve dare il pentagono. Il punto F a quale triangolo appartiene? A chi appartengono gli infiniti punti del segmento AF? Si deve anche tenere conto che per il principio di uguaglianza dei triangoli qualunque insieme di punti sia un triangolo la sua chiusura ed il suo interno devono essere congrui (cioè isometrici) avendo gli stessi lati. Ma questo è impossibile poiché una isometria è un omeomorfismo e quindi non può portare un chiuso in un aperto. Allora per salvare tale principio dobbiamo scegliere: o tutti i triangoli sono degli aperti o tutti sono dei chiusi. Una soluzione spesso adottata è assumere che le figure geometriche siano insiemi chiusi ma, poiché in questo caso quella disegnata non sarebbe una partizione, fornire una definizione diversa di "scomposizione". Ci si accontenta di richiedere che i pezzi della scomposizione non abbiano punti della frontiera in comune. In questo caso i nostri triangoli costituiscono una partizione del pentagono (si veda ad esempio Morelli 1989). Tale soluzione mi sembra impeccabile ma a mio parere è alquanto discutibile. Dal punto di vista didattico richiede negli studenti nozioni di topologia che poi sembrano inutili per la comprensione della equiscomponibilità. Poi appare innaturale: l'uomo comune nel guardare una figura geometrica non si porrebbe mai la domanda se sta guardando un insieme aperto o un insieme chiuso di punti e per l'uomo comune quella disegnata è una partizione. Forse è sbagliato pensare alla geometria come ad un ramo dell'analisi matematica anche se entrambi gli argomenti si riferiscono al dominio R^n. Si pongono allora le seguenti questioni.:

- È giusto identificare una figura geometrica con un insieme qualsiasi di punti?
- È possibile fare a meno dei punti e considerare le figure geometriche direttamente come enti primitivi come la nostra intuizione suggerisce?

IDEA. Non sono le figure geometriche ad essere definibili tramite i punti ma i punti ad essere definiti le figure geometriche. Conviene allora fondare l'idea di piano sul concetto primitivo di figura geometrica a due dimensioni e definire poi, per astrazione, i punti e le linee partendo dalle figure geometriche. Fare poi la stessa cosa per definire lo spazio.

TENTATIVI: Tutti i tentativi per un approccio formale alla point-free geometry assumono come nozione primitiva quella di regione (che non è necessariamente un insieme di punti) e di inclusione (che non è necessariamente di tipo insiemistico). Si distinguono fra loro per il fatto che aggiungono differenti nozioni primitive. Da notare che in molti tentativi la classe delle regioni è un'algebra di Boole senza atomi e che quindi i punti, in un certo senso non esistono, come non esistono le rette. Un modello è costituito dall'algebra di Boole dei chiusi regolari dello spazio topologico R^2. Ed in questo modello i triangoli di cui abbiamo parlato costituiscono realmente una partizione nel senso dato a questa parola nella teoria delle algebre di Boole.

Whitehead. Effettua un'analisi dello spazio quadridimensionale che suggerisce possibili sistemi di assiomi per una geometria senza punti. Concentra la propria attenzione sulla relazione di contatto tra regioni, e le nozioni di convessità, e di movimento rigido. I punti sono definiti tramite successioni di regioni "nested" cioè decrescenti (processi di astrazione) (Whitehead,1929, ed anche Gerla-Tortora 1992).

Tarski. Assume come nozione primitiva, oltre quella di regione e di inclusione quella di sfera. Una volta definita la relazione di concentricità tra sfere, un punto è una classe di equivalenza modulo tale equivalenza (Tarski 1923).

Sniatycki. Assume come primitiva la nozione di semipiano. Si definisce la retta come l'insieme costituito da un semipiano e dal suo complemento. Dopo avere definito il parallelismo di due semipiani definisce gli angoli come le intersezioni di due semipiani non paralleli. Un punto è definito come “spigolo” di un angolo (Sniatycki, 1968).

Dana Scott. Basato sulla nozione di gruppo di movimenti. Articolo da poco sottoposto ad una rivista (Scott, 2018).

Io ed altri miei colleghi abbiamo provato a seguire due strade.

Approccio metrico. Si assume come primitiva le nozioni di distanza tra due regioni e quella di diametro di una regione. Un punto è una successione di regioni una dentro l’altra con diametro che tende a zero (Gerla 1990) .

Approccio che si basa sui convessi. Utilizziamo la nozione di ovale (che corrisponde a quella di insieme convesso). Chiamiamo *semipiano* un ovale il cui complemento è un ovale. Procediamo poi come in Sniatycki, 1968. (Gerla-Gruszczyński, 2017).

Progetto di ricerca didattica: Definire un percorso di geometria solida che non parta da nozioni astratte quali punti, rette e piani ma da regioni o, se si vuole corpi solidi. Punti rette e piani dovrebbero essere definiti “per astrazione”. Si dovrebbero inoltre proporre nozioni primitive ed assiomi che abbiano un carattere “concreto”. Il tutto dovrebbe costituire un percorso didattico per la geometria da proporre nelle scuole. Attualmente stiamo lavorando all’interno della geometria piana chiamando *retta* un insieme $l = \{h, -h\}$ costituito da un semipiano h e dal suo complemento $–h$: semipiani che si chiameranno *lati* della semiretta. Chiamiamo *parallele* due rette se uno dei lati della prima è disgiunto da uno dei lati della seconda. L’assioma delle parallele coinciderebbe con l’affermazione per cui se due semipiani sono contenuti in uno stesso semipiano allora sono confrontabili (uno di essi è contenuto nell’altro) e così via.

Bibliografia

Gerla G. (1990). Pointless metric spaces, *J. Symbolic Logic*, 55 (1990) 207-219.

Gerla G. (2006). Un punto dal volto di gatto (I) e (II): fare a meno dei punti, *Periodico di Matematiche*, 3 (2006) 9-20, 4 (2006) 15-25.

Gerla G. (2014). Equiscomponibilità, *Journal of Science & Philosophy Divulgation*, J-DiSciPhil - Fascicolo 1, Honorary Chief Editor: Giordano Bruno, Chief Editor: Franco Eugeni.

Gerla G., R. Gruszczyński. (2017), Point-Free Geometry, Ovals and Half-Planes, *The Review of Symbolic Logic*, Volume 10, 2, 237-258.

Gerla, G., R. Tortora (1992). La relazione di connessione in A.N. Whitehead: Aspetti matematici, *Epistemologia* 15, 341-354.

Hales T. C. (2005). Wath is motivic measure?, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 42, n. 3, 119-135.

Morelli A. (1989). *Geometria* 1 e 2, Loffredo Editore, Napoli.

Morelli A., (2001). *Raccolta di scritti per l'insegnamento*, a cura di F. Casolaro e T. Olivello, Università degli Studi di Napoli, Dipartimento di Matematica.

Scott D. S. (2018). *Geometry without points*, Preliminary report on on-going joint work with Tamar Lando, Submitted.

Sniatycki, A. (1968) An axiomatics of non-Desarguean geometry based on the half-plane as the primitive notion, *Dissertationes Mathematicae*, 59, 1-42.

Tarski A. (1923). Foundations of the geometry of solids, in *Logic, semantics, metamathematics*, papers from 1923 to 1938, Clarendon Press, Oxford, 1956, 24–29.

Whitehead, A. N. (1929). *Process and Reality*, Macmillan, New York.

L’insegnamento della Geometria Proiettiva nella Scuola secondaria di primo e secondo grado.

Alessandra Rotunno[1] **Ivano Casolaro**[2]

[1]Liceo Labriola, Napoli - Dip. Architettura Università “Federico II” di Napoli
alessandra.rotunno@unina.it

[2]Liceo Uccellis Udine
ivanored@libero.it

Abstract

Si propone un percorso didattico per l'insegnamento della Geometria nelle Scuole secondarie di secondo grado che tiene conto sia dell'evoluzione degli ultimi due secoli, sia della velocizzazione degli eventi dovuta all’avanzamento della tecnologia (Casolaro F., Rotunno A. 2003). Dopo una breve introduzione di carattere storico, si espongono i principali concetti di Geometria Proiettiva e l’applicazione allo studio delle rette e delle coniche nel piano cartesiano ampliato con gli elementi impropri e le proprietà che si conservano nelle trasformazioni lineari.

Parole chiave: Geometria Proiettiva, Omografia, Affinità, Similitudine, Isometrie, Coniche, Trasformazioni lineari,

1. Introduzione

Il processo di evoluzione della Didattica della Matematica in Italia, dal dopoguerra al 2001 (anche dopo ma in modo minore) si è sviluppato nei Nuclei di Ricerca Didattica delle Università, dove si è sentito sempre di più l’esigenza di ampliare il modello euclideo ad altre geometrie che negli ultimi due secoli hanno condotto ad una visione dell’universo più vicina alla realtà (Casolaro F. 1997 - Casolaro F., Pisano R. 2006).
A questo processo hanno contribuito Matematici/Pedagogisti come Lucio Lombardo Radice, Emma Castelnuovo, Bruno de Finetti, Giovanni Prodi, Francesco Speranza, Bruno Rizzi, Aldo Morelli…ed altri (Casolaro F. 2013).
Non a caso è citato per ultimo Aldo Morelli, di cui gli autori di questo lavoro sono stati allievi.
Aldo Morelli è il professore che con la sua cultura e i suoi elevati valori umani ha guidato e guida ancora oggi, con l’insegnamento che ci ha lasciato e di cui ci siamo pregiati, la nostra attività di docenti.

Nel Nucleo di Ricerca Didattica che presiedeva al Dipartimento di Matematica dell'Università di Napoli Federico II, il tema centrale era la Geometria con particolare riferimento alla Geometria Proiettiva che il prof. Morelli insegnava agli studenti nel corso di Matematiche Complementari.
La Geometria Proiettiva è diventata poi, dalla fine degli anni '80, di provvisorio ordinamento negli istituti sperimentali ad indirizzo Brocca.
Al Modello del M.P.I. di Sperimentazione "Brocca", per l'introduzione dell'Informatica nella Scuola e nelle Università, è stato aggiunto un Progetto sulle interrelazioni tra l'insegnamento della Matematica e l'insegnamento del Disegno, il cui obiettivo era lo utilizzo delle nuove tecnologie informatiche nella Rappresentazione (Cundari C. 1991).
La finalità del Progetto era, oltre all'utilizzo delle tecniche informatiche (CAD, GET, CABRI', ...) che sostituivano la rappresentazione con riga e compasso, l'esigenza di educare i docenti (successivamente gli studenti) alle conoscenze fondamentali della Geometria su cui sono basate le nuove tecniche, cioè la Geometria Proiettiva che, negli ultimi decenni è stata di fatto (anche se non ufficialmente) esclusa dai programmi di insegnamento nelle Università.
Relativamente alla stesura del percorso di Matematica fu incaricato, su indicazione del prof. Bruno Rizzi, Ferdinando Casolaro le cui risultanze, alle quali hanno contribuito gli autori di questo articolo, sono in bibliografia (Casolaro I., Miglionico C. 2010 – Casolaro F., Casolaro I. 2009).
Questi argomenti sono oggi inseriti nelle Indicazioni nazionali per i licei e nelle Linee guida per gli Istituti tecnici, in quanto uno studio corretto dell'Ottica moderna, non può prescindere dalla conoscenza dei fondamenti di Geometria Proiettiva (Casolaro F., Rotunno A. 2017)

2. Evoluzione della geometria attraverso l'arte: Cenni storici

I primi frammenti che abbiamo in proposito risalgono al terzo secolo a.C., quando ebbe origine un gruppo di ricerche, di cui faceva parte Euclide, i cui risultati vanno sotto il nome di "*Ottica degli antichi*" (F. Casolaro 2003).
È stato questo il primo tentativo di razionalizzazione dell'arte (dal tridimensionale al bidimensionale) attraverso il concetto di propagazione rettilinea della luce.
Testimonianza dell'interesse dei greci per la rappresentazione come fondamento per l'arte pittorica e quindi dell'esistenza di questo gruppo di studiosi, lo si evince da alcuni passi di Vitruvio (Marco Vitruvio Pollone, vissuto probabilmente nel I sec. a.C.) che si può considerare il più significativo trattatista di Architettura del mondo latino.
Rimandando alla bibliografia l'evoluzione attraverso i secoli successivi, è nel XV secolo che si realizza un metodo di ***Prospettiva lineare geometrica*** con Filippo Brunelleschi. (Firenze, 1377-1446), che per primo fissò le norme della Prospettiva (Casolaro F. Rotunno A. 2015).

Un secolo dopo la Prospettiva passa dalle mani degli artisti a quelle degli scienziati nel XVI per merito di Federico Commandino (Urbino 1509-1575) con la Prospettiva lineare, prima intuizione del concetto di *omologia* (Casolaro F., Cirillo L. 1996).
Nel XVII secolo Girard Desargues (1591-1661) inaugura il metodo delle proiezioni centrali e con l'introduzione del punto all'infinito pone le basi della Geometria Descrittiva e della Geometria Proiettiva che si svilupperà nei due secoli successivi con Gaspard Monge (1746-1818) e Jean Victor Poncelet (1778-1867) (Casolaro F., Paladino L. 2012).

3. La "Geometria Proiettiva" nella Scuola Secondaria di secondo grado

La Geometria euclidea tratta, quasi esclusivamente, proprietà di uguaglianze o di similitudini di figure. Infatti, le proprietà che essa studia sono tali che, se valgono per una figura, valgono per le figure uguali ad essa e per le figure ad essa simili.
Negli ultimi due secoli sono stati strutturati modelli di Geometria con proprietà più ampie ma non in contraddizioni tra loro (Casolaro F., Pisano R. 2011, Casolaro F., Pisano R. 2012).
È il matematico tedesco Felix Klein (1849-1925) che, nella seconda metà del XX secolo, dopo le dispute sulla crisi dei fondamenti e le discussioni sul postulato delle parallele, ha trovato il nocciolo unificante delle varie geometrie nel concetto di Gruppo di Trasformazioni.
Klein osservò che nello spazio vi sono delle trasformazioni che non alterano le proprietà geometriche delle figure.
Relativamente alle trasformazioni lineari, il gruppo di trasformazioni più ampio tra forme geometriche (rette, fasci di rette, piani, fasci di piani, spazi tridimensionali, ecc…) è il gruppo delle proiettività che, nel caso di trasformazioni piane (a cui noi ci riferiremo) prende il nome di "gruppo delle omografie".
In generale, diciamo *proiettività* tra due forme geometriche π_1 e π_2, una corrispondenza biunivoca ω che a punti di π_1 associa punti di π_2 ed a rette di π_1 associa rette di π_2. Una proiettività tra piani è detta *omografia*.
Pertanto, un'omografia è una trasformazione lineare tra due piani π_1 e π_2 (distinti o sovrapposti) che trasforma un punto di π_1 in un punto di π_2 ed una retta di π_1 in una retta di π_2. La trasformazione avviene attraverso (e solo) le operazioni di proiezione e sezione che, al fine di stabilire tra i due piani una corrispondenza biunivoca completa, vanno ampliate agli elementi impropri (punto all'infinito, retta all'infinito).
Il criterio di costruzione di queste operazioni (corrispondenze biunivoche) consente di distinguere tra le varie proprietà geometriche di una figura piana, quelle che sussistono, oltre che per la figura stessa, anche per tutte le figure che si possono dedurre da essa per proiezione e sezione; per tali proprietà si dice che hanno carattere proiettivo e lo studio delle proprietà delle figure che hanno carattere proiettivo costituisce la geometria proiettiva. L'insieme di tutti i punti e di tutte le rette del piano ampliate con gli elementi impropri è detto piano proiettivo.
Nel paragrafo che segue, si introdurranno gli elementi fondamentali di geometria proiettiva, per analizzare, poi, le varie trasformazioni che avvengono nel piano euclideo ampliato con gli elementi impropri (piano proiettivo).

3.1 Il piano proiettivo

Date, in un piano α, una retta r ed un punto S detto centro di proiezione, si può costruire la corrispondenza che ad ogni punto P del piano, associa il punto P' ≡ SP ∩ r detto proiezione del punto P dal centro S (fig. 3.1).
Se il segmento SP è perpendicolare ad r, la proiezione si dice ortogonale. Il punto P' è detto anche sezione della retta SP con la retta r.

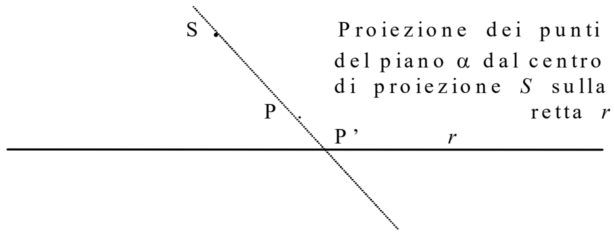


fig. 3.1

La corrispondenza tra i punti del piano e la retta r mediante l'operazione di proiezione non è biunivoca, in quanto ogni punto P del piano ha un solo corrispondente P' nella proiezione, ma P' è corrispondente degli infiniti punti della retta SP.
Consideriamo ora due rette r ed s ed il centro di proiezione S, esterno sia ad r che ad s. Si definisce prospettività di centro S tra le rette s ed r la corrispondenza che ad ogni punto P∈s fa corrispondere il punto P' ≡ SP ∩ r (cioè la proiezione del punto P di r al centro di proiezione S; (fig. 3.2).

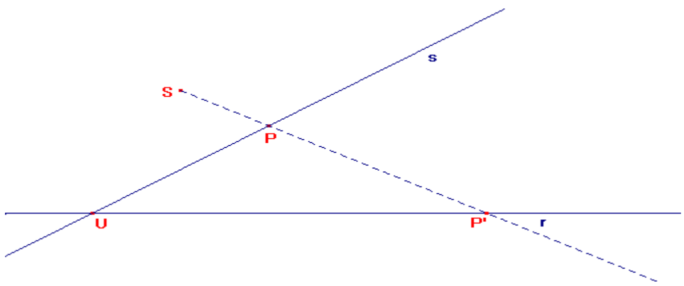


Fig. 3.2

Se s è parallela ad r, la corrispondenza è completa e biunivoca in quanto la semiretta che congiunge il centro di proiezione S con un qualsiasi punto di s, interseca certamente la retta r, e viceversa.
Se s incide r in un punto U, si può osservare che al punto U corrisponde se stesso (punto unito) e che esiste un punto I∈s tale che la retta IS è parallela ad r, per cui al punto I non corrisponde alcun punto di r (fig. 3.3).

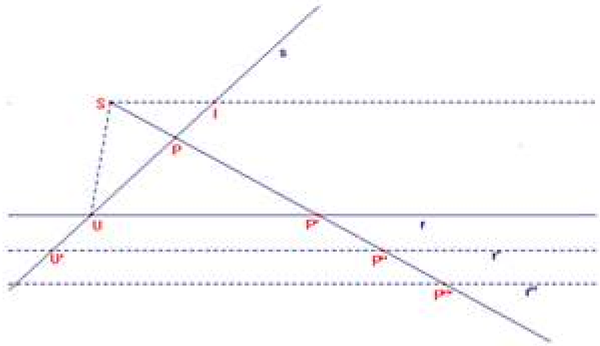


Fig.3.3

E' possibile completare la corrispondenza biunivoca tra *s* ed *r*, associando al punto I∈*s* un elemento J∝ di *r* che è detto *punto improprio* o *punto all'infinito* ed è individuato dalla direzione della retta *r*.
Infatti, se *consideriamo* la prospettività di centro S tra la retta *s* ed una qualsiasi parallela ad *r,* possiamo osservare che al punto I∈*s* corrisponde ancora J∝ (fig. 3.3).
Il punto I∈*s* è detto *punto limite* nella prospettività di centro S tra le rette *s* e *r*.
Lo spazio euclideo, con l'aggiunta degli elementi impropri, prende il nome di spazio proiettivo; la geometria che ne studia le proprietà è la geometria proiettiva; il gruppo di trasformazioni è il gruppo delle proiettività, che nel caso di trasformazioni tra piani prende il nome di omografia.
Il piano euclideo, ampliato con gli elementi impropri, prende il nome di piano proiettivo.

4. La rappresentazione nel piano proiettivo

Nel piano euclideo, si rappresentano i punti e le rette rispettivamente mediante coppie di coordinate ed equazioni lineari di primo grado a due incognite, introducendo un sistema di riferimento cartesiano O(x, y).

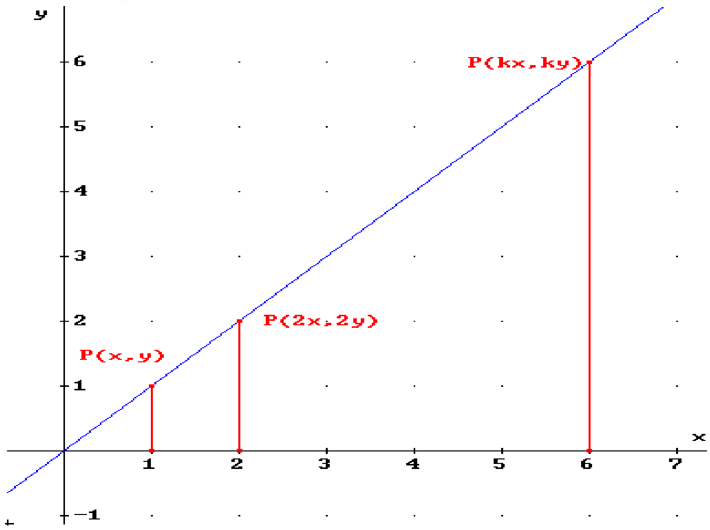


Fig. 4.1

Vogliamo far vedere come nel piano proiettivo, si rappresentano i punti e le rette (propri e impropri) mediante terne di coordinate (x_1, x_2, x_3) in un riferimento O'(x_1, x_2, x_3); i punti impropri hanno la terza coordinata $x_3 = 0$, come si evidenzierà dalla rappresentazione che segue.

Consideriamo, nel piano munito di riferimento cartesiano *Oxy*, un punto J_∞ individuato dal fascio di rette di direzione δ e la retta *r* per l'origine di tale fascio. Se P (x, y) $\in$ *r*, mediante l'ampliamento al piano proiettivo, vogliamo individuare la rappresentazione analitica del punto improprio J_∞. Con riferimento alla fig. 3.1, consideriamo una direzione δ del piano (punto improprio P_∞).

Sia *r* la retta per l'origine che individua P_∞ e sia $P_1\ (\bar{x}, \bar{y})$ un punto di r.

Consideriamo la successione di punti:

$$P_1(\bar{x}, \bar{y}) \equiv \left(\frac{\bar{x}}{1}, \frac{\bar{y}}{1}\right); \quad P_2(2\bar{x}, 2\bar{y}) \equiv \left(\frac{\bar{x}}{\frac{1}{2}}, \frac{\bar{y}}{\frac{1}{2}}\right); \ \ldots\ldots\ldots \ P_{10}(10\bar{x}, 10\bar{y}) \equiv \left(\frac{\bar{x}}{\frac{1}{10}}, \frac{\bar{y}}{\frac{1}{10}}\right); \ldots$$

$$P_{1000}\ (1000\bar{x}, 1000\bar{y}) \equiv \left(\frac{\bar{x}}{\frac{1}{1000}}, \frac{\bar{y}}{\frac{1}{1000}}\right); \ldots\ldots\ldots$$

che, considerando il denominatore una terza coordinata, possiamo anche scrivere:

$$P_1(\bar{x}, \bar{y}, 1); \quad P_2\ (\bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{2}); \ \ldots\ldots P_{10}(\bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{10},); \ldots\ldots\ldots\ldots P_{1000}\ (\bar{x}, \bar{y}, \frac{1}{1000}); \ldots\ldots\ldots$$

I punti di tale successione appartengono tutti alla retta r ed al crescere dell'indice k, cresce la distanza $\overline{OP_k}$, ovvero, al tendere a zero del denominatore comune alle due coordinate (o terza coordinata), il punto P_k si allontana indefinitamente.

Posto:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \qquad\qquad y = \frac{x_2}{x_3} \qquad\qquad (4.1)$$

possiamo definire le coordinate dei punti impropri come terne di numeri reali (x_1, x_2, x_3) in cui risulta $x_3 = 0$.

Pertanto, l'equazione $x_3 = 0$ individua il luogo geometrico dei punti impropri del piano, cioè la retta impropria.

5. Rappresentazione analitica di rette e coniche nel piano proiettivo.

Con l'introduzione della terza coordinata, una retta propria, nel piano proiettivo ha la seguente rappresentazione:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \qquad (5.1)$$

Infatti, sostituendo le (4.1) nella nota rappresentazione della retta nel piano cartesiano, *ax+by+c=0*, si ha:

$$a\frac{x_1}{x_3} + b\frac{x_2}{x_3} + c = 0$$

da cui la (5.1), che è detta equazione della retta in coordinate omogenee, in quanto tutti i termini sono di primo grado.
Analogamente, una conica che è rappresentata nel piano cartesiano da un'equazione di secondo grado a due incognite del tipo:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0\,, \qquad (5.2)$$

ha nel piano proiettivo la seguente rappresentazione:

$$a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}{x_3}^2 = 0 \qquad (5.3)$$

in cui si è posto:

$$x = \frac{x_1}{x_3} \qquad y = \frac{x_2}{x_3}\,, \quad (*)$$

6. Classificazione delle coniche

Le intersezioni di una conica con una retta si ricavano dalla risoluzione di un sistema a due incognite formato da un'equazione di secondo grado e da un'equazione di primo grado, per cui si ottengono due soluzioni che possono essere reali e distinte, reali e coincidenti, complesse coniugate. Diciamo dunque che una retta interseca una conica in due punti.
Se la conica è un'ellisse, la retta può essere esterna (due intersezioni immaginarie), tangente (due intersezioni reali e coincidenti), secante (due intersezioni reali e distinte). *Ciò si verifica qualunque sia la direzione della retta*.
Se la conica è una parabola si hanno sempre due intersezioni per ogni direzione diversa dalla direzione dell'asse della parabola; infatti, una retta parallela all'asse della parabola interseca la parabola in un solo punto reale, mentre la seconda soluzione è all'infinito; diciamo in tal caso che *la parabola ha un punto di intersezione con la retta impropria*.
Se la conica è un'iperbole, si può osservare che le rette aventi le direzioni dei due asintoti hanno una sola intersezione con la conica, mentre l'altra è all'infinito; diciamo allora che *l'iperbole ha due intersezioni con la retta impropria*.
Per classificare quindi una conica, operiamo nel piano proiettivo, intersecando la conica rappresentata dall'equazione (5.3) con la retta impropria di equazione: $x_3 = 0$. A seconda delle soluzioni del sistema si stabilisce il tipo di conica.

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

dalla cui equazione risolvente:

$$a_{11}x_1^{\ 2}+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^{\ 2}=0$$

ricaviamo il numero di intersezioni con la retta impropria analizzando il segno del discriminante Δ. Risulta:

$$\frac{\Delta}{4}=a_{12}^2-a_{11}a_{22} \quad = \quad -\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right) \quad = \quad -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad = \ -A_{33}$$

Quindi si ha:

1) se $\Delta > 0$ risulta $A_{33} < 0$: la conica ha due intersezioni reali con la retta impropria (le direzioni degli asintoti) ed è un'iperbole.
2) se $\Delta = 0$ risulta $A_{33} = 0$: la conica ha una sola intersezione reale (due intersezioni coincidenti) con la retta impropria (la direzione dell'asse) ed è una parabola.
3) se $\Delta < 0$ risulta $A_{33} > 0$: la conica non ha intersezioni reali con la retta impropria ed è un'ellisse.

Pertanto, il segno del determinante A_{33} ci permette di classificare le coniche nel piano proiettivo.

7. Invarianti delle trasformazioni lineari

Come abbiamo visto, dalle operazioni di proiezione per le funzioni lineari di primo grado (rette), e di proiezione e sezione per le funzioni quadratiche di secondo grado (coniche), la Geometria Proiettiva ci permette uno studio ed un'analisi con una visualizzazione molto più ampia, anche per lo studio delle Trasformazioni Geometriche. Ci rendiamo conto che le proprietà che nella Geometria Proiettiva non variano, sono incluse nelle proprietà che non variano della Geometria Affine, che a loro volta sono incluse nelle proprietà che non variano nella Geometria Euclidea, i cosiddetti invarianti (Casolaro F., Eugeni F. 1995).
Non volendomi allargare su questioni relative a gruppi di trasformazioni, mi limito a ciò che presentiamo didatticamente agli studenti di Architettura che è lo studio degli invarianti.

Poiché un'omografia muta rette in rette, deve essere rappresentata, nel piano proiettivo, da equazioni di primo grado:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \qquad (7.1)$$

dove la matrice:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (7.2)$$

ha rango tre (det A $\neq 0$), affinché la corrispondenza sia biunivoca.
All'interno dei gruppi di trasformazioni si conservano alcune proprietà (Casolaro F., Cirllo L., Prosperi R. 2016). Relativamente alle trasformazioni di rette (invarianti espressi da equazioni di primo grado) ed alle trasformazioni di coniche (invarianti espressi da equazioni di secondo grado), un'Omografia muta una retta in un'altra retta ed una circonferenza in una conica reale non degenere; inoltre si conserva il birapporto tra quaterne di punti su rette corrispondenti.
Se l'omografia muta rette parallele in rette parallele, è detta Affinità; le affinità formano gruppo (sottogruppo delle omografie) rispetto all'operazione di composizione. Il gruppo delle affinità caratterizza la geometria affine (primo ampliamento della geometria euclidea). Relativamente alle proprietà espresse da equazioni di primo grado, poiché in una trasformazione affine si conserva il parallelismo, un punto improprio si muta in un altro punto improprio, per cui la retta impropria è unita; relativamente alle trasformazioni espresse da equazioni di secondo grado, una circonferenza si muta in una conica chiusa (ellisse); inoltre si conserva il rapporto semplice tra terne di punti su rette corrispondenti, ed è costante il rapporto tra le misure delle aree di figure corrispondenti.
La proprietà delle affinità di avere unita la retta impropria, si traduce analiticamente nella eliminazione della terza equazione della (7.1) in quanto risulta: $x'_3 = x_3$.
Pertanto un'affinità è espressa analiticamente da due equazioni lineari (il piano proiettivo coincide con il piano affine):

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases} \qquad (7.3)$$

Un'affinità in cui si conservano le ampiezze degli angoli è detta Similitudine; le similitudini formano gruppo (sottogruppo delle affinità) rispetto all'operazione di composizione. Il gruppo delle similitudini caratterizza la geometria euclidea. Relativamente alle proprietà espresse da equazioni di primo grado, in una similitudine, rette perpendicolari si mutano in rette perpendicolari; relativamente alle proprietà espresse da equazioni di secondo grado, una circonferenza è mutata in un'altra circonferenza.
Inoltre, si conserva il rapporto tra le misure di coppie di segmenti corrispondenti.
Relativamente a quest'ultima proprietà, è interessante notare che nel passaggio:

omografia → affinità → similitudine
in cui si conserva rispettivamente il
birapporto → rapporto semplice → rapporto distanze

si passa da una proprietà relativa

a quattro punti corrispondenti (birapporto),
tre punti corrispondenti (rapporto semplice),
due punti corrispondenti (rapporto distanza).

Se la similitudine conserva le distanze, è detta Isometria.

Lo studio delle proprietà delle similitudini e delle isometrie è l'argomento dei testi di geometria euclidea (Casolaro, Cirillo, Prosperi, 2015).
Possiamo riassumere e schematizzare gli invarianti lineari nelle trasformazioni

Geometria	Proiettiva	Affine	Euclidea	
Trasformazioni	Omografie	Affinità	Similitudini	Isometrie
Invarianti	Rette in rette	Parallelismo	Perpendicolarità Misure angoli	Perpendicolarità Misure angoli
	Coniche non degeneri	Coniche chiuse	Circonferenze	Circonferenze
	Birapporto	Rapporto semplice	Rapporto distanze	segmenti congruenti in segmenti congruenti

Bibliografia

C. Cundari 1990-1991- Atti del Progetto del M.P.I. e del Dipartimento di Progettazione e Rilievo dell'Università "La Sapienza" di Roma (11-15 dicembre 1990; 6-10 maggio 1991; 8-12 dicembre 1991): "*Disegno e Matematica per una didattica finalizzata alle nuove tecnologie*"

G. Loria - *Storia della Geometria Descrittiva dalle Origini sino ai giorni nostri* - Milano, Ulrico Hoepli, 1921.

F. Casolaro F., Eugeni F. 1995: "*Trasformazioni geometriche che conservano la norma nelle algebre reali doppie*". Ratio Matematica n. 1, 1996 – pag. 23-33.

Casolaro F., Cirillo L. 1996: "*Le trasformazioni omologiche*". Convegno Nazionale Mathesis Verona, 1996 - pag. 309-318.

Casolaro F. 1997: "*Modello geometrico non euclideo per lo spazio fisico*", Convegno "Metodi di rappresentazione dell'incertezza nell'Architettura", Pescara, 1997 - pag.103-106.

Casolaro F. 2003: "*Le trasformazioni omologiche nella Storia, nell'Arte, nella Didattica*" - Convegno Internazionale "*Matematica e Arte*", Vasto, 2003; pagg. 129-148.

F. Casolaro, A. Rotunno 2003: "Presentazione di un percorso didattico di Geometria Proiettiva: Trasformazioni geometriche nell'arte" - aifnapoli2.blogspot.com- Relazioni tra Fisica e Matematica

Casolaro F., Pisano R. 2006: "*Riflessioni sulla geometria nella Teoria della relatività*", XXVI Congresso Nazionale di "*Storia della Fisica e dell'Astronomia*" (SISFA-Facoltà di Architettura dell'Università di Roma "La Sapienza". pag. 221-231.

Casolaro F. Casolaro I. (2009): Appunti del Corso di Geometria al Dipartimento di Architettura dell'Università di Napoli Federico II.

Casolaro I., Miglionico M.C. (2010): "*Dal piano euclideo al piano proiettivo: rappresentazioni di I e II grado"*. Epistemologia Didattica. Ed. Laveglia&Carlone

Casolaro F., Prosperi R.: Atti della Scuola Estiva di Terni, 2011"*La Matematica per la Scuola Secondaria di II grado*". Editore 2C Contact.

Casolaro F., R. Pisano: "*An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part One)*" - History Research - Vol. 1, Number 1, December 2011 - pag. 47-60.

Casolaro F. Pisano R.: "*An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics* (Part two)" - History Research - Vol. 1, Number 1, December 2012 - pag. 47-60.

Casolaro F., Paladino L. 2012: "Evolution of the geometry through the Arts" - 11th International Conference APLIMAT 2012 - in the Faculty of Mechanical Engineering - Slovak University of Tecnology in Bratislava, pag. 481-490.

Casolaro F. 2013: "*L'evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola?*" Convegno "*Euclide...oltre Euclide*" C.mmare di Stabia, 2013.

F. Casolaro F. Cirillo L., Prosperi R., "*Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie*" – Journal of Epistemology, Science e Philosophy - Number 3 June 2015. Pagine 73-106.

Casolaro F., Rotunno A.: "*Mathematics and Art: from the pictorial art to the linear transformations*". University of Defence - Brno, Czech Republic, ottobre 2015.

Casolaro F. Cirillo L., Prosperi R., "*Groups of Transformations with a Finite Number of Isometries: the Cases of Tetrahedron and Cube*". Ratio-Matematica, Volume 31 - 2016, pagg. 93-110.

Emma Castelnuovo e l’insegnamento della geometria

Luigi Togliani

Liceo Scientifico “Belfiore” - Via Tione, 2, 46100 Mantova
luigi.togliani@gmail.com

Abstract

Emma Castelnuovo (Roma, 1913 – Roma, 2014) rivoluzionò l’insegnamento della geometria nella scuola italiana a partire dagli anni ’40 del secolo scorso, ritenendo che ai giovani studenti dovessero essere proposte attività concrete che li vedessero protagonisti del loro apprendimento. L’articolo vuole riproporre alcuni aspetti significativi dell’approccio intuitivo alla geometria studiato e messo in atto dalla Castelnuovo.

Parole chiave: geometria intuitiva, costruzionismo, artefatti cognitivi.

1. Motivazioni

In un suo articolo apparso sul Periodico di Matematiche nel 1975 Emma Castelnuovo presenta quelle che ritiene siano le principali motivazioni che possono spingere un adolescente ad apprendere la matematica: fenomeni della realtà; giochi; storia del pensiero matematico, generalizzazioni.
In questo breve scritto voglio soffermarmi particolarmente sui fenomeni del mondo reale e sull’uso di strumenti e materiali - artefatti cognitivi, secondo Seymour Papert - che la Castelnuovo utilizzava con i suoi allievi, anche se, come lei stessa afferma, «non ci si deve mai preoccupare se la linea didattica non è “pura”, perché è proprio questo “fusionismo” (per utilizzare un termine caro a Bruno de Finetti) che è creativo»[1].

2. Geometria intuitiva

Le attività sperimentali portano l’allievo a farsi un’idea dinamica della geometria, a differenza di quella statica che nasce da un’impostazione didattica rigidamente assiomatica. La proposta della Castelnuovo, rivolta a ragazzi dagli 11 ai 14 anni, è quella di una geometria “intuitiva” di cui la nostra autrice chiarisce bene il senso.

[1] Castelnuovo, *Motivazioni per lo studio della matematica*, p. 7-8.

«*Intueri* significa originariamente "guardare dentro, guardare con attenzione". In origine il significato era dunque statico: era quello di contemplare la verità in senso platonico. […] Se invece ci riferiamo al significato della parola intuizione così come è stato precisato nella pedagogia pestalozziana, cioè all'intuizione come costruzione, il corso di geometria intuitiva dovrà offrire al ragazzo un materiale con cui possa costruire o che si possa trasformare, facendo sì che la sua attenzione si rivolga non tanto all'oggetto, alla figura in sé, ma alla sua variazione, a un'azione, a un'operazione, dunque.[2]».
E' il metodo "attivo" che Emma Castelnuovo già proponeva nel lontano 1946, criticando l'impostazione tradizionale, vigente ancora oggi anche nella scuola primaria e secondaria di primo grado, che fa precedere le definizioni alla pratica; così facendo «il ragazzo deve prima fare lo sforzo di concepire idee astratte, e, dopo che non le ha capite, farne le applicazioni.[3]»

3. Oggetti, ombre, trasformazioni

Il sole o una lampada illuminano degli oggetti: le loro ombre create su una parete, sul pavimento, su un tavolo possono presentare una forma diversa da quella dell'oggetto. L'oggetto si muta nella sua ombra con una particolare trasformazione, la prospettività.
«Osservando i quadrati dell'inferriata e le loro ombre sul pavimento, cioè i trapezi, al bambino verrà certo in mente che anche a lui è capitato tante volte, nel corso del disegno, di rappresentare con dei trapezi un pavimento a mattonelle quadrate per dare l'idea della profondità di una camera; qui, con le ombre, la rappresentazione dell'oggetto è già realizzata, come se il lampione benefico gli avesse già fatto il compito del disegno! Se poi l'ombra si forma sulla parete opposta, il bambino osserverà che ai quadrati reali corrispondono, come ombre, dei quadrati più grandi, e che la sua ombra è più grande di lui stesso, ma ha la forma del suo contorno, è simile»[4].
Da queste semplici osservazioni possiamo dedurre che le similitudini, che conservano la forma degli oggetti, sono casi particolari di prospettività. Se poi pensiamo di allontanare molto l'oggetto dalla sorgente (cosa che avviene in natura col sole) l'ombra dell'oggetto proiettata sulla parete opposta tende a diventare uguale (congruente, isometrica) all'oggetto; quindi l'uguaglianza (congruenza, isometria) è un caso particolare della similitudine.
Da quanto detto l'ombra di una circonferenza può diventare un'ellisse. Ma c'è un altro modo pratico per trasformare un cerchio in un'ellisse. La Castelnuovo propone anche qui l'uso di materiali semplici, facilmente disponibili. L'idea è quella di
«disegnare una figura su una tela elastica e tirare la tela in direzione delle fibre. La figura si deforma, subisce una trasformazione […] Vogliamo dimostrare che la trasformazione subita dalla figura, a seguito di uno stiramento della tela in direzione delle fibre, è

[2] Castelnuovo, *L'insegnamento della geometria intuitiva*, p. 202.
[3] Castelnuovo, *Un metodo attivo nell'insegnamento della geometria intuitiva*, p. 130.
[4] Castelnuovo, *Didattica della matematica*, p. 168.

un’affinità […] Basterà far vedere che a rette parallele disegnate sulla tela corrispondono rette che risultano ancora parallele dopo lo stiramento»[5].
In questo modo viene introdotto in modo semplice e concreto il concetto di trasformazione affine[6]. Così (fig. 1)

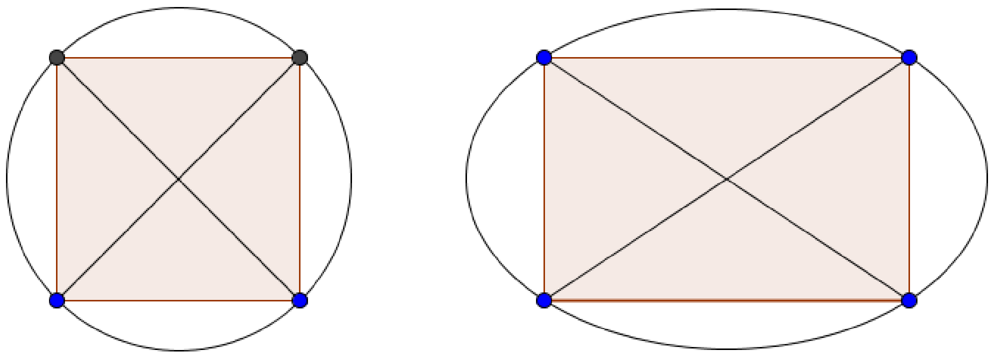


Figura 1

«se l’antica figura [disegnata sulla tela elastica] era un cerchio, la nuova, cioè la trasformata, sarà un’ellisse, e sarà ben visibile che al quadrato inscritto nel cerchio e che ha i lati paralleli alla quadrettatura corrisponderà un rombo inscritto nell’ellisse avente come diagonali i lati dell’ellisse»[7].

4. Strisce, elastici, corde

Se vogliamo parlare del quadrato a ragazzi di 11 anni, che ben conoscono questa figura dalla scuola primaria, se non da quella d’infanzia, una modalità didattica è quella di
«far ritagliare quadrati di carta, far osservare lati e diagonali, far citare dagli allievi stessi degli oggetti che hanno la forma di quadrati, far guardare le facce di un cubo…; si potrà anche far disegnare un quadrato con riga e compasso […]. Da tutte queste osservazioni l’allievo dovrebbe esser condotto a dare da solo una definizione […] ma esigerebbe una facoltà d’astrazione capace di cogliere la proprietà caratteristica dal confronto di un numero finito di figure. Ora, un tale processo di astrazione a partire da un certo numero di osservazioni, un bambino di 11 anni non è in generale capace di farlo da solo. Vorrei invece far vedere […] come il passaggio dal concreto all’astratto sia reso più naturale non attraverso osservazioni sull’oggetto ma attraverso *operazioni* sull’oggetto.[8]»
A partire da queste considerazioni Emma Castelnuovo presenta la proposta didattica di utilizzare strisce di cartoncino incernierate agli estremi con fermacampioni. Partendo dal

[5] Castelnuovo & Gori Giorgi & Valenti, *La matematica nella realtà*, vol. 2, p. 38.
[6] Castelnuovo, *Les transformations affines dans le ler cycle de l'école secondaire*, p. 274-288.
[7] Castelnuovo, *Didattica della matematica*, p. 165.
[8] Castelnuovo, *Didattica della matematica*, p. 83-84.

quadrato si possono ottenere infiniti rombi facendo ruotare una striscia attorno ad un suo fermacampioni (fig. 2).

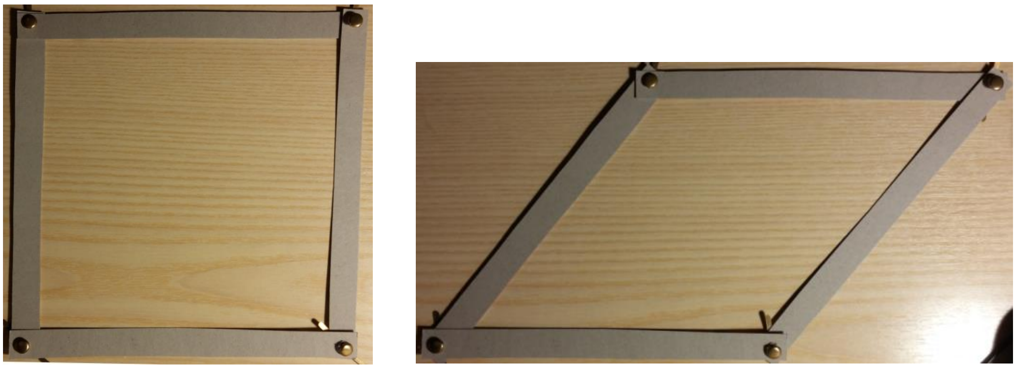


Figura 2

Così il ragazzo si rende conto che il quadrato è un particolare rombo e che esistono delle proprietà che accomunano tutti i rombi (la somma degli angoli interni, il perimetro) e altre che cambiano al cambiare della figura (l'ampiezza di un singolo angolo interno, l'area). Si apre la strada al concetto di caso limite (il rombo che degenera in un segmento) e al concetto di figura con area massima (il quadrato, appunto). Da questa attività pratica la definizione di quadrato scaturisce spontaneamente; cosa che non è detto che accada se si usa solamente il disegno. Un'altra questione legata all'uso del rombo articolato è la costanza o meno della somma delle diagonali: i ragazzi sono convinti che «quello che perde una delle diagonali lo guadagna l'altra; è dunque costante la loro somma». Per mettere in crisi questa idea

«inclinate sempre più un lato sull'altro, fino a tendere al caso limite: allora una delle diagonali tende a zero e l'altra tende al doppio del lato del quadrato.[…] Dunque la somma delle diagonali varia e raggiunge un massimo.[9]»

Lo studio dei triangoli può essere presentato usando, oltre alle strisce con fermacampioni, anche un altro tipo di materiale: un geopiano o, semplicemente, una tavoletta con chiodi e alcuni elastici. I vari triangoli in figura, ottenuti tendendo elastici tra i chiodi del geopiano, hanno tutti la stessa area, ma perimetri diversi. Per l'alunno non è difficile intuire che il triangolo di perimetro minimo è il triangolo isoscele (fig. 3).

---

[9] Castelnuovo, *Basi concrete in un primo insegnamento della geometria*, p. 95-96.

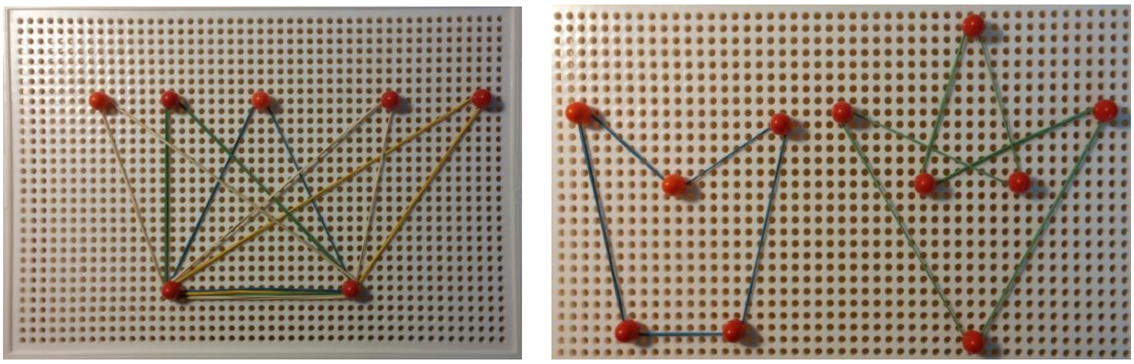


Figura 3

Il geopiano permette di costruire poligoni di qualunque tipo, anche concavi o intrecciati, liberando la fantasia del ragazzo (fig. 3); ma non consente però di passare con continuità da una figura all'altra. Un'alternativa può essere rappresentata dalla seguente proposta:
«si tenda uno spagno legato tra l'indice e il pollice di ciascuna mano (fig. 4), a mo' di rettangolo […]. Si avvicinino poi le dita e, conseguentemente, si allontanino le mani. Il rettangolo cambia di forma: l'altezza è diminuita e la base è aumentata. Alla domanda se l'area cambia durante questo movimento, tutti i bambini risponderanno che "l'area è sempre la stessa perché il contorno è sempre lo stesso". […] Continuate allora ad avvicinare o ad allontanare le dita. […] Qualcuno vi dirà: "Se si continua ad avvicinare le dita il rettangolo diventa sempre più basso e ad un certo momento sparisce: in quell'istante l'area non esiste più, l'area è zero.[10]»

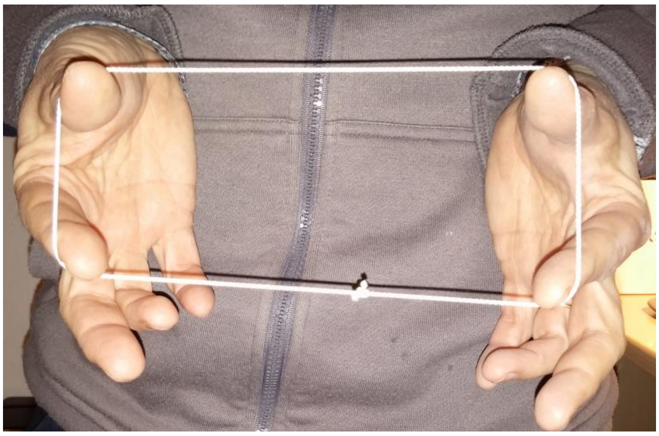


Figura 4

[10] Castelnuovo, *Didattica della matematica*, p. 118-119.

5. Solidi di corde, luci e ombre

Un’interessante proposta di Emma Castelnuovo riguarda un modo per introdurre le coniche partendo dalla costruzione di un cilindro costituito da due dischi uguali e paralleli, rigidamente connessi con un’asta passante per i loro centri. Mediante dei chiodini o dei piccoli fori situati lungo i bordi dei dischi è possibile tendere dei fili elastici che seguano le generatrici del cilindro. Si illumina il cilindro di fili con un ‘piano’ di luce ottenuto facendo passare la luce emessa da una sorgente attraverso uno schermo dotato di fenditura: si può ottenere così una circonferenza o un’ellisse, a seconda che il ‘piano’ di luce sia parallelo o meno ai dischi.
Ruotando uno dei due dischi rispetto all’altro il cilindro si trasforma in un cono a due falde: anche qui l’illuminazione può produrre delle coniche, ma questa volta è possibile ottenere anche un’iperbole o una parabola, a seconda che il ‘piano’ di luce sia parallelo all’asse del cono o parallelo ad una sua generatrice (fig. 5)[11].

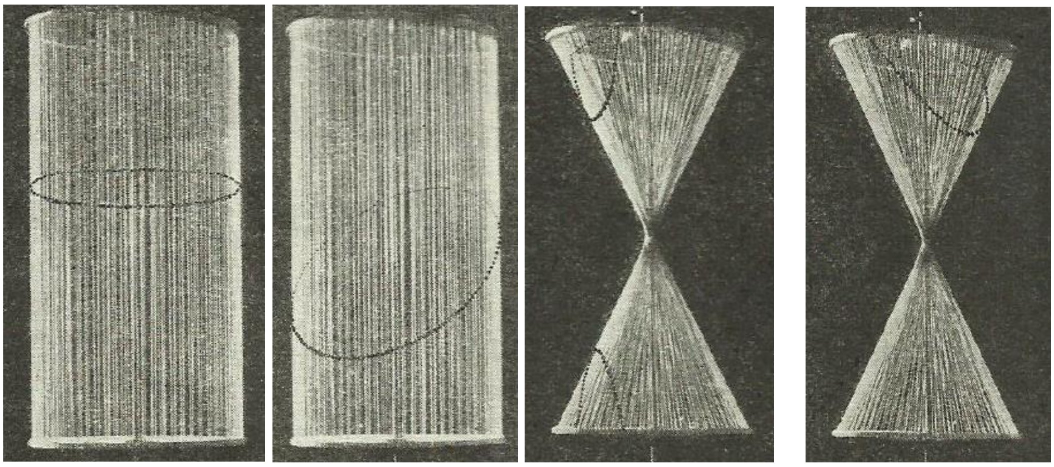


Figura 5

A risultati analoghi si può giungere sfruttando la luce emessa da una lampadina coperta da un paralume che proietta luce e ombra su una parete (fig.6)[12].

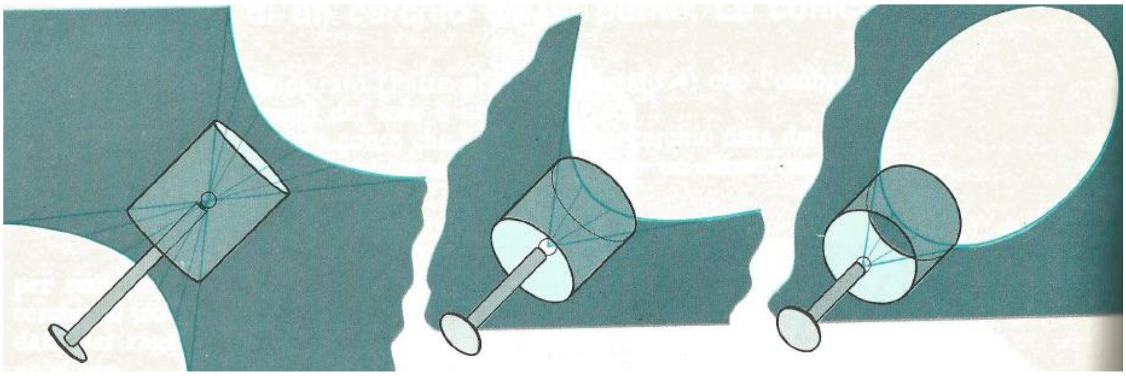


Figura 6

[11] Castelnuovo, *Le trasformazioni elementari e le coniche da un punto di vista sperimentale*, p. 95-99.
[12] Castelnuovo & Gori Giorgi &Valenti, *La matematica nella realtà*, vol. 2, p. 62-64.

6. Conclusione

Le idee qui presentate sono solo un piccolo e incompleto saggio di quanto Emma Castelnuovo ha fatto per la didattica della geometria: un insegnamento attivo e dinamico, che vede l'alunno protagonista, pienamente motivato e inserito in una scuola aperta a tutti.

Bibliografia

Castelnuovo E., (1946). Un metodo attivo nell'insegnamento della geometria intuitiva. *Periodico di matematiche*, 24(serie IV), 129-140.

Castelnuovo E., (1958). Basi concrete in un primo insegnamento della geometria. *Archimede,* X, 90-97.

Castelnuovo E., (1962). L'insegnamento della geometria intuitiva. *Cultura e Scuola*, n.3, 199-205.

Castelnuovo E., (1963). *Didattica della matematica*. Firenze, La Nuova Italia.

Castelnuovo E. (1965). Le trasformazioni elementari e le coniche da un punto di vista sperimentale. In: *Matematica moderna nella scuola media*. Bologna, Patron.

Castelnuovo E. (1969). Les transformations affines dans le ler cycle de l'école secondaire. *Educational Studies in Mathematics,* Volume 1, Issue 3, 274-288.

Castelnuovo E. (1975). Motivazioni per lo studio della matematica. *Periodico di matematiche,* 51(serie V), 7-19.

Castelnuovo E., & Gori-Giorgi C., & Valenti D. (1984). *La matematica nella realtà,* voll. 1 e 2. Firenze, La Nuova Italia.

La geometria cartesiana nello spazio, percorso didattico in una classe terza liceo scientifico

Ilaria Veronesi

Liceo Scientifico "P.S. Mancini", Avellino, Italy
ilaria.veronesi67@gmail.com

Abstract

In una terza classe del liceo scientifico "P.S. Mancini" di Avellino (Italia) è stata condotta un'esperienza educativa originale durante la partecipazione al concorso "a scuola di astroparticelle" organizzato dall'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare. La partecipazione degli studenti, mirata a potenziare le competenze trasversali dei ragazzi, ha dato un forte impulso all'acquisizione di contenuti ormai imprescindibili nelle competenze degli studenti liceali grazie alle informazioni e ai dati scientifici registrati dal telescopio della stazione di Toledo. Uno spunto originale di ricerca è stata la ricostruzione della "voce dell'universo" a partire dalle informazioni dei segnali elettrici generati dal telescopio codificati in logica binaria sulla traiettoria di ogni particella. In primo luogo, gli studenti hanno affrontato lo studio della geometria cartesiana nello spazio tridimensionale, dei metodi di fitting e dei sistemi di numerazione binario ed esadecimale. Hanno poi ricostruito la matrice tridimensionale degli eventi e la rappresentazione binaria sui piani X-Z e Y-Z. Grazie all'utilizzo del linguaggio di programmazione (C ++) hanno costruito un programma in grado di leggere la stringa di cifre esadecimali di un evento "muone attraversa il rilevatore" ed associarla a suoni di frequenze diverse.

Parole chiave: geometria cartesiana, spazio, regressione lineare, coding, telescopio, muoni

1. Introduzione

Le Indicazioni Nazionali del 2010 per i Licei Scientifici prevedono lo studio della geometria analitica nello spazio al quinto anno di corso. Tale tematica, affrontata alla fine del percorso di studi, può portare a problemi di apprendimento dovuti principalmente ad una mancanza di visualizzazione spaziale da parte dei ragazzi ed allo sviluppo a volte superficiale e frettoloso della geometria dello spazio sintetica. (Maier H. 1998). D'altro canto, il Piano nazionale per la scuola digitale afferma che, "le tecnologie digitali

intervengono a supporto di tutte le dimensioni delle competenze trasversali. Ma si inseriscono anche verticalmente, in quanto parte dell'alfabetizzazione del nostro tempo e fondamentali competenze per una cittadinanza piena, attiva e informata, come anticipato dalla Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio d'Europa e come ancor meglio sottolineato da framework come 21st Century Skills (Competenze per il 21mo secolo), promosso dal "World Economic Forum".
In questo articolo descriverò l'inserimento della geometria cartesiana dello spazio, affrontato con le tecnologie digitali, nel curricolo di una terza liceo scientifico attraverso lo studio delle traiettorie dei raggi cosmici secondari rilevati dal Telescopio di Via Toledo a Napoli.

2. Attività

L'esperienza di ricerca didattica in matematica è stata condotta in una classe terza del Liceo Scientifico "P.S. Mancini" di Avellino nell'ambito della partecipazione al progetto-concorso "A scuola di astroparticelle" bandito dall' Istituto Nazionale Fisica Nucleare Sezione di Napoli e presentato alla manifestazione "Futuro Remoto" (maggio 2017). (Aramo C., Ambrosio M., Candela A., Mastroserio P. 2017). Questo progetto transdisciplinare, partendo dallo studio dei raggi cosmici, ha portato ad affrontare aspetti scientifici, filosofici, storici ed informatici ad ampio raggio e, presentato alla manifestazione Global Junior Challenge di Roma (ottobre 2017), ha fatto vincere al Liceo Mancini il titolo di scuola dalla didattica più innovativa d'Italia.
L'intero consiglio della classe ha scelto di coordinare una serie di attività afferenti al progetto stesso con l'intento di farlo diventare il filo conduttore di un percorso didattico dell'intero anno, con la consapevolezza che nel processo di insegnamento-apprendimento la costruzione del pensiero astratto è più efficace se veicolata dall'esperienza sperimentale (Speranza 1987). In particolare, per la matematica, il rapporto tra geometria e mondo fisico è stretto e rappresenta uno degli aspetti salienti che la caratterizzano e che ha rappresentato un momento fondamentale dell'apprendimento di tale disciplina anche nella sua contestualizzazione storica (Boyer C. 1968).
La ricerca scientifica è nata dall'analisi dei dati del Telescopio di via Toledo a Napoli che sono stati messi a disposizione degli alunni dall'INFN.
Il telescopio è costituito da una pila di dieci livelli di rivelatori costruiti ciascuno con due piani di strisce incrociate di scintillatori che consentono di rivelare il passaggio dei muoni e di individuare il punto in cui esse passano per ciascun piano x-y. Disponendo in pila i vari rivelatori, si ottiene un apparato in grado di tracciare e rivelare con segnali luminosi il passaggio di una particella ionizzante che consente di ricostruirne la direzione di provenienza in un opportuno sistema tridimensionale.

fig. 1

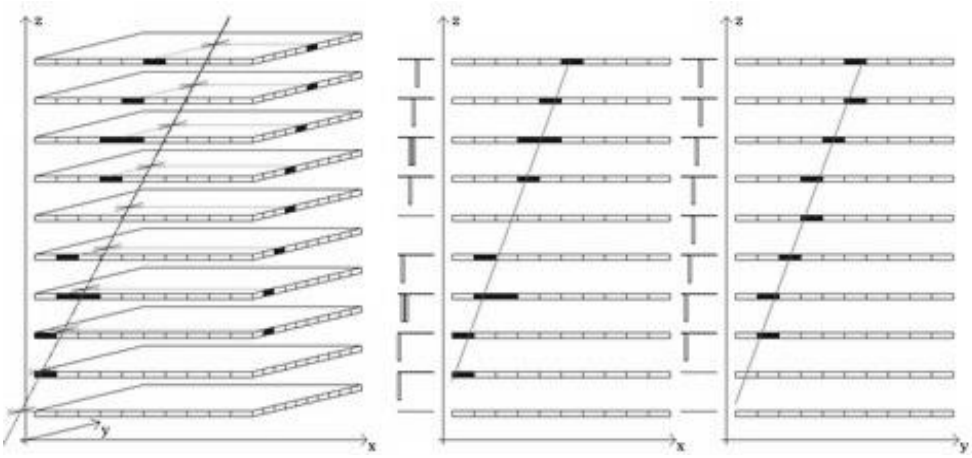


fig.2

Come risulta dall'immagine del telescopio (fig. 1 sito INFN home.infn.it) e dalla schematizzazione dello stesso (fig. 2 sito INFN home.infn.it), è risultato assolutamente naturale affrontare in matematica il concetto di spazio ed il problema della scelta di sistemi di riferimento particolarmente favorevoli all'analisi (Castelnuovo E. 1949). Per guidare gli allievi allo studio dello spazio cartesiano, si è scelto di utilizzare il software Geogebra, che permette di manipolare con semplicità figure piane e solide nello spazio con rappresentazioni in 3D.

3. Analisi Dei Dati

Il primo momento didattico è consistito nell'acquisire conoscenze e competenze sui metodi di acquisizione e analisi dei dati con programmi informatici già predisposti dall'INFN. Si è reso necessario lo studio di come memorizzare le coordinate dei punti rilevati dal telescopio al fine di rielaborare i dati delle tracce del passaggio dei muoni. Si è dimostrato particolarmente efficace l'utilizzo delle numerazioni esadecimale e binaria, così che si è aperto un nuovo campo di indagine, quello delle algebre con basi diverse da 10, infatti i segnali elettrici generati nel telescopio al passaggio di ogni particella vengono codificati in logica binaria: 0 indica un rivelatore non interessato (led spento) e 1 un rivelatore attraversato (led acceso). Le sequenze di 0 e 1 vengono poi tradotte in codice esadecimale e memorizzate in due stringhe di 30 caratteri esadecimali ciascuna che contengono l’informazione su quali rivelatori x e y si sono attivati in ciascun piano del telescopio. All’arrivo di ogni evento il computer interno del totem decodifica la sequenza di caratteri esadecimali e ricostruisce l’evento mostrandone le proiezioni x e y e la sua provenienza dallo spazio esterno. In un secondo file per ogni evento viene registrato il numero identificativo, l’ora e gli angoli x-z e y-z.

Esempio 1:
ST07EE
010000012008020060220 0A0160100
00400402401001200800A006006005

ST07EE 10:46:58 18.7 -23.05

E viene infine disegnata nei grafici la retta di regressione sia sul piano XZ che sul piano YZ.

Lo studio delle tematiche legate a questa prima fase matematica del progetto è durato circa due mesi, durante i quali abbiamo affrontato sul piano teorico: lo studio dello spazio cartesiano, i punti, le rette e i piani nella loro rappresentazione algebrica e geometrica; i sistemi di numerazione binario ed esadecimale; le retta di regressione.

4. Sviluppi Didattici

Per rendere efficace e più coinvolgente lo studio delle tematiche, ho proposto ai ragazzi di attribuire alla traiettoria di ciascun muone una sua “propria” melodia. Sono stati associati suoni di diverse frequenze alle coordinate delle traiettorie dei muoni che attraversavano il rilevatore.
I segnali elettrici generati nel telescopio al passaggio di ogni particella sono stati codificati in logica binaria e, utilizzando C++, ai simboli sono stati associati dei suoni effettuando una “traduzione” delle coordinate in “accordi musicali”.
In questo modo, ogni muone rivela la sua "voce" distinta dagli altri con coordinate diverse, a seconda delle coordinate (X, Y) e del piano interessato.
Così, ciascun muone rivela una melodia di dieci note, una per ciascun piano del telescopio, che hanno frequenze più alte vicino alle coordinate (0,0) fino ad arrivare alle note più basse vicino a (10,10).
Per fare questo i ragazzi hanno dovuto costruire un programma che, avendo in input la stringa esadecimale dell’evento muone, producesse una sequenza di suoni.
Dunque, dopo aver inserito la stringa:

```
E' stato impostato un delay di 190.

Inserire 1 strip (hex): 200000100100080040040020000010

1 array Acquisito

Inserire 2 strip (hex): 1000003000801800C0040020000010

2 array Acquisito
```

si è proceduto alla trasformazione della stessa in triplette per la riconversione in binario

```
        --- Inizio fase stampa 2 strip ---

2 strip, tripletta n: 1

       Posizione 1 vettore: 1 (HEX) = 0001 (BIN)
       Posizione 2 vettore: 0 (HEX) = 0000 (BIN)
       Posizione 3 vettore: 0 (HEX) = 0000 (BIN)

2 strip, tripletta n: 2

       Posizione 4 vettore: 0 (HEX) = 0000 (BIN)
       Posizione 5 vettore: 0 (HEX) = 0000 (BIN)
       Posizione 6 vettore: 0 (HEX) = 0000 (BIN)
```

per poi procedere alla visualizzazione deli piani XZ e YZ del telescopio e dei rilevatori interessati.

```
--- Generazione matrice binaria e rimozione cifre ---


        - inizio stampa 1 matrice -

Strip numero 1: 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
Strip numero 2: 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Strip numero 3: 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
Strip numero 4: 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
Strip numero 5: 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
Strip numero 6: 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
Strip numero 7: 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Strip numero 8: 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Strip numero 9: 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Strip numero 10: 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

        - inizio stampa 2 matrice -

Strip numero 1: 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
Strip numero 2: 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Strip numero 3: 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
Strip numero 4: 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
Strip numero 5: 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0
Strip numero 6: 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
Strip numero 7: 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
Strip numero 8: 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Strip numero 9: 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
Strip numero 10: 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

        - termine stampa  matrici -
```

il passaggio successivo ha richiesto uno studio approfondito delle matrici tridimensionali e della gestione degli indici nel calcolo algebrico. Infatti, per definire le frequenze sonore da assegnare alle varie coordinate di ciascun piano, si è dapprima proceduto ad un'analisi delle traiettorie più probabili (poiché un selettore esclude dal telescopio i rilevamenti con meno di sette piani coinvolti) e poi si è costruito l'algoritmo che attribuisce le note musicali non con distribuzione costante ma "pesata".

```
xy = (1; 6) \ xk = (1; 6), pos = 36, nota: MI
xy = (3; 5) \ xk = (3; 5), pos = 25, nota: RE#
xy = (4; 4) \ xk = (4; 4), pos = 16, nota: RE
xy = (5; 4) \ xk = (5; 3), pos = 12, nota: RE
xy = (5; 4) \ xk = (5; 4), pos = 16, nota: RE
xy = (6; 3) \ xk = (6; 3), pos = 9, nota: DO#


Stampare a triplette su un file (s/n)? _
```

Il risultato finale del programma è stato dunque una melodia di dieci note che contraddistinguono il percorso del muone quando attraversa i vari piani.
L'obiettivo futuro sarà l'implementazione del programma con un effetto dolby surround così che, posizionando otto casse ai vertici di uno spazio cubico ed effettuando una scelta opportuna di frequenze ed intensità sonore, l'ascoltatore posizionato all'interno avrà la sensazione di essere attraversato dal muone stesso.

5. Conclusioni

Durante tutte le attività, le competenze trasversali si sono consolidate grazie all'approccio didattico peer to peer e al cooperative learning, superando così le difficoltà causate da un'errata centratura della didattica che molto spesso sostituisce il dominio numerico e visuo-spaziale con quello verbale (Lucangeli D., Mammarella I.C. 2010) e vincendo anche la ritrosia verso un ambito in cui ci si sente meno preparati (D'Amore, B. 2000). Le abilità e competenze acquisite hanno portato gli allievi ad affrontare con disinvoltura la gestione e l'analisi di dati relativi allo spazio cartesiano (Enriques F. 1921).
In particolare, nello sviluppo del programma in C++, si è scelto di utilizzare il modello didattico della flippped classroom in cui si sono potute esprimere al meglio le abilità digitali dei ragazzi che, guidati a monte dalla docente nella formalizzazione matematica del modello, hanno poi saputo gestire in piena autonomia e con arguzia i mezzi informatici, anche aggirando alcuni limiti del programma stesso.

Senza trascurare gli aspetti di approfondimento specifico delle tematiche affrontate, sviluppate durante i seminari, le conferenze e le attività laboratoriali organizzate dai docenti e ricercatori dell'INFN, si è cercato di centrare l'azione didattica sull'area di apprendimento più aderente agli alunni (Zan R. 2000). Infatti, i ragazzi hanno prodotto video, presentazioni, QRcode, poster

sull'esito delle loro ricerche e tutto il materiale è stato reso pubblico su un sito web costruito dai ragazzi stessi.
Il successo dell'azione didattica è riscontrabile sia dalle rubriche autocognitive redatte dagli studenti stessi che dalle competenze acquisite registrate durante le attività divulgative delle manifestazioni, anche in lingua inglese, e da apposite verifiche.

Bibliografia

Aramo C., Ambrosio M., Candela A., Mastroserio P. (2017) *Go to the astroparticle physics school with the Toledo Metro Station Totem-Telescope for cosmic rays. Proceedings of science*

Boyer C. (1968), *Storia della Matematica*
Castelnuovo E. (1949), *Geometria intuitiva, per le scuole medie inferiori*

D'Amore, B. (2000). La Didattica della Matematica alla svolta del millennio: radici, collegamenti e interessi. *La matematica e la sua didattica*

Enriques F., (1921) *Insegnamento dinamico*

Lucangeli D., Mammarella I.C. (2010). Psicologia della cognizione numerica. Approcci teorici, valutazione e intervento.

Maier H., (1998). *L'uso di mezzi visivi nelle lezioni di geometria, La matematica e la sua didattica*

Speranza F. (1987). *La geometria dalle cose alla logica*. In: D'Amore B. (a cura di). La matematica e la sua didattica. Atti dell'omonimo Convegno Nazionale
Zan R. (2000), *Emozioni e difficoltà in matematica*

Sulle orme di Francesco Speranza
Come non deve essere l'insegnamento della Geometria nella scuola primaria

Paola Vighi

Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche
(ex docente)
Presidente della Sezione Mathesis di Parma
paola.vighi@unipv.it

Abstract

Il titolo "provocatorio" del presente lavoro è quello scelto da Francesco Speranza (1932-1998) per il paragrafo introduttivo di alcune dispense rivolte ad insegnanti di scuola primaria, in cui l'Autore auspica che a tale livello scolastico si conducano "gli allievi a compiere un cammino operativo sulla conoscenza geometrica".
Si descrive un itinerario didattico, sperimentato con allievi di classe quarta di scuola primaria, che ha lo scopo di promuovere la transizione da oggetti concreti, usati come mediatori, ai concetti geometrici.

Parole chiave: pensiero geometrico; visualizzazione; costruzione di figure; giustapposizione; quadrilatero.

1. Introduzione

Le ricerche sullo sviluppo del pensiero geometrico condotte negli ultimi tempi hanno modificato gli obiettivi dell'insegnamento della geometria nella scuola primaria: non più una "geometria euclidea in miniatura", ma una conoscenza dello spazio e delle situazioni spaziali, che prepari il terreno all'apprendimento della geometria che si realizzerà nei livelli scolastici successivi. In particolare, le Indicazioni Nazionali (2012) individuano il seguente 'traguardo per lo sviluppo delle competenze dell'alunno al termine della scuola primaria': "Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli di vario tipo".
Il presente lavoro descrive un'attività sperimentale sui quadrilateri, che prende le mosse dalla giustapposizione (o 'accostamento') di coppie di triangoli per costruire quelle che chiameremo 'sagome' di figure geometriche. L'uso della parola 'sagoma' è dettato dalla necessità di distinguere l'oggetto concreto dalla figura geometrica che esso rappresenta.

2. Quadro teorico

Gli oggetti matematici non sono direttamente accessibili, ma possono essere conosciuti solo attraverso rappresentazioni (Duval, 1993). In particolare, le figure geometriche sono solitamente rappresentate da oggetti, di cui si osservano le caratteristiche spaziali, o da disegni. Una figura geometrica non è tuttavia un oggetto concreto, ma un'immagine visiva che "… include la rappresentazione mentale di proprietà spaziali" (Fischbein, 1993). Speranza (1997, p. 5) affronta così il problema del passaggio dalle immagini mentali ai concetti geometrici:

> "… gli oggetti concreti non hanno forme geometriche precise: come possiamo allora avere l'immagine di un cerchio perfetto? In particolare, come possiamo avere immagini a due dimensioni? Orbene, è verosimile che un bambino abbia appunto delle immagini approssimative; e che a un certo punto dello sviluppo intellettuale (forse per un atto di volontà più che di immaginazione) le immagini vengano regolarizzate, in modo che si adattino ai "concetti precisi", così come li ha costruiti la scienza geometrica".

Nella scuola primaria occorre dunque un "lavoro con materiali che favorisca lo sviluppo di immagini e rappresentazioni mentali" (Chamorro, 2006, p. 415), cominciando dalle 'forme' per arrivare alle 'figure'. Ma che cos'è una forma? Una possibile risposta è la seguente:

> "Una forma è un contorno chiuso che si distacca dallo sfondo. Se lo sfondo è omogeneo, questo contorno è determinato da tratti o appare come il bordo di una macchia, cioè di una zona di colore diverso dallo sfondo. Il problema del riconoscimento visuale delle forme inizia quando non c'è una sola forma isolata, ma almeno due che possono essere separate, giustapposte, parzialmente sovrapposte, o una inscritta nell'altra" (Duval, 2016, p. 214).

Il presente lavoro prende le mosse proprio dalla giustapposizione (o 'accostamento') di coppie di 'forme' per costruire 'sagome' di figure geometriche, che sono poi analizzate e descritte da differenti punti di vista.

3. Metodologia

Nell'ambito di un corso di formazione e aggiornamento per insegnanti di scuola primaria tenutosi presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Parma, nell' A.A. 2016/2017, è stato ideato e progettato un itinerario didattico sull'introduzione dei poligoni. Inizialmente si è pensato di organizzare un'attività basata sulla riproduzione di un quadro di Kandinsky, intitolato "Soft Hard", in cui sono rappresentate numerose figure geometriche. La Figura 1 mostra un esempio di protocollo realizzato da un bambino.

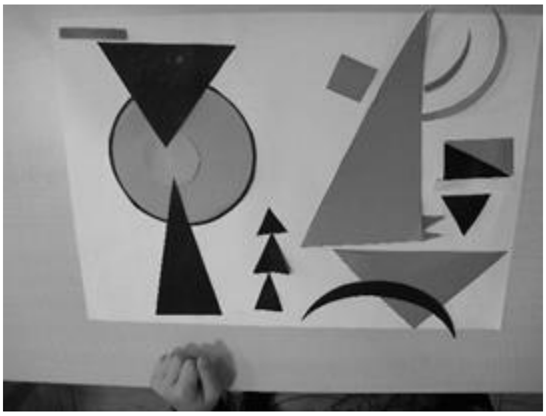


Figura 1 – Riproduzione del quadro “Soft-Hard”
con sagome di carta ritagliate

L’analisi dei risultati della sperimentazione ha mostrato incertezze e difficoltà soprattutto relativamente alla manipolazione dei triangoli rettangoli non isosceli presenti nel dipinto. Si tratta di triangoli con angoli di 30° e di 60° (un bambino li descriverebbe come “la metà di un triangolo equilatero”), che rispondono ad una precisa scelta dell’artista (Kandinsky, 1968). D’ora in poi li chiameremo ‘triangoli-base’. In precedenza si era osservato che l’attività dell’accostare due triangoli-base per ottenere un rettangolo è problematica per allievi di 5-6 anni. Una spiegazione sta nel fatto che i triangoli con cui si lavora usualmente nella scuola dell’infanzia sono equilateri e di conseguenza ‘reversibili’, nel senso che comunque si presentino basta ruotarli per ottenere la configurazione richiesta. I triangoli in oggetto sono invece ‘non reversibili’, talvolta devono essere ribaltati e non solo ruotati. La ricerca documenta ampiamente questo problema (Grenier et Laborde, 1988), (Bulf et al., 2014a, 2014b).
La sperimentazione qui descritta ha coinvolto allievi di 9-10 anni. Si sono ritagliati numerosi triangoli di vari colori, con le stesse proprietà geometriche di quelli del dipinto. L’idea iniziale è stata quella di fornire a ciascun allievo due triangoli di differenti colori ed un foglio di formato A4, chiedendo di costruire con essi figure a piacere. Ecco alcuni esempi:

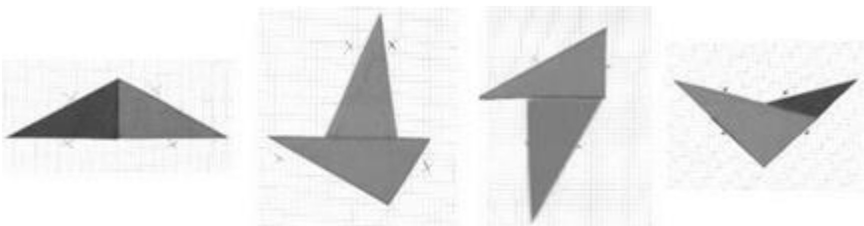


Figura 2 - Giustapposizione di triangoli: alcuni esempi

L’analisi dei protocolli ha suggerito la possibilità di proseguire il lavoro con un’attività basata sulla costruzione di poligoni (sempre a partire da coppie di triangoli-base), con l'obiettivo di distinguere i poligoni in 'concavi' e 'convessi', approfondendo lo studio di quest'ultimi, e di focalizzarsi sui quadrilateri, sulle loro proprietà e la conseguente classificazione.

4. L'itinerario didattico

È successo così che un lavoro rivolto inizialmente a bambini di scuola dell'infanzia o del primo ciclo di scuola primaria, dettato dalla necessità di indagare sulle difficoltà di manipolazione ed organizzazione spaziale dei triangoli-base, ha condotto a sviluppare e sperimentare un itinerario didattico per la classe quarta di scuola primaria, pubblicato poi online al seguente indirizzo:

http://www.rivistaddm.ch/index.php/ultimo-volume-2/2017-02-vighi/

Ne riassumiamo qui di seguito i tratti essenziali. Allo scopo di promuovere la costruzione di sagome rappresentanti poligoni convessi, si è assegnata la seguente consegna di lavoro individuale: "Con questi due triangoli (dello stesso colore) costruisci una figura, facendo in modo che due lati si accostino perfettamente". L'analisi dei protocolli ha mostrato che nessun allievo ha realizzato un rettangolo, come fatto da Kandinsky; una possibile interpretazione, emersa da una discussione con gli insegnanti, è la seguente: il rettangolo è una figura "usuale", "statica", "poco piacevole", "meno accattivante di figure con punte o simmetrie evidenti". L'insegnante ha poi proposto di classificare i protocolli in base alla "somiglianza delle figure ottenute", promuovendo così una prima attività di classificazione in base a proprietà. In seguito, allo scopo di individuare tutti i tipi di poligoni convessi che rispettano la consegna ha proposto il seguente quesito di tipo combinatorio: "In quanti modi è possibile accostare i due triangoli rispettando la condizione che due lati 'coincidano'?". Ovviamente la risposta è sei: si è infatti in presenza di tre coppie di figure, ciascuna ottenuta accostando i due triangoli-base rispettivamente lungo cateto minore, cateto maggiore o ipotenusa, in modo che i triangoli di ciascuna coppia siano direttamente o inversamente congruenti. Le sagome che rispondono alla consegna sono state riprodotte su poster (Figura 3).

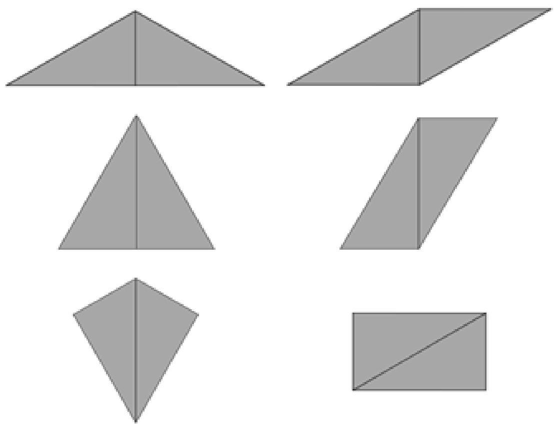


Figura 3. Le sei configurazioni possibili

L'attività di classificazione ha comportato anche l'uso di 'nomi' per le figure ed ha promosso l'esigenza di una opportuna nomenclatura. Si è rimandata invece l'introduzione di definizioni, perché si ritiene che esse debbano essere costruite dagli allievi, dopo aver osservato classi di figure con le stesse proprietà.
Successivamente si è proposta un'osservazione delle sagome in termini di simmetria. In particolare, si è osservato che in alcuni casi le 'fessure' ottenute accostando i triangoli-base 'suggeriscono' assi di simmetria della figura (triangolo isoscele, equilatero, deltoide). Si è scoperto che i parallelogrammi non hanno assi di simmetria, ma possiedono un centro di simmetria, il punto di intersezione delle diagonali. Infine per quanto riguarda il rettangolo, si è notata una misconcezione legata al fatto che, come si suol dire, "una figura è tagliata a metà da un suo asse di simmetria". Dopo un'animata discussione, si è concluso che le diagonali non sono assi di simmetria del rettangolo, mentre lo sono le sue mediane. Si è così enunciato un teorema: "Se una retta è un asse di simmetria per una figura, allora la divide in due parti uguali, ma non vale il viceversa".
Le sei sagome sono poi state confrontate relativamente alla loro estensione, mediante il seguente quesito: "Osserva le figure dei poster (Figura 3): ce n'è qualcuna più grande?". L'uso dell'aggettivo 'grande' è volutamente ambiguo e fuorviante. L'obiettivo è quello di giungere all'osservazione dell'equiestensione di tutte le sagome, motivata dal fatto che tutte e sei sono state costruite accostando coppie di triangoli congruenti. Si vuole inoltre portare l'attenzione sulla distinzione tra 'forma' e 'superficie' e mettere in guardia rispetto alle suggestioni di carattere percettivo. Come previsto, in un primo tempo gli allievi hanno cercato di individuare la 'figura più grande', senza ragionare, ma usando solo la vista e la loro idea di 'più grande'. Alcuni hanno scelto il triangolo isoscele (probabilmente privilegiando la larghezza), altri il deltoide (badando invece all'altezza), altri ancora il triangolo equilatero. Sono bastati però pochi minuti per capire che la domanda era ingannevole, mentre il riconoscimento dell'equiestensione ha richiesto una discussione tra gli allievi, nonostante l'attività manuale di costruzione delle sagome, basata sull'accostamento di coppie di triangoli congruenti.
Il quesito successivo è relativo al confronto dei perimetri delle sei sagome di Figura 3: "Ci sono figure che hanno contorni della stessa lunghezza? Rispondi senza usare il righello". L'intento è quello di far confrontare i contorni senza misurare, tenendo conto delle caratteristiche dei triangoli che compongono le sagome. Si vuole anche cogliere l'occasione per lavorare sulla distinzione tra il concetto di perimetro e quello di area. Secondo Duval (2005), sarebbe proprio la visualizzazione iconica delle figure a provocare confusione tra i concetti di area e perimetro, in quanto l'osservazione globale delle forme non porta ad osservarne i contorni. Anche se la consegna parlava di 'lunghezza' i bambini hanno pensato al perimetro, inteso come misura della lunghezza e, di conseguenza, avrebbero voluto ricorrere al righello. È stato perciò necessario portare l'attenzione sulle lunghezze dei lati dei 'triangoli-base', che gli allievi avevano tanto manipolato in precedenza, ma senza osservarle. La consegna ha promosso un'investigazione visiva dei lati dei triangoli (da 2D a 1D, nella notazione di Duval): i cateti sono stati descritti rispettivamente come 'corto' e 'medio', mentre l'ipotenusa è stata denominata 'lato

lungo’. L’osservazione dei contorni e la loro descrizione ‘a parole’ non hanno tuttavia prodotto i risultati attesi. Ho allora proposto di organizzare tramite una tabella il ‘calcolo’ delle lunghezze dei contorni, indicando con ‘l’la lunghezza dell’ipotenusa e rispettivamente con ‘m’ e ‘c’ la lunghezza del ‘lato medio’ e ‘lato corto’.

Figura 1	l+l+m+m	2l+2m
Figura 2	l+m+l+m	2l+2m
Figura 3	l+l+c+c	2l+2c
Figura 4	l+c+l+c	2l+2c
Figura 5	c+m+c+m	2m+2c
Figura 6	c+c+m+m	2m+2c

Tabella 1: confrontiamo I perimetri usando un po’ di calcolo letterale

La Tabella 1 mostra il risultato finale. Si deve precisare che in un primo tempo è stata completata solo la seconda colonna, percorrendo con un dito il contorno di ciascuna sagoma e scrivendo di volta in volta quanto osservato. Il passaggio alla terza colonna, ha sviluppato una sorta di pre-algebra consistente in semplici addizioni e passaggi di calcolo

letterale. I dati ottenuti nella terza colonna, completata successivamente, hanno reso evidente che le sagome sono a due a due isoperimetriche. I bambini hanno poi argomentato sul confronto arrivando a spiegare perché $2l+ 2m$ è maggiore di $2l+ 2c$ che a sua volta è maggiore di $2m+ 2c$. In questo modo, hanno potuto apprezzare i vantaggi del ‘linguaggio delle lettere’ rispetto a quello verbale.
Infine si è lavorato sugli angoli usando il goniometro, pervenendo alla seguente conclusione: “La somma delle misure degli angoli interni di un quadrilatero è 360°”.

5. Conclusione

A proposito dell’insegnamento della geometria nella scuola primaria, Chamorro (2006) evidenzia due “poli opposti”, entrambi criticabili: da una parte un insegnamento basato su espressioni linguistiche che spesso risultano prive di significato per l’allievo e dall’altra un lavoro con materiali che rischia di ridursi a “bricolage” e che si ferma alle soglie della geometria. L’itinerario qui brevemente descritto, pur partendo dalla manipolazione di oggetti concreti, va al di là del bricolage e consente di sviluppare passo passo sia il ragionamento geometrico, che il relativo linguaggio. È un percorso atipico, che porta alla costruzione di particolari figure geometriche, ma la generalizzazione a 'quadrilateri qualunque' si potrà realizzare in seguito, ripartendo dal lavoro fatto, probabilmente senza particolari difficoltà.

Bibliografia

Bozzolo, C. (2017). I quadrilateri. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 40A, 1, Paderno del Grappa (TV): Centro Morin, 39-70.

Bulf, C., Marchini, C., & Vighi, P. (2013). Le triangle-acrobate: un jeu géométrique sur les isometries en CE1. Intérêts et limites, *Grand N*, 91, Grenoble: Irem, 43-70.

Bulf, C., Marchini, C., Vighi, P. (2014a). Analisi di un gioco sulle isometrie nella scuola primaria: il triangolo-acrobata, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 37A, 1, Paderno del Grappa (TV): Centro Morin, 7-33.

Bulf, C., Marchini, C., Vighi, P. (2014b). Preconcetti sulle isometrie nella scuola primaria. Un case-study condotto in Francia e in Italia, *L'Insegnamento* della *Matematica e delle Scienze Integrate*, 37A, 2, Paderno del Grappa (TV): Centro Morin, 107-132.

Chamorro, M.C. (2006). Matematica per la mente e le mani: l'insegnamento della geometria nella scuola primaria. *La Matematica e la sua Didattica*, 20, 3, 401-424.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*(1), 37-65.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Duval, R. (2016). Voir et créer dans l'art et en géométrie : proximités et divergences. In M. Iori (Ed.) *La matematica e la sua Didattica. Mathematics and Mathematics education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore.* Bologna: Pitagora, 213-220, ISBN 88-371-1927-5.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 24, No. 2 (1993), pp. 139-162.

Grenier D., Laborde C. (1988). Transformations géométriques – Le cas de la symétrie orthogonale. In : Vergnaud G., Brousseau G. & Hulin M. (Eds.) *Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, Actes du colloque de Sèvres Mai 1987*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 65-86.

Kandinsky, W. (1968). *Punto, linea, superficie*. Milano: Adelphi.

MIUR (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Roma. http://hubmiur.pubblica.istruzione.it/web/istruzione/prot7734_12

Swoboda, E., Vighi, P. (2016). *Early Geometrical Thinking in the Environment of Patterns, Mosaics and Isometries*. In: G. Kaiser (Ed.) ICME-13 Topical Surveys, International Publishing AG Switzerland, 1-50, ISBN: 978-3-319-44271-6, Springer.
Speranza, F. (1997). Dallo spazio alla geometria. In: L. Grugnetti (Ed.) *Dallo spazio del bambino agli spazi della Geometria,* Centro Grafico Università di Parma, 3-10.

Vighi, P. (2016). Arte e pensiero geometrico nella Scuola dell'Infanzia. In M. Iori (Ed.) *La matematica e la sua Didattica. Mathematics and Mathematics education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore.* Bologna: Pitagora, 513-523, ISBN 88-371-1927-5. Disponibile su https://rsddm.dm.unibo.it

Vighi, P. (2017). Dalle sagome alle figure geometriche. Un itinerario didattico sui quadrilateri. *Didattica della Matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*. Supsi Repubblica e Canton Ticino, (2), 130-150.

Olkun, S., Swoboda, E., Vighi, P., Yuan, Y. & Wollring, B. (2018). Topic Study Group No. 12: Teaching and Learning of Geometry (Primary Level). In G. Kaiser et al. (Eds.) *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education*. Springer, Cham Print, ISBN 978-3-319-72169-9, Online ISBN 978-3-319-72170-5.

Vighi, P. (2018). Abstract paintings, objects and actions: *how* to promote geometrical understanding. In P. Błaszczyk & B. Pieronkiewicz (Eds.) *Mathematical Transgressions 2015*, 397-406. Kraków Universitas, ISBN 97883-242-3196-6.

SESSIONE 4
L’attualità degli insegnamenti dei matematici protagonisti della Mathesis della seconda metà del secolo XX

Variabili, costanti e funzioni: l'azione di Emma Castelnuovo in classe

Lucilla Cannizzaro

Università Roma 1 e Biblioteca Emma Castelnuovo (MCE)
lucilla.cannizzaro@gmail.com

Abstract

Partendo da come proponeva di lavorare su concetti di variabile, di contante, di variazione con continuità, di ‘casi limite’, illustreremo alcuni ‘Triangoli metaforici’ nella azione di EC. Il *‘Triangolo*’ di realtà, allievi, insegnante; e quello di pedagogia, epistemologia e didattica; e del manipolare, parlare e scrivere. Si accennerà al ruolo dei tirocinanti ed al rapporto con loro, di interesse in questa fase di proposizione di nuove modalità per la formazione dei docenti.

Parole chiave: Emma Castelnuovo, variabile, costante, variazione con continuità, azione concreta, linguaggio naturale e formalizzato, tirocinio, formazione docent

1. Introduzione

Molto è stato scritto su Emma (concedetemi questa briciola di familiarità); citerò spesso il volume: Giacardi L. e Zan R. (a cura di), Emma Castelnuovo. L’insegnamento come passione[1] come *‘volume UMI per i 100 anni’* e vi segnalo di Degli Esposti C. e Lanciano N., 2016, *Emma Castelnuovo*, L’Asino d’Oro e un recente articolo di Daniela Valenti[2].
A breve, sarà messo a disposizione su una ‘Bacheca Biblioteca Emma Castelnuovo’ di Drive l’elenco dei volumi della Biblioteca di E. C., un elenco di articoli su di lei, materiali inediti, materiali di incontri fatti con gli insegnanti nella Biblioteca, Materiali del Convegno Lincei 1979 e altro ancora. La Biblioteca si trova presso IISS Darwin di

[1] Giacardi L. e Zan R. (a cura di), Emma Castelnuovo. L’insegnamento come passione La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista dell’Unione Matematica Italiana, Aprile 2013, Serie I, Vol. VI, N. 1
[2] Si veda http://www.mathisintheair.org/wp/2018/03/emma-castelnuovo-nella-scuola-di-ieri-e-di-oggi/

Roma[3]. L'elenco degli articoli di E.C., con i relativi PDF, è per ora disponibile[4] all'indirizzo in nota 5; farò riferimento a questi specificando l'anno di pubblicazione.
Questa mia testimonianza sfrutta, nella loro diversità i tre 'registri' messi a disposizione: l'abstract, il testo scitto (questo) e il Power Point di appoggio all'intervento orale.

2. Prevedere l'imprevisto

Tutto previsto per accogliere l'imprevisto e per valorizzarlo al massimo; l'azione di Emma Castelnuovo in classe è stata improntata anche a questo principio didattico/professionale. La Castelnuovo era a scuola un poco in anticipo, per assemblare e prendere i materiali per le lezioni, per parlare con il tecnico che aiutava a costruire materiali, per parlare con i tirocinanti, per avere il tempo di qualche scambio con gli allievi. Una verità in filigrana che un suo ex-allievo ha fatto emergere in occasione del Premio Nesi (2013) è che i ragazzi avevano bisogno della Castelnuovo, ma anche che E. C. aveva bisogno dei ragazzi. La didattica di E. C. si attivava nel rapporto con la classe e con gli allievi; le concezioni teoriche, sue e dei suoi Maestri, diventavano vive, si rinnovavano nel contatto con il lavoro degli allievi. Nei *Documenti di una Esposizione* (1972)[6], un allievo scrive: 'E' molto bello perché ognuno di noi fa parte dell'insegnamento'.
L'incontro con la Castelnuovo è stato fondamentale non solo per quegli allievi che dopo hanno studiato Matematica, non solo per gli allievi che hanno insegnato Matematica a vari livelli scolastici, ma anche per le scelte di fondo di molti altri, per il modo di pensare che molti testimoniano di avere avuto dalla sua azione e dal suo esempio; è stato fondamentale per l'attenzione e la passione a lavorare con le mani, in concreto, per la tenacia al lavoro maturata seguendo il percorso che lei tratteggiava e imponeva. Per avere assorbito uno special rapporto con il sapere. Una sua affermazione ricorrente era che fosse importante per gli allievi potere dire: '*non lo so, forse …., penso che …. anche se non mi convince del tutto.*' *E* ancora più importante era che l'insegnante dicesse talvolta *'non lo so, …. penso che …., dovrebbe essere così ….ma meglio verificare, …… mi informo, ……. anche voi cercate da altre parti, …… chiedete ai fratelli maggiori o ai genitori'*.
E. C. preparava, predisponeva, faceva entrare in scena materiali e problematiche opportune, aspettava idee e commenti dai ragazzi, orchestrava la riflessione su idee

---

[3] IISS Darwin, Via Tuscolana 388, Roma. Apertura prevista il 15 maggio 2018, 15-19; altre da concordare.
[4] La scannerizzazione degli articoli è stata fatta da Fontanari C. a Trento, da noi al Dipartimento di Matematica di Roma1, da studenti del Darwin all'interno di un progetto Scuola-Lavoro
[5] http://www.mce-fimem.it/pubblicazioni/la-biblioteca-di-emma-castelnuovo/

[6] Si veda l'elenco in sito MCE (nota 4)

buone e meno buone, portava in luce proposte ed errori produttivi, sospendeva il discorso se questo andava oltre le potenzialità dell'età.
Il lavoro sul concreto per fare maturare concetti era prima di tutto 'tensione' dell'insegnante verso il raggiungimento da parte degli allievi di quel concetto e, poi, lavoro tacito con allievi, sollecitazione a parlare e scambiare idee, dubbi, domande, critiche e poi riassumere il lavoro in testo chiaro condiviso.
E. C. ha continuato a lavorare per tutta la vita alla *limatura* di quanto già introdotto; ma era anche sempre alla ricerca di qualche orgomento 'fuori rotta' che portasse luce al corso di matematica spesso pesante e noioso[7]. E.C. esplicitamente riconoscere a Luigi Campedelli il merito di averla spronata in questa direzione[8].
Nella Introduzione alla Guida del 1970, E. C. primadi dare indicazioni sull'uso dei suoi testi scolastici del 1966[9], scrive: 'Mi chiedo però: come indicare una strada quando accade a me stessa di cambiare di anno in anno non solo l'ordine degli argomenti ma anche il modo di introdurli e di svilupparli? '. Mentre a pagina 3 della stessa Guida scrive: '*D'altra parte, se rifletto, devo senz'altro convenire che vi sono nel mio* insegnamento, come nell'insegnamento di qualunque docente, dei punti fermi, dei legami *inscindibili fra argomento e argomento, delle idee pedagogiche generali ..... '*
Per E. C. è opportuno conoscere altre esperienze e altre impostazioni o altre 'correnti' sulla didattica della matematica e non lasciarsi trasportare da 'questioni affettive' o entusiasmi o dalle abitudini; ci sono spunti interessanti anche in linee e idee molto diverse dalle proprie, dal confronto si ottengono idee da considerare seriamente, conferme, elementi di vivacità e punti di forza per una più profonda sintesi.

3. I 'Triangoli' di E. C.

Veniamo al primo dei *'Triangoli'* di E.C. quello costituito da realtà, allievi, insegnante. Uso qui *'Triangolo'* con tutta la carica di significato con cui Emma Castelnuovo lo usò a Royaumont nel 1959 come critica a chi voleva eliminare la geometria euclidea dalla scuola: figura fondamentale nello studio e nelle applicazioni. (Menghini M., p. 53, in volume 100 anni). *'Triangolo'* come *fontamentale* di una impostazione didattica.
Nella conferenza mostrerò, simulerò, in grandi linee, alcune proposte di attività con triangoli concreti caratteriastici dell'azione di E. C. in classe. (spago, etc., PPT). Espliciterò i passi che attivano la maturazione dei concetti di variabile, costante, variazione con continuità, relazione funzionale.
Torno, ora, al registro della 'narrazione'. Una espressione ricorrente di E.C. era: 'Aprire la testa (e non solo gli occhi) dei ragazzi'; leva privilegiata è l'osservazione della realtà, osservazione dapprima globale, naturale e spontanea per l'età. Poi, via via, osservazione

[7] Accennerò nel PPT al caso del Calcolo baricentrico e della geometria frattale
[8] Si veda alla pagina 35 di E.C. (1988a) dell'elenco in sito MCE
9 Si veda Castelnuovo E. (1966) dell'elenco in sito MCE

più strutturata e consapevole; osservazione maturata dalle esperienze pregresse e dalle riflessioni su di esse. Una osservazione che prevede gli allievi come autori.
Vorrei sottolineare quattro punti di punti di forza dell'azione didattica di E. C.: le riflessioni storico-epistemologiche di Guido Castelnuovo[10], la pedagogia di Decroly e l'azione di Paul Libois all'Ecole Decroly in Bruxelles[11], il libro di Clairaut, Eléments de Géométrie,[12] e quello che vorrei definire l'innesto della teoria della Gestalt sul metodo Montessori operato dai van Hiele in Olanda[13]. E. C. concretizzava nella azione didattica *un principio di associazione,* nucleo dei 'centri di interesse' di Decroly*,* ovvero la coordinazione tra materie[14]. In questa ottica era possibile solo una matematica che parte dalla realtà e torna nella realtà. E. C. (1965, p.7) cita Libois: *'L'astratto non deve cadere dal cielo, l'astratto è estratto dal concreto'.* E questa astrazione viene forgiata pazientemente dalla 'forma mentale' che negli allievi si consolidanda attraverso l'azione sugli oggetti e sostenuta dall'azione dell'insegnante.
E siamo scivolati su un altro *'Triangolo'*: Pedagogia, epistemologia e didattica.
La percezione infantile differisce da quella dell'adulto perché ha carattere globale. Gli oggetti, i fenomeni, siano essi linguistici o geometrici, appaiono ai bambini in una visione globale. Dopo la prima conoscenza globale, l'azione analitica dei ragazzi frantuma, spezzetta, analizza il *tutto* ma poi diviene costruttiva e sintetica e così il *tutto* viene ricomposto. Per la geometria l'azione di frammentazione passa attraverso attività di classificazione, di misura, di osservazioni di proprietà e di analogie tra casi diversi, attraverso la realizzazione di disegni e di modelli che riproducono tutto o in parte, fedelmente o solo per alcuni aspetti, l'oggetto o il fenomeno. Prima lavorare con figure articolabili in uno spazio immobile; prima le simmetrie all'interno di figure e nell'intero piano; prima la geometria senza numeri e poi la geometria con le misure; prima i casi particolari, concreti e poi i casi generali; fare lavorare i ragazzi simultaneamente con le trasformazioni, gli invariante, i casi limite[15]. Usare le mani e insieme usare parole isolate e sincopate, ma anche suoni onomatopeici e, solo dopo, usare parole normali, specifiche. Il caso dei rettangoli isoperimetrici ottenuti con lo spago teso tra pollice e indice delle due mani: distanziando più o meno le mani si ottiene di fare cambiare altezza e base. Il perimetro rimane identico: la lunghezza dello spago. E *'che dire dell'area ..., cosa vi sembra, un momento vediamo meglio ... , e 'plaff'... quando le dita della stessa mano si toccano ... l'area .....'* 'Plaff' vale anche per sottolineare l'area che scompare quando il 'rettangolo articolato', diviene parallelogramma e degenera. Aspettare che lentamente i ragazzi mutino esposizioni confuse in chiare ed efficaci. I

[10] Si veda Gario P., alle pagine 7-33 del '*volume UMI per i 100 anni'*
[11] Si veda nota 1
[12] Si veda Gario P., alle pagine 16-19 del '*volume UMI per i 100 anni'*
[13] Si veda AAVV, 2004, Figure Geometriche e Definizioni, Un itinerario guidato per l'inizio della Scuola Secondaria in http://www1.mat.uniroma1.it/ricerca/gruppi/education/quadernoDEF.pd
[14] Si veda Menghini M., le pagine 56-59 del *volume UMI per i 100 anni'*
[15] Per gli echi sul valore dei *'casi limite'* di Emma del *principio di degenerazione* enunciato da Guido Castelnuovo nel 1889, si veda Gario P., p.28 e Fontanari C., pagina 124 del '*volume UMI per i 100 anni'*

ragazzi stessi si accorgono che è più facile capire i compagni, più facile capire se stessi[16].
E ancora, l'uso dei problemi duali per consentire la costruzione separata di idee e concetti che spesso sono confusi dai ragazzi: area di figure isoperimetriche e perimetro di figure equivalenti; la separazione viene fissata dalla rappresentazione nel piano cartesiano delle due 'situazioni', delle due funzioni perimetro con area costante e area con perimetro.
Ma, ancora, E. C. faceva largo uso delle metafore: *'E' come se ...', 'Pensa a ...'*. Ed incoraggiava gli alunni ad usarne, e si compiaceva quando qualcuno ne 'tirava fuori' di pertinenti e efficaci. Per determinare la formula per il calcolo dell'area in un rettangolo l'azione messa in atto era la seguente: si solleva uno dei lati (il materiale era sempre in classe e tra le mani di Emma e dei ragazzi), piano e bene, parallelamente a se stesso, si fa scorrere verso il lato opposto percorrendo a piccoli passi gli altri due lati. *'Ecco, il lato 'spazza' l'interno della figura! La base viene trascinata per tutta l'altezza*'.
Ma vi era anche molta attenzione all'uso di espressioni in linguaggio naturale, alla loro analisi dettagliata per rendere manifesta la differenza con il linguaggio matematico, per stanare le ambiguità: *'All'angolo tra Via Cavour e via dei Serpenti' è un punto preciso per incontrarsi ma ... poco preciso per la matematica!'* e nella classe si accendeva il confronto e la discussione su come potere ingrandire un angolo.
Uso di metafore e attenzione al linguaggio sono state strategie usate (con ovvie differenze) nel Laboratorio Didattico Universitario per esplorare la geometria non euclidea in un modello di Poicarè[17]: agire in nodo euclideo e vedere in modo non euclideo.

4. Il rapporto con gli errori

La Castelnuovo ponendo questioni aperte, sollecitando osservazioni e esplorazioni, accoglieva, quasi incoraggiava, l'errore come elemento costitutivo del processo di approssimazione successiva nel percorso che portava a formalizzare dopo essersi impegnati in una elaborazione sia individuale che in collaborazione con i compagni.
Conosceva bene le difficoltà intrinseche alla matematica e lavorava per spianarle e renderle meno acute. Il suo lavoro era massimo nell'abbattere le difficoltà estrinseche che sono legate a fattori psicologici e emotivi[18]. Tutti commettono errori; i ragazzi meno bravi, i bravi, i matematici, gli insegnati. I primi rimangono bloccati, non esplicitano e non si assumono la responsabilità del loro processo di pensiero, non hanno spinta

[16] Sull'uso della lingua in classe e delle difficoltà ad avere studenti non di lingua madre italiana suggerisco di vedere l'intervento di Emma al Congresso Nazionale Mathesis del 2004, (2004a in elenco MCE)
[17] Si veda Cannizzaro L., Carosi M. (1981). Esplorando la Geometria del Modello di H. Poincare', Archimede, 1-2, 33-47
[18] Si veda Arzarello F., *Errore e/è apprendimento*, Progetto VALMAT 2001/2003, (www.avimes.it)

emotiva e curiosità per analizzare il modo in cui ragionano. Gli errori e la loro correzione sono indicatori dello sforzo che i ragazzi fanno in classe sostenuti dall'azione dell'insegnante.
E. C. era in sintonia con quanto scritto dall'amico Lombardo Radice[19]: *'Lo sviluppo intellettuale e l'acquisizione di un serio ed efficace patrimonio culturale richiedono uno sforzo sistematico: sono un lavoro. ...La gioia, la conquista, la creazione sono il risultato faticoso di uno sforzo quotidiano, umile, ...(omissis). Il genio-mago è un mito romantico menzoniero e diseducativo: il genio, è innanzitutto un infaticabile lavoratore.'*

5. Il ruolo dei tirocinanti e il rapporto con le Istituzioni

In questa fase di proposizione di nuove modalità per la formazione degli insegnanti penso che l'esempio di E. C. possa fornire qualche elemento di riflession[20] e così come lo ha fornito (Cannizzaro L., 1998) per l'avvio del tirocinio delle Scuole di Specializzazione per L'insegnamento Secondario chiuse nel 2010.
Al primo appuntamento, E. C. accoglieva regalando due libri, per esempio, il Courrant-Robbins, Che cosa è la Matematica e il libro di Hilbert, Geometria Intuitiva, sicura che non fossero stati letti. Subito dopo conduceva agli armadi del Laboratorio o del corridoio dove teneva i materiali per le lezioni; ne illustrava subito qualcuno specificando con chi lo aveva costruito. Come dire: 'prima o poi anche tu costruirai materiali per le classi ..'.
Come tirocinanti abbiamo ricoperto un ruolo che ci poneva a metà strada tra l'insegnante e gli scolari. Abbiamo avuto la possibilità di osservare i ragazzi con la tranquillità e la calma che la nostra inesperienza richiedeva. Abbiamo potuto osservare la dialettica, orchestrata dall'insegnante, tra difficoltà ed errori da una parte e intuizioni dall'altra che portava i ragazzi a maturare le 'loro' scoperte. Questa analisi ci ha aiutato a mettere diversamente e fuoco conoscenze scientifiche acquisite in precedenza. La Castelnuovo spronava, ascoltava con attenzione le osservazioni, gli scambi di opinione, le discussioni che si svolgevano tra noi dopo le lezioni; non si sostituiva a noi. L'esperienza delle Mostre[21], momento forte verso il quale veniva proiettata l'attività di mesi, ha maturato tra tutti gli attori coinvolti (Castelnuovo, i ragazzi tutti e i tirocinanti) una sorta di familiarità diffusa rispettosa dei ruoli, richiedente attese diverse per i diversi attori, una collaborazione attiva, nel rispetto dei tempi e dei limiti di ognuno, la consapevolezza di tendere ad uno stesso scopo. Questa familiarità e affettività

[19] Si veda p. 67 e 68 di Lomdardo Radice L. (1972). L'educazione della mente. Roma: Editori Riuniti
[20] Si veda anche il contributo di Valenti D. in http://www.mathisintheair/2018/03/emma-castelnuovo-nella-scuola-di-ieri-e-di-oggi/
[21] Si veda di de Finetti B. (1972). Da bambini a uomini, *Sapere,* 748, 57-59

complessa è stata di nuovo percepita, con Emma anziana, I tirocinanti decisamente 'aged' e gli ex-allievi oramai professionisti e genitori, ai festeggiamenti per i 90 e 100 anni di Emma.
La Castelnuovo non ha mai smesso di 'agitare le acque' con la sua azione anticipatrice e talvolta, almeno in Italia, quasi solitaria. Lanciava come onde d'urto sulla Scuola italiana e sull'insegnamento della matematica in Italia. Facendo cenno alla Scuola italiana, talvolta, diceva che, nel nostro paese avevamo potuto 'scansare' i guai pedagogici e didattici dell'impostazione bourbakista, le aberrazioni della 'Teoria degli insiemi', oramai in decline, perché eravamo' in ritardo'. Al di sotto dell'evidente battuta di pungente ironia, E. C. sapeva che ruolo aveva svolto nella determinazione degli orientamenti ufficiali. Michele Pellerey, nel suo libro del 1983, bene tratteggia il processo che portò alla riforma della Scuola Media (1963) ed alla revisione dei suoi programmi (1979) e l'influenza di E. C. (capitoli 7 e 9) su questi passaggi importanti. Emma ebbe grandi estimatori e amici tra i matematici italiani, tra questi, Lucio Lombardo Radice, Bruno de Finetti, Tullio Viola, Giovanni Prodi. Ma Emma ebbe anche duri, forti, irriducibili oppositori. A Roma, nel 1974, Lombardo Radice propose, invano, che la Castelnuovo tenesse un corso di Didattica per l'indirizzo Didattico di Matematica. Questa sconfitta maturò in lui la scelta di passare dal corso di Algebra a quello di Matematiche Complementari e promuovere un Laboratorio Didattico per gli student universitari[22].
Pur avendo consapevolezza della complessità e non unidirezionalità dei fenomeni dei quali stiamo parlando, possiamo registrare chiare evidenze e schiette ammissioni che Emma ha contribuito a fare maturare, in alcuni ricercatori, l'interesse per la Didattica. Arzarello e Bartolini Bussi (1998), individuano nel richiamo alla scuola viva, ai problemi curricolari, al coinvolgimento degli insegnanti il 'lievito' che ha fatto maturare una 'via italiana alla didattica della matematica' nella traccia dell'esempio della Castelnuovo. La sintesi di questo processo maturato negli anni è testimoniata dal volume che l'Unione Matematica Italiana (Giacardi e Zan, 2013) ha voluto dedicare alla Castelnuovo per i suoi cento anni e dalla decisione dell'International Commission on Mathematical Instruction di creare 'The ICMI Emma Castelnuovo Award' for Excellence in the Practice of Mathematics Education' da assegnare ogni 4 anni.

Bibliografia

Arzarello F. and Bartolini Bussi, M.G. (1998). Italian Trends in Research in Mathematics Education. J. Kilpatrick & A. Sierpinska (eds.). *Mathematics Education as a Research Domain: a search of identity,* pp.243-262, Kluwer Ac. Pub., Dordrecht

Cannizzaro L., Carosi M. (1981). Esplorando la Geometria del Modello di H. Poincare', *Archimede*, 1-2, 33-47

[22] Si veda anche http://www.mamianilab.it/museo-di-matematica.html

Cannizzaro L. (1998). Il tirocinio: lo stato della situazione, 169-181 e Valenti D., Ipsevich C., Esperienze di tirocinio a Roma in area matematica, 217-224 entrambi in Arfelli Galli A., Corsi M. *Riforma della scuola e formazione degli insegnanti in Italia*, Macerata

Cannizzaro L., Menghini M. (2006). Il pensiero geometrico dalla conoscenza percettiva alla conoscenza razionale: concezioni di insegnanti immersi in situazioni diverse, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, vol. 29B, n.2, 111-134

Giacardi L., Zan R. (a cura di), 2013, Emma Castelnuovo. L'insegnamento come passione, *La Matematica nella Società e nella Cultura*, UMI, 1, VI, 1, Bologna

Pellerey M., (1983). *Per un insegnamento della matematica dal volto umano*, Torino: SEI

Il contributo di Oscar Chisini alla didattica

Paolo Linati

Mathesis Varese
paololinati@gmail.com

Abstract

In questo articolo si evidenzia la difficoltà dei matematici italiani ad operare nel regime totalitario del ventennio fascista. Si espongono sinteticamente quegli aspetti che hanno caratterizzato lo sviluppo della Matematica in quel periodo e nei decenni successivi, attraverso la figura di Oscar Chisini, tra i principali protagonisti della storia della Matematica nella prima metà del XX secolo. Si sottolineano i cambiamenti che hanno subito i programmi (oggi Indicazioni) di Matematica dalla fine del secolo scorso a oggi.

Parole chiave: Geometria proiettiva e algebrica, Mathesis, Matematica moderna.

1. Introduzione

Il mio intervento si differenzia in parte da quello che ci è stato richiesto per questo convegno. Prende inizio nel dicembre 1944, avevo dieci anni; erano gli ultimi mesi della 2ª Guerra mondiale. Una sera arrivarono a casa mia tre persone, due che conoscevano i miei genitori, il terzo che non sapevamo chi fosse. I primi due se ne andarono, lasciando a casa nostra la terza persona. Noi bambini non facemmo domande, eventi di questo tipo non erano nuovi. Mia madre diede subito a questa persona un piatto di minestra, e lui rispose *«spaziba»:* a 10 anni non sapevo che cosa significasse. Alle 4 del mattino seguente le due persone ritornarono, e tutti e tre partirono a piedi attraverso i boschi verso la Svizzera, a 5 km da casa mia. Molto più tardi, a guerra finita, i nostri genitori ci dissero che lo straniero dello *spaziba* era un cosacco, che fuggiva all'arresto delle milizie nazi-fasciste. Ma era anche un matematico. Molti anni dopo, frequentando l'Università, seppi che durante la 2ª guerra mondiale al Dipartimento di Matematica di Milano si era formato un nucleo di studenti di matematica, fisica ed ingegneria, donne e uomini, e di professori che si opponevano al regime fascista.
Fra questi vi era OSCAR CHISINI. Il nucleo, per sfuggire al regime, si diede il nome di OSCAR *(Opera Studentesca Collocamento Assistenza Ricercati)* già adottato da altri nuclei di Resistenza. Imparai anche che *spaziba* significava “grazie”. E che libertà e *solidarietà* camminavano insieme.

Durante la 2ª Guerra mondiale (1939-1945), un periodo di grandi difficoltà, fu Presidente Mathesis Ugo Amaldi. Nel 1947 Amaldi invitò le sezioni sopravissute ad una votazione per la nomina di un nuovo Presidente. Venne eletto OSCAR CHISINI, vicepresidente GIOVANNI POLVANI. Rimasero in carica fino al 1954. Nel 1955 in occasione del Congresso dell'U.M.I. *(Unione Matematica Italiana)* a Pavia, si celebrò il sessantesimo della Società: in quegli anni e nei successivi, UMI e Mathesis erano in ottimi rapporti.
Il 10 aprile 1967 moriva Oscar Chisini. La direzione del "*Periodico di Matematiche*" venne assunta dai Proff. MODESTIO DEDÒ e CARLO FELICE MANARA. Ma dopo poco tempo vennero sospese le pubblicazioni del <*Periodico di Matematiche*>. Nel 1971 la sede nazionale della Società Mathesis passò a Roma, Presidente BRUNO DE FINETTI, vicepresidente LUCIO LOMBARDO RADICE. Ripresero le pubblicazioni del Periodico di Matematiche (Dedò M., C. M. Manara 1967).
OSCAR CHISINI fu docente di Geometria analitica e proiettiva all'Università e al Politecnico di Milano. Il suo nome è legato a quel ramo della Matematica chiamato "*Geometria algebrica di Scuola italiana*". Insieme a Federigo Eniques fu coautore del monumentale trattato *«Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche»* (Campedelli 1946). Ma Chisini, maestro di docenti e di ricercatori, va ricordato anche per la sua opera a favore della Scuola secondaria, come autore di libri di testo, come presidente di commissioni di concorso, per la presidenza nazionale della Mathesis e per la direzione del *Periodico di matematiche.*

2. Oscar Chisini e il Periodico di Matematiche

Vorrei fermarmi sui rapporti fra Oscar Chisini e Federigo Enriques, e in particolare sulla Geometria Proiettiva ed Algebrica. Chi ha fatto uso dei libri di Geometria Proiettiva di Chisini, forse ricorderà le dimostrazioni di alcuni teoremi: Teorema di PAPPO, teor. dei triangoli omologici, utilizzando l'invarianza delle proprietà proiettive delle figure secondo il metodo di Poncelet (Casolaro F., Cirillo L, Prosperi R. 2016).

«Supponete che sul Pianeta Marte vivano degli esseri razionali che conoscano la Geometria, e che pensino che sulla Terra sussistano altri esseri analoghi a loro e vogliano mettersi in corrispondenza con questi. Uno scienziato di Marte pensa di tracciare sul terreno un'enorme figura, la quale realizzi un teorema di geometria che gli uomini riconoscano; questo scienziato non ricorrerà al teorema di Pitagora, la cui figura verrebbe deformata dalla prospettiva, ma invece, per esempio, al teorema di Pappo, invariante appunto per qualunque proiezione; ed allora gli uomini si capiscono e rispondono trasmettendo, ad esempio, il teorema dei triangoli omologici» (Casolaro F. 2003).

Così scriveva Chisini un anno prima della sua morte, in occasione di una commemorazione di Federigo Enriques.
Al fondo di questo discorso vi era qualcosa di più di un artificio didattico per fissare l'attenzione degli studenti su alcuni teoremi di Geometria, vi era la sottolineatura delle *proprietà invarianti* e l'affermazione, ben più importante, della *universalità della scienza*, patrimonio comune da propagarsi a tutti gli esseri razionali.
L'importanza di impostare la geometria su definizioni e su teoremi invarianti rispetto a un certo gruppo di trasformazioni appare a proposito del "Programma di Erlangen" di F. Klein, e in occasione dei primi elementi di geometria algebrica. Così in quegli anni appresi il valore della geometria astratta, dei legami che vincolano enti astrattamente identici (Casolaro F. 1991).
Ma intanto fuori d'Italia nelle Università ma anche nelle scuole secondarie si parlava di insiemi, di gruppi e di anelli. Gli anni 70 e 80 furono anni difficili, anni della "*contestazione*", degli scioperi. Gli insegnanti di Matematica non sapevano se insegnare la "Matematica Moderna", cioè insiemi, strutture, vettori e spazi vettoriali, oppure continuare con la matematica tradizionale (Casolaro F., Rotunno A. 2015).
Vorrei citare un brano di Chisini, tratta da un suo articolo sul "*Periodico di Matematiche*" del 1966, un anno prima della sua morte, per la sua attualità:
"Passano gli anni, guerre e cataclismi si abbattono sulla Terra, la tradizione orale della nostra Scienza e persino la nostra lingua si perdono, i libri vengono distrutti, si attraversa un buio Medioevo; e poi lentamente, l'umanità riprende il suo cammino e cerca gli avanzi della Scienza per lei antica, la nostra Scienza attuale".
Nel corso degli anni sessanta e settanta, fuori d'Italia nelle scuole secondarie si parlava di insiemi, di gruppi e di anelli, di spazi vettoriali. Ricordo che, in una classe della Scuola Europea (alunni di 15 anni) parlai di isomorfismi, di gruppi del 4° ordine, gruppo di Klein, le classi di rnesto, facendo gli esempi più noti. Poi proposi ai miei alunni quindicenni di cercare altri gruppi di operazioni isomorfi a quelli citati. Il giorno seguente Fatma, figlia di genitori curdi in Italia da qualche anno, venne in classe portando come esempio il "*gruppo del materasso*":
"un materasso su di un letto può essere girato nel senso testa-piedi, oppure sopra-sotto. oppure facendo entrambe queste operazioni, oppure lasciandolo al suo posto; l'insieme di queste quattro operazioni ha la struttura di gruppo, isomorfo al gruppo delle rotazioni del rettangolo." (Casolaro F., Cirillo L., Prosperi R., 2016)
Inutile dire che da quel giorno il gruppo di Klein venne chiamato "gruppo del materasso".
Nel ventennio 1960-1980 si affacciò nel mondo matematico europeo uno scienziato poco conosciuto in Italia e in altri Paesi, ALEXANDER GROTHENDIEK. Nato in Germania nel 1928, all'avvento del nazismo la sua famiglia dovette trasferirsi in Francia, e Alexander compì gli studi a contatto con i "Bourbaki", Henri Cartan, Jean Diedonné, Pierre Serre. Pubblicò in francese, in collaborazione con Diedonné, il testo *Éléments de Géométrie Algebrique.* Ricevette la "Field Medal". Nel 1988 a Bruxelles ebbi occasione di ascoltare una sua conferenza. Devo confessare che capii quasi niente: abituato alla Geometria

Algebrica di Enriques-Chisini, non riuscii ad adattarmi al nuovo linguaggio (Chisini O. 1951).
Negli ultimi decenni del secolo scorso anche nelle Università italiane i punti di vista francesi in Geometria e in Algebra si diffusero. e la "*Teoria geometrica delle equazioni*" (Chisini O. 1941) di Enriques-Chisini andò in pensione. Si diffuse un insegnamento esclusivamente assiomatico, che venne fatto proprio dai giovani insegnanti di Scuola secondaria. Cioè, iniziare il corso di geometria elementare partendo dall'assiomatica di Euclide-Hilbert, per alunni di 14 anni.
Concludo il mio intervento con due citazioni che credo di avere imparato da Chisini, e che forse avete già ascoltato. La prima: "*Cultura è ciò che rimane quando avete dimenticato tutto quello che avete imparato a scuola*". La seconda: "*La libertà è rendere liberi gli altri*".

Bibliografia

Chisini O. 1938, "*I gruppi finiti di proiettività*". Periodico di Matematiche 1938 pagg. 87-119.

Chisini O. 1941, *De Franchis: lezioni di Geometia analitica e proiettiva* Periodico di Matematiche 1941, pagg. 266-267.

Campedelli L., 1946. "*Una visione sintetica proiettiva dei metodi descrittivi*", Periodico di Matematiche, pagg. 10-19.

Chisini O., 1951, "*Singolarità delle curve algebriche piane*". Periodico di Matematiche 1951, pagg. 142-166.

Casolaro F. 1991: "*Il Programma di Erlangen e le Trasformazioni geometriche*". Disegno e Matematica Università Sapienza di Roma pag. 101-103.

Casolaro F. 2003: "*Le trasformazioni omologiche nella Storia, nell'Arte, nella Didattica*" Convegno Internazionale "*Matematica e Arte*" Vasto, 2003; pagg. 129-148.

Casolaro F., Rotunno A: "*Mathematics and Art: from the pictorial art to the linear transformations*". University of Defence - Brno, Czech Republic, ottobre 2015.

Casolaro F. Cirillo L., Prosperi R., "*Groups of Transformations with a Finite Number of Isometries: the Cases of Tetrahedron and Cube*". Ratio-Matematica, Journal of Mathematics, Statistics, and Applications Volume 31 – 2016, pagg. 93-110.

Logica dell'incerto di Bruno de Finetti, logica sfumata di Angelo Fadini e sperimentazione nella scuola primaria

Antonio Maturo

Università di Chieti-Pescara
antmat@libero.it

Abstract

Il lavoro si focalizza su alcune idee di base di Bruno de Finetti e Angelo Fadini, evidenziando vari aspetti comuni. Entrambi hanno portato avanti l'idea della interdisciplinarietà nell'insegnamento e nella ricerca. Bruno de Finetti, con la sua "Matematica Logico Intuitiva" del 1959, e la sua "Teoria delle Probabilità", del 1970, e ancora prima, con "L'invenzione della Verità", del 1934, mostra un rifiuto dell'insegnamento formale, comodo, monodisciplinare, fatto di certezze, e sceglie la strada impervia dell'affrontare i problemi che sono alla base della scienza. Angelo Fadini, con la sua Teoria degli Insiemi Sfocati, mostra per primo in Italia varie questioni logiche che mette come fondamento di applicazioni pratiche nell'Architettura. Il lavoro presenta anche qualche risultato di una sperimentazione ancora in atto nella scuola primaria.

Parole chiave: Probabilità soggettiva, Logica a tre valori, Didattica interdisciplinare, Esperienze nel primo ciclo.

1. La visione interdisciplinare di de Finetti e la distinzione fra i concetti logici e quelli probabilistici

Normalmente capita di trovare persone con notevoli pregiudizi sulla "*probabilità soggettiva*"; di solito si confonde la parola "soggettiva" con la parola "arbitraria".
Le stesse persone ritengono "oggettiva" la "*probabilità assiomatica*" di Kolmogoroff, senza riflettere sul fatto che essa, più che preoccuparsi di *come assegnare* le probabilità agli eventi che occorre considerare, stabilisce *come fare calcoli* a partire da una distribuzione di probabilità assegnata ad una famiglia di eventi molto ampia (che si impone formi una σ-algebra).
In polemica con tale impostazione, *Bruno de Finetti* pubblica, nel 1970, i suoi due volumi di *Teoria delle probabilità* (de Finetti, 1970). Lo stesso titolo dell'opera, in contrasto con

il titolo di *Calcolo delle probabilità* usualmente adottato dai testi sulla Probabilità, indica il programma di lavoro di *de Finetti*, rivolto ad un approfondimento dal punto di vista della logica e del significato degli assiomi utilizzati e delle conseguenze ottenute.
Alcuni dei maggiori meriti di *Bruno de Finetti* sono:

- la *capacità di interdisciplinarietà*, ossia di spaziare fra i vari rami della matematica e della fisica senza fossilizzarsi nel linguaggio e nelle tecniche di un solo settore, come dimostra la stessa dedica dell'opera a Beniamino Segre;
- l'avere operato una netta *distinzione* fra *concetti logici* e *concetti probabilistici* riuscendo ad evitare tutta una serie di frequenti errori logici e probabilistici, ad esempio su probabilità condizionate, indipendenza logica e probabilistica, evento caratterizzato dalla partizione a cui appartiene, incapacità di trattare eventi di probabilità nulla, etc.

Non c'è quindi da meravigliarsi se i sottili risultati e le approfondite considerazioni logiche, algebriche e geometriche che si trovano nei lavori di *de Finetti* si possono sfruttare o adattare anche in altri campi della matematica e delle sue applicazioni, quali ad esempio i *fuzzy set*, che *de Finetti* di fatto anticipa sia con tutte le sue considerazioni sulle logiche a più valori, sia con il suo modo di trattare i numeri aleatori prima di introdurre le probabilità e sia con i ragionamenti sull'incertezza di ciò che si afferma del mondo reale.

2. Eventi condizionati e logica a 3 valori in de Finetti

I concetti di *evento condizionato*, *probabilità condizionata* e *previsione condizionata* differenziano in maniera determinante, da un punto di vista logico e probabilistico, l'impostazione della *Teoria della probabilità* di *Bruno de Finetti* da quella del *Calcolo delle probabilità* di *Kolmogoroff*.
Nell'impostazione assiomatica di *Kolmogoroff* non si attribuisce un significato logico all'*evento condizionato*. Dati due eventi A e B, con $B \neq \emptyset$, si definisce la *probabilità condizionata* p(A/B) come rapporto $p(A \cap B)/p(B)$ e si avverte che tale definizione ha senso se e solo se $p(B) \neq 0$. Quindi la definizione di *probabilità condizionata* è basata sui valori assunti dalla probabilità non condizionata e sul pregiudizio che gli eventi di probabilità nulla vadano comunque trascurati.
Al contrario, *Bruno de Finetti* parte dall'idea di assegnare un significato logico all'evento condizionato A/B con la semplice condizione $B \neq \emptyset$.
A tale scopo introduce una logica a tre valori: "*vero*", "*falso*" e "*indeterminato*" (basandosi anche su lavori di Fisica Quantistica (Reichenbach, 1944)) e definisce l'evento condizionato A/B come una proposizione *vera* se si verifica $A \cap B$, *falsa* se si verifica $A^c \cap B$ e *indeterminata* se si verifica B^c. Ogni evento A può essere considerato come l'evento condizionato A/Ω, con Ω evento certo. La struttura algebrica degli eventi

condizionati (o generalizzata) è studiata, oltre che in (Reichenbach, 1944) e in (de Finetti, 1970), anche in altri lavori (Fadini, 1970; Maturo 1993).
Successivamente la *probabilità condizionata*, che ha il significato di *grado di fiducia* che un evento condizionato risulti *vero* viene assunta esistente, anche se talvolta non conosciuta, per ogni evento condizionato e, in base a *principi di coerenza* che "tutti sono disposti ad accettare", vengono stabilite le relazioni fra le varie probabilità condizionate.
Una assiomatica della probabilità degli eventi condizionati dal punto di vista di de Finetti si trova in (Dubins, 1975).
Le varie relazioni sono ottenute utilizzando il concetto di *scommessa coerente*. A partire da tale concetto de Finetti propone anche l'idea di trattare l'evento condizionato A/B come un numero aleatorio, che dovrebbe assumere i valori 1, 0, p(A/B), a seconda che A/B sia vero, falso o indeterminato. Questa definizione è stata criticata perché pone il problema logico di inserire la probabilità condizionata nella definizione di evento condizionato. Tali critiche, però, possono essere superate facilmente poiché si può sempre inserire in una definizione un'incognita, quando la definizione vale qualunque sia il valore assunto dall'incognita.

3. Angelo Fadini: la Mathesis, i fuzzy sets e le Facoltà di Architettura

La Mathesis, la logica a più valori e la novità nell'insegnamento della matematica nelle Facoltà di Architettura sono legate, a Pescara, alla figura di Angelo Fadini, che oltre ad aver segnato la storia della Mathesis, ha avuto un ruolo importante nella storia della Facoltà di Architettura di Pescara ed a quella mia personale, essendo docente da molti anni in quella Facoltà.
Nell'anno accademico 1970-71, subito dopo la laurea, cominciai a collaborare, in qualità di "Laureato Addetto alle Esercitazioni", con il corso di Analisi Matematica e Geometria Analitica I della Facoltà di Architettura di Pescara, appena riconosciuta con DPR 9/3/70 n.441. Il Corso fu assegnato per incarico ad un docente dell'Università di Napoli, il prof. Angelo Fadini.
La prima volta che Angelo Fadini venne a Pescara andai a prenderlo alla stazione. Ispirava una gran tranquillità e voglia di fare ricerca ed era desideroso di diffondere alcuni suoi punti di vista sulla Matematica per l'Architettura.
Angelo Fadini era un grande innovatore e precursore dei tempi attuali. Aveva avuto l'intuizione che la Matematica nella Facoltà di Architettura non poteva ridursi ai due Corsi tradizionali di Analisi Matematica e Geometria Analitica I e II, sostanzialmente finalizzati a fornire la base matematica per gli argomenti di Fisica, Statica, Scienze delle Costruzioni e simili.
Per lui la Matematica non doveva avere un ruolo subordinato ad altre discipline, ma aveva il compito di dare delle strutture logiche da utilizzare soprattutto nei Corsi che apparivano più lontani dalla Matematica, come ad esempio quelli di Composizione Architettonica ed Urbanistica. Bisognava introdurre una nuova Matematica, in grado di aiutare a trattare

situazioni confuse ed incerte, per le quali le tradizionali Analisi Matematica e Geometria Analitica non potevano essere di nessun aiuto. A tale scopo era riuscito, unico in Italia, a far istituire, alla Facoltà di Architettura di Napoli, un nuovo corso da tenersi nel terzo anno, denominato Complementi di Matematica.
Il problema fondamentale era quello di rifondare la Matematica da un punto di vista logico: non potevano essere accettate solo le proprietà della logica binaria, dette *funzioni enunciative*, che possono assumere, per ogni elemento dell'universo di discorso, solo i valori "vero" o "falso", e da cui si ottengono gli insiemi (Russel, 1962), ma era necessario trovare anche la maniera di trattare le proprietà vaghe su cui si basa la nostra vita quotidiana come "x è povero" o "x è bello", dette, in (Fadini, 1979: 41), *pseudo funzioni enunciative*". Esse possono essere vere, false o parzialmente vere e danno luogo ad insiemi generalizzati, detti "sfocati" o "fuzzy" caratterizzati dal fatto che un elemento può appartenere anche parzialmente all'insieme. Una trattazione sistematica degli insiemi fuzzy è in (Klir, Yuan,1995),
Angelo Fadini si era occupato, come de Finetti, di logiche trivalenti, riprendendo le idee di (Reichenbach, 1944), considerando i valori "vero", "falso" e "indeterminato", e le idee di (Gentilhomme, 1968). Da tali logiche si ottengono gli *insiemi nebulosi* - *ensembles flous* per Gentilhomme - (per ogni elemento ci sono tre possibilità: *appartenenza*, *non appartenenza* e *semiappartenenza*) e di conseguenza l'estensione a tali insiemi delle classiche unione, intersezione e complemento.
Angelo Fadini aveva anche appena introdotto in Italia la teoria degli *insiemi sfocati* o *fuzzy set*, basandosi sull'articolo di Zadeh "Fuzzy Sets" su "Information and Control" del 1965, considerato da tutti il lavoro di base della teoria, e sui testi di Kaufmann (1975a, 1975b), in francese. Egli riteneva che, al momento, la comunità matematica non avrebbe accolto bene la teoria e che essa si sarebbe diffusa entro 30 anni (nel 2000).
Uno dei maggiori interessi di Angelo Fadini era quello di portare avanti un'associazione di matematici di cui era presidente Bruno de Finetti e di cui sarebbe diventato presidente onorario: la Mathesis. Mi disse che era opportuno prevedere delle sezioni locali in Abruzzo. Gli diedi retta solo 15 anni dopo, fondando con degli amici la sezione di Pescara. Circa 25 anni dopo, nel 1995 ho cominciato a occuparmi anche io di fuzzy set e contemporaneamente di probabilità soggettiva.

4. Sperimentazione nella scuola primaria

Il lavoro si basa sull'idea che l'impostazione soggettiva del calcolo delle probabilità di de Finetti (Kyburg, Smokler, 1964; de Finetti, 1970; Scozzafava, 1996, 2001; Coletti, Scozzafava, 2002) e contemporaneamente gli enunciati linguistici della logica fuzzy possano essere particolarmente efficaci per la formazione degli studenti della scuola primaria.
A differenza di altre impostazioni basate essenzialmente su formule e calcoli, la probabilità soggettiva si basa sui concetti logici e sul concetto di relazione. Inoltre la

logica fuzzy, utilizzando le proposizioni linguistiche, permette un insegnamento interdisciplinare di italiano e matematica. Si parte dall'approfondimento del concetto di enunciato della logica binaria e di quello più generale di enunciato linguistico.
La prima fase di lavoro in classe consiste quindi nel riconoscimento dei vari tipi di enunciati. Un approfondimento di questa prima fase, possibile con classi particolarmente reattive, può essere la comprensione e l'uso delle principali regole di inferenza.
La seconda fase consiste nell'introdurre le relazioni di preferenza – indifferenza e successivamente la probabilità qualitativa come particolare relazione di preferenza – indifferenza. I bambini dovranno essere addestrati al confronto a coppie di eventi, ossia a valutare la maggiore, minore o uguale "facilità di verificarsi" di due eventi e a fare un controllo di coerenza di tali valutazioni.
Nella terza fase si sperimenta l'efficacia dell'impostazione di de Finetti, consistente nell'introdurre la probabilità a partire da una scommessa, coerentemente con le valutazioni di probabilità qualitativa precedentemente espresse.
Nella quarta fase si fanno lavorare i bambini su valutazioni di probabilità legate a situazioni in cui occorre prendere decisioni. Ci si interessa soprattutto alle situazioni ludiche che attraggono particolarmente i bambini, ma essi vengono indotti a riflettere anche sulle decisioni in condizione di incertezza più importanti, legate al lavoro, al benessere, alla scelta dei valori della loro vita. L'importanza delle valutazioni di probabilità soggettiva per prendere decisioni è evidenziata con varie argomentazioni in (Lindley, 1990).
In una prima sperimentazione effettuata, in riferimento alla prima fase, sono state sottoposte ai bambini di 4 classi, due prime e due quarte, 20 frasi, con varie alternative di risposta. I bambini dovevano capire se si trattava di non enunciati, enunciati della logica classica, enunciati linguistici.
La discussione in classe dei risultati è stata molto stimolante. In qualche caso i ragionamenti e le osservazioni dei bambini sono stati molto acuti, facendo rilevare aspetti non presi in considerazione dai docenti in quanto ritenuti scontati o sottointesi. Il risultato dell'indagine è stato un soddisfacente approfondimento dei concetti non solo per i bambini, ma anche per i docenti. I dettagli dell'indagine e alcuni risultati sono in (Delli Rocili, Maturo, 2013).
L'idea definettiana di introdurre la probabilità attraverso le scommesse ha avuto un successo entusiastico da parte dei bambini, che, vedendo la scommessa come un gioco, hanno avuto lo stimolo per l'avvio alla comprensione dei fondamenti e delle procedure della probabilità.

Bibliografia

Coletti, G., Scozzafava, R., (2002), *Probabilistic logic in a coherent setting*, Kluwer Academic Publishers, London.

de Finetti, B. (1970), *Teoria delle Probabilità*, vol. I e II, Einaudi, Torino.

Delli Rocili L., Maturo A., (2013), Logica del certo e dell'incerto per la scuola primaria, *Science&Philosophy* Vol. 1, No 1, (2013) pp. 37 – 58.

Dubins, L.E., (1975), Finitely additive conditional probabilities, conglomerability and disintegrations, *The Annals of Probability*, 3, 89-99.

Fadini, A., (1979), *Introduzione alla teoria degli insiemi sfocati*, Liguori, Napoli.

Gentilhomme, M.Y., (1968), Les ensembles flous en linguistiques, *Cahiers de linguistique theorique et appliquée*, Bucarest, (5) 47, pp. 47-65.

Kaufmann A., (1975a), *Theory of fuzzy subsets*, Vol I, Academic Press, New York.

Kaufmann A., (1975b*), Introduction a la théorie des sous-ensemble flous*, Vol II e Vol III, Masson, Paris.

Klir G.J., Yuan B., (1995), *Fuzzy sets and fuzzy logic*, Prentice Hall.

Kyburg H. E., Smokler H. E., (1964), *Studies in Subjective Probability*, John Wiley, New York.

Lindley D. V., (1990), *La logica della decisione*, Il Saggiatore, Milano

Maturo A., (1993), Struttura algebrica degli eventi generalizzati, *Periodico di Matematiche*, 4, 1993, p. 18-26.

Reichenbach H., (1944), *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica*, tr. it. Einaudi, Torino, 1954

Russell B., (1962), *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milano.

Scozzafava R., (1996), *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*, Zanichelli, Bologna.

Scozzafava R., (2001), *Incertezza e probabilità. Significato, valutazione, applicazioni della probabilità soggettiva*, Zanichelli, Bologna.

SESSIONE 5
Laboratorio di Matematica

La geometria dinamica in Emma Castelnuovo: perimetro ed area

Marco D'Errico[1], Lilia Martiniello[2], Angela Perillo[1]

[1]IC Nino Cortese – Via Benedetto Croce, 92 – Casoria (NA)
marco.derrico1@istruzione.it

[2]IC di Lesmo – Via Donna Rosa, 13 – Monza Brianza (MI)
lilianamartiniello@hotmail.com

[3]IC Nino Cortese – Via Benedetto Croce, 92 – Casoria (NA)
angelamariaperillo@libero.it

Abstract

Dalle esperienze e dalle lezioni di Emma Castelnuovo, una delle cose più sorprendenti e, nello stesso tempo innovative, è lo stimolo ad osservare e guardarsi intorno.
In diversi suoi lavori, questo stimolo è particolarmente evidente nella descrizione dell'argomento "area e perimetro". Nell'articolo presentiamo esperienze concrete su questa tematica svolte con alunni della scuola secondaria di I grado anche attraverso l'utilizzo di software informatici come Cabrì Geometre o Geogebra.

Parole chiave: geometria dinamica, perimetro ed area, didattica della matematica, Emma Castelnuovo.

1. Introduzione

Molto spesso i docenti di matematica si trovano di fronte alla necessità di trovare degli escamotage, delle semplificazioni o applicazioni per riuscire a spiegare alcuni argomenti, ma difficilmente si assiste alla realizzazione di un metodo unitario che si possa applicare sempre e alla maggior parte degli argomenti della programmazione didattica. Sono molti gli alunni che terminano il percorso di studi ritenendo di ricordare ben poco o addirittura di avere ancora confusione su quei concetti che dovrebbero essere patrimonio di qualunque persona che decida di interrompere prima il suo percorso di studi. In Italia il sistema educativo è stato tradizionalmente caratterizzato da rigide suddivisioni fra le discipline: una gabbia nella quale era difficile dare spazio alle competenze (interdisciplinari). Anche alla luce della Raccomandazione del Parlamento

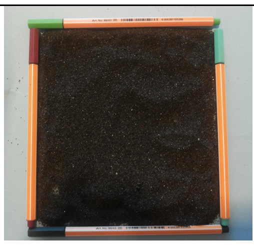
Europeo (18/12/06) relativa alle competenze chiave per l'apprendimento permanente, il Ministero ha tentato di conciliare l'approccio disciplinare con le competenze, forzando queste ultime ad entrare nella gabbia.
Oggi più che mai è doverosa una riflessione su chi ha dato un valido contributo allo sviluppo di nuove metodologie didattiche nel campo della matematica.
Emma Castelnuovo (Roma, 12 Dicembre 1913 – 13 Aprile 2014) figlia del matematico Guido Castelnuovo, è stata un'illustre matematica italiana nonché insegnante nella scuola media dal 1943 al 1979 ed ha dato un notevole contributo alla didattica della matematica soprattutto per la scuola secondaria di I grado sostenuta anche dall'affacciarsi di nuove discipline quali la pedagogia speciale e la psicologia che diedero man forte allo sviluppo della Didattica della Matematica come scienza a sé.
Sebbene molti di questi lavori pedagogici fossero incentrati sull'età pre-elementare ed elementare, Emma Castelnuovo trova in questi studi un valido spunto per il suo lavoro nella scuola media (pre-adolescenza) elaborando un modello didattico che oggi potremo definire "Didattica Attiva", ovvero una didattica che sia operazione, costruzione e intuizione; questi processi dapprima avranno un carattere manipolatorio che servirà per compiere il salto più complesso che porta un bambino dal concreto all'astratto. L'intuizione subisce uno stravolgimento: il significato statico che aveva sempre avuto diventa dinamico. Tutti questi elementi e riflessioni sono presenti nei suoi libri e nelle varie riviste con le quali ha collaborato. In questo lavoro ci soffermeremo sul tema "Perimetro e Area".

2. Descrizione della trattazione di area e perimetro in Emma Castelnuovo

Dalle esperienze e dalle lezioni di Emma Castelnuovo, una delle cose più sorprendenti e, nello stesso tempo innovative, è lo stimolo ad osservare e guardarsi intorno.
Nei volumi "Documenti di un'esposizione matematica" , "Pentole, ombre e formiche", "Officina matematica" e "Didattica della matematica" questo stimolo è particolarmente evidente nella descrizione dell'argomento "area e perimetro".
Emma Castelnuovo in questa trattazione cerca di sciogliere uno dei nodi cruciali della geometria ovvero la confusione che spesso i bambini fanno tra perimetro e area all'inizio del ciclo scolastico secondario di I grado. L'innovazione introdotta su questi temi da parte di Castelnuovo è proprio il trattare questi due argomenti congiuntamente. Si parte, quindi, considerando che poligoni che hanno lo stesso perimetro possono avere diversa area o che poligoni con la stessa area possono avere diverso perimetro.
Durante una lezione tenuta a Cenci nel 2003 (Officina matematica, 2008) introduce queste tematiche sottolineando l'importanza che rivestono da un punto di vista didattico in quanto "c'è qualcosa che cambia". E questo induce prima di tutto ad osservare e poi a sperimentare.

Poligoni con uguale perimetro e area diversa

Sulla storia degli isoperimetri si può citare la narrazione della costruzione di Cartagine contenuta nell'Eneide di Virgilio. Didone, per ottenere la massima superficie per la città che deve costruire, le da la forma di cerchio. Questo perché, a parità di perimetro, il cerchio è la figura geometrica che racchiude l'area massima. Se gli alunni cercano mappe delle città medioevali, infatti, noteranno che hanno proprio questa forma. In "Documenti di un'esposizione matematica" si parte dalla costruzione con quattro bastoncini di uguale lunghezza, di un quadrato articolabile. Schiacciando questo quadrato fino al caso limite, si vede come la sua area diventa uguale a zero. Volendo dare una visione ancora più concreta di questo cambiamento, si può riempire il quadrato di sabbia e vedere come questa (che fa le veci dell'area) fuoriesce a poco a poco dal quadrato man mano che questo viene schiacciato fino a scomparire completamente nel caso limite (fig. 1).



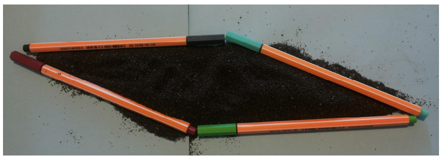


Fig. 1 – La sabbia che riempie il quadrato articolabile fa le veci dell’area (IC Don Bosco Melloni – Portici; IC Falcone – Pianura; IC Cortese – Casoria; IC di Lesmo).

Si può visualizzare lo stesso processo riferendosi a triangoli isoperimetrici con uguale base. Si fissano due chiodi sulla tavoletta di legno su cui è disteso il cartoncino e si indicano con A e B (AB sarà la base dei nostri triangoli). Ai due chiodi A e B si lega un pezzo di spago premurandosi che sia più lungo del tratto AB. Con l'aiuto della matita si tende lo spago. Si vede che lo spago forma un triangolo di vertici: A, B, punta della matita. In pratica, la base AB resta fissa ed un vertice è mobile. Il triangolo con area maggiore sarà quello isoscele (quello con altezza massima). Tutti i triangoli così costruibili saranno isoperimetrici ma avranno aree diverse.

Inoltre se ci lasciamo guidare dalla matita, vedremo che questa, guidata dallo spago disegnerà sul foglio una curva di forma ovale: un'ellisse in cui i punti A e B saranno i fuochi. Dunque i triangoli isoperimetrici e di uguale base hanno i vertici su un'ellisse (fig. 2a e 2b).

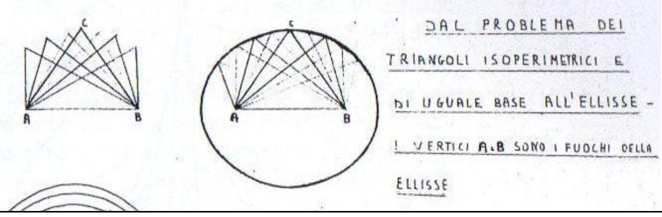


Fig. 2a – I triangoli isoperimetrici e di uguale base hanno i vertici su un'ellisse (tratto da "Documenti di un'esposizione matematica").

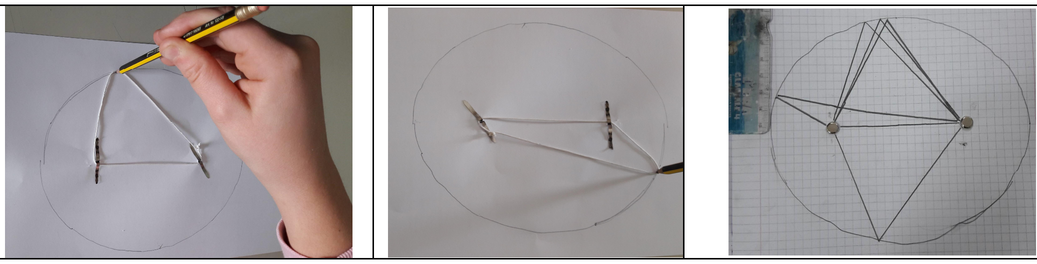


Fig. 2b – I triangoli isoperimetrici e di uguale base hanno i vertici su un'ellisse (IC Cortese - Casoria).

Poligoni con uguale area e diverso perimetro

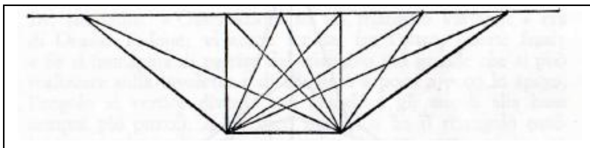
In questo caso si può partire da tanti quadratini disposti in modo da formare rettangoli diversi o anche altri poligoni. Il perimetro cambia se i quadratini sono disposti in modo diverso. Ad esempio, se si congiungono vertice a vertice, essi creeranno un poligono a scaletta con un perimetro totale dato dal perimetro di un quadratino moltiplicato per 4. Mentre se i quadratini combaciano lungo un lato, quest'ultimo si perde e non contribuisce alla formazione del perimetro (fig. 3).

a

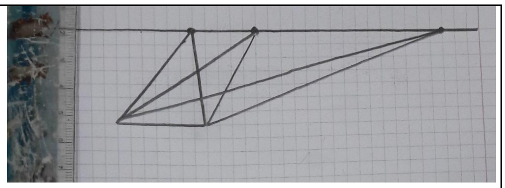
b

Fig. 3 – Come cambia il perimetro di una figura composta da quattro quadratini a seconda di come questi sono disposti (tratto da "Documenti di un'esposizione matematica").

Anche nel caso dei triangoli di uguale base e uguale area (e quindi uguale altezza), si può realizzare un'esperienza pratica. Su una tavoletta di legno viene costruito un triangolo variabile che abbia sempre la stessa base e la stessa altezza. Gli estremi della base sono due chiodi e il vertice opposto è un anellino che può scorrere lungo un filo disposto parallelamente alla base. Un elastico, legato ai due chiodi, passa entro l'anellino, e indica così il triangolo. Anche in questo caso, spostando l'anellino, si vede che i triangoli che si possono costruire sono innumerevoli. L'elastico spostato prima a destra o a sinistra, lasciato libero, scorre fino a posizionarsi dove la tensione è minima (ovvero dove diventa isoscele). Si evidenzia così che il triangolo isoscele è quello con perimetro minimo tra quelli che hanno la stessa base e la stessa area (Fig. 4a e 4b). La stessa Autrice a questo punto mette in evidenza due aspetti fondamentali. Il primo aspetto è di carattere didattico: il materiale usato in tutte queste lezioni è semplice ed ha la capacità di “parlare”, nel senso che è in grado di mostrare i concetti in maniera efficace e diretta. Il secondo aspetto è di carattere matematico: ovvero richiama concetti della teoria fisico-matematica dell’elasticità.



a



b

Fig. 4a e 4b – Triangoli con la stessa base e la stessa area (IC Cortese – Casoria)

3. Discussione e conclusioni

La prima cosa che ci ha colpito e che ci ha spinto ad intraprendere queste iniziative nelle nostre classi, è l’approccio e l’innovazione che Emma Castelnuovo opera sull’argomento area e perimetro trattandoli insieme e mostrando le relazioni interdipendenti tra i due concetti.
Si può iniziare citando Galileo il quale dice che molte persone pensano che se due piazze hanno lo stesso contorno per forza devono contenere la stessa area. Se immaginiamo di usare uno spago per figurarci il perimetro della piazza, ci si accorge che l’area della piazza può cambiare ma il perimetro può rimanere lo stesso (fig. 5).

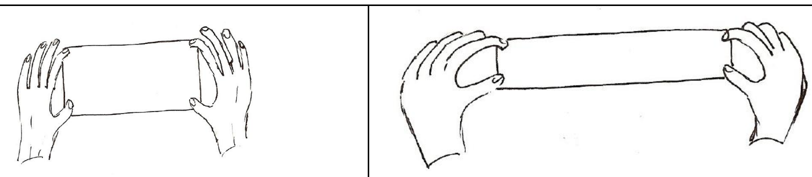


Fig. 5 – Attraverso uno spago si mostra come cambia l’area ma non il perimetro.

Una grande innovazione nel metodo di Emma Castelnuovo è proprio la costruzione di materiali dinamici; da sempre nello studio della geometria, ci si affida, al disegno geometrico ma con un po’ di esperienza ci si accorge che spesso non basta. Il disegno è un elemento unico ed immobile. Gli strumenti dinamici invece permettono al ragazzo di costruire materialmente le proprie figure, di scomporle e ancora ricomporle giungendo a coglierne proprietà che prima con la sola osservazione del disegno non era riuscito a cogliere. Per giungere ad un apprendimento che sia significativo e non mnemonico o parziale, è necessario che il bambino manipoli gli oggetti a disposizione, che possa agire di propria iniziativa tentando tutte le strade utili e infine trovare da solo la soluzione. Il momento più importante in questi lavori è il caso “limite” cioè il punto in cui è più evidente la trasformazione che sta avvenendo. In questo punto, il caso limite, il bambino riesce ad avere la sua intuizione e a cogliere il concetto come una sua scoperta. Il caso limite riesce a far compiere ai ragazzi quel salto necessario che va dal concreto dei nostri triangoli all'astrazione di un processo. Questo elemento risulta importantissimo perché è proprio in questa età che dovrebbe definirsi la capacità di astrazione di un bambino. Dopo questa prima fase, si può passare a verificare quanto appreso con l'esperienza pratica dando delle misure ai lati. E allora possiamo tornare al rettangolo costruito con lo spago di figura 5.

base	altezza	area
19	1	19
18	2	36
17	3	51
16	4	64
15	5	75
14	6	84
13	7	91
12	8	96
11	9	99
10	10	100

Facciamo variare le misure dei due lati, facendo in modo che il perimetro risulti sempre lo stesso. Vediamo se il calcolo dell'area fornisce effettivamente risultati differenti.

Un altro aspetto che sembra passare in secondo piano ed invece è molto importante per questo tipo di lavori è il *cooperative learning*. Un'altra considerazione che ci preme riportare è che questo tipo di lezione ha delle forti potenzialità in termini di integrazione con altre discipline. Alcuni intrecci sono accennati dalla stessa Autrice, altri, soprattutto in riferimento all'argomento proposto per questa relazione, possono essere sviluppati (ad esempio il richiamo alle orbite ellittiche dei pianeti).

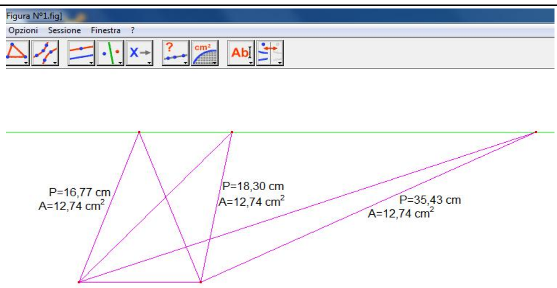
Questa esperienza l'abbiamo sperimentata anche con il supporto di un laboratorio informatico ed utilizzare software informatici come Cabrì Geometre e Geogebra.

Questi software di matematica dinamica sono progettati per gli studenti e per docenti con interfacce abbastanza semplici, all'interno dei quali ogni studente può esplorare la matematica in modo attivo e interattivo, infatti è possibile partire da una figura geometrica o anche da un'equazione sullo schermo per ottenere un oggetto da manipolare. Inoltre gli studenti non si limitano a riconoscere forme geometriche già strutturate bensì hanno a disposizione tutti gli enti geometrici per costruirle e proprio come avveniva nei materiali dinamici della Castelnuovo, possono anche procedere con delle trasformazioni di queste mantenendo alcuni vertici fissi e uno mobile e così riuscire a cogliere le proprietà le analogie e differenze tra i poligoni che vengono studiati nelle scuole. Le nuove tecnologie si inseriscono a pieno titolo nel filone costruttivistico, in cui i ragazzi sono gli attori principali del processo di apprendimento procedendo ad una costruzione personale e attiva del proprio sapere a partire dai propri interessi e dalle proprie motivazioni.

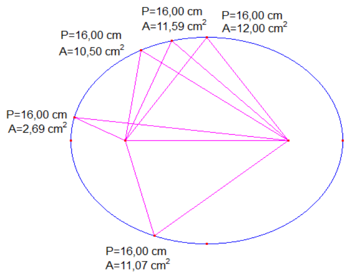
Alla luce di tutto ciò, abbiamo ricostruito la lezione della Castelnuovo con i due software (in contesti diversi) di cui riportiamo qualche esempio in figura 6.

Il collegamento con la geometria analitica dei grafici ottenuti (retta, iperbole, ellisse) è un altro vantaggio della trattazione di questo argomento con gli approcci esposti. I vertici mobili delle figure isoperimetriche o equivalenti disposte su un piano cartesiano, infatti, introduce agevolmente ed efficacemente dal punto di vista dell'apprendimento il concetto di luogo geometrico. Consente inoltre di collegarlo con gli insiemi numerici (la continuità delle curve che ci creano è garantita solo se ai numeri naturali "aggiungiamo"

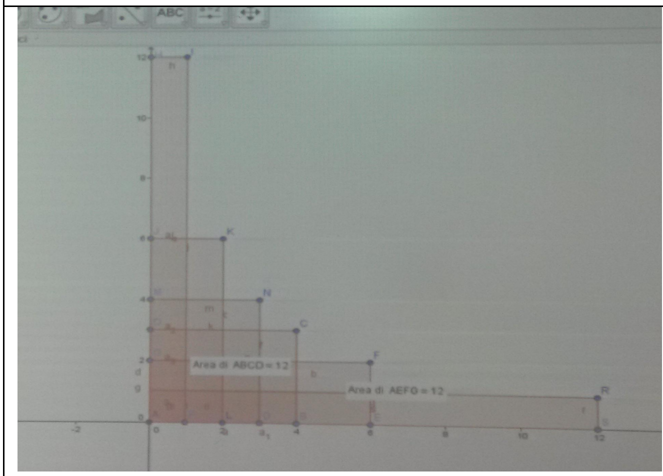
prima i razionali e poi i numeri reali).
Concludiamo con una testimonianza di uno degli alunni di Castelnuovo che dice: "*io sono sicuro che anche i più scettici uscendo dalla nostra esposizione hanno capito che questo insegnamento funziona; e anche noi abbiamo tratto i benefici da questa mostra perché abbiamo veramente capito cosa è e come è la matematica,* ***e abbiamo capito come si fa a diventare uomini***".



a



b



c

Fig. 6
a. Costruzione di triangoli con uguale base ed altezza (quindi stessa area) e con perimetro diverso (Cabrì).

b. Costruzione di triangoli isoperimetrici con la stessa base e con area diversa (Cabrì).

c. Rettangoli aventi lo stesso perimetro ma diversa area (Geogebra).

Bibliografia

Emma Castelnuovo (1963). Didattica della matematica (*La nuova Italia Editrice*).

Emma Castelnuovo (1972). Documenti di un'esposizione matematica (Boringhieri).

Emma Castelnuovo (1993). Pentole, ombre, formiche – in viaggio con la matematica (*La nuova Italia*).

Emma Castelnuovo (2008). L'officina matematica (*La meridiana*).

Costruzione dell'operazione di divisione: un percorso non sempre facile

Patrizia Dova

Docente di matematica nella scuola secondaria di primo grado e,
attualmente, formatrice per UST di Varese e per Mathesis Varese
patrizia.dova0@alice.it

Abstract

L'itinerario presentato affronta la complessità del concetto di divisione mettendo in evidenza i due aspetti di questa operazione:

- quello della divisione **come operazione** che rimanda agli aspetti quantitativi implicati dalla **individuazione di una partizione di un insieme finito in sottoinsiemi tra loro equipotenti**, ossia alla identificazione di sottoinsiemi dell'insieme dato, tali da avere uguale cardinalità, da essere a due a due disgiunti e da dare tramite la loro unione l'insieme dato.
- quello della divisione **come operatore** che è, invece, **l'inversa della moltiplicazione come operatore**.

Parole chiave: la divisione, il quoziente, operatore, operando, resto

1. Introduzione

La divisione è un concetto complesso in quanto **come operazione** rimanda agli aspetti quantitativi implicati dalla **individuazione di una partizione di un insieme finito in sottoinsiemi tra loro equipotenti**, ossia alla identificazione di sottoinsiemi dell'insieme dato, tali da avere uguale cardinalità, da essere a due a due disgiunti e da dare tramite la loro unione l'insieme dato.
La divisione **come operatore** è, invece, **l'inversa della moltiplicazione come operatore**.
Affinché questa affermazione abbia significato è necessario che **l'operatore moltiplicativo sia invertibile**, ossia associ ad ogni numero naturale a uno ed un solo numero naturale b, e, viceversa, che ogni numero naturale b sia il corrispondente di uno ed un solo numero naturale a.
La divisione come **operazione** e come **operatore** è interna all'insieme N dei numeri naturali, ma non è ovunque definita; infatti, è definita solo sulle coppie ordinate di

numeri naturali di cui il primo è multiplo del secondo, che è diverso da 0 ed è detto divisore del primo.
In questo modo è caratterizzata la *divisione* cosiddetta *esatta*, il cui risultato è denominato *quoto (poco usato)* o *quoziente esatto*.

2. La divisione: un concetto complesso

La divisione come **operazione** e come **operatore** è interna all'insieme N dei numeri naturali, ma non è ovunque definita; infatti, è definita solo sulle coppie ordinate di numeri naturali di cui il primo è multiplo del secondo, che è diverso da 0 ed è detto divisore del primo.
In questo modo è caratterizzata la *divisione* cosiddetta *esatta*, il cui risultato è denominato *quoto (poco usato)* o *quoziente esatto*.

3. Riflessioni

La divisione non è sempre esatta e il **quoziente non è, da solo, il risultato dell'applicazione dell'operatore all'operando**.
Il vero risultato è la *coppia (quoziente, resto)*, il resto potendo essere nullo.
Ne consegue che la divisione come regola operatoria non è esattamente l'inversa della moltiplicazione […] (Vergnaud G. 1981, *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne, Ed. Peter Lang)
La *divisione con resto* cui fa riferimento Vergnaud non è un'operazione in senso stretto, in quanto associa ad una coppia di numeri naturali non un solo numero, ma ancora una coppia; si tratta, dunque, di una generica funzione definita tra coppie di numeri naturali da NxN* a NxN:

$$(a;b) \xrightarrow{\text{divisione}} (q;r)$$

dove *q,* quoziente intero, è il massimo numero naturale per cui il prodotto per *b* non supera *a*

$$b \times q \le a < b \times (q+1)$$

che equivale a

$$\boldsymbol{b \times q < a < b \times (q+1)} \qquad \text{oppure} \qquad \boldsymbol{b \times q = a < b \times (q+1)}$$

e *r*, *resto*, è la differenza tra *a* e tale prodotto

$$\boldsymbol{r = a - b \times q}$$

In tal modo il resto è un numero naturale minore di *b*:

$$\boldsymbol{r < b.}$$

Esempio:
Si consideri la coppia (46;5) per individuare la coppia che è associata a quella data tramite la divisione con resto si cercano due multipli consecutivi di 5 tra i quali è compreso 46:

$$45 \leq 46 < 50 \text{ o meglio } 5\times9 \leq 46 < 5\times10;$$

poi si calcola il resto come differenza tra 46 e il multiplo minore:

$$46 - 45 = 1.$$

In sintesi:

$$(46;5) \xrightarrow{\textit{divisione}} (9;1)$$

Perché $5x9 < 46 < 5x10$ e $1 = 46 - 5x9$

Questa divisione è detta anche *divisione euclidea* in quanto è già presente negli "Elementi" di Euclide; si parla pure di *quoziente euclideo* per indicare il quoziente intero.

4. Come scrivere la divisione

Le usuali scritture ottenute con lo stesso simbolo della divisione esatta non sono corrette in quanto non è vero che il primo e il secondo membro sono scritture diverse dello stesso numero e non viene rispettata la simmetria dell'uguaglianza.

Se la formalizzazione viene fatta in analogia con le altre operazioni, **la scrittura corretta è:** $46 : 5 = 9$ $46 : 5 = 9;$ con resto 1

$$\mathbf{46 : 5 = (9;1)}$$

In generale, se si utilizza il simbolo: proprio della divisione esatta anche per la divisione con resto è necessario adottare la formalizzazione

$$a : b = (q;r) \quad \text{dove} \quad a = b\times q + r \qquad \text{e } r < b$$

Quando si vuole indicare solo il quoziente intero, trascurando il resto, è in uso adoperare il simbolo $\div$.
Esempio:
È corretta la scrittura
$46 \div 5 = 9$
la quale indica che il quoziente intero (la parte intera del risultato) tra 46 e 5 è 9.

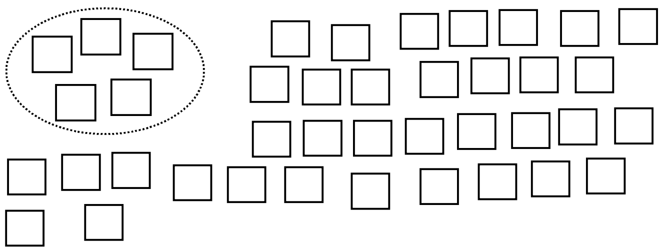
Il quoziente intero è una approssimazione per difetto del risultato.
Questa caratteristica diviene importante quando i numeri della divisione indicano grandezze o quantità: i quozienti vanno sempre interpretati, in quanto non è detto che una divisione eseguibile, in modo esatto o con resto, tra numeri abbia senso nel contesto.

5. La divisione in diverse situazioni problematiche

Nell'introduzione della divisione, data la complessità del concetto, è necessario procedere con gradualità partendo sempre da situazioni vicine all'esperienza dell'alunno in modo che questi riesca a impadronirsi del concetto, cioè riesca a capire quando, per risolvere un problema, è necessaria la divisione.
Esempio di scheda stimolo da compilare in classe.

- Il matrimonio di Claudia e Fabio

Amelia è molto amica di Claudia e decide di regalarle, per il matrimonio, le scatole delle bomboniere fatte da lei con carte colorate. Le scatole dovranno bastare per 8 zii.
Dopo aver girato parecchie cartolerie finalmente Amelia trova un bellissimo blocchetto di carta pergamena con dei foglietti gialli a fiorellini bianchi.
Per costruire ogni scatola Amelia userà 5 foglietti. Se i fogli del blocchetto sono 40, riuscirà Amelia a costruire le scatole necessarie?
Aiutala tu, formando gruppi di 5 foglietti per gruppo.



Numero dei foglietti contenuti nel blocchetto: …………
Numero dei foglietti necessari per costruire una bomboniera: …….
Numero delle bomboniere costruite: ……….
(40;5) …………….
Amelia costruirà ………………… bomboniere

Flavia per abbellire i mazzolini di roselline e per meglio fissarli, decide di legarli con dei nastri colorati. Conta i nastri che ha in una scatola: sono 18. Decide così di legare ogni mazzolino con 3 nastri.
Riuscirà a legare tutti i mazzolini che ha confezionato?
Ricordi quanti sono i mazzolini?

Usiamo i simboli: per ogni nastro disegna un simbolo a piacere (esempio: “/”)

Numero dei nastri che ha Flavia: …………….
Numero dei nastri necessarie per legare un mazzolino: ……………….
Numero dei mazzolini legati:
(18;3)   …..
Flavia riuscirà a legare……………. mazzolini.
Restano dei mazzolini non legati con i nastri?

6. Tecniche operatorie

- Tecnica per sottrazioni ripetute
- Tecnica usuale detta divisione euclidea o per “*danda*”

In ogni caso è importante che gli alunni:
a) abbiano chiaro che **il quoziente è il numero di oggetti-unità contenuti nel dividendo e la cui numerosità è data dal divisore che deve quindi essere un numero intero**
b) sappiano eseguire sottrazioni e moltiplicazioni
Ad esempio calcolare 73 840 : 231 significa trovare quanti gruppi di **231 unità** sono contenuti in **73 840 unità.**

Tecnica per **sottrazioni ripetute**

Si è affermato che “calcolare 73 840 : 231 significa trovare quanti gruppi di **231 unità** sono contenuti in **73 840 unità**”.
È allora molto spontaneo sottrarre successivamente da 73 840 unità gruppi di 231 unità:

$$73840 \xrightarrow{-231} \ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{-231} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \xrightarrow{-231}$$

Ci vuole tempo e pazienza, ma si arriva al risultato.
Lavorando in questo modo con numeri piccoli si mette bene inevidenza che cosa rappresentano in una divisione il dividendo il divisore, il quoziente e il resto.
Il procedimento per sottrazioni ripetute può essere “accorciato” procedendo come segue:

	7	**3**	**8**	**4**	**0**	**2**	**3**	**1**	
-	2	3	1	0	0	1	0	0	
	5	0	7	4	0				231x100=23 100
-	4	6	2	0	0	2	0	0	
		4	5	4	0				231x200=46 200
	-	2	3	1	0		1	0	
		2	2	3	0				231x10=2 310
	-	2	0	7	9			9	
			1	**5**	**1**	**3**	**1**	**9**	
									231x9=2 079

319 è il quoziente, 151 il resto.
Operando in questo modo si mette bene in evidenza anche il fatto che il resto è sempre minore del divisore (non si possono più fare gruppi)

Tecnica usuale della divisione detta **divisione euclidea** o **divisione** per “***danda***”

Si suggerisce di avviare la ricerca di un algoritmo a partire da una situazione problematica come la seguente.

La caccia al tesoro
Durante una festa di fine anno, viene proposta una caccia al tesoro che coinvolge 53 ragazzi. Si decide di formare squadre composte da 4 elementi ciascuna. Quante squadre gareggeranno?
Una volta constatato che si deve eseguire una divisione, si richiama l'attenzione sulla coppia (53;4).
È evidente che, poiché il 53 non appare nella tabella dei multipli di 4, è opportuno introdurre una nuova tecnica.

Tecnica della “*danda*” lunga

da	u			4 x 1 = 4
5	3	4		4 x 2 = 8
4		da	u	4 x 3 = 12
1=	10	1	3	4 x 4 = 16
1	3			4 x 5 = 20
1	2			4 x 6 = 24
	1			…………

Bibliografia

Nel mondo dei numeri e delle operazioni vol.3 a cura di Clara Colombo Bozzolo, Angela Costa, Carla Alberti, ed. Erickson

L’enfant, la mathématique et la réalité Gerard Vergnaud, ed. Peter Lang, Berne 1981

Verso il Teorema di Pitagora

Patrizia Dova

Docente di matematica nella scuola secondaria di primo grado e,
attualmente, formatrice per UST di Varese e per Mathesis Varese
patrizia.dova0@alice.it

Abstract

Questo articolo presenta un possibile modello metodologico per l'apprendimento consapevole del Teorema di Pitagora in forma problematica, utilizzando un itinerario geometrico da proporre agli studenti che frequentano la quinta elementare o il secondo anno di scuola secondaria. Vedremo anche come è possibile introdurre la somiglianza dei triangoli attraverso l'omotetia.

Parole chiave: problema, angoli, ampiezze, triangoli, omotetia.

1. Introduzione

Questo è un francobollo commemorativo che la Grecia, nel 1955 ha dedicato alla commemorazione del famoso Teorema di Pitagora.
Gli Egiziani, per costruire la base quadrata delle piramidi, cioè per fare in modo che gli angoli fossero proprio retti, si valevano del metodo della corda. Si era nel 3000 a.C. Il metodo è questo: si prende una corda lunga, per esempio, 12 unità di lunghezza (noi prenderemmo 12 metri), e si divide con dei nodi in tante parti uguali: una parte si fa di 3 nodi, una di 4 e una di 5. Si tende la parte di 4 nodi fra due paletti ficcati per terra, e si tirano le altre due parti, lunghe 3 e 5, in modo che i loro estremi s'incontrino.

Si ottiene così un triangolo; e questo triangolo ha un angolo retto.
Gli Egiziani notarono che i numeri 3, 4, 5, lunghezze dei lati del triangolo, erano tali che:

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

E notarono che se i lati sono lunghi 6, 8, 10, si ha ancora un triangolo rettangolo, e ancora si verifica che:

$$6^2 + 8^2 = 10^2.$$

E lo stesso accade se i lati sono lunghi 9, 12, 15: si ha sempre un triangolo rettangolo, e ancora si verifica che:

$$9^2 + 12^2 = 15^2.$$

«Strane proprietà dei numeri», dissero gli Egiziani, e attribuirono a queste terne numeriche un valore mistico. Queste terne solamente? No, in epoche anche molto remote gli Indiani e i Cinesi avevano osservato che per costruire un angolo retto si poteva utilizzare una corda divisa in parti lunghe 5, 12, 13 e anche una corda divisa in parti lunghe 8, 15, 17.
E anche in questi casi accade che:

$$5^2 + 12^2 = 13 \qquad \text{e} \qquad 8^2 + 15^2 = 17^2$$

Una testimonianza ancora più espressiva sul teorema di Pitagora è data da una tavoletta babilonese del 2000-1800 a.C. È la tavoletta conservata al British Museum, a Londra. Questa tavoletta è un elenco di problemi, proposti e risolti, ritrovata assieme ad altre, qualche decina di anni fa, durante scavi eseguiti nella zona dell'antica Babilonia. È uno dei più antichi documenti matematici che si posseggono. L'autore è incognito ma è certamente un matematico.
Ecco quanto è detto in un problema che trascriviamo qui sotto; è scritto in caratteri cuneiformi:
«Un bastone lungo 30 unità è appoggiato a un muro. In alto scivola di 6 unità. Di quanto il piede del bastone si è allontanato dalla base del muro?».
Segue la soluzione: si dice che si deve fare il quadrato di 30 e da questo sottrarre il quadrato del numero ottenuto togliendo a 30 il numero 6, e cioè 24; si ottiene in tal modo il quadrato del numero 18. Bene, 18 è il numero cercato, cioè il piede del bastone si allontana di 18 unità dalla base del muro.
E infatti il bastone si allontana dalla base del muro di una lunghezza data da:

$$\sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{324} = 18\,.$$

Anche i Babilonesi conoscevano dunque il teorema di Pitagora, ma come gli Egiziani, gli Indiani, i Cinesi, non hanno mai dato una dimostrazione della proprietà.[1]

2. Inquadramento storico

Consideriamo l'equazione
$x^2 + y^2 = z^2$ *(1)*
che esprime, se indichiamo con x e y i cateti e con z l'ipotenusa di un triangolo

1 E. Castelnuovo "Matematica 1. Numeri e figure" Ed. La Nuova Italia

rettangolo, il Teorema di Pitagora. Si definisce terna pitagorica una soluzione della (1) con (x; y; z)interi positivi.
Se esiste una certa terna pitagorica (x; y; z), allora ogni altra terna di numeri ottenuta da questa moltiplicandola per un qualsiasi numero p intero positivo (in pratica (px; py; pz)) è, naturalmente, una terna pitagorica; in altre parole, data una terna pitagorica, se ne possono ottenere infinite altre moltiplicandola per un qualsiasi intero positivo.
Le terne pitagoriche in cui il Massimo Comun Divisore sia 1 (M.C.D.(x; y; z) = 1) sono chiamate terne pitagoriche primitive; ad esempio (3; 4; 5) è una terna primitiva, mentre le altre che si possono generare da questa moltiplicandola, rispettivamente, per p = 2, p = 3 e cosi via ((6; 8; 10), (9; 12; 15), ...), ovviamente, non lo sono. (……..)
Nell'antichità si conoscevano due metodi per generare terne pitagoriche. Il primo attribuito a Pitagora partiva da un numero dispari (il numero 5 nell'esempio della testimonianza di Erone; il numero 3 in quella di Proclo). Il calcolo eseguito, partendo dal numero 5, è il seguente:

$$5;\ 5^2 = 25;\ 25 - 1 = 24;\ 24: 2 = 12;\ 12 + 1 = 13.$$

La terna viene (5; 12; 13).
Con mentalità moderna, abituata a ragionare per formule generali, questa procedura si può esprimere con le formule:

$$\left(n; \frac{n^2-1}{2}; \frac{n^2+1}{2}\right), \qquad (2)$$

dove n è un numero dispari maggiore di 1, le quali soddisfano la relazione pitagorica; infatti:

$$n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2.$$

La necessità che n sia dispari si coglie subito dalla constatazione che se n fosse pari, ne verrebbe n^2 pari; per conseguenza $n^2 - 1$ (e anche $n^2 + 1$) sarebbero dispari e quindi sarebbe impossibile che dalla loro divisione per 2 vengano fuori numeri interi.
Il secondo metodo, che è riferito da Boezio, è da questi attribuito al pitagorico Archita di Taranto. Esso procede, partendo da un numero pari, il numero 8 nell'esempio, al modo seguente:

$$8;\ 8: 2=4;\ 4^2=16;\ 16 - 1=15;\ 16 + 1=17.$$

La terna viene(8; 15; 17).
Con formule generali la procedura si esprime così:

$$\left(v; \left(\frac{v}{2}\right)^2 - 1; \left(\frac{v}{2}\right)^2 + 1\right),$$

dove v è un numero pari.
Il germe di queste ultime formule oggi è attribuito correntemente a Platone. È da immaginarsi però che gli siano state trasmesse proprio da Archita.
I due tipi di formule, quella attribuita a Pitagora e l'altra ascritta tradizionalmente a Platone, manipolate, danno luogo a queste altre:

$$(2n;\ n^2 - 1\ ;\ n^2 + 1). \qquad (3)$$

In effetti, per ottenere la terna (3), basta, nelle formule attribuite a Pitagora, moltiplicare

ciascun elemento della terna per due, mentre nelle formule attribuite a Platone, sostituire al posto di v, 2n.
La (3) si presta ad essere utilizzata partendo indifferentemente da un numero pari o dispari. (…….)
Un'altra forma capace di generare terne pitagoriche è conosciuta ed è anche la più usata; essa è la seguente:

$$(a^2 - b^2;\ 2ab;\ a^2 + b^2), \qquad (4)$$

con a e b numeri interi positivi tali che a > b. Com'è naturale, essa soddisfa la relazione pitagorica; infatti:

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$$

La forma (4) è legata al nome di Diofanto (perciò formule diofantine) ma non esplicitamente menzionata in nessun luogo dell'Arithmetica da questi composta. Essa è invece utilizzata, implicitamente, nel Libro VI dell'opera (il Libro contiene 24 problemi aritmetici dedicati ai cosiddetti "triangoli rettangoli in numeri", vale a dire alle terne di numeri interi esprimenti i lati di un triangolo rettangolo, le quali oltre a soddisfare alla relazione pitagorica, devono soddisfare ad altre specifiche richieste poste da ciascun problema).
La (4), con le seguenti condizioni:

I a e b interi positivi
Il a e b primi tra loro (ovvero "coprimi")
III a e b non entrambi pari o non entrambi dispari (ovvero "di parità diversa"),
IV a>b

genera tutte e sole le possibili terne pitagoriche primitive.[2]
L'insegnamento/apprendimento della matematica, in particolare della geometria, deve rispondere ad esigenze formative ed a necessità logiche che non sempre possono essere esaurienti se ridotte a puro tecnicismo.
Il lavoro propone un percorso didattico che prende spunto da una situazione critico-problematica intorno alla quale gli studenti, con il dialogo, si aprono al confronto, alla negoziazione e alla ricerca.

- **Problema: Calcola l'ampiezza dell'angolo di vertice C senza usare il goniometro.**

Il problema si scompone in due quesiti:

1°Conoscendo, in un triangolo, l'ampiezza di due angoli è possibile classificarlo sia rispetto ai lati, sia rispetto agli angoli?
2°Conoscendo, in un triangolo, le lunghezze dei tre lati è possibile classificarlo sia rispetto ai lati, sia rispetto agli angoli?

1° quesito

Caso particolare: di un triangolo ABC sai che:

---

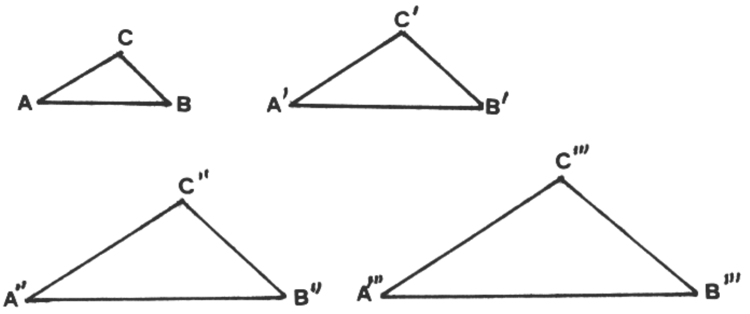
2 L. Lombardi – P. Occhinegno – F. Palladino – M. Palladino sul vol. 28B N. 4 – Agosto 2005 della rivista "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate" del CRD Ugo Morin.

il lato AB è lungo 8cm
gli angoli di vertici A e B sono ampi rispettivamente 60° e 70°.
Disegna il triangolo.
Calcola l'ampiezza dell'angolo di vertice C senza usare il goniometro.
Classifica il triangolo rispetto ai lati e rispetto agli angoli e giustifica le risposte che dai.
Se non ti avessi dato la lunghezza di AB, avresti potuto classificare il triangolo rispetto agli angoli? sì, no Perché? ......
Completa la prima tabella che segue e **disegna i sette triangoli** m,n,p,q,r,s,t che in essa compaiono. Per ognuno di essi disegna il lato AB di 6cm.
Determina l'ampiezza dell'angolo di vertice C con un calcolo, poi controlla, usando il goniometro, se il calcolo che hai fatto è corretto.
Tabella da completare (*le parti in corsivo devono essere scritte dagli alunni):*

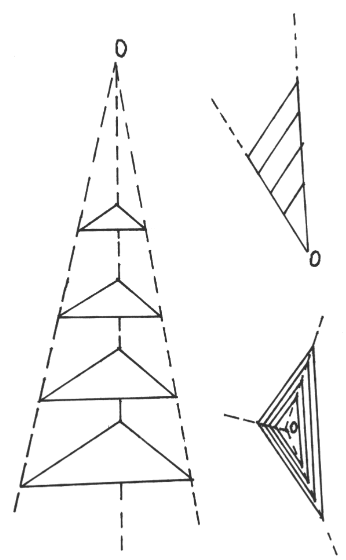
triangolo ABC	misura ampiezza in gradi dell'angolo A	B	C?	il triangolo ABC rispetto agli angoli è
m	70	60	***50***	***acutangolo***
n	40	100	***40***	***ottusangolo***
p	20	70	***90***	***rettangolo***
q	60	60	***60***	***acutangolo***
r	45	45	***90***	***rettangolo***
s	30	40	***110***	***ottusangolo***
t	80	80	***20***	***acutangolo***

Se non ti avessi dato la lunghezza del lato AB avresti potuto disegnare i sette triangoli?
Un allievo dice immediatamente di "no" perché, giustifica, "mancherebbe il lato su cui appoggiare i due angoli da disegnare".
Un allievo propone:
"Ognuno di noi sceglie per il lato AB la lunghezza che vuole, ma una diversa dall'altra, ridisegniamo i sette triangoli e vediamo che cosa succede".
Poiché gli allievi sono 20 si dividono in tre gruppi e ogni gruppo sceglie per il lato AB una lunghezza a piacere (diversa da 6cm).
Come era prevedibile gli allievi scelgono numeri naturali, precisamente: 4cm, 8cm, 10cm .
Naturalmente ogni gruppo e non ogni allievo, disegna, con la misura scelta, **i sette triangoli in triplice copia.** I disegni vengono fatti fare su fogli colorati:
4cm → giallo , 8cm → rosso, 10cm → azzurro.
Finito il disegno si osservano i 28 triangoli ottenuti (compresi i sette triangoli iniziali con il lato di 6cm e tracciati su carta bianca) e si chiede agli allievi di mettere assieme, uno per ogni colore, "**quelli che,** secondo loro, **si assomigliano** " anche se non sono "grandi

uguali”.
La scelta non presenta difficoltà. Dicono gli allievi:
“Abbiamo messo assieme quelli che, grandi o piccoli, hanno la **stessa forma**”.
Consideriamo il triangolo
ottusangolo scaleno con gli angoli ampi 30° e 40°e vediamo i disegni corrispondenti (in scala 1:2) alle quattro lunghezze del lato AB: **4cm, 6cm, 8cm e 10cm.**



Si dispongono i triangoli in modo che si corrispondano in una omotetia. Se gli allievi, come probabile, conoscono già questa trasformazione si lasciano liberi di lavorare in gruppo, altrimenti si guidano a scoprire come disporli perché esista una omotetia che trasformi l’uno nell’altro.
Come si sa il centro dell’omotetia può essere esterno alle figure, sul loro contorno o interno ad esse (vedere le figure che seguono).
Lavorando con i triangoli ritagliati si scoprono facilmente le tre possibilità (i colori diversi facilitano l’attività).
Dall’omotetia si passa alla similitudine applicando ad ogni triangolo una isometria a piacere.



Conclusione:
“Quando di un triangolo conosciamo l’ampiezza di due angoli possiamo determinare l’ampiezza del terzo angolo e quindi possiamo classificare tale triangolo sia rispetto agli angoli, sia rispetto ai lati.

Se vogliamo disegnarlo ne troviamo tantissimi perché possiamo scegliere la lunghezza di un lato a piacere. Questi triangoli che disegniamo hanno però **tutti la stessa forma**, ognuno è l'ingrandimento o il rimpicciolimento di un altro: si dice che sono **triangoli simili**."

2° quesito:
Conoscendo, in un triangolo, le lunghezze dei tre lati è possibile classificarlo sia rispetto ai lati, sia rispetto agli angoli?

Caso particolare: di un triangolo ABC sai che i lati AB, BC, AC sono lunghi rispettivamente 7cm, 5cm, 6cm.
Disegna il triangolo, usando righello e compasso, e classificalo sia rispetto ai lati che rispetto agli angoli.
L'insegnante propone allora la tabella che gli allievi devono completare usando, se necessario, il goniometro dopo aver disegnato ogni triangolo *(le parti in corsivo devono essere scritte dagli allievi)*:

triang.	lunghezza in cm di ogni lato			ampiezza, in gradi di ogni angolo			il triangolo ABC rispetto
ABC	AB	BC	AC	C	A	B	ai lati è
e	6,5	6,5	6,5	*60*	*60*	*60*	*isosc.eq.*
f	6	8	10				*scaleno*
g	4,2	5,6	7				*scaleno*
h	7	7	10				*isoscele*
i	4	6	8,5				*scaleno*

Osservazione per il docente:
I disegni degli allievi sono spesso imprecisi, le misure trovate con il goniometro anche. Succede quindi che, in alcuni casi, un triangolo sia ottusangolo per alcuni, rettangolo o acutangolo per altri.
A questo punto abbiamo detto agli allievi che i matematici hanno scoperto "una regola" che permette di risolvere il suddetto problema.
Invece di lavorare sulle lunghezze dei lati si prova a considerare **il quadrato di tali lunghezze e a confrontare il quadrato maggiore con la somma degli altri due".**
Gli allievi provano considerando tutti i triangoli di cui si erano occupati sia nel primo problema (misurando i lati), sia nel secondo:

Misura dei lati in cm		
5	6	7
6	8	10
7	7	10
4,2	5,6	7
4	6	8,5
...	...	...

Quadrato della misura dei lati in cm^2	
25	36
36	64
49	49
17,64	31,36
16	36
...	...

Gli allievi hanno discusso ogni caso e hanno concluso, a parole, quello che ora noi presentiamo in simboli:

Siano a,b,c (a ≥b ≥ c) le lunghezze dei lati di un triangolo, si ha:

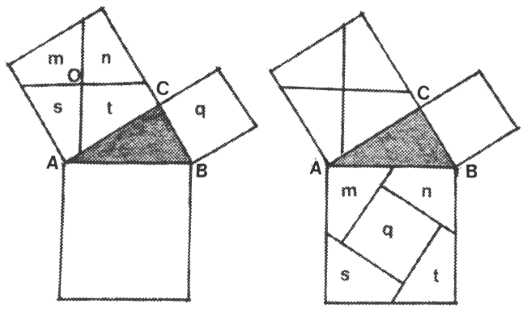
Riflettiamo: $\mathbf{a^2}$ è la misura, in centimetri quadrati, dell'area del quadrato di lato **a**".

Siamo allora passati ad una verifica grafica delle uguaglianze e disuguaglianze sopra scritte.

3. Applicazione ai triangoli

Triangolo rettangolo

Misura in cm della lunghezza dei lati			Misura in cm^2 dell' area dei quadrati costruiti sui lati		
AB	BC	CA	AB^2	BC^2	CA^2
10	6	8	100	36	64
		100= 36+64			

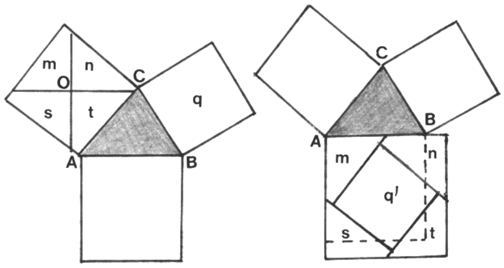


Triangolo acutangolo

Misura, in cm, della lunghezza dei lati		
AB	BC	CA
7	6	5

Misura, in cm^2, dell' area dei quadrati costruiti sui lati	
AB^2	BC^2
49	36

49 < 36 + 25

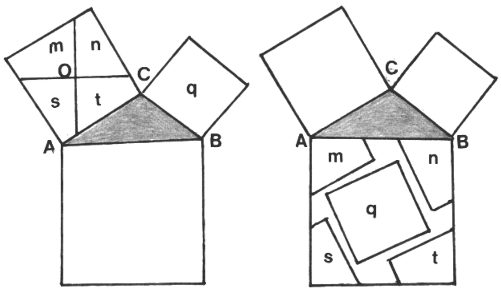


Triangolo ottusangolo

Misura, in cm, della lunghezza dei lati		
AB	BC	CA
8,5	4	6

Misura, in cm^2, dell' area dei quadrati costruiti sui lati	
AB^2	BC^2
72,25	16

72,25 > 16 + 36



Bibliografia (solo lavori citati)

E. Castelnuovo "Matematica 1. Numeri e figure" Ed. La Nuova ItaliaL. Lombardi – P. Occhinegno – F. Palladino – M. Palladino sul vol. 28B N. 4 – Agosto 2005 della rivista "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate" del CRD Ugo Morin.

Dimostrare giocando

Antonietta Esposito[1] **Saverio Tortoriello**[2]

[1]Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno.
antesposito@unisa.it

[2]Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Salerno
fstortoriello@unisa.it

Abstract

Nel presente articolo si vuole illustrare un percorso didattico di approccio alla dimostrazione di teoremi di geometria euclidea piana e solida nella scuola secondaria di I grado con l'utilizzo del software didattico GeoGebra.

Parole chiave: Cultura scientifica, didattica, geometria dinamica, GeoGebra

1. Introduzione

Nel contesto disciplinare proprio della matematica, è noto che "prima ancora di essere quell'insieme di nozioni concettuali concernenti numeri, operazioni, figure geometriche, formule e così via, la matematica è un modo di rapportarsi con la realtà, di organizzare logicamente i dati della realtà fisica, i pensieri e le attività complesse" (D'Amore-Manini, 1990). La competenza matematica è dunque l'acquisizione di una specifica attitudine mentale, di un certo modo di organizzare il pensiero e di rappresentare la realtà.
L'approccio tradizionale nella didattica della matematica, ancora ampiamente diffuso, purtroppo, pone l'accento sull'insegnamento e sull'apprendimento di leggi, regole e tecniche risolutive. Un tale approccio, si sa, ha l'effetto di promuovere nell'alunno un atteggiamento passivo nei confronti della disciplina, inducendolo ad allontanarsi dallo studio perché ritenuto statico e noioso: lo studente impara a fornire meccanicamente le risposte che l'insegnante si aspetta, a risolvere esercizi simili a quelli svolti in classe, a ripetere nozioni senza porsi domande e senza pensare; ancor di più se si pensa alla geometria solida: si parla di diedri, cubi e cilindri senza averne nessun tipo di consapevolezza interiore.
La diffusione delle tecnologie informatiche nella scuola, iniziata alla fine degli anni 90 in seguito dell'adozione dei programmi sperimentali del PNI – Piano Nazionale per l'Informatica nella Scuola Secondaria di II grado, ha esercitato una notevole azione di rinnovamento dell'insegnamento della Matematica, ancora in atto, oggi anche nella Scuola del I Ciclo. L'utilizzo di software geometrici interattivi, infatti, attraverso attività

laboratoriali, consente di mettere l’alunno in “situazione attiva di apprendimento” (J. DEWEY), attraverso cui l’alunno progetta, costruisce, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze. Una tale sperimentazione diretta, ha il pregio di abituare l’allievo alla ricerca autonoma aiutandolo a sviluppare capacità di osservazione, d’intuizione e senso critico tali da renderlo protagonista del proprio percorso di apprendimento e co-costruttore delle proprie conoscenze

2. GeoGebra: un software geometrico interattivo nella didattica

GeoGebra è un software per l'apprendimento e l'insegnamento della matematica che fornisce strumenti per lo studio di geometria, algebra e analisi. Nella fattispecie è un sistema di geometria dinamica: permette la costruzione di enti e figure geometriche modificabili in tempo reale.
Nell’ambiente di editing, infatti, permette di costruire per mezzo di enti di base contenuti nei menu “a tendina” oggetti geometrici in maniera del tutto analoga a quanto lo studente può fare sul foglio con riga e compasso. Tuttavia rispetto alle costruzioni classiche con carta, matita, riga e compasso, una volta costruita la figura non è chiusa a sé stessa ma la si può liberamente manipolare: variarne le dimensioni e/o spostarne i singoli elementi mediate il trascinamento con il mouse. La dinamicità del software consente, così, di definire una nuova concettualizzazione di figura geometrica, non più qualcosa di statico avente una sola configurazione ma un qualcosa di fortemente dinamico che sottende un’intera classe di figure simili (Oliviero, 1998).
La valenza didattica di un tale ambiente può essere utilizzata, fin dalla scuola del I Ciclo, per strutturare attività di “laboratorio” relative a:

- costruzione di figure (da vedersi come attività interdisciplinari anche con la disciplina “Tecnologia”);
- esplorazione di proprietà e formulazione di congetture.

È su questo secondo utilizzo che si vuole porre l’attenzione per mostrare come sia possibile avviare, fin dalla scuola Primaria i bambini all’osservazione e alla formulazione di ipotesi.

3. Esempi di dimostrazione nella Scuola del I Ciclo con un software di geometria dinamica

Il percorso, realizzato in una classe IV della scuola Primaria che già conosceva l’ambiente GeoGebra, è consistito in due lezioni: una da un’ora e mezza in laboratorio e l’altra di un’ora in aula. La proprietà da verificare riguardava la somma degli angoli interni di un poligono.

In laboratorio i bambini hanno lavorato in coppia in modo da favorire la cooperazione e lo scambio di idee. Ciascuna coppia ha ricevuto una scheda contenente le istruzioni necessarie a realizzare specifiche costruzioni e delle domande per stimolare l’osservazione e la formulazione di congetture.

Di seguito si riporta la scheda di lavoro e l'analisi delle osservazioni emerse. La scheda proposta è stata strutturata in modo che gli studenti ripetessero più volte le stesse procedure così da divenire consapevoli di quanto stavano effettuando e formulare proprie ipotesi da verificare.

Scheda di lavoro

Apri Geogebra

Disegna un triangolo, i suoi angoli interni e visualizzane la misura.

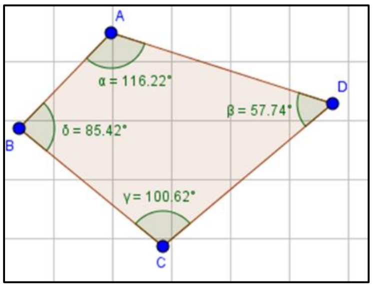
Quanto vale la loro somma? ______________________________

Completa la tabella:

Numero Lati Poligono	Nome Poligono	Somma angoli interni	Numero angoli piatti
3	Triangolo	180°	1

Disegna un quadrilatero, i suoi angoli interni e visualizzane la misura.

Quanto vale la loro somma? ______________________________

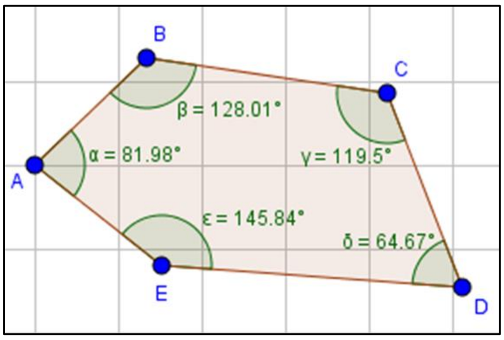


Completa la tabella:

Numero Lati Poligono	Nome Poligono	Somma angoli interni	Numero angoli piatti
3	Triangolo	180°	1
4	Quadrilatero	360	2

Disegna un pentagono, i suoi angoli interni e visualizzane la misura.

Quanto vale la loro somma? ______________________________



Completa la tabella:

Numero Lati Poligono	**Nome Poligono**	**Somma angoli interni**	**Numero angoli piatti**
3	Triangolo	180°	1
4	Quadrilatero	360	2
5	Pentagono	540	3

Adesso pensa tu.

Supponi di avere un esagono, secondo te a quanti angoli piatti corrisponde la somma degli angoli interni? ____

Completa la tabella:

Numero Lati Poligono	**Nome Poligono**	**Somma angoli interni**	**Numero angoli piatti**
3	Triangolo	180°	1
4	Quadrilatero	360	2
5	Pentagono	540	3
6	Esagono	720	4

Verificalo con Geogebra.

C'è un legame tra il numero dei lati del poligono ed il corrispondente numero degli angoli piatti che si formano? ____

Nella lezione in aula gli allievi, in uno scambio di opinioni mediati dall'insegnante, hanno discusso i risultati del loro lavoro, confrontandoli con quelli degli altri, verificando le diverse congetture. I bambini, hanno lavorato con molto entusiasmo e si sono mostrati molto propositivi nell'argomentare il proprio punto di vista riguardo al legame esistente tra il numero dei lati del poligono ed il corrispondente numero degli angoli piatti che si formano. Da un'analisi delle schede è emerso che tutti i gruppi avevano intuito il legame, quindi pur senza entrare in un formalismo rigoroso si sono divertiti ed hanno giocato a scoprire una proprietà.

4. Conclusioni

Il consolidamento della centralità dell'alunno, quale attore protagonista del proprio apprendimento, comporta che l'insegnamento della matematica deve privilegiare prima la costruzione diretta e poi l'analisi deduttiva. Ogni astrazione deve essere vissuta a partire prima dall'esperienza personale: il concreto deve venire prima dell'astratto, i concetti prima dei simboli. Un software di geometria dinamica quale Geogebra, opportunamente veicolato, consente agli allievi di congetturare, visualizzare e cogliere in maniera autonoma alcuni aspetti delle figure piane, oltre a stimolare curiosità, interesse ed entusiasmo sviluppandoo maggiore sicurezza nelle proprie capacità.

Bibliografia

D'Amore B, Manini M 1990, P*ercorsi, labirinti, mappe: esperienze protomatematiche nella scuola d'infanzia*, La Nuova Italia, 1990, p. 13

Oliviero G. 2000, *Geometria e Software Didattico,* Quaderni ed Atti pubblicati dal Ministero della Pubblica n.35*: Geometria e multimedialità. 5° Corso MPI-UMI in Didattica della Matematica per Docenti di Scuole Medie Superiori*, MPI - L.S. Vallisneri, Lucca, 2000, pag. 147.

Dewey J., 1961, "Scuola e Società", La Nuova Italia, Firenze

Modelli didattici innovativi per le competenze trasversali nell'insegnamento della Matematica

Vincenzo Iorfida

Università della Calabria
vincenzo.iorfida@unical.it

Abstract

Il concetto di "dimensione aggiunta" è un modello innovativo da utilizzare nell'insegnamento per competenze trasversali, nella didattica delle discipline scientifiche. La teoria dei complessi simpliciali nasce dalla necessità di classificare i molti spazi in topologia algebrica, argomento matematico di non facile trattazione. Tuttavia, alcune delle tecniche utilizzate principalmente nell'arte e nell'ingegneria per la rappresentazione possono essere applicate a contesti diversi per creare nuovi oggetti sempre più multidimensionali e complessi. Il fine ultimo è quello di consegnare agli studenti strumenti connessi all'analisi di fenomeni del mondo reale, in particolare del mondo fisico.

Parole chiave: Geometria algebrica, gravità discreta, arte.

1. Il ruolo della matematica

La consapevolezza che lo sviluppo delle discipline matematiche sia avvenuto in maniera parallela e, in alcuni casi, abbia anticipato un analogo sviluppo non solo della filosofia e della scienza ma anche del nostro modo di percepire, descrivere e rappresentare il mondo sensibile attraverso l'arte, ha ispirato l'argomento del presente lavoro.
Il passaggio dalla geometria euclidea del mondo greco alla geometria prospettiva del Rinascimento, alla geometria non euclidea del diciottesimo e del diciannovesimo secolo, alla geometria delle "forme topologiche" nel ventesimo secolo, deve essere letto come parallelo al passaggio dalla staticità dell'arte e dell'architettura antica alla giusta rappresentazione spaziale e alla perfezione delle opere rinascimentali, all'evoluzione delle forme artistiche nel diciottesimo secolo (divisionismo, espressionismo, impressionismo) fino alla completa rottura della simmetria nelle forme d'arte moderne e contemporanee.
Attualmente, la matematica assume un ruolo importante in tutte le forme d'arte, siano esse figurative, plastiche, visive, acustiche o costruttive. Teorie e metodi, anche sofisticati, dell'analisi e della geometria sono infatti utilizzati per generare arte e musica con l'ausilio di calcolatori e di dispositivi elettronici. Un ruolo particolare è ricoperto in questo campo dai metodi topologici moderni, basati sulla rinuncia alle figure predefinite e, di conseguenza, sul concetto di frattale, inteso come entità dotata di proprietà di autosimilarità.

2. La Matematica, Arte e Ingegneria.

La geometria topologica, altresì denominata come "la geometria del foglio di gomma", è una geometria che ammette le deformazioni elastiche delle figure ossia delle trasformazioni che avvengono attraverso un processo dinamico e continuo senza effetti di lacerazioni o strappi. È una geometria il cui concetto principe di equivalenza tra figure è per l'appunto quello della continuità.
È quindi svincolata da tutte quelle concezioni di metriche "rigide" appartenenti alla geometria Euclidea e Proiettiva a cui si è stati abituati per millenni.
Questa nuova geometria, in cui la forma e le dimensioni degli oggetti sono trascurabili, ha interessato molti studiosi, e non soltanto matematici, quale il biologo D'Arcy W. Thompson che l'ha utilizzata per studiare le trasformazioni delle forme organiche principalmente come risultati di trasformazioni geometriche. Tale studio è ripreso nel suo lavoro "Crescita e Forma" del 1917.
Ed anche l'artista Albrecht Dürer, secondo il quale alla base di ogni concezione artistica vi è sempre un'adeguata formazione teorica di Geometria, già utilizzava tali trasformazioni evidenziando il modo con cui queste riescono a modificare i caratteri del viso umano, secondo quanto riportato nel Trattato sulle Proporzioni (1528). Parimenti importanti sono il Trattato sulle geometrie (1525) e il Trattato sulle fortificazioni delle mura (1527).
Nel XVIII secolo, il matematico svizzero Leonhard Euler con la scoperta della formula $V - S + F = 2$ mette in relazione il numero dei vertici delle facce e degli spigoli di un poliedro convesso dando inizio allo studio della topologia (analysis situs).
Il XIX secolo fu un periodo importante per lo studio e l'evoluzione della geometria. Il matematico tedesco C. F. Gauss introduce una nuova branca della geometria, la cosiddetta geometria differenziale, mentre B. Riemann, oltre a dare un contributo fondamentale nello studio delle geometrie non euclidee, introduce in campo topologico le superfici riemanniane, anticipando il concetto di metrica e di tensore.

Questi concetti furono ripresi ed utilizzati successivamente da A. Enstein per la descrizione dello spazio in relatività generale.
Ma si deve al matematico francese J. H. Poincaré l'invenzione della topologia algebrica che, ancora oggi, è una delle branche più attive della matematica; per questo è ritenuto il padre fondatore della topologia moderna.
I tentativi di classificare le molteplici ed altresì note strutture topologiche hanno consentito la nascita della teoria dei complessi simpliciali.
I complessi simpliciali permettono la costruzione di uno spazio topologico generato da forme elementari che man mano vengono opportunamente assemblate a partire da semplici elementi.
L'utilizzo di tale tecnica permette di creare nuovi complessi simpliciali raffiguranti forme sempre più articolate e di dimensione maggiore.
Esiste un forte legame tra (simpliciali) politopi e complessi simpliciali. Un complesso simpliciale è un raggruppamento ordinato di simplessi che si intersecano fra loro solo su facce comuni. (Fig.1)

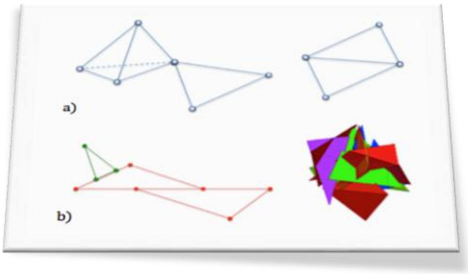


Fig. 1 - Esempi di complessi simpliciali (a) ed esempi di una collezione di simplessi, che non comprendono un complesso simpliciale (b) costruiti con Mathematica Wolfram ©.

Il più elementare complesso simpliciale è rappresentato nel piano da un triangolo mentre nello spazio a tre dimensioni da un tetraedro, in uno spazio quadridimensionale da un ipertetraedro e così via. (*Fig.2*)

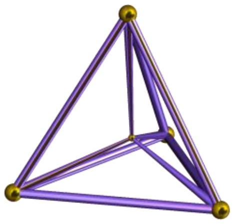


Fig. 2 – Ipertetraedro.

Un complesso simpliciale definisce quindi uno spazio topologico che, a sua volta, può essere rappresentato da complessi simpliciali differenti tra loro. Ma non tutti gli spazi topologici possono essere rappresentati come complessi simpliciali. Una tecnica per un'approssimazione discreta di una superficie è rappresentata dall'utilizzo delle mesch poligonali la cui elaborazione è dovuta ad algoritmi geometrici con un alto grado di computazionalità. (Fig.3)
Parametrizzare una mesh significa trovare una funzione capace di mappare i vertici della mesh in un dominio planare.

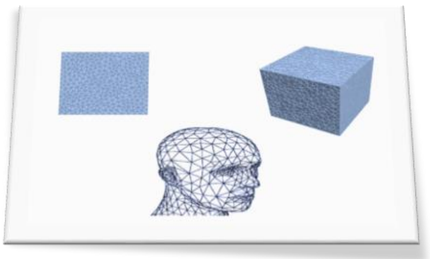


Fig. 3 - Esempi di applicazione di mesh costruiti con Mathematica Wolfram ©.

Nel caso in cui un gruppo di triangoli ha un vertice in comune si parlerà di fan. Mentre un gruppo di triangoli con un lato in comune verrà indicato come strip. (Fig.4)

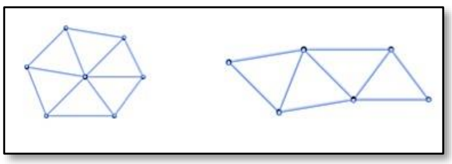


Fig. 4 - Esempi di fan e strip

Juan G. Escudero, come altri artisti, nella sua opera “Simpliciale” del 2013 ha inteso rappresentare alcuni motivi di forme simpliciali in modo artistico che richiamano gli aspetti teorici presentati sui complessi simpliciali. (*Figg.5 e 6*)

Fig. 5 - J. G. Escudero, Simplicial, 2013.

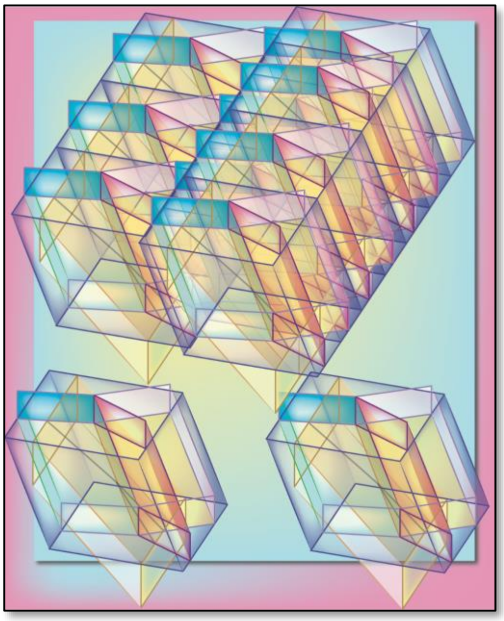


Fig. 6 - University of South Alabama J. Scott Carter.

3. Modelli Matematici nella Fisica e nell’Ingegneria.

Il lavoro si basa sull’idea che l’impostazione soggettiva del calcolo delle probabilità di In base a quanto detto precedentemente, i triangoli e i tetraedri sono rispettivamente i poligoni ed i poliedri più semplici.
Il complesso da essi formato prende il nome di complesso simpliciale. I triangoli e i tetraedri sono i simplessi rispettivamente nello spazio bidimensionale e tridimensionale.
L’applicazione dei complessi simpliciali trova utilizzo anche nell’ambito del riconoscimento di un oggetto o forma o meglio struttura a partire da quella che viene detta “nuvola di punti” dalla quale è possibile indagare le proprietà topologiche. Tale tecnica consiste nell’associare alla nuvola di punti un complesso simpliciale che dia una buona rappresentazione dell’insieme dei punti di partenza.
In fisica, la tecnica di approssimazione simpliciale è stata utilizzata anche al fine di semplificare degli aspetti della relatività generale.
In particolare, il calcolo delle soluzioni dell’equazione di campo di Einstein. Questa tecnica dovuta a T. Regge, detta appunto calcolo di Regge, consiste nel trattare una porzione dello spaziotempo approssimandolo mediante una triangolazione in simplessi.
Tale approssimazione si può estenderla alla curvatura dello spaziotempo.
Il modello di Regge è stato tuttavia utilizzato in numerose applicazioni, in particolare in fisica teorica nello studio della gravità quantica. *(Fig.7)*

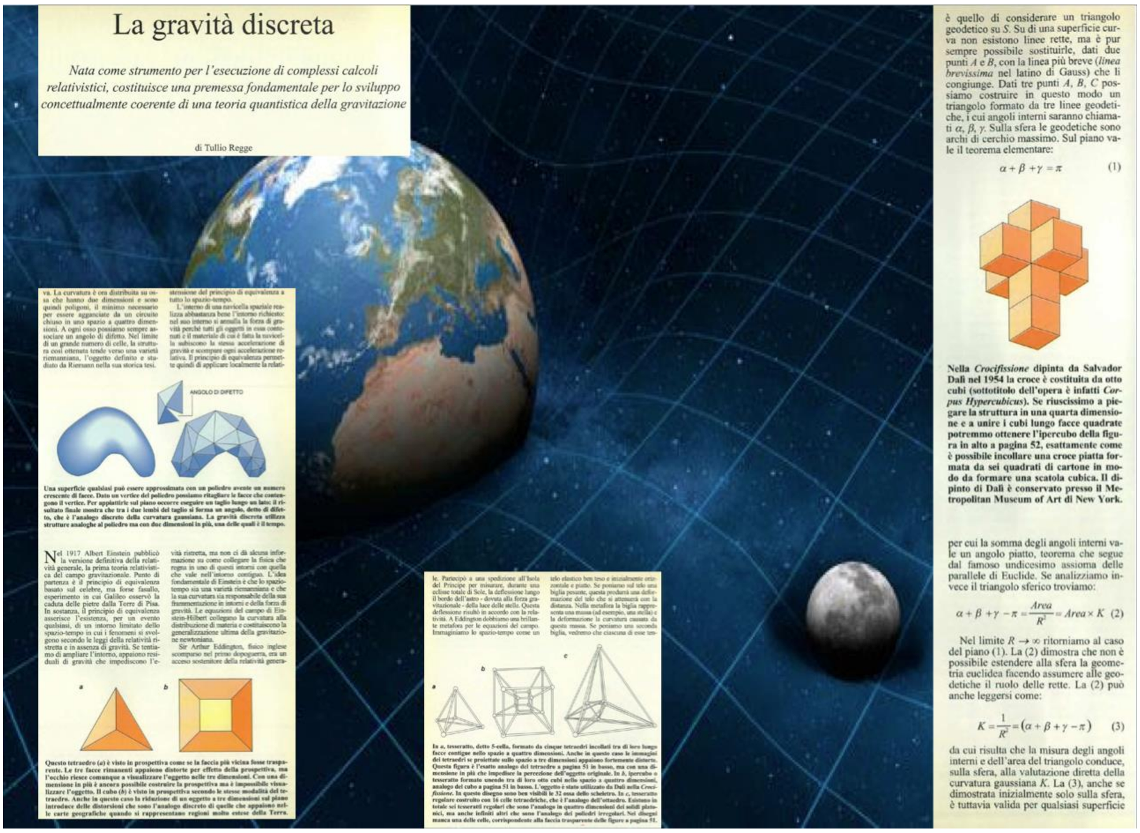


Fig. 7 - La gravità discreta di T.Regge immagine creata da V.Iorfida ©

In architettura molte opere strutturali richiamano la struttura dei complessi simpliciali, alcune di seguito riportate:

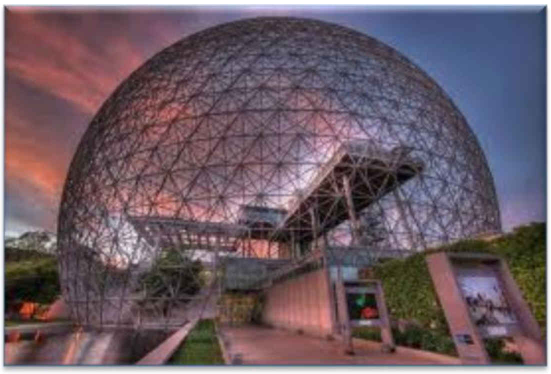


Fig. 7 - Biosphere, Montreal 1967.

Fig. 8 - Louvre 1967.by V.Iorfida©

Fig. 9 - Museo Salvador Dalì, Florida Progettato dall'architetto Yann Weymouth di HOK.http://thedali.org/home.phpCopyright Albini & Fontanot S.p.a.

Fig. 10 - Basque Health Department Headquarters di Bilbao, progettato dagli architetti Coll-Barreu. http://no-miedo.blogspot.it

4. Conclusione

In conclusione è possibile affermare che nell'architettura contemporanea la geometria afferente ai complessi simpliciali è in fase di ricerca. Inoltre, la tecnica di approssimazione è utilizzata per la riscoperta di siti archeologici inesplorati nonché nello studio dell'architettura spaziale.
L'argomento delle triangolazioni degli insiemi di punti lattice è stato da me utilizzato al fine di ottenere delle interessanti e nuove forme (*Figg.12 e 13)*.
La prima è stata ottenuta con l'applicazione della triangolazione lessicografica ad un insieme di punti lattice della superficie cubica di Veronese in $\mathbb{P}^9$

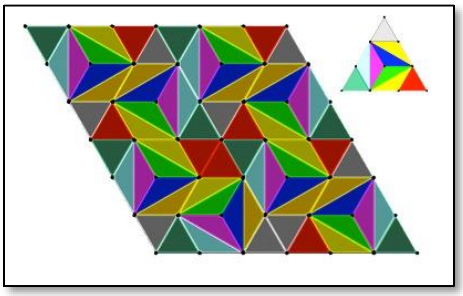


Fig. 11 - Triangolazione lessicografica, V. Iorfida ©.

Successivamente, mediante l'ordinamento lessicografico inverso del grado ho ottenuto la triangolazione lessicografica che ho rappresentato nei seguenti oggetti geometrici:

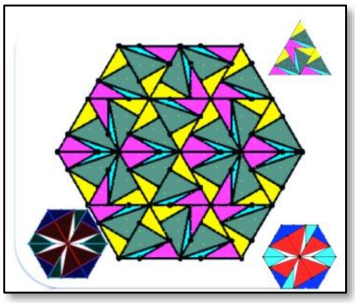


Fig. 12 - Triangolazione lessicografica inversa, V. Iorfida ©.

Questa figura sembra più interessante della precedente poiché non è scontata in quanto da come si può verificare, alcuni punti non sono vertici di triangoli.
La combinazione delle parti delle (*Fig.11, 12)* permettono la trasformazione in molte forme inedite. Le precedenti figure potrebbero apparire come elementi decorativi di strutture architettoniche in vetro, ceramica o altri materiali somiglianti ai seguenti oggetti, se vengono colorate. (*Fig.13*)

Fig. 13 - Cuscino in patchwork e piastrella in marmo.

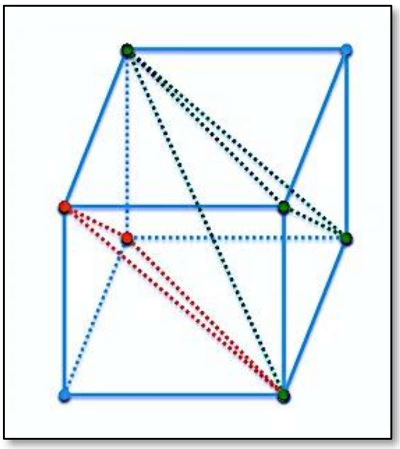


Fig. 14 - Triangolazione lessicografica del 3- cubo.

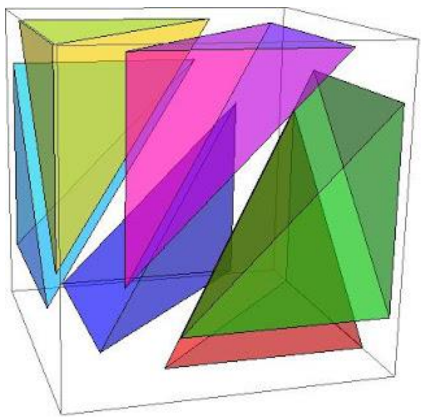


Fig. 15 - Triangolazione 3- cubo costruito con Mathematica Wolfram ©.

Le applicazioni computazionali nelle scienze e nei vari campi di ricerca affrontano lo studio di problemi geometrici di notevole complessità dovuta principalmente all'incremento dei dati necessari per l'elaborazione e l'ottimizzazione delle forme, al fine di rappresentarle con un'ottima approssimazione, in modo da renderle efficaci nelle studio sperimentale ed essere utilizzate nelle tecniche di simulazione che trovano applicazione in moltissimi settori di ricerca scientifica come nel campo aerospaziale, in medicina, nelle nanoteconologie ed altre ancora.

Bibliografia

Ablowitz, M.J., Fokas, A.S., (2003). Complex Variables - Introduction and Application, Cambridge University Press.

Baltrušaitis, J., (1978). Anamorfosi o Thaumaturgus opticus. , 3ª Adelphi.
Cohn, H., (1967). *Conformal Mapping on Riemann Surfaces*. McGraw-Hill.

Di Francesco, P., Mathieu, P., Sénéchal, D., (1997). *Conformal Field Theory*, Springer.

Iorfida,V., (2015). *Simplicial Simplicial Complex present in Art and Arts facilities* APLIMAT - Journal of Applied Mathematics, pp. (406-416).

Iorfida,V., Francaviglia, M., et al., (2011). *Fractal Aesthetics in Geometrical Art Forms.* Bridges Coimbra (Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture), Conference Proceedings; R. Sarhangi & C. Sequin Ed.s, with P. Machado as co- Editor; Tessellation Publishing (Phoenix, AZ, USA - 467-470.

Iorfida,V., Francaviglia, et al., (2012). *Communicating through the geometry of polytopes.* (Bratislava) APLIMAT - Journal of Applied Mathematics, 5 (1), pp. 85-90.

Peskin, M. E., Schroeder, D. V., (1995) *An introduction to quantum field theory*, ABP.
Toffanello, D., (1995). *Anamorfosi l'immagine improvvisa*. Città Studi.

Il saper vedere in matematica con una buona protesi è più facile: il gioco del domino e i ponti di Königsberg

Domenico Lenzi

Università del Salento, Dipartimento di Matematica e Fisica, Via per Arnesano, 73100 Lecce
domenico.lenzi@unisalento.it

Abstract

Agli inizi del 18° secolo gli abitanti di Königsberg [1] (l'odierna Kaliningrad, situata nella Prussia del nord, presso il mar Baltico) avevano un problema semplice da enunciare, che però non riuscivano a risolvere. La città è attraversata dal fiume *Pregel* e sorge in parte su due isole, oltre le quali il fiume si getta in mare. A quei tempi le isole e le due sponde del fiume erano collegate con sette ponti, come si può rilevare in Fig. 1 e nello schizzo di Fig. 2, che lo stesso Eulero fece a suo tempo (cf. Euler, 1736-1923; Lenzi, 2003). Ebbene, gli abitanti di Königsberg si domandavano se fosse possibile compiere una passeggiata (tecnicamente, un ***cammino***) lungo quei ponti in modo tale da percorrerli una volta soltanto (***cammino semplice***) senza tralasciarne alcuno (***cammino completo***). Eulero, introducendo la teoria dei grafi, provò che il problema aveva risposta negativa, dando una condizione necessaria di risolubilità per problemi di quel tipo, che nel caso di Königsberg non è soddisfatta.

Noi qui presentiamo una proposta concreta per semplificare la discussione sui ponti di Königsberg usando le tessere del gioco del *domino*. Qualche anno fa la proposta è stata da noi presentata con successo nella V[a] classe di una scuola primaria di Surbo – in provincia di Lecce – ed è stata pubblicata sul giornalino dell'Istituto.

La proposta si basa sul fatto che ogni ponte della città è rappresentato con una tessera del *domino*. Perciò, se si immagina di fare una passeggiata semplice lungo i ponti di Königsberg, con la fantasia si può immaginare di allineare i ponti l'uno dopo l'altro dopo averli percorsi. E anche se ciò è impossibile, si possono allineare l'una dopo l'altra le tessere che corrispondono ai vari ponti percorsi col pensiero.

Per la discussione del problema di Königsberg's sarà sufficiente la sola conoscenza di proprietà elementari dei numeri pari e dei numeri dispari.

Parole chiave: Immaginazione, intuizione matematica, Königsberg, grafi.

[1] In Fig. 1è riportata una vecchia mappa della città in cui sono segnalati i sette ponti.

1. Introduzione

Negli anni ‘70 una ventata di rinnovamento investì l’insegnamento della matematica. Molti ricorderanno gli entusiasmi che la Teoria degli Insiemi, la cosiddetta ***insiemistica***, riuscì ad accendere allora. Purtroppo, un suo uso improvvido in chiave didattica fece sì che tutto finisse in una bolla di sapone. E questo importante settore della matematica fu di fatto bandito dall’insegnamento.
Però lo stato di degrado in cui ora versa l’apprendimento di questa disciplina è sotto gli occhi di tutti. È quindi essenziale riesaminare le tematiche proposte ai nostri ragazzi – anche recuperando alcuni argomenti di un tempo, troppo precipitosamente cancellati dall’insegnamento – avendo come primario obbiettivo quello di educare alla razionalità. Diversamente, come una volta ebbe a dire Umberto Eco, il prossimo stadio verso cui l’umanità si evolverà sarà quello dell’***Homo stupidus stupidus***.
Tra i temi da presentare agli studenti quello della teoria dei grafi ha una notevole importanza, non solo da un punto di vista applicativo, ma anche come buon supporto al ragionamento matematico. Noi qui illustreremo quelli che furono i primi passi in questa disciplina, presentando il classico problema sulla percorribilità dei ponti di Königsberg, che Eulero dimostrò essere irrisolubile.
Per un non matematico la facile dimostrazione di Eulero ha il difetto di essere condotta in termini non sufficientemente concreti e di conseguenza poco comprensibili. Ed è per questo che a Königsberg ci sono persone che – non del tutto convinte del risultato di Eulero – cercano ancora di fare quel percorso impossibile [2]. Il che è indice preoccupante del fatto che anche gli aspetti più elementari della matematica spesso hanno difficoltà a diventare patrimonio comune, non solo in Italia.
Noi presenteremo, tra l’altro, una semplificazione del classico problema della percorribilità dei ponti di Königsberg, facendo ricorso al gioco del domino. La proposta qualche anno fa è stata presentata in una V^a classe di una scuola primaria in provincia di Lecce e ha riscosso un successo tale da essere riportata sul giornalino dell’Istituto scolastico.

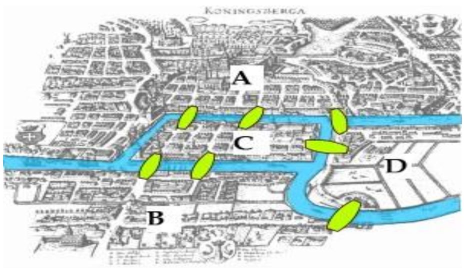


Fig. 1

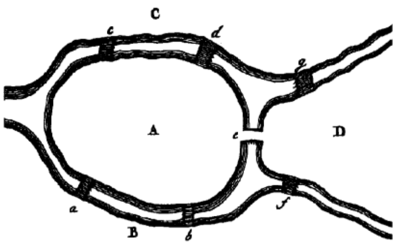


Fig. 2

[2] La notizia è stata data in una lettera pubblicata da “Il Corriere della Sera” nel 2007, anno in cui sono stati celebrati i trecento anni dalla nascita di Eulero.

2. Il problema dei ponti di Königsberg

Eulero, introducendo di fatto la teoria dei grafi, provò che il problema aveva risposta negativa, dando una condizione necessaria di risolubilità per problemi di quel tipo, che nel caso di Königsberg non è soddisfatta.
Il problema si può affrontare rappresentando le quattro zone della città su cui arrivavano i sette ponti con dei punti chiamati ***nodi*** (o ***vertici***); si veda Fig. 3. Lì ciascun ponte è rappresentato da una linea, chiamata ***spigolo*** (o ***lato***), che congiunge i due nodi che denotano le due zone collegate dal ponte considerato; mentre i quattro nodi sono indicati con i numeri **1**, **2**, **3** e **4** [3], che perciò vanno a rappresentare anche le quattro zone della città (cioè, le due isole e le due sponde).
Agli effetti della discussione sarà opportuno tener presente che ogni spigolo ha due parti terminali. Facciamo presente che si possono considerare anche grafi in cui qualche spigolo (detto ***cappio***) ha le parti terminali che arrivano in uno stesso nodo.
Gli schemi descritti prendono il nome di ***grafi*** non orientati, per distinguerli da quelli in cui su ogni spigolo si fissa a priori un verso di percorrenza. A essi si trasferiscono immediatamente le nozioni di *cammino* e di *cammino semplice* [4] (cf. Berge, p. 8), intesi come percorsi lungo gli spigoli, da affrontare l'uno dopo l'altro senza "salti" (nel caso di una rappresentazione grafica, spigoli da tracciare con un solo tratto di penna).
Il numero delle parti terminali degli spigoli che arrivano in un dato nodo e detto ***grado*** di quel nodo (o della zona corrispondente).

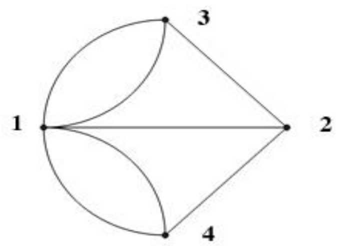


Fig. 3

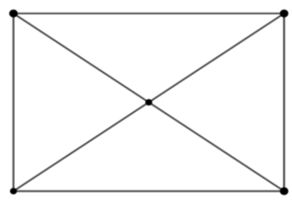


Fig. 4

Si chiama ***grado totale*** di un grafo la somma dei gradi dei vari nodi. Ovviamente, il grado totale è dato dal doppio degli spigoli, poiché ogni spigolo – avendo due parti terminali, contribuisce al grado totale con la quantità due.
È chiaro che il problema di Königsberg, si traduce in quello di effettuare un cammino semplice e completo lungo tutti i lati del grafo di Fig. 3. Ebbene, Eulero provò che:
b) *se per un grafo **G** esiste un cammino semplice e completo, allora **G** non può avere più di due nodi di grado dispari*.

---

[3] Si noti che i numeri **1** e **2** corrispondono rispettivamente all'isola A e all'isola D di Fig. 2, mentre i numeri **3** e **4** corrispondono ciascuno a una sponda. Noi abbiamo sostituito le lettere con dei numeri affinché fosse più comprensibile la trasposizione dai lati del grafo alle tessere del *domino*.
[4] Da non confondere con un cammino ***elementare***, in cui è ciascun nodo a non dover essere attraversato più di una volta. Un cammino elementare è anche semplice, poiché se un nodo non è attraversato più di una volta, nemmeno gli spigoli che terminano su di esso sono attraversati più di una volta.

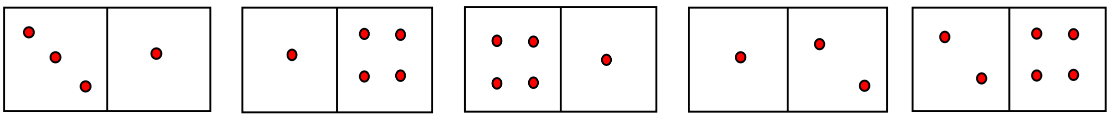
Perciò quel tipo di cammino non si può effettuare nemmeno nel caso del grafo di fig. 4, ben noto agli appassionati di quiz. Infatti esso ha il solo nodo centrale di grado pari, mentre gli altri quattro nodi hanno tutti grado dispari 3 (>2).

3. Il "domino" come utile protesi

Per provare che la condizione data da Eulero è vera, intanto è necessario immaginarsi come un cammino si può svolgere, anche nel caso che non impegni tutti gli spigoli. Ma ciò comporta un buon uso della propria memoria di lavoro (la cosiddetta "memoria a breve termine"), al cui difetto sono legate diverse delle difficoltà che si incontrano in matematica, le quali possono pregiudicare "il saper vedere".
Nel caso che stiamo trattando la difficoltà può essere superata tracciando l'una dopo l'altra – come facciamo qui sotto – delle linee che rappresentano gli spigoli del grafo a cui si riferisce il cammino, ai cui estremi vengono collocati dei numeri (o altri simboli) che rappresentano i nodi del grafo toccati dal cammino. Da un punto di vista stret-tamente matematico, il cammino si rappresenta così: (3, 1) (1, 4) (4, 1) (1, 2) (2, 4).

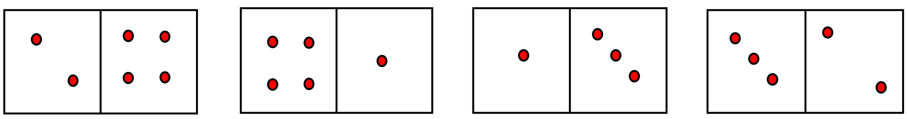
3 _________ 1   1 _________ 4   4 _________ 1   1 _________ 2   2 _________ 4

Ebbene, il *domino* può dare maggior concretezza a quanto è stato detto. Basta infatti, per ogni spigolo del cammino, allineare via via l'una dopo l'altra – come viene fatto qui sotto – le tessere del gioco che riportano i numeri (rappresentati da puntini) nello stesso ordine in cui questi si susseguono nell'allineamento presentato precedentemente.



In entrambe le rappresentazioni, come si farà notare agli studenti, si vede che all'in-terno dell'allineamento ogni numero si ripete due volte [come nel gioco del *domino*] in quanto esso si riferisce a un nodo toccato dalle parti terminali di due spigoli (o ponti) successivi del cammino rappresentato. Negli schieramenti sovrastanti il numero **4** ha una coppia di presenze all'interno e una presenza terminale; mentre il numero **3** ha soltanto una presenza terminale. Perciò **4** e **3**, avendo esattamente una presenza terminale, hanno entrambi un numero dispari di presenze. Invece l'**1** e il **2** hanno solo una coppia di presenze interne, onde hanno un numero pari di presenze.
Qui sotto abbiamo una doppia descrizione di un altro cammino.

2 _________ 4   4 _________ 1   1 _________ 3   3 _________ 2



In questo cammino ognuno dei numeri è presente due volte; anche il **2**, per il fatto di essere presente sia all'inizio che alla fine del cammino. È chiaro che il cammino sarebbe potuto iniziare dalla terza tessera (linea **1**________**3**), seguita dalla quarta, per poi proseguire con la prima tessera, dato che l'ultimo numero del percorso coincide col primo.

Nota Bene. In definitiva, si può dire che se un nodo ***a*** possiede grado pari, allora esso può essere presente in un estremo del cammino se e solo se esso è presente anche nell'altro estremo, dal momento che la sua eventuale presenza all'interno dà un contributo pari. Invece se ***a*** possiede grado dispari, esso deve essere presente anche in un estremo del cammino, ma in uno soltanto.

Una dimostrazione per assurdo. Ora supponiamo, per assurdo, che per il grafo di Fig. 3 il cammino semplice e completo [che corrisponde alla famosa passeggiata a Königsberg] si possa fare. Allora a esso corrisponde un allineamento di sette tessere – una per ogni spigolo [o ponte] – l'una dopo l'altra secondo le regole del *domino*. Inoltre ogni numero che denomina un nodo – corrispondendo a un terminale di spigolo – deve essere presente nell'allineamento un numero di volte pari al grado del nodo stesso.
Ebbene, dato che i terminali del cammino sono soltanto due, poiché il grafo di Königsberg ha più di due nodi di grado dispari, allora il cammino semplice e completo non si può fare.
Naturalmente, il discorso si estende a grafi arbitrari che abbiano nodi di grado dispari in numero maggiore di 2.

4. Appendice

Ovviamente, affinché su di un grafo ***G*** possa svolgersi un cammino semplice e completo ***C***, preliminarmente deve sussistere la seguente condizione: **a)** *gli spigoli di **G** debbono essere inseriti a due a due in un cammino semplice* <u>***C***</u>.

Nota Bene. Al variare dei due spigoli, <u>***C***</u> può anche variare. Ma se ***G*** ha un cammino semplice e completo ***C***, ***C*** svolge il ruolo di <u>***C***</u> per ogni coppia di spigoli di ***G***.

Quando vale la precedente condizione **a)**, allora si dice che ***G*** è un grafo ***connesso per spigoli***.
Si può provare che se per un grafo ***G*** vale sia la condizione **a)** [connessione per spigoli] sia la precedente condizione **b)** di Eulero [cioè, ***G*** ha al più due nodi di grado dispari], allora il cammino semplice e completo si può svolgere. In definitiva, la condizione data da **a)** e **b)** congiunte [anche se spesso la **a)** si sottintende] è non solo necessaria, ma anche sufficiente.
Eulero nel suo articolo citato precedentemente credette di aver dimostrato anche la sufficienza della condizione. Però nella sua dimostrazione c'è qualche imprecisione. Solo nel 1873 C. Hierholzer – nel corso di una conferenza – presentò una dimostrazione corretta della sufficienza della condizione, che però fu pubblicata postuma.

Bibliografia

Berge C., *Graphes et hypergaphes*, Dunod, Paris (1970).

Biggs N. L., Lloyd E. K., Wilson R. J. *Graph Theory 1736-1936*, Clarendon Press, Oxford (1976).

Euler L. *Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis*, Comment. Acad. Sc. Petrop., t. 8 (1736), pp. 128-140 (reprinted in the following paper).

Euler L. *Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentis* (a reprint of paper above). Commentationes Algebraicae, Teubner, Lipsia, Berlin (edidit L. G. Du Pasquier) (1923).

Hierholzer C. *Über die die Möglichkeit, einen linienzug ohne wiederholung und ohne unterbrechnung zu umfahren*, Math. Annalen **6**, pp. 30-32 (translated in pp. 11-12 of [Bi]) (1873).

Lenzi D. *Eulero e I ponti di Königsberg* … Lettera matematica pristem 49 (2003).

Lenzi D. *I ponti di Königsberg e la nascita della teoria dei grafi*; Educaton 2.0 (2010) [articolo non più reperibile in rete].
http://www.educationduepuntozero.it/Temi/Didattica_e_apprendimento/didattica/2010/04/16/img/LENZI_i_ponti.pdf

Premio Aldo Morelli

Elisa Savarese

Presidente Mathesis Castellammare di Stabia
elisa.elsava2@gmail.com

Il concorso di gara di matematica “Premio Aldo Morelli” nasce dal desiderio di consegnare alle generazioni future l’insegnamento di un indimenticabile Maestro che ha fatto della Matematica uno strumento per arrivare al cuore dei giovani: diceva sempre “la bravura di un docente si misura dalla capacità di accompagnare gli allievi meno bravi ad apprendere concetti che sembrano difficili; i bravi si salvano da soli. “È il Professore Aldo Morelli.

Era il primo ottobre del 1959; al Liceo Classico” Publio Virgilio Marone di Meta di Sorrento arrivava il docente di Matematica e Fisica, nominato dal Provveditorato agli Studi, di ruolo, il Professore Aldo Morelli. La notizia passa di bocca in bocca e alimenta preoccupazioni e speranze: preoccupazione che arrivasse un docente severo ed esigente dal momento che per molti la scelta del Liceo Classico era fondata sul presupposto di avere poca propensione per la Matematica e speranza che il docente fosse comprensivo e tollerante. Nell’immaginazione degli alunni del Liceo “Marone” prendeva forma un’idea di curiosità ed attesa. Il Liceo da poco si era staccato dal liceo di Castellammare di Stabia ed era frequentato da ragazzi e ragazze semplici, volenterosi, studiosi e proprio per questo timorosi nell’attesa di conoscere il nuovo docente. Cercavamo di immaginarlo ma ogni tentativo naufragava nel disordine delle figure che si sovrapponevano.

Finalmente entra nella classe del II liceo: Serio, compito, impenetrabile, gentile, un sorriso appena accennato; senza troppe parole entra in argomento per invitarci ad essere attenti alle spiegazioni per consentire alla classe di progredire nell’apprendimento perché la velocità della classe è la velocità del più debole.

A molti di noi quelle parole apparvero come un messaggio da comprendere fino in fondo perché molto bene non avevamo capito che cosa fosse la velocità della classe.

Nel tempo tutto fu più chiaro: la sua attenzione era sempre rivolta verso chi alzando la mano chiedeva ulteriori chiarimenti. Non si stancava mai di ripetere e di verificare, poi, che i dubbi fossero stati dipanati. Era sempre presente a scuola. Non arrivava mai in ritardo. Alla prima ora era sempre Lui che aspettava noi. Ci accoglieva con il suo sorriso appena accennato e ci faceva percepire che era on noi. Diventò il nostro amico del cuore, dall’apparenza burbera ma sul quale potevi contare in ogni momento. Le ore di lezione erano pochissime, volavano, ma per il Prof. Aldo Morelli ogni occasione era buona per puntualizzare qualche concetto. Nelle ore libere era sempre in sala professori, disponibile ad ascoltarci. I progressi erano evidenti per tutti; eravamo tutti bravi perché eravamo tutti alla stessa velocità: la velocità della classe. Molti di noi, dopo la maturità, scegliemmo di iscriverci a Facoltà Scientifiche e non abbiamo fallito. Tre ci siamo laureati in Matematica e dalla cattedra abbiamo sperimentato che cosa volesse dire il Professore quando parlava di docenti che devono accompagnare gli allievi meno bravi. Lo abbiamo fatto e abbiamo raccolto soddisfazioni. Abbiamo avuto poi la fortuna di incontrarlo all’Università e di beneficiare ancora dei suoi insegnamenti e alla Mathesis. Ancora oggi risuonano nella

mia mente le sue chiacchierate su argomenti di Geometria, di Algebra e se chiudo gli occhi mi sembra di sentirlo vicino, come se il tempo non fosse trascorso.
Figlia di operai, lavoratori ma senza titoli di studio, sono diventata docente e come tale ho sentito il bisogno di raccogliere ancora qualche suggerimento dal mio Professore di Matematica che in quella II liceo del 1959 operò il miracolo di far innamorare molti alunni di un liceo classico di insegnamenti scientifici e l'anno successivo seppe coltivare l'entusiasmo per i successi ottenuti, motivandoci allo studio: mi ripeteva sempre " i bravi si salvano da soli, presta attenzione ai più deboli, apprezza i progressi anche i più piccoli, incoraggiali a perseverare e vedrai miracoli."
Il "Premio Aldo Morelli" nasce da questo vissuto: non vuole premiare le eccellenze in senso stretto, ma vuole premiare chi si mette in gioco, chi sente l'entusiasmo del confronto, chi percepisce che sta apprendendo e quindi sta crescendo. Per questo motivo premia anche il migliore di ogni istituto: per incoraggiare, stimolare, accompagnare nella crescita culturale soprattutto i meno bravi per farli diventare bravissimi.
L'auspicio è che per tanti ragazzi, come noi del 1959, possa delinearsi un futuro di successi e conquiste culturali perché si innamorano della Matematica e danno una svolta alla loro vita, comprendono che la cultura è uno strumento indispensabile per tracciarsi un sentiero nella talvolta impenetrabile foresta lavorativa e il Professore Aldo Morelli, guardandoci da Lassù, possa essere contento di noi che abbiamo fatto tesoro dei suoi insegnamenti e sorridere.

VIII Edizione del "Premio Aldo Morelli" 2013
Consegna dei Premi

Serena Morelli

Seconda Università di Napoli
serenami@libero.it

Cari ragazzi, vorrei ringraziarvi in primo luogo per la vostra partecipazione numerosa ed entusiasta a questa bella manifestazione che i colleghi di mio padre hanno avuto l'idea di organizzare, che ormai si è consolidata nel corso degli anni ed è giunta alla dodicesima edizione.

Io non sono una matematica, ma ho aderito con piacere all'invito di consegnarvi i premi perché credo molto nell'iniziativa e condivido da sempre l'importanza che una imponente scuola di pedagoghi, e mio padre con loro, ha dato all'apprendimento attraverso il gioco. Da questo punto di vista il valore formativo delle gare è da prendere in considerazione da parte di tutti, anche coloro che non sono propriamente interessati alla materia e non sentono di avere spiccate doti matematiche.

Mio padre era uno studioso aperto e si avvicinava con piacere, sempre con animo incuriosito, a temi e problemi a volte lontani dai suoi interessi matematici. Si divertiva a scoprire cose nuove e cercare spunti originali di riflessione anche in letture di opere apparentemente noiose e prive di fondamenti scientifici.

Tra le tante cose che mi ha insegnato e che facevano parte dei principi del suo insegnamento c'era la seria considerazione con la quale guardava agli errori. Errori che ci aiutano a crescere e che nella scienza servono per scoprire nuovi paradigmi. Uno dei principali insegnamenti è stato vedere con quanta ironia e leggerezza si divertiva a cercare con me le fonti di un trattato sui terremoti del XVI secolo, nel quale venivano descritte le ipotesi sulle cause dei terremoti che oggi fanno ridere per loro inconsistenza: la terra si muove perché sta sull'acqua; il terremoto fa seguito al martirio di un cristiano; la terra trema se spinta da un vento e ancora, l'ipotesi più accreditata dagli scienziati di allora, il terremoto proviene da un vento sotterraneo che cerca di fuoriuscire, così come affermava Aristotele, che restò per tutta l'età moderna il più accreditato punto di riferimento teorico.

Racconto questa sua attitudine perché è stata per me, che ero riluttante ad affrontare temi di studio che mi erano stati imposti, una indimenticabile lezione. Tutti noi sappiamo quanto sia frustrante e deprimente imbattersi negli errori propri e altrui, e quanto sia controproducente avere un atteggiamento pieno di pregiudizi nei confronti degli sbagli interpretativi, metodologici, o anche più semplicemente di calcolo, che si fanno. Sapete quanto da tempo si discute sulla valenza positiva degli errori nella didattica tanto quanto nella ricerca. E se vi voglio ricordare questo aspetto, oggi, è perché le gare matematiche cui avete partecipato costituiscono proprio, da un altro punto di vista, un importante tassello complementare di una didattica che punti sulla crescita degli allievi attraverso metodi che non siano rigidamente persecutori e gratuitamente seriosi e che al contrario ci aiutino a riflettere su quanto sia fecondo avere un'attitudine giocosa e aperta quando si affrontano i problemi della scienza.

La seconda cosa che vorrei dire, nel consegnarvi questi premi, è che le gare matematiche sono importanti per tutti, non solo per chi vuole intraprendere degli studi di natura scientifica, perché consentono di sviluppare un'attitudine alla riflessione e all'indagine critica che è un aspetto determinante e decisivo per la crescita di ognuno di noi. Troppo spesso nel lavoro che svolgo con i miei allievi, che non sono allievi di scuola, né aspiranti matematici, rilevo con sempre maggiore inquietudine un sostanziale disinteresse per le cose che fanno e un'assenza di desiderio di indagare, di scoprire, di capire, di esercitare le proprie capacità critiche in tutti i campi nei quali si muovono, dello studio e della vita. Questa scarsa attitudine alla riflessione critica ha subito con internet una drammatica accelerazione, perché troppo spesso ci si appiattisce su quello che si legge con lo spirito acritico di chi si trova di fronte ad una inconfutabile verità. Molto spesso i miei allievi finiscono per vanificare il valore euristico della ricerca e le numerose potenzialità della rete. Fonte di apertura al mondo, di conoscenza democratica e di grandi possibilità di crescita personale, questo straordinario strumento sta rischiando sempre più spesso di diventare un boomerang che invece di produrre consapevolezza critica e di sviluppare maggiori conoscenze, si trasforma in un mezzo d'imbarbarimento intellettuale e facilita la ricezione passiva di informazioni erronee. Molto spesso le ricerche che gli allievi fanno si limitano, ad esempio, a leggere e copiare Wikipedia e a dare per certe notizie le informazioni che passano attraverso il mezzo informatico. Da questo punto di vista le gare cui avete partecipato costituiscono un importante tassello per correggere un atteggiamento generalmente passivo di fronte alla massa di informazioni che passa ogni giorno davanti ai nostri occhi attraverso i mezzi di telecomunicazione, la scuola e la famiglia. Esse infatti possono contribuire a fare scoprire il gusto della ricerca, della riflessione e della fiducia in noi stessi, che ci consentono di scoprire nuove connessioni e di sviluppare un pensiero più consapevole ed idoneo ad interpretare la complessità della nostra realtà.

Sono cose che già avete sentito senza dubbio e che avete appreso a scuola dallo studio del pensiero filosofico e scientifico dei greci e degli scienziati dell'Occidente medievale e moderno, che nell'*experimentum*, nelle domande cioè da porre alla natura in un linguaggio specialistico e matematico, vedevano le origini del progresso scientifico.

D'altro canto moltissimo è stato detto sull'importanza dell'apprendimento attraverso il gioco e sulla fecondità degli approcci ludici in tutti i campi. Ma ci tengo a ribadire, io che non sono matematica, che è soprattutto il gioco matematico che può contribuire ad affinare quelle capacità logico-deduttive ed intuitive delle quali c'è bisogno in qualsiasi campo ci si voglia cimentare; perché è un mondo matematico quello nel quale viviamo, un mondo nel quale sono immerse anche le attitudini più creative. Mio padre si divertiva a cercare le simmetrie nelle cattedrali e nelle opere d'arte ed era sorprendente per me trovare sempre segni matematici in qualsiasi campo di osservazione mi muovessi: l'arte, l'architettura come il design.

La matematica pervade discretamente le nostre vite e rende affascinanti le nostre realtà. Pensiamo al simbolo dell'infinito che ci avvicina ad un meraviglioso ventaglio di mondi possibili che il fondatore della teoria degli insiemi ci ha consentito di disegnare e pensare liberamente; pensiamo agli anelli e ai ciondoli, con la forma di quel simbolo, che rappresenta più di altri quell'anelito d'infinito che è dentro di noi e che da qualche tempo hanno tanto successo tra i ragazzi, in buona parte ignari di quanto significhi quel simbolo tanto amato.

Ecco, direi che se riflettiamo su quanto la matematica faccia parte della nostra realtà, allora forse può diventare un'esigenza anche cercare di raggiungere una formalizzazione più accentuata attraverso lo sviluppo delle nostre capacità logiche, alla ricerca di ipotesi, e apprezzando l'astrazione dei concetti. Da questo punto di vista le gare cui avete

partecipato aiutano a sfidare le vostre capacità, alimentando un’attitudine alla competizione sana, per tirar fuori quello che di meglio c’è in ognuno di voi.
Nel consegnarvi i premi vorrei formularvi l’augurio di mantenere sempre la voglia di giocare e di misurarvi con le cose, mantenendo vigile la vostra capacità di affrontare le prove della vita con ironia e disincanto ma sempre con serietà, determinazione e fiducia in voi stessi.

CURRICOLI BREVI

LOREDANA BIACINO

Nata a Trieste, si è laureata in matematica con lode presso l'Università degli studi di Napoli il 3 dicembre del 1969. Subito dopo è diventata assistente incaricata e poi, dopo regolare concorso, di ruolo presso la cattedra di Analisi Matematica III. Dal 1985 fino al 2014, anno in cui sono andata in pensione sono stata professore associato di Analisi Matematica presso la Federico II. In parallelo con l'attività svolta come professore associato ho tenuto, dal 1996 ogni anno, fino alla conclusione del ciclo, un breve corso nell'ambito del Corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica; poi dal 2001 al 2007 uno o due corsi annuali di 30 ore l'uno di Storia della Matematica, per la SICSI; infine da diversi anni partecipo al Progetto Lauree Scientifiche, con un Laboratorio su Infiniti e infinitesimi.

SILVANA BIANCHINI

Laureata in Matematica e Fisica, ha insegnato presso il Liceo scientifico e classico "Benedetto Varchi" di Montevarchi (Arezzo), è stata responsabile del progetto "Laboratorio Metamatematica", ha realizzato la mostra "Leonardo e la matematica" seguendo l'omonimo testo di Bruno D'Amore.
Dal 1981 è entrata a far parte del Nucleo di ricerche Didattiche in matematica del CNR con sede presso l'università degli studi di Firenze, coordinato dalla Prof.ssa Maria Giuditta Campedelli. Attualmente continua l'attività di ricerca didattica presso l'Associazione nazionale Mathesis sezione di Firenze, di cui è Presidente.
Ha svolto anche opera di divulgazione della matematica:
1. *"Creatività nella matematica greca: idee e invenzioni"*, 2011
2. *"Tra forme e Figure: arte, storia, geometria"*, 2014
3. "Il valore dell'Istruzione: figure femminili nella cultura scientifica dall'antichità al XIX secolo.
Dal 1984 fa parte del Gruppo Formatori per la Matematica della Toscana, istituito 1984 nel dal Professore Giovanni Prodi dell'Università di Pisa.
Ha svolto attività di formazione, ha pubblicato articoli di didattica della matematica.

LUCILLA CANNIZZARO

Laureata in Matematica a Roma 1 nel 1971, in quiescenza nel 2010 come Professore Associato per MAT04. Ha tenuto corsi di Geometria II, Matematiche Complementari, MEPS, Istituzioni di Matematiche per Biologi e Farmacisti. Si è occupata di Scuola Primaria (Progetto RICME, PPA Lazio) e di Formazione dei docenti della Scuola Secondaria (Laboratorio Didattico, SSIS- Lazio). Ha pubblicato in riviste italiane e straniere e partecipato a convegni nazionali e internazionali con relazioni su: geometrie non euclidee, concetto di numero, risolvere problemi e linguaggio, figure geometriche e definizioni.

FERDINANDO CASOLARO

Docente di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Architettura dell'Università "Federico II" di Napoli e presso il Dipartimento D.E.M.M. dell'Università del Sannio, è Presidente della sezione Mathesis di Napoli. Già professore di Matematica nella Scuola Secondaria di secondo grado e, dal 1988/89 in contemporanea docente a contratto presso varie Università. Autore di 93 pubblicazioni scientifiche e vari libri. Editorial

Board (Comitato Editoriale/Scientifico) e Scientific Coordinator of the student section (Coordinatore Scientifico della sezione studenti) della Rivista Science & Philosophy. I suoi interessi di ricerca, riguardano questioni legate alle geometrie non euclidee, con particolare riferimento a modelli utilizzati per la Relatività Generale, alle geometrie finite con relativi gruppi di trasformazioni ed a tutte le questioni legate alla presentazione dell'Analisi Matematica attraverso gli aspetti grafici.

GIUSEPPE CONTI
Professore di Istituzioni di Matematiche presso il Corso di Laurea in Architettura e di Matematica per il Design del Corso di Laurea in Disegno industriale dell'Università di Firenze.
E' autore di numerose pubblicazioni scientifiche di Analisi Funzionale su riviste internazionali e di libri di testo per l'università e di testi di matematica per la scuola superiore e per l'università.
Da tempo si interessa di applicazioni della matematica all'arte, alla musica, alla natura ed all'architettura. Su questi argomenti ha scritto diversi libri ed articoli su riviste specializzate; inoltre ha tenuto numerose conferenze presso università italiane e straniere ed associazioni culturali.
Nel 2002 ha vinto il premio internazionale Pirelliaward (Premio Pirelli) per la divulgazione scientifica tramite internet.

ANTONIO CRISCUOLO
Laureato in Fisica presso l'Università di Napoli nel 1973, vincitore di concorso a cattedre, ha insegnato Matematica e Fisica presso il Liceo Classico "P. Sarpi" di Bergamo. Dal 2009 docente a contratto per i corsi O.F.A. Elementi di Matematica presso l'Università di Bergamo. Docente a contratto presso la S.I.L.S.I.S. e nei Corsi TFA per le classi di abilitazione di Matematica e Matematica Applicata. Incaricato dall'INVALSI in Nuclei di Valutazione Esterna degli istituti di istruzione. Dal 2005 ha tenuto, per l'Università di Bergamo e l' USR Lombardia, oltre cinquanta seminari e corsi di formazione sulla didattica della matematica. E' autore di quindici pubblicazioni sulla valutazione degli apprendimenti, sull'utilizzo del software nell'insegnamento della matematica e sulla didattica della geometria con la piegatura della carta.

MARCO D'ERRICO
Laureato in scienze Geologiche con 110 e lode. Dottore di ricerca in Scienze della Terra. Attualmente insegnante a t. i. di Matematica e Scienze per superamento di Concorso pubblico. Precedentemente: Professore a contratto, assegnista di ricerca, borsista e contrattista presso Istituti di ricerca Nazionali ed Università italiane su linee di ricerca in ambito geologico e divulgazione scientifica, divulgatore scientifico presso società private e WWF ed animatore scientifico presso "Festival della scienza" di Genova.

SIMONETTA DI SIENO
Laureata in Matematica presso l'Università degli Studi di Milano nel 1974. Già ricercatore confermato e docente di Matematiche complementari presso l'Università di Milano si occupa di storia della Matematica italiana dopo l'Unità e di didattica della Matematica. E' direttore del Centro Interuniversitario "matematita" per la comunicazione e l'apprendimento informale della Matematica. Come Presidente di MaTeinItaly collabora al Progetto MathUP di formazione a distanza degli insegnanti.

Autrice di numerose pubblicazioni su riviste nazionali e internazionali inerenti alla didattica e alla storia della matematica e di testi per la formazione degli insegnanti.

PATRIZIA DOVA

Nata a Varese, vive a Sesto Calende in provincia di Varese. Ha frequentato l'Istituto Magistrale e ha insegnato per parecchi anni nella scuola primaria come insegnante di ruolo. Si è laureata in Fisica presso l'Università Statale di Milano e ha conseguito l'abilitazione per insegnare scienze matematiche e scienze nella scuola secondaria di primo grado, dove ha insegnato per più di vent'anni. Ha fatto parte di un gruppo di ricerca sulla didattica della matematica dell'Università Cattolica di Brescia diretto dal Prof. Mario Macchi e dalla Prof.ssa Clara Colombo Bozzolo. Con gli insegnanti di questo nucleo di ricerca sta pubblicando, per la casa editrice "Erickson" di Trento, una collana di matematica dal titolo "Ricostruiamo la matematica". Ha collaborato, come autore, alla stesura delle prove nazionali INVALSI per la matematica. In qualità di relatore ha tenuto e continua a tenere corsi di aggiornamento sulla didattica della matematica per la Mathesis di Varese, per alcuni Istituti Comprensivi e per l'UST di Varese ambito 35.

FRANCO EUGENI

Franco Eugeni è nato a Teramo nel 1941. Laureato in Matematica a Bologna nel 1963, percorre tutti i gradini della carriera universitaria fino alla pensione. Vince il Concorso da Ordinario del 1984 sulla Cattedra di Analisi Matematica e Geometria Analitica. Ha insegnato in varie Università quali Modena, L'Aquila, Chieti, Roma, Milano ed infine Teramo. Ha trascorso periodi di ricerca presso le Università di Mainz, Giessen, Dehli e Iasi. E' stato per molti anni Direttore di Dipartimento e Coordinatore di Dottorati di ricerca e di Master, membro del Senato Accademico, Delegato Rettorale (prorettore) anche presso la Conferenza dei Rettori. Dal 2001 è transitato sulla Cattedra di Logica Filosofia della Scienza. In pensione dal 2009, è stato Rettore dell'Istituto Universitario linguistico "A.Macagno" di Cuneo e Pinerolo e ha tenuto insegnamenti presso l'ISIA di Pescara e Scienze Sociali di Chieti, fino al 2015.

E' stato Presidente Nazionale della Mathesis, nel 2001-2004, l'associazione dei Matematici Italiani fondata nel 1894, nella quale era nel direttivo Nazionale fin dal 1979, è professore onorario nell'Università di Iasi (Romania), è stato Presidente dell'Accademia Piceno-Aprutina dei Velati, fondata nel 1598, dal 1998 fino al 2015. E' Commendatore della Repubblica Italiana. E' autore di circa 250 pubblicazioni, in Riviste italiane ed estere, e di una quindicina di libri. Ha fondato le riviste telematiche Ratio Matematica, Eiris, Skills for Economic Management, Science and Philosophy, ed è membro dei comitati scientifici di varie riviste internazionali. Un elenco parziale delle sue pubblicazioni è reperibile nel sito ResearchGate.

GIANGIACOMO GERLA

Dopo la laurea ha insegnato nell'Istituto Enrico Fermi di Napoli. Successivamente è stato Ricercatore presso l'Università Federico II dove ha svolto attività didattica e di ricerca nel gruppo di lavoro del Prof. Aldo Morelli. Attualmente Professore Emerito di Matematiche Complementari presso l'Università di Salerno, ha fondato presso tale Università, e diretto per molti anni, una sezione locale della Mathesis. I suoi interessi scientifici sono indirizzati verso la logica fuzzy, la geometria point-free e la ricerca in didattica della matematica con particolare attenzione agli aspetti formali e non formali dei processi deduttivi.

ANGELO GUERRAGGIO

Professore ordinario di "Matematica generale" presso l'Università dell'Insubria di Varese (Dipartimento di Economia), insegna anche presso la "Bocconi" di Milano, dove dirige il Centro PRISTEM e la rivista "Lettera Matematica Pristem".
I suoi interessi di ricerca riguardano la programmazione non lineare (ottimizzazione scalare e vettoriale, smooth e non smooth). In ambito storico, si è interessato in modo particolare alla storia della matematica italiana dopo l'Unità.

VINCENZO IORFIDA

E' docente di ruolo nella scuola secondaria di secondo grado, professore a contratto presso l'Università della Calabria ed ha conseguito il Dottorato in Matematica all'Università di Messina.
Ha fondato la Sezione Mathesis di Serra San Bruno, di cui è il Presidente. E' autore di numerose pubblicazioni su Riviste nazionali e internazionali.

ANDREA LAFORGIA

Professore ordinario di Analisi matematica dal 1986; Ricercatore del C. N. R. Dal 1976 al 1986; borsista C.N.R. dal 73 al 76.Autore di 148 lavori a stampa su riviste internazionali e di 23 lavori di didattica-divulgazione e di 7 libri sei dei quali di Analisi matematica e uno di divulgazione. Membro del comitato di redazione di 4 riviste internazionali. È stato responsabile di un finanziamento C. N. R per la didattica della matematica, responsabile di alcuni progetti di ricerca e di un gruppo internazionale finanziato dalla NATO. È stato presidente di commissione di 4 concorsi a preside tre per scuole superiori e uno per le inferiori. È stato membro di commissione in un concorso di ispettore di matematica e scienze. Recentemente è stato contattato dal MIUR per presiedere la commissione di DS il cui concorso è in atto e per far parte della commissione che assegna i test preliminari. In entrambi i casi ha rinunciato agli incarichi per mancanza di tempo. È stato direttore del dipartimento di Meccanica e Automatica di Roma3 negli anni 90. I suoi lavori sono citati 418 volte come si verifica dal Mathscinet dell'AMS.

PAOLO LINATI

Paolo Linati, nato a Varese nel 1934. Docente di Matematica e Fisica nelle scuole secondarie, ora in quiescenza. Ha insegnato dal 1962 al 1965 ad Antananarivo (Madagascar), in lingua francese, e dal 1978 al 1992 presso la Scuola Europea di Varese. Dal 1982 al 1986 membro della CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica), organo della Unione Matematica Italiana. Dal 1973 al 2003 ha presieduto la sezione varesina Mathesis. Autore di circa 40 articoli su riviste di didattica della matematica, e sul "*Bulletin APMEP (Association Professeures de Mathématique de l'Enseignement Publique).* Nel 2011 ha pubblicato il testo "L'algoritmo delle occasioni perdute – La matematica nella scuola della seconda metà del Novecento". E' anche autore di testi sull'educazione degli adulti nell'ambito del movimento scout

MARIO INNOCENZO MANDRONE

Laureato in Fisica (voto 110/ 110) presso l'Università degli studi "Federico II" di Napoli. Docente di ruolo Matematica e Fisica negli istituti di istruzione superiore; in possesso delle Abilitazioni all'insegnamento in Matematica e Fisica ed in Matematica Applicata

Docente a contratto di Fisica "corso ofa", e di Analisi Matematica nell'Università degli studi del Sannio, ha svolto attività di docenza nei corsi Ocse-Pisa relativi ai progetti Ocse-Pisa di ricerca – azione nell'ambito della valutazione degli apprendimenti in literacy e numeracy nell'Università degli studi del Sannio.

Relatore su tematiche di fisica moderna e contemporanea e di didattica e storia della matematica in diversi convegni a livello nazionale e su applicazioni della teoria delle decisioni in convegni internazionali. Docente esperto in diversi p.o.n. di matematica e di fisica per le scuole secondarie superiori e docente nei corsi di preparazione per le prove Invalsi-Ocse-Pisa.

Relatore in convegno internazionali sulle applicazioni della teoria delle decisioni.

Autore di varie pubblicazioni.

E' inoltre Presidente della sezione Mathesis di Benevento.

ANTONIO MATURO

E' docente di Matematica presso il Dipartimento di Architettura dell'Università di Chieti - Pescara. Inoltre è presidente della Mathesis di Pescara. Già professore ordinario di Metodi Matematici per l'Economia e Direttore del Dipartimento di Scienze Sociali. Autore di circa 170 pubblicazioni scientifiche e vari libri.

Chief Editor delle riviste Ratio Mathematica fino al 2017, Science & Philosophy, Ratio Sociologica, Journal of Social Housing. Associate editor di varie riviste italiane e straniere. I suoi interessi di ricerca riguardano i modelli decisionali in condizioni di incertezza, la probabilità soggettiva, la logica fuzzy e la didattica della matematica.

SERENA MORELLI

E' professore associato di Storia Medievale presso l'Università della Campania "Luigi Vanvitelli". Negli anni '90, contemporaneamenrte all'espletamento del Dottorato di Ricerca in Storia Medievale presso l'Università di Palermo, ha collaborato con l'Osservatorio Vesuviano per ricerche storico-sismologiche. Dal 2010 si occupa delle relazioni tra la Facolta di Lettere e la Direzione del carcere militare di S. Maria Capua Vetere per ciò che concerne le lauree dei detenuti. Dal 2011 fa parte della commissione orientamento del dipartimento di Lettere e Beni Culturali della SUN. E' autore di numerose pubblicazioni su Riviste nazionali e internazionali.

ANGELA PESCI

Laureata in Matematica presso l'Università di Pavia, docente di corsi universitari del settore Matematiche Complementari fino al 2016, di corsi di specializzazione per l'insegnamento e di formazione per insegnanti. È autrice di oltre un centinaio di pubblicazioni scientifiche sulla didattica della matematica, di un libro sul ragionamento proporzionale, di un testo sulla statistica e probabilità nella scuola secondaria di I grado, di un testo scolastico (con altri) per l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria superiore; è revisore di articoli per riviste di didattica della matematica. È Presidente della sezione Mathesis di Pavia dal 2002 ad oggi.

RAFFAELE PROSPERI
Laurea in Ingegneria Elettronica, Dottorato di ricerca, Formatore presso istituti della Campania per Misure di accompagnamento alle Indicazioni Nazionali 2012, Laboratori per l'uso delle tecnologie nella didattica, Didattica per competenze, Valutazione e miglioramento. Esperto di Didattica della Matematica nelle Scuole Estive della Mathesis, Relatore in vari seminari per la didattica inclusiva della Matematica. Docente a contratto di Matematica Finanziaria, Statistica, Istituzioni di Analisi Matematica e Geometria nelle Università campane e della Basilicata, Didattica delle innovazioni tecnologiche. Collaboratore del DISUFF di Salerno e UNISOB di Napoli per lo svolgimento di una ricerca-azione nelle scuole primarie. Autore di alcune decine di pubblicazioni su riviste nazionali e internazionali inerenti alla didattica.

ALESSANDRA ROTUNNO
Nata a Napoli, è docente a tempo indeterminato di Matematica e Fisica presso il Liceo scientifico Labriola di Napoli e professore a contratto sul corso di Geometria al Dipartimento di Architettura dell'Università di Napoli Federico II dove nell'anno 2007-2008 è stata docente alla SSIS del Corso di Storia della Matematica; dal 1994 al 2005 ha fatto parte del Nucleo di Ricerca Didattica del Dipartimento di Matematica dell'Università di Napoli Federico II presieduto dal Prof Aldo Morelli; dall'anno 2003-2004 a tutt'oggi è stato cultore e commissario d'esame sui corsi di Metodi Matematici per Economa e Finanza al Dipartimento DEMM dell'Università del Sannio sul corso di Metodi Matematici per Economia e Finanza tenuto dal prof. Ferdinando Casolaro. E' autore di undici pubblicazioni su riviste nazionali e internazionali principalmente inerenti al settore Geometria.

RENATA SANTAROSSA
Laureata in matematica e specializzata in teorie e tecniche per l'impiego dei calcolatori elettronici, è stata docente di matematica e fisica, è stata docente dei corsi abilitanti per la matematica e la fisica, dal 2001 è stato docente supervisore alla SISS per l'abilitazione all'insegnamento della matematica e fisica presso il dipartimento di matematica Università di Napoli. E' stata nominata dal MIUR nella commissione di docenti per la stesura delle Indicazioni Nazionali (2000), è stata tra gli autori delle attività del testo "La matematica per il cittadino" Dal 2009 dirigente scolastico in regione Lombardia, ha tenuto corsi di formazione per il MIUR.
Nel corso della sua carriera è stata docente a contratto presso l'università delle Calabrie e l'Università di Napoli.
Ha pubblicato su riviste scientifiche e internazionali articoli di didattica della matematica

ELISA SAVARESE
Ora in pensione, è stata Dirigente Scolastico per oltre un ventennio nella Scuola Secondaria di secondo grado. Da sempre sensibile alla didattica, ha tenuto Seminari e conferenze in vari Convegni con particolare riferimento alla Scuola dell'Autonomia per la quale ha pubblicato un volume. E' Presidente della sezione Mathesis di Castellammare di Stabia di cui è stata fondatrice e Presidente del Comitato scientifico "Giochi di Matematica per la Scuola: Premio Aldo Morelli".

MASSIMO SQUILLANTE
Professore di I fascia nel settore disciplinare SECS S/06 presso il Dipartimento di Diritto, Economia, Management e Metodi quantitativi dell'Università degli studi del Sannio. E' attualmente Pro-Rettore dell'Università degli Studi del Sannio. E' stato Preside della Facoltà di Scienze economiche e aziendali (SEA) dell'Università del Sannio. E' coordinatore scientifico del Polo didattico dell'Accademia dei Lincei. Socio dell'Accademia Peloritana. Responsabile del Centro Europe Direct Federico II sez. Benevento.
Ha condotto ricerche sulle procedure valutative e decisionali, tenendo relazioni su invito sui precedenti temi in incontri scientifici tenuti presso le Università di Pechino, Nizza, Gorlitz, Roma "La Sapienza", Trento, Parigi ("La Sorbonne"), Linz, Praga, Cincinnati, Durban, City University of New York.

CARLO TOFFALORI
Professore ordinario di Logica Matematica presso l'Università di Camerino. Dal 2005 al 2017 è stato presidente dell'Associazione Italiana di Logica e sue Applicazioni. Dal 2012 fa parte della Commissione Scientifica dell'Unione Matematica Italiana. I suoi interessi di ricerca riguardano teoria dei modelli e algebra. Si occupa anche di divulgazione della matematica. Ha pubblicato vari libri, tra cui *Matematica, miracoli e paradossi* (con Stefano Leonesi, per Bruno Mondadori, 2007), *Il matematico in giallo* (Guanda, 2008), *L'aritmetica di Cupido. Matematica e letteratura* (Guanda, 2011) e più di recente *Algoritmi* (il Mulino, 2015) e *Logica a processo. Da Aristotele a Perry Mason* (Franco Angeli, 2016, ancora con Stefano Leonesi). Nel 2017 ha curato per Grandangolo Scienza *Cantor. La teoria degli insiemi*.

LUIGI TOGLIANI
Laureato in Matematica all'Università di Bologna, è docente di Matematica e Fisica al Liceo Scientifico "Belfiore" di Mantova. Interessato alla didattica delle discipline scientifiche, è autore di una trentina di pubblicazioni su riviste nazionali, tra cui Archimede, Periodico di Matematiche, La Fisica nella Scuola, L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate, nel periodo 1978-2017. Ha tenuto più di quaranta seminari in corsi di formazione per docenti di Matematica e di Fisica, anche in preparazione a concorsi per l'insegnamento, nel periodo 1990-2018. Dal 2013 è socio corrispondente dell'Accademia Nazionale Virgiliana. Nel 2017 ha vinto il Premio Cancellieri per la sezione 'Valenza formativa dell'Informatica'. Dal 2015 è presidente della sezione di Mantova della Mathesis, Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche.

LUIGI TOMASI
Laureato in Matematica. Ha superato i concorsi ordinari a cattedre ed è abilitato per l'insegnamento (nella scuola secondaria di I e II grado) di Matematica e Fisica, Matematica, Scienze matematiche applicate e Matematica e Scienze. Ha insegnato Matematica e Fisica nei Licei scientifici di Adria e di Rovigo, nei quali ha anche svolto svariati incarichi di supporto all'organizzazione scolastica. Dall'anno accademico 2000/2001 al 2008/2009: è stato supervisore di tirocinio nella S.S.I.S. - Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario, Università di Ferrara. Attualmente è professore a contratto presso l'Università di Ferrara e presso l'Università di Padova nel corso di laurea in matematica. Si è sempre interessato ai problemi della scuola, della

didattica della matematica e all'uso delle tecnologie nel suo insegnamento. Su questi temi ha scritto diversi articoli, contributi a libri e tenuto molti corsi di formazione e aggiornamento per docenti oltre che comunicazioni/relazioni a convegni, seminari e congressi. Ha fatto parte della Commissione nominata dall'UMI che ha elaborato la proposta di curriculum contenuta in Matematica 2003 e Matematica 2004, "La matematica per il cittadino". Fa parte del Consiglio di Presidenza del Centro Ricerche Didattiche "Ugo Morin" e della Redazione di "Progetto Alice, rivista di matematica e didattica". Collabora con l'INVALSI, come esperto per le prove di Matematica per la Scuola secondaria di II grado.

ALBERTO TROTTA

E' docente di ruolo nella Scuola Secondaria di secondo grado in provincia di Salerno. Ha fatto parte del Nucleo di Ricerca Didattica, presieduto dal prof. Stefano Marchiafava, al Dipartimento di Matematica dell'Università <Sapienza> di Roma. E' stato il fondatore e Presidente storico della sezione Mathesis di Anzio-Nettuno nel periodo 2002-2014 ed è attualmente socio della sezione Mathesis di Napoli. E' autore di circa 20 pubblicazioni su riviste nazionali e internazionali con particolare riferimento alle questioni di Fisica moderna.

ILARIA VERONESI

Docente di Matematica e Fisica presso il Liceo Scientifico "P. S. Mancini" di Avellino dove ha vinto nell'ottobre 2017 il premio del Global Junior Callenge per il progetto didattico più innovativo d'Italia. Collabora con il Nucleo di Ricerca Didattica del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Salerno e con il Progetto Liceo Matematico. Membro del Direttivo dell'Associazione Mathesis di Avellino (di cui è socia dal 1998); relatrice in ambito della Formazione e componente del Comitato scientifico per i <Giochi matematici per la Scuola: Premio Aldo Morelli>. E' stata relatrice alla Scuola estiva per docenti del Primo Ciclo tenutasi a Pizzoferrato nei giorni 17-19 luglio 2017 ed al Convegno <Matematica, Natura, Arte> tenutosi al Dipartimento di Architettura dell'Università degli Studi "Federico II" di Napoli.

PAOLA VIGHI

Laureata in Matematica, è stata titolare di borsa di studio CNR e Ricercatore Universitario Confermato e, poi, Professore Associato presso il Dipart. di Matematica dell'Università di Parma.

Le sue ricerche sono relative alla Didattica della Matematica, in particolare ai problemi di insegnamento/apprendimento della matematica, dalla scuola dell'infanzia alla secondaria superiore.

È autrice di circa 170 pubblicazioni nel settore. Ha collaborato a progetti di ricerca nazionali ed internazionali.

Editore: Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo (APAV)
Via del Concilio n. 24, Pescara, Italy
Codice Fiscale: 92036140678 Partita IVA:02184450688

Siti web: www.apav.it ; www.eiris.it
Email: apavsegreteria@gmail.com, apavsegreteria@pec.it

www.apav.it

www.eiris.it

ISBN 978-88-94350-10-4