Science & Philosophy Volume 8(1), 2020, pp. 119-129

1918-2018: CANTOR and infinity in today's high school

Carlo Toffalori*

Abstract

In the first centenary of Cantor's death, we discuss how to introduce his life, his works and his theories about mathematical infinity to today's students.

Keywords: proper and improper infinite, cardinal number, countable set, continuum, continuum hypothesis.

Sunto

Nel primo centenario della scomparsa di Cantor, si discute come presentare la sua vita, le sue opere e le sue teorie sull'infinito agli studenti di oggi.

Parole chiave: infinito proprio e improprio, numero cardinale, numerabile, continuo, ipotesi del continuo.†

* Università di Camerino, Scuola di Scienze e Tecnologie, Sezione di Matematica, Via Madonna delle Carceri, 9, 62032, Camerino, Italy. carlo.toffalori@unicam.it

† Received on June 4th, 2020. Accepted on June 20th, 2020. Published on June 30th, 2020. doi: 10.23756/sp.v8i1.515. ISSN 2282-7757; eISSN 2282-7765.

Carlo Toffalori

1. L'infinito pensabile

"Dal Paradiso che Cantor ha creato per noi, nessuno deve poterci mai scacciare": l'aforisma di David Hilbert nel saggio *Sull'infinito* (Hilbert, 1978) è talmente conosciuto che citarlo ancora una volta può sembrare perfino scontato. Non vedo tuttavia modo migliore di celebrare la ricorrenza 1918-2018 del primo centenario della scomparsa di Georg Cantor e la sua teoria dei numeri transfiniti – *"il fiore più bello dello spirito matematico e in generale una delle più alte prestazioni dell'attività puramente intellettuale dell'uomo",* per affidarsi nuovamente alle parole di Hilbert. Non che la strada cantoriana verso l'infinito, cioè il duplice concetto di numero ordinale e cardinale, sia l'unica scientificamente possibile. Esistono autorevolissimi approcci alternativi quali

- i *numeri iperreali*, o anche solo *iperinteri*, dell'analisi non standard di Abraham Robinson (Robinson, 1996), (Keisler, 1982),
- i *numeri surreali* di Conway (Conway, 2001), che del resto accolgono tra di sé pure gli ordinali,
- *numerosità* (Benci et al., 2012) e *grossoni* (Sergeyev, 2015)

e via dicendo (Lolli, 2012), (Benci & Freguglia, 2017). A proposito: nel 2018 ricorre un altro importante centenario, quello della nascita di Abraham Robinson, poi prematuramente scomparso nel 1974. Prendiamo comunque atto che neppure in tema di infinito c'è in matematica una via regia, meno che mai univoca. Tuttavia la teoria di Cantor è la prima, rivoluzionaria, coraggiosa, memorabile trattazione dell'argomento, e ha influenzato profondamente la matematica del Novecento e dei nostri giorni.

Scrive Ernst Zermelo, nella sua prefazione all'edizione completa delle opere di Cantor da lui curata nel 1932 (Cantor, 2012): *"Nella storia delle scienze è un caso veramente raro che un'intera disciplina di importanza fondamentale sia dovuta all'opera creativa di una sola persona. Questo caso si è verificato con la teoria degli insiemi, create da Georg Cantor"*.

Lo stesso Cantor rivela piena coscienza, e la giusta fierezza, dell'originalità della via da lui intrapresa. Altri prima di lui avevano iniziato a saggiarla: Galileo, solo per fare un esempio, quando aveva osservato certi paradossi dell'infinito (Galilei, 2011), e tra questi che i numeri naturali n sono tanti quanti i loro quadrati n^2, stante la corrispondenza biunivoca $n \to n^2$ che associa gli uni agli altri, e che ciò nonostante li contengono come sottoinsieme proprio. Ma poi, di fronte a simili stranezze, lo scienziato aveva ritenuto *"inconveniente"* addentrarsi nell'indagine. Cantor invece perseguì tenacemente la sua strada, convinto che all'infinito potenziale di Aristotele e a quello inaccessibile di Dio un terzo si potesse affiancare, da lui definito *"proprio"*, *"pensabile"* dalla nostra mente e come tale obiettivo sensato di una investigazione scientifica; che numeri transfiniti si potessero concepire e studiare e, conseguentemente, conteggi infiniti si potessero eseguire.

Agli entusiasmi di Hilbert si contrapposero tuttavia i dubbi e le critiche di chi riteneva improponibile uno studio matematico dell'infinito, come quello stesso Kronecker che di Cantor studente universitario era stato professore: *"Dio creò i numeri interi, tutto il resto è opera dell'uomo"* è la celebre frase che gli viene attribuita, pronunciata probabilmente durante un convegno a Berlino nel 1886. Come pure si possono citare le riserve espresse da un collega famoso come Poincaré all'ambiguità e alla vaghezza del concetto di insieme, così come inizialmente elaborato da Cantor. Scriveva allora Poincaré nel 1908 (Poincaré, 1909): *"Per conto mio io penso, e non sono il solo, che l'importante è di non introdurre mai che delle entità che si possano definire completamente con un numero finito di parole"*.

2. Cantor oggi

Lasciamo pure da parte tutte queste polemiche, ormai largamente superate, e veniamo piuttosto al centenario del 2018. Domandiamoci in particolare quale attualità manifesti il messaggio di Cantor nella scuola di oggi, e quanto sia, non dico raccomandabile, ma almeno appropriato parlarne. Sembra infatti, a proposito degli insiemi, che ridurne l'insegnamento ai diagrammi di Eulero-Venn e ad esercizi su unioni, intersezioni e complementi sia di nessuna utilità per gli studenti e che d'altra parte la teoria cantoriana vera e propria sia troppo complicata per arrischiarsi a introdurla nella scuola superiore. Del resto i ragazzi di oggi sembrano prediligere a speculazioni troppo astratte l'efficienza dei computer e degli smartphone, e la loro capacità di immagazzinare ed elargire quantità formidabili di dati e informazioni. È difficile dar loro torto. Ammoniva l'Amleto di Shakespeare: *"Ci son più cose in cielo e in terra, Orazio, che non ne sogni la tua filosofia"*, e noi potremmo rivolgere idealmente la stessa osservazione a Cantor. Potremmo anzi aggiungere che ancor più cose esistono nel software di un computer.

O non è forse vero il contrario? Scriveva Cantor nelle *Grundlagen*[‡] che il nostro pensiero può eseguire conteggi determinati anche su insiemi infiniti, dove invece a un calcolatore non è dato arrivare. Del resto, quante operazioni elementari può compiere in un secondo il supercalcolatore più potente? Sembrerebbe 10^{17}, cioè un uno con 17 zeri dietro, stando almeno alle informazioni desumibili in rete. Quanti secondi poi sono passati dall'inizio del

[‡] Per gli articoli di Cantor citati nel testo ci affidiamo alla traduzione italiana di Gianni Rigamonti in (Cantor, 2012) o, nel caso dei *Beiträge*, a quella inglese in (Cantor, 1955). Rimandiamo invece a (Lolli, 2013) per maggiori dettagli sull'opera complessiva di Cantor e sui concetti matematici trattati in questa nota.

mondo a oggi? Secondo la teoria del Big Bang, non più di 10^{19}. Dunque un supercalcolatore che avesse lavorato senza sosta per tutto questo tempo non sarebbe arrivato a 10^{36} operazioni. Aggiungiamo che una stima delle particelle elementari dell'universo – le *"cose in cielo e in terra"* di cui parla Amleto – le fissa in al massimo 10^{82}. Ne consegue che se ognuna di esse ospitasse un calcolatore dell'ultimissima generazione, e se questi computer avessero preso a operare tutti assieme all'inizio del mondo e ancor oggi proseguissero il loro lavoro, le operazioni elementari che avrebbero eseguito non supererebbero le 10^{118}. Ma la mente umana, perfino in un ragazzo con una minima dimestichezza con le potenze, può concepire e calcolare pure 10^{120}, cioè cento volte tanto, e molto oltre. Anche i computer, in verità. Ma la mente può immaginare addirittura l'infinito. Hans Enzensberger, l'autore del *Mago dei numeri* (Enzensberger, 2005), scrive a questo proposito nell'altra sua opera *Gli elisir della scienza* (Enzensberger, 2004): *"Pare essere un'idea fissa della pedagogia che i bambini non siano capaci di pensiero astratto. Mentre si tratta di una convinzione infondata. E' semmai giusto il contrario. Il concetto dell'infinitamente grande e dell'infinitamente piccolo è, per esempio, immediatamente accessibile a livello intuitivo per qualunque scolaro di nove o dieci anni"*.

Forse non solo ai bambini, ma pure agli adolescenti sono concesse la medesima capacità di stupirsi e la voglia di approfondire. Esistono in effetti testimonianze di esperienze didattiche che introducono ai ragazzi delle superiori i grandi numeri – come le gocce d'acqua di un oceano o i granelli di sabbia di un deserto – e giungono loro tramite agli infiniti di Cantor. Lo stesso *Mago dei numeri* di Enzensberger, pur rivolgendosi a un ragazzo che all'inizio del libro dichiara di odiare *"qualsiasi cosa abbia a che fare con la matematica"*, tuttavia lo accompagna un poco alla volta non solo all'infinità dei numeri interi, ma anche agli arcani di questa infinità, mostrandogli come al suo interno i pari e i dispari, apparentemente la metà degli elementi possibili, siano in realtà tanti quanti la loro totalità – un caso analogo ai quadrati di Galileo. Di Cantor il *Mago dei numeri* riferisce anche, brevissimamente, il *pulviscolo*, cioè l'insieme più che numerabile di misura nulla che si ritaglia progressivamente dall'intervallo $[0, 1]$ rimuovendo anzitutto la parte centrale $]1/3, 2/3[$, ripetendo poi l'operazione nelle ali rimanenti $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$ e via dicendo.

La strategia per accostare i ragazzi al mondo di Cantor è chiara e definita. Si comincia dall'evidente constatazione che gli usuali numeri naturali consentono di contare gli elementi di un insieme finito, ma non oltre. Si rileva poi, e si conferma facilmente con gli esempi, che due insiemi finiti condividono il numero degli elementi se e solo se si possono mettere in corrispondenza biunivoca. Si osserva infine come quest'ultima proprietà, cioè l'esistenza di una biiezione, si possa considerare, stabilire o smentire, anche per coppie di insiemi infiniti. E allora perché non introdurre i nuovi numeri – in questo caso i *cardinali* – come le classi della relazione di equivalenza tra insiemi che ne associa due esattamente quando si trovano in corrispondenza biunivoca? Troppo complicato per un ragazzo? Ma l'introduzione di numeri più familiari, quali i reali, i razionali, gli stessi interi, se svolta in dettaglio, con la cura dovuta, non è altrettanto astratta, se non di più?

Confrontare, dunque, invece di contare. Anzi confrontare per contare. Riprendendo – noi se non i nostri studenti – le parole famose di Cantor all'inizio dell'articolo *Contributo alla teoria delle molteplicità* del 1878: *"Mi sia concesso, se due insiemi M e N possono essere associati l'uno all'altro in modo univoco e completo, elemento per elemento (cosa che se è possibile in una maniera lo è sempre anche in molte altre), di dire d'ora in poi che tali insiemi hanno uguale potenza, o anche che sono equivalenti"*.

Cantor sottolinea opportunamente subito dopo che insiemi infiniti apparentemente distinti e lontani, addirittura l'uno sottoinsieme proprio dell'altro, possano condividere la stessa potenza – oggi si preferisce dire: la medesima cardinalità. Eventualità impensabile tra gli insiemi finiti, cui basta aggiungere o togliere un elemento per modificarne il numero. Eppure eventualità che ricorre largamente all'infinito, come mostrato dal *Mago dei numeri* e presagito da Galileo, al punto da avvalorare il sospetto che tutti gli insiemi infiniti siano, proprio in quanto tali, in corrispondenza biunivoca tra loro e quindi in definitiva esista un'unica cardinalità infinita. Le dovizie di esempi che intervengono a sostenerlo – di coppie di insiemi infiniti in biiezione tra loro – ne includono alcuni storicamente famosi e sorprendenti, come i due proposti nell'articolo cantoriano del 1878

- $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^2$ (la così detta *biiezione di Cantor*),
- $\mathbb{R}$. e $\mathbb{R}^2$ (il risultato che provocò il commento meravigliato che Cantor espresse al suo interlocutore Dedekind in una lettera del 1877, *"je le vois, mais je ne le crois pas"*),

come pure altri talora più semplici,

- $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ (l'*albergo di Hilbert*),
- $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$,
- $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$,
- la retta reale e un suo qualsiasi intervallo anche minuscolo,
- $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$.

Tra l'altro, le corrispondenze biunivoche che attestano questi risultati vengono espressamente prodotte caso per caso, fornendo in particolare per quegli insiemi, come $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, che esse collegano a $\mathbb{N}$ altrettanti algoritmi effettivi di numerazione, cioè di codifica mediante numeri naturali: circostanza che ha evidenti ricadute nella scienza dei moderni calcolatori, per i quali l'informazione è spesso tradotta in stringhe di cifre, dunque proprio in forma di numero. Molti degli esempi precedenti si possono allora proporre agli studenti con finalità anche pratiche, specie nei casi già segnalati di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ e $\mathbb{Q}$.

La corrispondenza biunivoca tra retta e segmento aperto è poi un semplice esercizio di trigonometria, poiché si affida alle proprietà della funzione tangente, ristretta all'intervallo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, e della sua inversa, l'arcotangente. La biiezione tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{C}$), ossia, per dirla in termini geometrici, tra retta e piano, o anche tra segmento e quadrato, è invece più delicata, ma non per questo meno capace di stupire – e non solo Cantor.

A proposito dei reali, non va poi dimenticato che proprio a Dedekind e a Cantor va attribuito principalmente il merito di averli introdotti rigorosamente a partire dai razionali nel 1872, il primo attraverso le *sezioni*, il secondo attraverso le *successioni di Cauchy*. I numeri reali, e specificamente il metodo di Dedekind, si insegnavano una volta nelle scuole secondarie. Chissà se lo si fa ancora. Confido di sì, perché gli irrazionali, e il teorema di Pitagora che per primo li insinua, sono una svolta della storia del pensiero classico, come giustamente sottolineato da Hardy in (Hardy, 2012). Non "razionali", cioè frazionari, meno che mai interi, tant'è che ciascuno di loro richiede una rappresentazione decimale – una sorta di carta di identità – *infinita* e imprevedibile. Numeri anch'essi nuovi, *"divino portento"* secondo Platone, opera sospetta dell'uomo stando invece a Kronecker. Tuttavia *ispirati dalla natura*, come la $\sqrt{2}$ del teorema di Pitagora, o il numero aureo, o il π che è il rapporto costante tra la misura di una circonferenza e quella del corrispondente diametro.

2. Diagonalizzando

Eppure già nel 1874, nell'articolo *Su una proprietà della classe di tutti i numeri reali algebrici*, Cantor aveva fornito (per dirla nei termini del lavoro successivo del 1878) la prova dell'esistenza di almeno due potenze, ovvero cardinalità, infinite distinte

- quella *numerabile* di $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, …
- la *potenza del continuo* di $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, …

Non c'è infatti biiezione, e in verità neppure funzione suriettiva, possibile di $\mathbb{N}$ su $\mathbb{R}$. Per la cronaca, la dimostrazione più famosa di questo teorema, quella col metodo della *diagonalizzazione*, compare in un articolo del 1890-91, *Su una questione elementare della teoria delle molteplicità*, che prova addirittura l'esistenza di non solo due, ma di un'infinitudine di cardinalità infinite. L'argomento originario del 1874 è altrettanto semplice e ingegnoso, ma meno conosciuto, oscurato forse dal taglio stesso dell'articolo, che sin dal titolo riserva la sua enfasi a questioni di algebra e polinomi. Come che sia, è lecito sostenere che la teoria dei numeri cardinali infiniti prende il suo avvio nel 1874. I numeri transfiniti, non solo i cardinali ma anche gli ordinali, si svilupperanno e affineranno poi in lavori successive di Cantor, soprattutto nelle già citate *Grundlagen* del 1883 e nei *Beiträge* (i *Contributi alla fondazione della teoria dei numeri transfiniti*) del 1895-97. Teorie estremamente sottili e complicate, certo inadatte ai ragazzi, forse da vietare sotto i 18 anni… Eppure perfino a quelle età si potrebbero forse evocare

- $\aleph_0$, alef con zero, il primo cardinale infinito,
- oppure ω, omega, il primo ordinale infinito,

e con loro tutti *"i vasti numeri che un uomo immortale non raggiungerebbe nemmeno se consumasse la sua eternità contando"* (Borges, 1994, *La cifra*, *Nihon*). Allo stesso modo si potrebbero azzardare e discutere esempi suggestivi, osservare quindi

- che $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ (l'argomento dell'albergo di Hilbert), perché l'infinità di $\mathbb{N}$ resta inalterata aggiungendole un nuovo elemento,
- oppure che $1 + \omega = \omega \neq \omega + 1$, perché l'ordine abituale di $\mathbb{N}$ rimane lo stesso se gli si premette un minimo, ma cambia se gli si aggiunge un massimo.

Tra l'altro, sulla prima uguaglianza $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ si basano un tentativo di spiegazione matematica del paradosso di Zenone su Achille e la tartaruga e di conseguenza, nelle aule scolastiche, un possibile collegamento con la filosofia. La spiegazione è quella presentata da Bertrand Russell (Russell, 1970), non in verità la più convincente sull'argomento. Procede tuttavia così. Finché le tappe successive della rincorsa di Achille alla tartaruga restano un numero finito n, l'animale mantiene comunque il suo vantaggio, seppure ridotto. Infatti alla posizione n di Achille corrisponde la $n + 1$ della tartaruga, e $n \neq n + 1$. Ma arrivati al passo $\aleph_0$ si ha appunto $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ e Achille corona l'inseguimento.

Tornando ai reali e ai naturali e al teorema cantoriano del 1874, si potrebbe poi accennare il mistero dell'*ipotesi del continuo*. In effetti, una volta stabilito che le potenze di $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ sono distinte, è lecito, anzi naturale, domandarsi se esistono sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ che hanno una cardinalità diversa dall'uno e dall'altro, né numerabile né continua, oppure se, viceversa, ogni sottoinsieme infinito di $\mathbb{R}$ si trova in corrispondenza biunivoca o con $\mathbb{N}$ o con $\mathbb{R}$. L'*ipotesi del continuo* corrisponde alla seconda di queste affermazioni.

Per anni Cantor tentò senza successo di dimostrarla. Nel 1900 Hilbert pose la questione al primo posto della sua famosa lista di 23 problemi e ancora nel 1925 provò ad abbozzare una possibile soluzione. Ma poi bisognò attendere il 1963 e Paul Cohen per avere una risposta, che poi non è così definitiva come taluni credono, e solleva anzi nuovi dubbi e nuovi interrogativi. Prova infatti che l'ipotesi del continuo non si può dirimere sulla base degli assiomi usuali della matematica, quelli proposti da Zermelo e Fraenkel all'inizio del Novecento. Dunque o si rinnovano questi assiomi, aumentandone la potenza, o ci si rassegna ad accogliere l'ipotesi stessa, o la sua negazione, al loro interno.

4. Matematica, follia e libertà

"[L]'essenza della matematica [...] sta proprio nella sua libertà": la frase di Cantor, tratta dal capitolo 8 delle *Grundlagen*, è diventata un aforisma famoso. Esprime però della matematica un'immagine anticonvenzionale, lontana da quella rigida e coercitiva che in genere le si attribuisce. Ribadisce anzi Cantor: *"la matematica merita – e lo merita essa sola – il nome di libera, un attributo che, se stesse a me scegliere, io preferirei a quello ormai usuale di pura"*. Cantor va pure oltre, negando che la stessa libertà sussista per la matematica più legata al mondo, all'esperienza sensibile, alla natura: *"se la matematica ha il diritto di muoversi in piena libertà e senza alcun vincolo metafisico, non posso invece riconoscere lo stesso alla «matematica applicata»"* che è invece priva del *"soffio vivificante del libero pensiero matematico"*. Insomma: la mente, quando guidata dalla realtà, perde la sua autonomia. Ora, non c'è dubbio che, nei passi citati, Cantor elogi anche se stesso e la capacità del suo pensiero di immaginare numeri che nessuna natura suggerisce, di abbozzare e scolpire teorie solide e profonde laddove – all'infinito – nessuna percezione visiva e sensoriale può fornire sostegno. Ma, al di là di questo, o forse proprio per questo, sembra davvero il caso di discutere con gli studenti il tema della libertà della scienza, in particolare della matematica pura, intesa come libertà di pensiero.

Come anche è raccomandabile dibattere con i ragazzi, e semmai contraddire, uno stereotipo diffuso su ricerca e ricercatori. Sembra infatti che le teorie scientifiche, come proposte e talora imposte a scuola, siano altrettanti sistemi dogmatici, rifiniti e inappuntabili. Tanto vale per la matematica e in particolare per l'aritmetica transfinita e per l'insiemistica, nel modo in cui vari solidi manuali le presentano. Allo stesso modo, lo scienziato è spesso percepito come genio infallibile, dedito a confezionare teorie irreprensibili sin dal loro concepimento. Cliché sbagliatissimi, specie nel caso di Cantor. La sua teoria degli insiemi nasce tra speranze e delusioni, plausi e critiche, errori e rettifiche, attraverso idee e concetti che, prima solo abbozzati, acquistano progressivamente e faticosamente un'identità e una forma, e talora, come per l'ipotesi del continuo, restano sospesi per anni in attesa di risposta. Credo che sia giusto sottolineare con gli studenti questo travaglio della ricerca, che è poi uno dei fattori del suo fascino. Niente meglio della vita di Cantor può esemplificarlo, quando ci testimonia l'angoscia per la difficoltà dei problemi da risolvere, la rabbia per l'ostilità dei colleghi, la conseguente voglia di distrarsi inseguendo interessi extra-matematici, filosofici e paraletterari e, soprattutto, il progressivo affievolimento della stagione creativa, fino alle progressive crisi nervose – frutto forse dell'usura delle ricerche svolte, e delle incomprensioni sopra accennate, o di una qualche predisposizione naturale, o di quel legame sottile che sembra collegare talora il genio alla follia. La mente di Cantor progressivamente cedette negli ultimi anni dell'esistenza, che egli trascorse spesso ricoverato in cliniche. E in uno di questi ricoveri morì, appunto agli albori del 1918.

Credo che pure questa sia storia della scienza, ed è bene che i ragazzi la conoscano. Ma al di là del decadimento fisico e mentale degli ultimi anni, Cantor consegna a noi e loro un patrimonio scientifico emozionante. Viene quasi voglia di celebrarlo ancora, magari affidandosi nuovamente a Borges, quando in (Borges, 1997), *Storia dell'eternità*, *La dottrina dei cicli*, evoca appunto *"Cantor e la sua eroica teoria degli insiemi"*. La scuola non dovrebbe trascurare questa eredità. Tuttavia, perché questa esortazione non resti soltanto un libro dei sogni, dovrei indicare come e dove parlare agli studenti di questo retaggio. Osservo allora che colleghi ben più autorevoli di noi auspicano da tempo un rinnovamento dei programmi di matematica, che li aprano, non dico solo a Cantor, ma certo alla matematica dell'Ottocento e del Novecento. Nell'attesa che questo auspicio si realizzi, segnalo le occasioni – come i laboratori PLS, o il Liceo Matematico – che già ora consentono di introdurre in modo adeguato agli studenti il fascino di questi argomenti.

Riferimenti bibliografici

Benci, V., Di Nasso, M. & Forti, M. (2006). *The eightfold path to nonstandard analysis*, in: *Nonstandard Methods and Applications in Mathematics*. (N.J. Cutland, M. Di Nasso and D.A. Ross, eds.), Lecture Notes in Logic 25, ASL, Natick MA: AK Peters, pp. 3-44.

Benci, V. & Freguglia, P. (2017). *Alcune osservazioni sulla matematica non archimedea*. Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie I, Vol. 1, pp. 105-121.

Borges, J. L. (1994). *Tutte le opere*, Volume primo. Milano: Mondadori. Contiene *Storia dell'eternità*, pp. 517-615, in particolare *La dottrina dei cicli*, pp. 568-578.

Borges, J. L. (1997). *Tutte le opere,* Volume secondo. Milano: Mondadori. Contiene *La cifra*, pp. 1144-1259, in particolare *Nihon*, pp. 1254-1255.

Cantor, G. (2012). *La formazione della teoria degli insiemi*. A cura di G. Rigamonti, Milano: Mimesis.

Cantor, G. (1955). *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. A cura di P. Jourdain, New York: Dover.

Cantor, G. (2012). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. A cura di E. Zermelo, Berlin: Springer (edizione originaria 1932).

Conway, J. H. (2001). *On Numbers and Games.* Second edition, Natick, MA: AK Peters.

Dauben, J. W. (1990). *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton: University Press.

Dedekind, R. (1983). *Scritti sui fondamenti della matematica*. A cura di F. Gana, Napoli: Bibliopolis.

Enzensberger, H. M. (2004). *Gli elisir della scienza*. Torino: Einaudi.

Enzensberger, H. M. (2005). *Il mago dei numeri*. Torino: Einaudi.

Galilei, G. (2011). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti la meccanica e i movimenti locali*. Verona: Cierre.

Hardy, G. H. (2002). *Apologia di un matematico*. Milano: Garzanti.

Hilbert, D. (1978). *Ricerche sui fondamenti della matematica*. A cura di V. M. Abrusci, Napoli: Bibliopolis. Contiene *Problemi matematici*, pp. 145-162, e *Sull'infinito*, pp. 233-266.

Keisler, H.J. (1982). *Elementi di analisi matematica*. Padova: Piccin Editore.

Lolli, G. (2012). *Infinitesimals and infinites in the history of Mathematics: A brief survey*. Applied Mathematics and Computation, 218 (16), pp. 7979-7988.

Lolli, G. (2013). *Nascita di un'idea matematica*. Pisa: Edizione della Normale.

Nastasi, P., a cura di (2002). *Georg Cantor e Richard Dedekind, Lettere 1872-1899*. PRISTEM/Storia, Note di Matematica, Storia e Cultura, Vol. 6, Milano: Springer-Italia.

Poincaré, H. (1909). *L'avenir des mathématiques*. *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma, 6-11 aprile 1908*, Roma: Tipografia Reale Accademia dei Lincei, pp. 167-182.

Robinson, A. (1996). *Non-standard Analysis*. Princeton: University Press. Traduzione italiana (2013): *Analisi non standard*. Roma: Aracne.

Russell, B. (1970). *Misticismo e logica e altri saggi*. Milano: Longanesi. Contiene *La matematica e i metafisici*, pp. 71-92.

Sergeyev, Y. D. (2015). *Un semplice modo per trattare le grandezze infinite ed infinitesime*. La Matematica nella Società e nella Cultura, Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie I, Vol.8, 111-147