Science & Philosophy **ISSN**: 2282-7757
Vol. 5(1), 2017, pp. 129-148 **eISSN**: 2282-7765

Mathematics, Music & Architecture (Matematica, Musica e Architettura)

[1]Giuseppe Conti, [2]Beatrice Sedili, [3]Alberto Trotta

[1] Dipartimento di Matematica DIMAI
Università di Firenze, Italia
gconti@unifi.it

[2] Viale Talenti 150
50142 Firenze Italia
beatrice.sedili@gmail.com

[3] IISS Santa Caterina-Amendola
Salerno, Italia
albertotrotta@virgilio.it

Received on: 21-04-2017. **Accepted** on: 01-06-2017. **Published** on: 30-06-2017
doi: 10.23756/sp.v5i1.348

Abstract

In this note, there are some aspects of the link between music, math and architecture. This link was very tight in the past but, unfortunately, today is a little lost. Authors show how the mathematics have been an important instrument in the development of music, especially in the creation of musical scales. The musical relationships have also been used in architecture with different motives, according to the historical periods in which they have been used. In order to better explain how these musical proportions fit into architectural works, numerous figures are presented.
Keywords: Consonance, musical intervals, pentagram, counterpoint, logarithms.

Sunto

Nella presente nota si presentano alcuni aspetti del legame fra musica, matematica ed architettura. Questo collegamento era molto stretto nel passato ma, purtroppo, oggi si è un po' perduto. Gli autori mostrano come la matematica sia stata un importante strumento nello sviluppo della musica, soprattutto nella creazione delle scale musicali. Da Vitruvio in poi i rapporti musicali sono stati usati anche nell'architettura con motivazioni diverse, secondo i periodi storici in cui sono stati adoperati. Allo scopo di spiegare meglio come queste proporzioni musicali si adattano alle opere architettoniche, sono presentate numerose figure.

Parole Chiave: Note musicali, frequenze, consonanza, diesis, bemolle, intervallo musicale, pentagramma, contrappunto, logaritmi.

1. Introduzione

Fino dall'antichità è stato studiato lo stretto legame fra matematica e musica. Gli intervalli musicali sono stati anche usati anche nell'arte, particolarmente in architettura e nelle arti figurative. I rapporti fra le note si sono modificati nel corso dei secoli ed, in parallelo, gli stessi rapporti sono cambiati anche in architettura. Infatti, nel medioevo, in musica ed in architettura, si usavano esclusivamente gli intervalli della scala pitagorica; nel XVI secolo fu introdotta la scala naturale, i cui rapporti musicali sono stati impiegati nelle costruzioni a partire dalle opere di Palladio.

2. Musica e matematica

Vi è uno stretto legame fra matematica, musica e architettura. Molti sono i matematici che nei secoli passati hanno trattato argomenti riguardanti la musica; citiamo fra questi: Pitagora, Tolomeo, B. Cavalieri, S. Stevino, G. Galilei, R. Cartesio, C. Huyghens, M. Mersenne, J. Keplero, G.W. Leibniz, I. Newton, L. Eulero, J. Riccati, J. Wallis, J.B. D'Alembert, K.G. Jacobi.

D'altra parte, molti architetti si sono interessati di musica oltre che, naturalmente, di matematica; è sufficiente citare, fra i tanti: Vitruvio, F. Brunelleschi, L.B. Alberti, A. Palladio, S. Serlio, J. Vignola, V. Scamozzi.

Non deve meravigliare questa stretta relazione fra le tre discipline, anche se, dalla fine del '700 in poi, questo collegamento è stato perduto.

Il motivo di questo legame è dovuto anzitutto al fatto che la cultura di un tempo era meno specializzata che quell'odierna; inoltre, effettivamente, molti aspetti della musica sono legati a concetti matematici. Il pentagramma, ad esempio, è una rappresentazione cartesiana, in cui sull'asse delle ascisse sono rappresentati i tempi, mentre sull'asse delle ordinate sono rappresentate le altezze (le frequenze) delle note. In questo la musica ha anticipato la matematica; infatti, il rigo musicale appare per la prima volta nel IX secolo dopo Cristo; con Guido di Arezzo (995-1050) compaiono quattro righe parallele; il pentagramma cominciò ad essere adottato nel XIV secolo.

Questo non è l'unico caso in cui la musica ha anticipato la matematica. Già nel IV secolo avanti Cristo Aristosseno inventò la gamma cromatica completa (cioè le 12 note dell'ottava) a temperamento equabile, avente come base la dodicesima parte dell'ottava; così la teoria musicale mette in rilievo la scoperta dell'isomorfismo tra i logaritmi (intervalli musicali) e gli esponenziali (lunghezze delle corde), più di venti secoli prima della scoperta dei logaritmi.

Notiamo, a proposito della polifonia, che le linee melodiche del contrappunto possono essere descritte per mezzo di trasformazioni geometriche, come ha mostrato il Prof. B. Scimemi (vedere Scimemi 1977).

Secondo Leibniz il legame fra musica e matematica è ancora più profondo: infatti, ascoltare la musica equivale ad un'occulta attività aritmetica dell'animo, il quale, in maniera inconsapevole, effettua dei calcoli ("musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare").

Anche se possiamo non essere del tutto d'accordo con questa definizione di musica, poiché nessuna spiegazione matematica può coglierla in tutta la sua profondità, tuttavia, come afferma il musicista Roman Vlad, il soccorso della matematica è indispensabile per definire le basi e le strutture acustiche della musica (vedere Vlad 1988).

Il contributo forse più importante della matematica nella teoria musicale è stato quello relativo al problema delle scale musicali; ed è proprio a questo aspetto che si ricollegano molte questioni legate all'architettura.

Pitagora fu il primo che notò una relazione fra l'altezza dei suoni e le lunghezze delle corde che, vibrando, emettono i suoni; questa relazione si traduceva in una proporzionalità inversa fra altezza del suono e lunghezza di una corda. Si accorse inoltre che, emettendo due suoni contemporaneamente, in alcuni casi si percepisce un senso di gradevolezza (**consonanza**), in altri casi si ha un senso di fastidio (**dissonanza**). I suoni più consonanti sono nell'ordine:

due suoni uguali il cui rapporto delle frequenze è 1 : 1 (**unisono**),
due suoni le cui frequenze stanno nel rapporto 2 : 1 (**intervallo di ottava**),
due suoni le cui frequenze stanno nel rapporto 3 : 2 (**intervallo di quinta**),
due suoni le cui frequenze stanno nel rapporto 4 : 3 (**intervallo di quarta**).

Due suoni, le cui frequenze stanno nel rapporto 2 : 1, sono in pratica lo stesso suono, il più alto dei quali si trova nell'ottava successiva (basti pensare a due *do* che differiscono per un'ottava); dunque due suoni differenti, ma maggiormente consonanti, sono quelli le cui frequenze stanno nel rapporto 3 : 2 (ad esempio, il *do* ed il *sol* di una stessa ottava).

Usando esclusivamente l'intervallo di quinta, si costruisce una scala musicale, che in questo caso è chiamata la **scala pitagorica**. Nella costruzione delle scale musicali occorre tenere presente che dobbiamo moltiplicare le frequenze quando trasliamo una nota di un dato intervallo; ad esempio, prendendo come 1 il *do*, il *sol* della stessa ottava è $\frac{3}{2}$, numero razionale che rappresenta il rapporto fra le frequenze del *sol* e del *do*; se a questa nota aggiungiamo un intervallo di quinta, si ottiene il *re* dell'ottava seguente, la cui frequenza rispetto al *do* dell'ottava precedente è: $\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$. Se vogliamo riportare questo *re* all'ottava precedente, basta traslare (al contrario) di un'ottava questa nota, cioè dividere la sua frequenza per 2: otteniamo così il *re* dell'ottava precedente, la cui frequenza è $\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{8}$ (**tono**) della frequenza del *do*.

Tenendo conto di questo, dai suoni consonanti derivano le consonanza composte; più precisamente

3 : 1, **ottava più quinta**, cioè 2 $\frac{3}{2}$ = 3, **quinta più quinta** $\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$, **quarta più quarta** $\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}$.

Tenendo conto di quanto precedentemente osservato, otteniamo le regole per costruire la scala pitagorica: si moltiplica per $\frac{3}{2}$ e si riporta all'ottava dividendo per un'opportuna potenza di 2. In tal modo si ottengono tutte le note (escluso il *fa*) e le note diesizzate.

Per avere il *fa* e le note bemollizzate, si divide per $\frac{3}{2}$ e si riporta all'ottava moltiplicando per una opportuna potenza di 2 (vedere anche Jeans 1941).
Riportando le note alla stessa ottava si ottengono le frequenze delle note della scala pitagorica rapportate alla frequenza del *do*:

do		*re*		*mi*		*fa*		*sol*		*la*		*si*		*do*
	$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{243}{256}$	

Come possiamo vedere dalla precedente tabella, il tono della scala pitagorica è $\frac{9}{8}$.
I corrispondenti intervalli di questa scala sono:

do	*re*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*do*
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

Uno dei problemi della scala pitagorica consiste nel fatto che essa non permette la trasposizione di una melodia.
Inoltre, per come è costruita, in questa scala le quinte e le quarte sono consonanti; le terze e le seste, invece, sono dissonanti.
La scala pitagorica fu usata nel mondo occidentale fino al Rinascimento; infatti, finché la musica era sostanzialmente monodica (**canto gregoriano**), con eventuali melodie parallele (**contrappunto**) aventi le note corrispondenti ad intervalli di ottava, oppure di quinta o di quarta, la scala pitagorica era più che sufficiente. La Chiesa Cattolica, inoltre, considerava la scala pitagorica la più adatta alla musica ecclesiastica poiché si basava sui numeri 1, 2, 3, cioè i numeri della Trinità.

3. Musica e architettura

Nel medioevo si pensava che Dio avesse costruito il mondo usando i rapporti musicali; occorre osservare che tale idea non era nuova: già Platone, nel *Timeo*, affermava che il Demiurgo aveva plasmato il mondo con la musica e che l'universo risuonava della musica (non udibile) delle sfere (concetto espresso in precedenza anche da Pitagora).
L'ipotesi che Dio avesse usato la musica era avvalorata dal fatto che il Primo libro dei Re, 6, riporta le misure del Tempio di Salomone, le cui dimensioni, come fece notare Abelardo, erano legate da rapporti musicali:

60 cubiti di lunghezza, 20 di larghezza e 30 di altezza, con il Sancta Sanctorum di 20 cubiti di lunghezza, 20 di larghezza e 20 di altezza, cioè un cubo perfetto (notiamo che un cubito corrisponde a mezzo metro).
Il portico davanti era 20 cubiti come la larghezza e profondo 10 cubiti.
Nel santuario c'erano due cherubini con le ali che misuravano 10 cubiti da una punta all'altra ed erano alti 10 cubiti.

Si deduce facilmente che i rapporti fra queste misure sono 1 : 1, 2 : 1, 3 : 2, cioè proprio i principali rapporti musicali presenti nella scala pitagorica.

Inoltre, la forma cubica del Sancta Sanctorum non era casuale. Si pensava, infatti, che, fra i poliedri, il cubo fosse quello più armonioso; esso infatti possiede 6 facce, 12 spigoli e 8 vertici: ritroviamo così i rapporti della scala pitagorica, cioè 2 : 1, 3 : 2 e 4 : 3.

Per tale motivo le cattedrali gotiche verranno costruite utilizzando queste proporzioni perfette, così come molti altri edifici; a questo proposito è sufficiente citare i disegni e le annotazioni del *Livre de portraiture* di Villard de Honnecourt del XIII secolo.

Nella pianta della chiesa, tratta dal libro di Villard de Honnecourt e rappresentata nella figura seguente, si possono notare i rapporti di quinta, ottava e quarta.

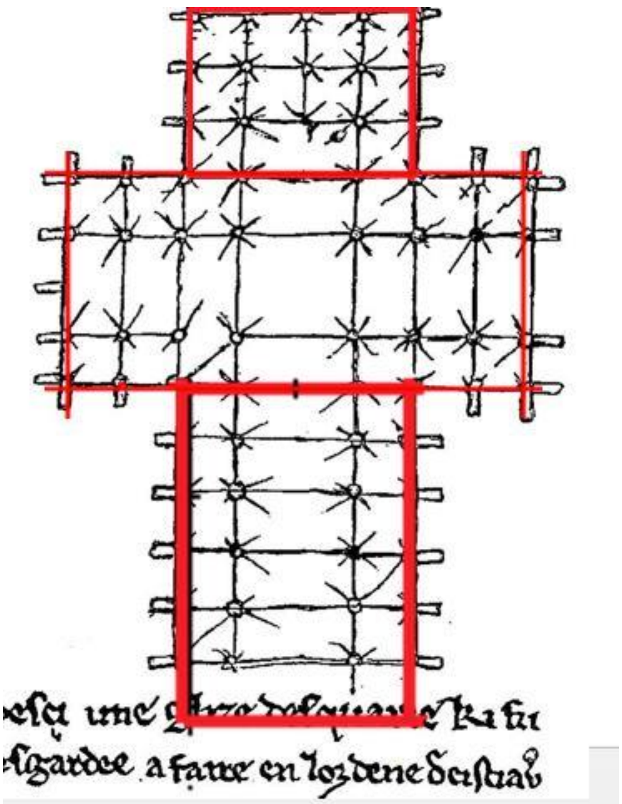

Figura 1
Pianta di una chiesa dal taccuino di Villard de Honnecourt.
Sono evidenziati i rapporti musicali di quinta, ottava e quarta.

Esistono numerosi esempi di rapporti musicali nelle piante delle chiese medievali (vedere Von Simson 2008), come si può dedurre dalle figure seguenti (riportiamo, per semplicità, solo alcuni esempi).

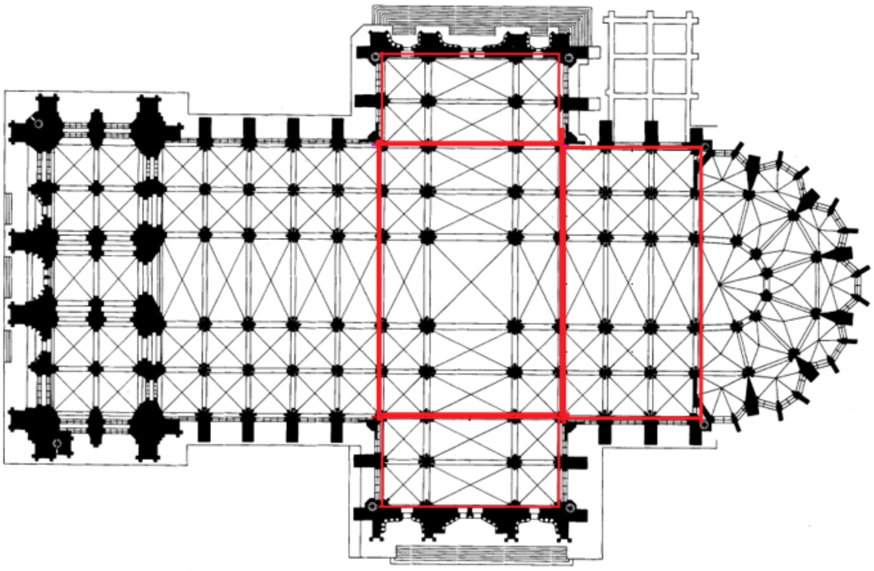

Figura 2
Cattedrale di Colonia. Quinta e ottave

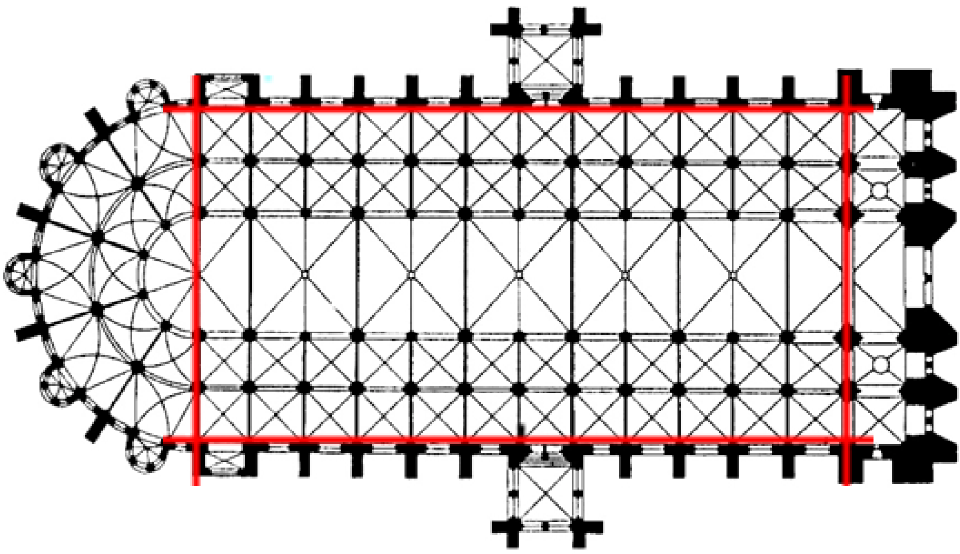

Figura 3
Cattedrale di Bourges. Ottava.

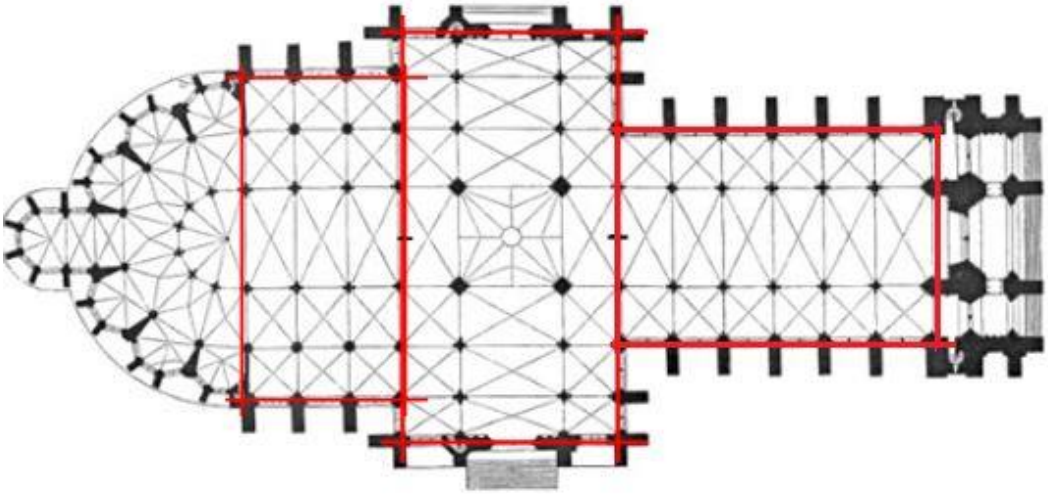

Figura 4
Cattedrale di Amiens. Quinta e ottave

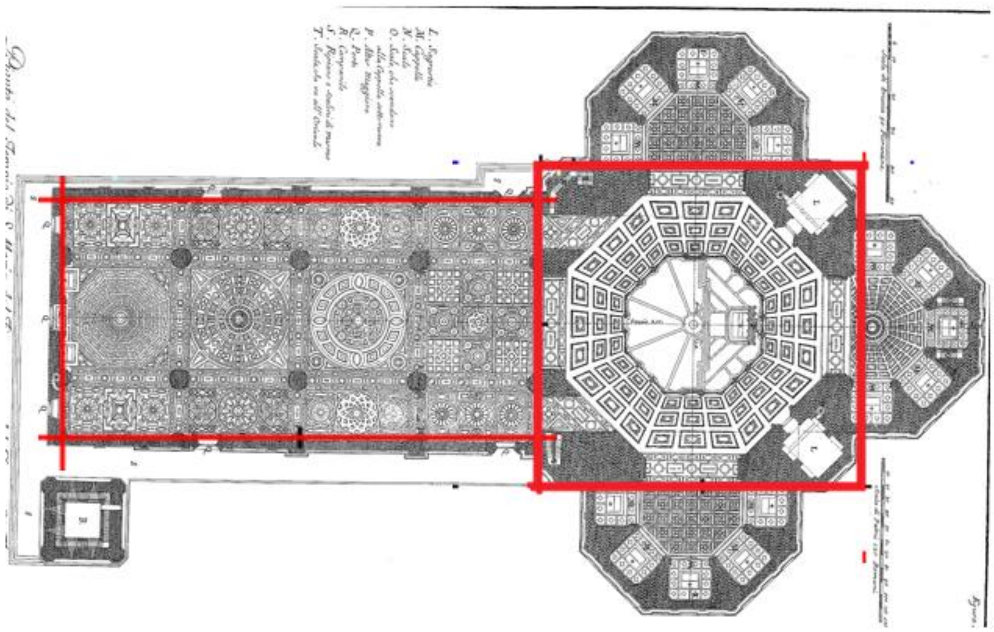

Figura 5
Duomo di Firenze. Quadrato e ottava

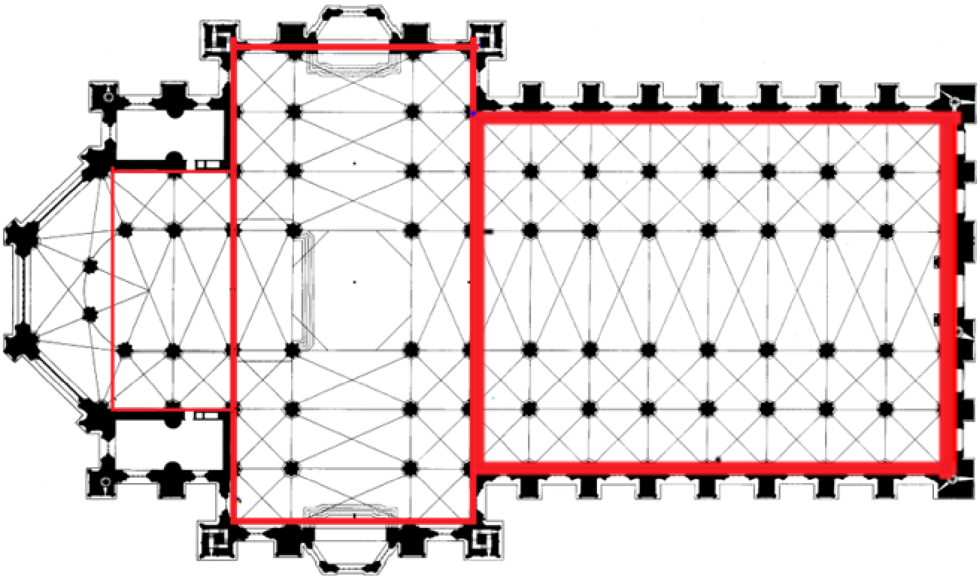

Figura 6
Duomo di Milano. Quarta e ottave.

Col tempo, tuttavia, le consonanze pitagoriche cominciarono ad essere sentite come troppo statiche, prive cioè di quella tensione che rende la musica piacevole da ascoltare; inoltre, le terze pitagoriche risultavano, come già osservato precedentemente, dissonanti. Infatti, l'intervallo di terza maggiore *do-mi* della scala pitagorica vale $\frac{81}{64}$, mentre quello naturale vale $\frac{80}{64}=\frac{5}{4}$ (**intervallo di terza maggiore**). Per questo motivo nell'antichità e durante tutto il medioevo l'intervallo di terza era considerato dissonante.

Perciò, già a partire dal XIII secolo, furono introdotti nel contrappunto gli intervalli consonanti di terza e di sesta, che sono i complementari rispetto all'ottava degli intervalli di terza (ad esempio $2:\frac{5}{4}=\frac{8}{5}$ che rappresenta l'**intervallo di sesta minore**). La Chiesa osteggiò questa nuova moda, affermando che essi risultavano troppo mondani e lascivi.

Alla fine del '400 Bartolomeo Ramos stabilì l'esatto rapporto, cioè $\frac{5}{4}$, dell'intervallo di terza (maggiore); successivamente nella seconda metà del '500 G. Zarlino introdusse la scala, detta anche **giusta**, o **naturale**, o **zarliniana**, nella quale compariva l'intervallo di terza.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} do & & re & & mi & & fa & & sol & & la & & si & & do \\ & \frac{9}{8} & & \frac{10}{9} & & \frac{16}{15} & & \frac{9}{8} & & \frac{10}{9} & & \frac{9}{8} & & \frac{16}{15} & \end{array}$$

I corrispondenti intervalli della scala zarliniana sono:

$$\begin{array}{cccccccc} do & re & mi & fa & sol & la & si & do \\ 1 & \frac{9}{8} & \frac{5}{4} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{15}{8} & 2 \end{array}$$

La scala zarliniana esprime i rapporti musicali che si intonano in modo naturale quando si canta oppure quando si suona uno strumento musicale, come il violino, che non sia a tasti fissi. Tuttavia anche con questa scala, come con quella pitagorica, non si possono eseguire le trasposizioni delle melodie.

Dal punto di vista pratico furono cercate soluzioni di compromesso, i cosiddetti **temperamenti** (temperamenti **mesotonici**, temperamenti **irregolari**), fino a che non prevalse su tutti, a partire dal XIX secolo, il **temperamento equabile**, che è quello che tutt'ora viene usato nell'accordatura degli strumenti musicali (vedere Gazzola 2003).

Nel XV secolo Leon Battista Alberti volle fornire una base teorica all'architettura, che non compariva fra le arti del quadrivio (esse erano: la geometria, l'aritmetica, l'astronomia e la musica). In tal modo l'architettura cessava di essere considerata un'attività manuale e veniva elevata al rango di arte liberale. Per questo l'Alberti prese come base dell'architettura la geometria, l'aritmetica e, soprattutto, la musica, gettando basi scientifiche, e non più mistiche, del rapporto fra musica ed architettura.

Si legge nel libro IX del *De re aedificatoria* di Leon Battista Alberti: "Quei medesimi numeri certo, per i quali avviene che il concerto de le voci appare graditissimo ne gli orecchi degli uomini, sono quegli stessi che empiono anco gli occhi e lo animo di piacere meraviglioso". Tale idea non era nuova; si trovava già in Boezio, il quale affermava che "l'orecchio è colpito dai suoni nello stesso identico modo in cui lo è l'occhio dalle impressioni ottiche".

Dunque, la musica e l'architettura sono sorelle, poiché l'occhio percepisce come armonici gli stessi rapporti fra enti architettonici, percepiti tali anche dall'orecchio come rapporti fra suoni. Perciò, secondo l'Alberti, quegli stessi rapporti che formano intervalli consonanti in musica, producono strutture architettoniche armoniose. Questo stesso concetto è stato ripetuto da Leonardo da Vinci a proposito della pittura (vedere anche Bouleau 1988).

Probabilmente le cose non stanno realmente in questo modo (basti pensare al fatto che piccole variazioni di rapporti architettonici non disturbano molto la visione, mentre piccole variazioni di frequenza di una nota musicale possono essere molto sgradevoli all'ascolto); tuttavia questa concezione ha influenzato per secoli l'architettura, fino a quasi tutto il XVIII secolo.

Nella facciata della chiesa di Santa Maria Novella a Firenze, Leon Battista Alberti fornisce un saggio delle sue teorie sui rapporti musicali. Infatti, in essa sono presenti rapporti di unisono, di ottava, di quinta, di quarta, di doppia quarta ($\frac{16}{9}=\left(\frac{4}{3}\right)^2$), di doppia quinta ($\frac{9}{4}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$) e di tono ($\frac{9}{8}$). Curiosamente, i rapporti di quinta, di quarta e di doppia quarta sono gli stessi che si trovano nei rapporti fra le dimensioni degli schermi televisivi e dei computer, e delle fotografie.

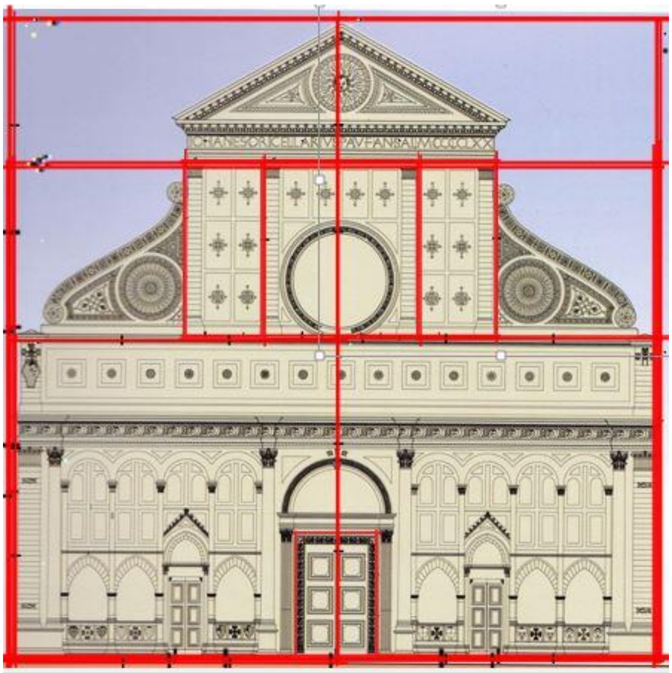

Figura 7
Facciata della chiesa di Santa Maria Novella a Firenze. Leon Battista Alberti.

Anche Filippo Brunelleschi, secondo quanto afferma il suo biografo Antonio di Tuccio Manetti, si recò a Roma nei primi anni del '400 per conoscere il modo di costruire degli antichi e le loro proporzioni musicali.

Naturalmente fino a tutto il XV secolo venivano usati i rapporti musicali della scala pitagorica, la sola scala musicale conosciuta e la più vicina all'idea corrente di perfezione musicale ed artistica (vedere Wittkover 1964 e Bartoli 1998).

Riportiamo nelle figure seguenti alcuni esempi di rapporti musicali presenti in architetture rinascimentali.

Figura 8
Facciata Palazzo Farnese. Roma. Ottava.

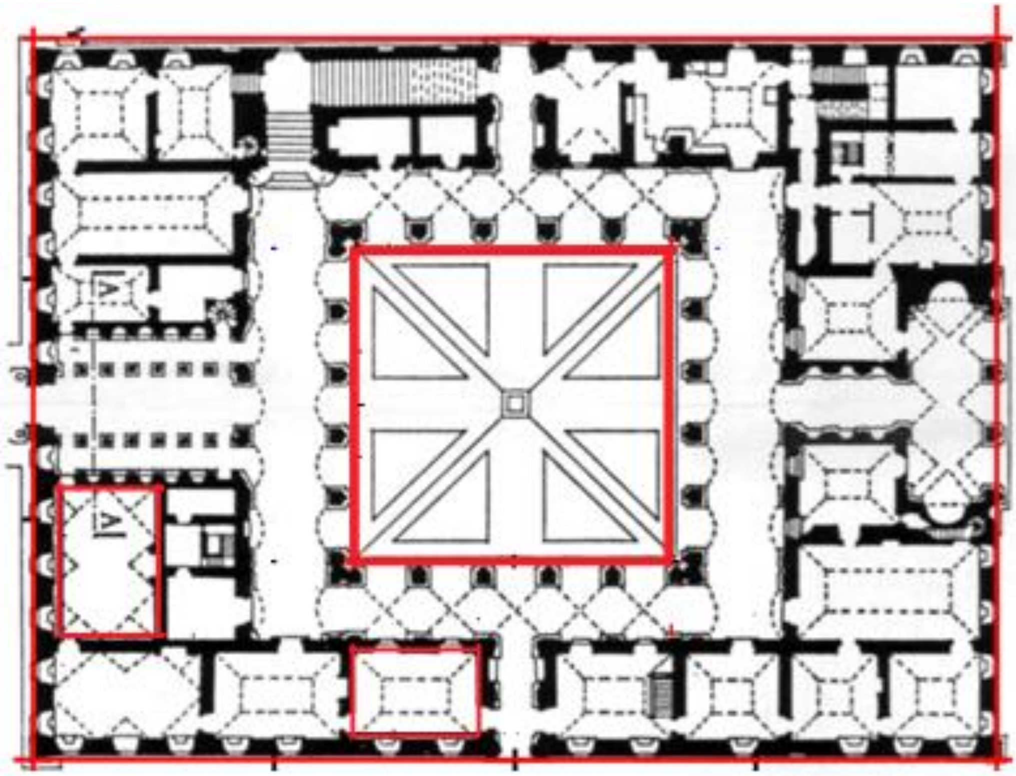

Figura 9
Pianta Palazzo Farnese. Roma. Quarta, quadrato, quinte.

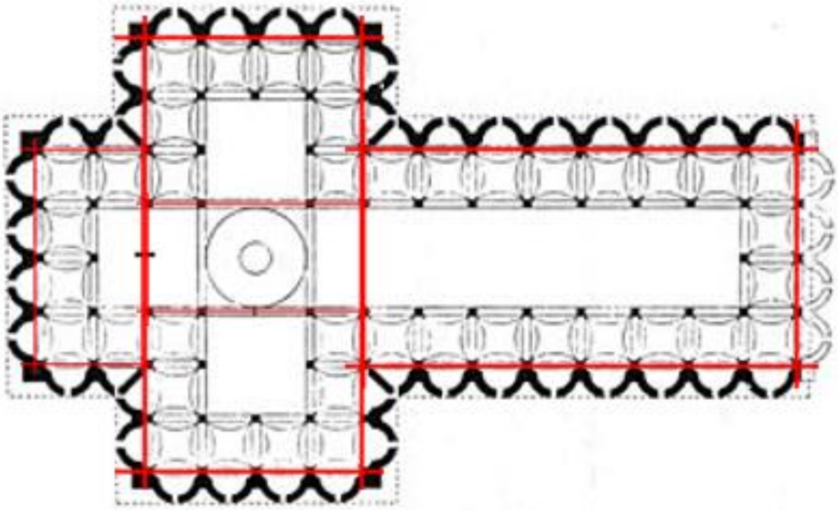

Figura 10
Chiesa di Santo Spirito. Firenze. Progetto di Brunelleschi. Ottave e quarte.

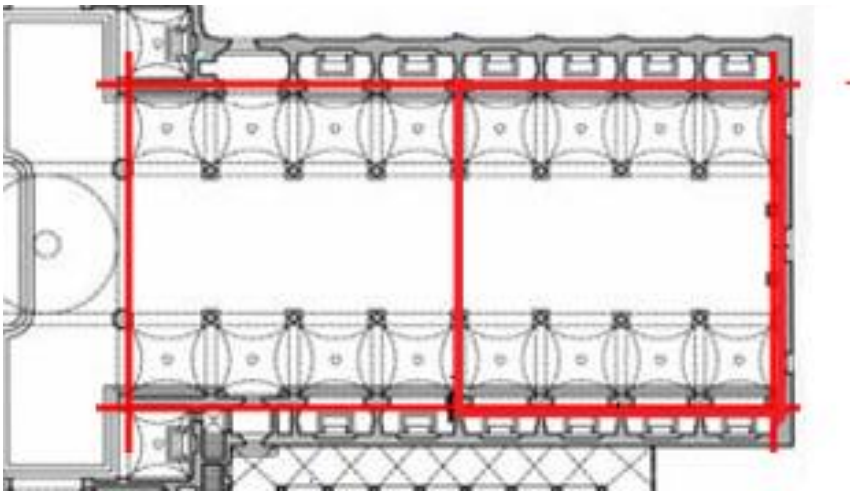

Figura 11
Chiesa di San Lorenzo. Firenze. Brunelleschi. Ottava.

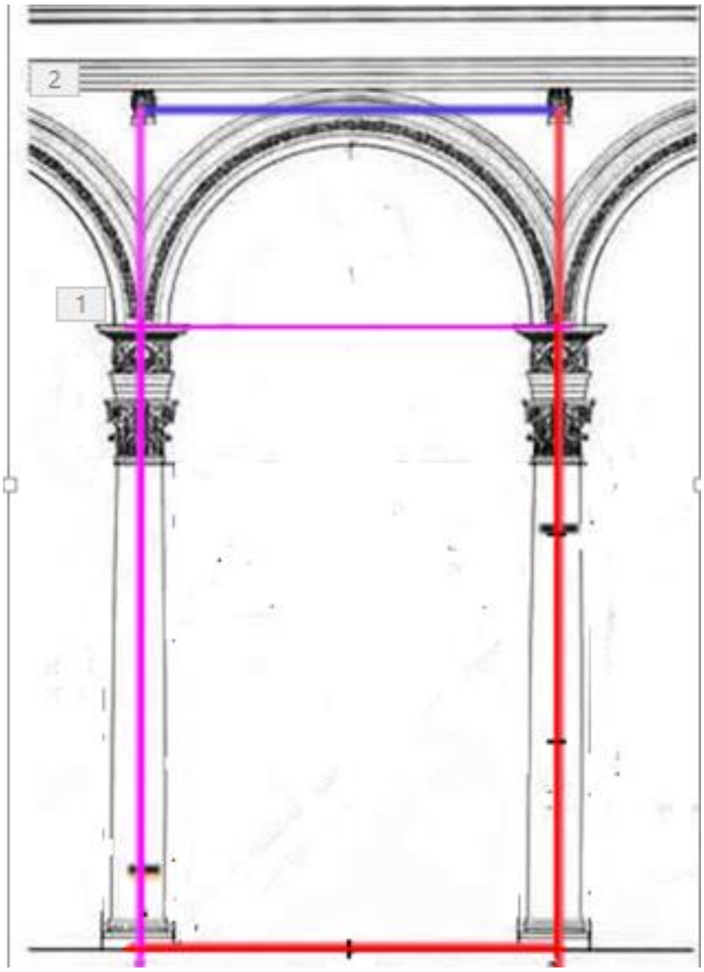

Figura 12
Interno Chiesa di San Lorenzo. Firenze.
Rapporti di quinta e di ottava.

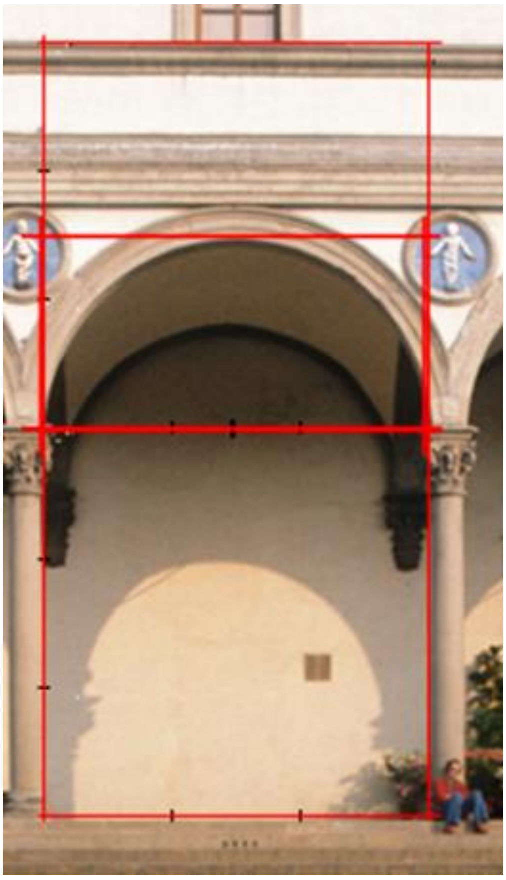

Figura 13
Spedale degli Innocenti. Brunelleschi. Firenze.
Rapporti di unisono, di quinta e di ottava.

E' interessante notare che anche in architettura i rapporti cambiarono in concomitanza col mutare dei rapporti musicali; infatti, il Palladio e il Vignola usarono in architettura i rapporti di terza e di sesta che erano stati introdotti da Zarlino nella sua scala naturale (vedere Wittkover 1964).

Riportiamo alcune opere architettoniche del '500 dove si trovano oltre ai rapporti pitagorici, anche quelli della scala zarliniana, compresi i rapporti di terza minore, cioè $\frac{6}{5}$, sesta minore, cioè $\frac{8}{5}$ e sesta maggiore, cioè $\frac{5}{3}$.

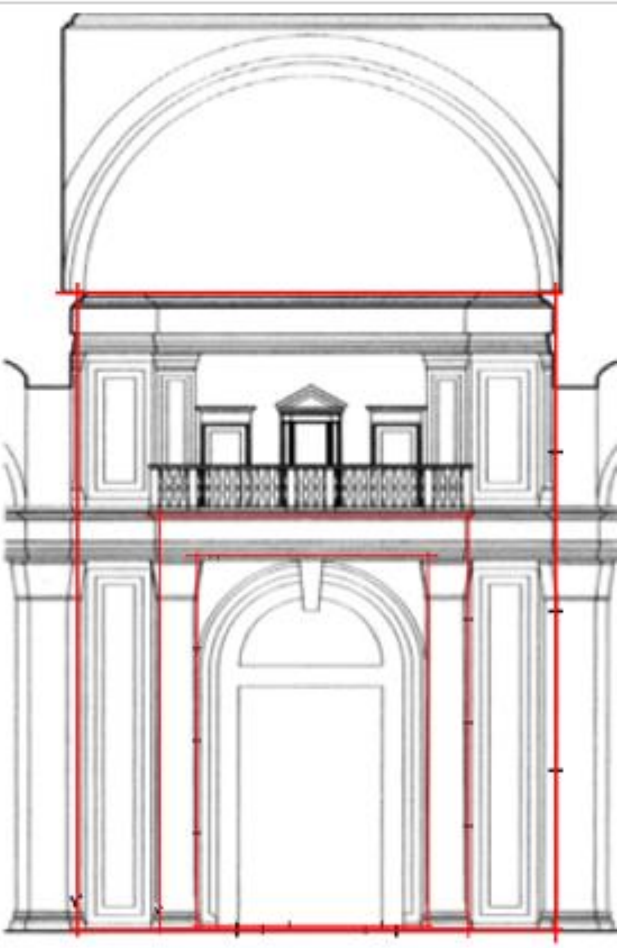

Figura 14
Michelangelo.
Tribuna delle reliquie. San Lorenzo. Firenze
Quarta e seste minori

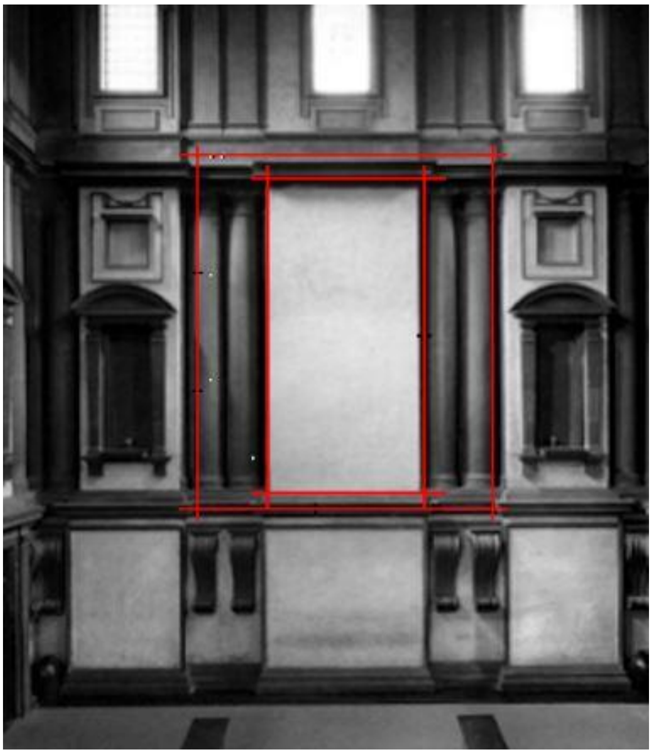

Figura 15
Michelangelo.
Biblioteca Laurenziana Firenze.
Ottava e terza minore.

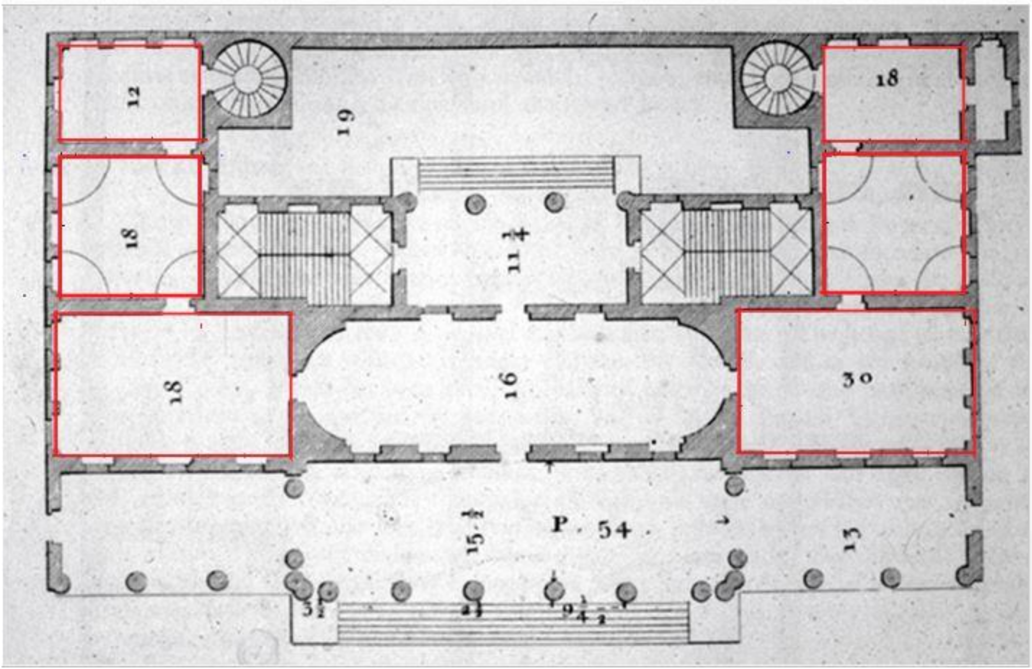

Figura 16
Palladio. Palazzo Chiericati. Pianta.
Rapporti di sesta maggiore, quinte e unisono.

Nel XVIII secolo iniziarono le critiche alla teoria armonica dell'architettura. Ancora nel 1760 Francesco Maria Petri scriveva che "sarà l'architettura la musica dei nostri occhi, la quale infatti ci somministra forme valenti a produr bellezza, e fuori di cui non ritroverassi giammai". Tuttavia, pochi anni dopo, Milizia afferma che tale teoria è solo una congettura.

4. Conclusioni

Dalla fine del '700 in poi si assiste ad una netta separazione sia fra musica e matematica che fra musica ed architettura. Il romanticismo, in seguito, dette il colpo di grazia a tali collegamenti culturali, in quanto riteneva che l'uso della matematica potesse limitare, in qualche modo, la creatività dell'artista.

Oggi stiamo recuperando il collegamento fra musica ed architettura, seppure su altre basi; a questo proposito vogliamo citare Iannis Xenakis (1922 - 2001), il quale ha introdotto nella musica concetti matematici, come il calcolo delle probabilità e le strutture algebriche (vedere Xenakis 1982), ed ha "musicato" il Padiglione Philips dell'Esposizione Mondiale di Bruxelles del 1958, che è una struttura con copertura formata da porzioni di paraboloide iperbolico, al cui progetto aveva collaborato insieme a Le Corbusier (vedere Capanna 2012).

Bibliografia

[1] Bartoli L. (1998). *Architettura e musica*. Quaderni di Erba d'Arno, Fucecchio.

[2] Bouleau C. (1988). *La geometria segreta dei pittori*. Electa, Milano.

[3] Capanna A. (2012). *Verso un'architettura sonora. Il Poème Électronique*. In Musica & Architettura, a cura di A. Capanna et al., Roma, Nuova Cultura, pp. 23 – 34.

[4] Jeans J. (1941). *Scienza e musica*. Bompiani, Milano.

[5] Gazzola F. (2003). *L'accordatura degli antichi strumenti da tasto*. Armelin Musica, Padova.

[6] Scimemi B. (1997). *Contrappunto musicale e trasformazioni geometriche*. Atti del Convegno "Matematica e cultura" a cura di M. Emmer. Sprinter, Venezia.

[7] Vlad R. (1988). *Civiltà musicale*. Zanichelli, Bologna.

[8] Von Simson O. (2008). *La cattedrale gotica. Il concetto medievale di ordine.* Il Mulino, Bologna.

[9] Wittkover R. (1964). *Principi architettonici nell'età dell'umanesimo*. Einaudi, Torino.

[10] Xenakis I. (1982). *Musica, architettura*. Spirali Edizioni, Milano.