Science & Philosophy **ISSN**: 2282-7757
Vol. 6(2), 2018, pp. 187-196 **eISSN**: 2282-7765

Art Gallery Theorems
(Teoremi della Galleria d’Arte)

Luigi Togliani[*]

Received: 30-09-2018. Accepted: 25-12-2018. Published: 31-12-2018

doi: 10.23756/sp.v6i2.440

Abstract

Some important results about art gallery theorems are proposed, starting from Chvátal’s essay, using also polygon triangulations and orthogonal polygons.
Keywords: art gallery; polygon triangulations; orthogonal polygon.

Sunto

Sono proposti alcuni importanti risultati sui teoremi della galleria d’arte, a partire dal contributo di Chvátal, usando anche triangolazioni di poligoni e poligoni ortogonali.
Parole chiave: galleria d’arte; triangolazioni di poligoni; poligoni ortogonali.

1 Introduzione

Quanti guardiani posti in posizioni fisse sono necessari per sorvegliare una galleria d’arte? Questo curioso problema fu posto dal matematico statunitense Victor Klee (1925-2007) durante un simposio a Stanford nel 1973 (O’Rourke,

[*] Liceo Scientifico “Belfiore”, Mantova (Italy); luigi.togliani@gmail.com.

1987). Il problema si riferisce a guardiani che, stando in un punto fisso della galleria, siano in grado di sorvegliarla guardando a 360°, cioè in tutte le direzioni. Una questione equivalente è quella di chiedersi quante lampadine o videocamere è necessario posizionare per illuminare o controllare completamente una galleria d'arte.

2 Galleria d'Arte: il Teorema di Chvátal

Rappresentiamo la galleria d'arte come un poligono *P* piano e semplice (cioè tale che due suoi lati possano avere in comune al più un punto di *P* ; in tal caso il punto comune sarà un vertice di *P*). Il poligono *P* è costituito dal suo contorno (o frontiera) e dai suoi punti interni. Si dice che un punto *A* di *P* è *visibile* da un punto *B* di *P* se il segmento [*AB*] è incluso in *P*. Un insieme di punti (detti *guardiani*, *watchmen*) di *P copre P* se ogni punto di *P* è visibile da almeno un guardiano. Il minimo numero di guardiani necessari per coprire il poligono *P* dipende dal numero *n* di lati di *P*, ma non solo (figura 1).

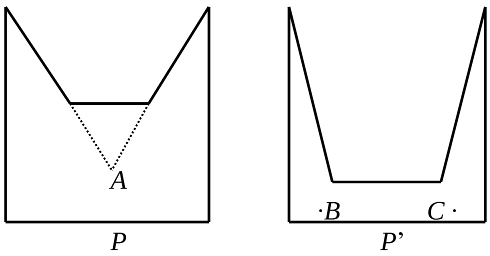


Figura 1. Il guardiano *A* copre *P*; *B* non copre *P*'; *C* non copre *P*'.

Si può provare che un guardiano basta per coprire un qualunque poligono convesso; un guardiano basta anche per coprire un quadrilatero o un pentagono, anche se sono concavi, o un poligono stellato (figura 2).

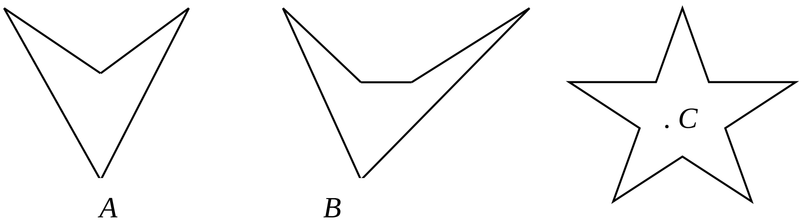


Figura 2. I guardiani posti in *A*, *B* e *C* coprono i rispettivi poligoni.

Ma per coprire un esagono possono essere necessari due guardiani: in figura 1 l'esagono *P* è coperto dal solo guardiano *A*, mentre l'esagono *P*' necessita di due guardiani, per esempio *B* e *C*.
Se *n* è multiplo di 3, un poligono di *n* lati (o *n*-agono) può avere la forma di un *pettine* (di Chvátal) con *n*/3 *denti*; esso presenta 2(*n/*3-1) angoli interni concavi, raggruppati a due a due; i gruppi di due angoli concavi sono intercalati da un angolo convesso (dente) o, in un solo caso, da 4 angoli convessi, due dei quali sono denti del poligono. Si nota che sono necessari *n/*3 guardiani per coprire un pettine con *n/*3 denti: in figura 3 il 18-agono, pettine con 6 denti, è coperto dai 6 guardiani *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*.

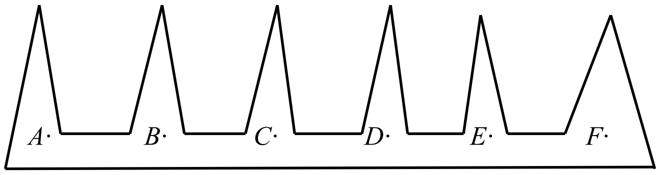


Figura 3. Occorrono 6 guardiani per coprire il 18-agono.

Quindi per il 18-agono di figura 3 sono necessari $\lfloor 18/3 \rfloor$ guardiani, mentre per il 6-agono *P* di figura 1 sono sufficienti $\lfloor 6/3 \rfloor - 1$ guardiani[1]. Questi esempi sono casi particolari di una situazione generale trattata da un teorema formulato e dimostrato dal matematico di origine praghese Václav (Vásek) Chvátal (1946) nel 1975 (Chvátal, 1975). Il teorema è stato ripreso da altri matematici in varie occasioni (O'Rourke, 1987).

Teorema della galleria d'arte (Chvátal) - Per coprire un poligono di *n* lati (*n*-agono) sono sempre sufficienti $\lfloor n/3 \rfloor$ guardiani; per alcuni *n*-agoni sono necessari $\lfloor n/3 \rfloor$ guardiani.

L'esistenza degli *n*-agoni a pettine di Chvátal prova che per coprire certi *n*-agoni sono necessari $\lfloor n/3 \rfloor$ guardiani.
Il teorema della galleria d'arte di Chvátal può essere riformulato usando particolari classi di poligoni, come sarà detto nel seguito di questo articolo.

[1] Il simbolo $\lfloor k \rfloor$ indica la parte intera di *k*, cioè il più grande intero minore o uguale al numero reale *k*.

3 Una Prova del Teorema di Chvátal

Nel 1978 Steve Fisk diede una dimostrazione più breve di quella fornita da Chvátal al teorema della galleria d'arte (Fisk, 1978). Per riprendere tale dimostrazione è necessario premettere una definizione e un lemma facilmente dimostrabile.
Suddividiamo il poligono semplice *P* in triangoli usando solo diagonali e lati di *P*, in modo che le diagonali scelte non si intersechino tra loro, né intersechino lati di *P* in punti che non siano vertici di *P*. Questa suddivisione si chiama *triangolazione* del poligono *P*. Si dimostra la seguente proposizione.

Lemma – Ogni *n*-agono semplice *P* possiede almeno una triangolazione; ogni triangolazione di *P* è costituita da *n*-2 triangoli e da *n*-3 diagonali.

Dimostriamo ora il teorema della galleria d'arte. Una volta ottenuta una triangolazione di un poligono *P*, viene assegnato a ciascun vertice di *P* un colore (rosso, verde o blu) in modo che due vertici adiacenti (cioè collegati da un lato o da una diagonale di *P*) abbiano colori diversi. Si dimostra che i vertici di un poligono sono sempre colorabili con tre colori. Si nota che ogni triangolo ha i vertici di tre colori diversi. Inoltre ogni punto di ogni triangolo è visibile da un qualunque vertice del triangolo. Pertanto, scegliendo come guardiani di *P* solo i vertici di uno stesso colore, essi sono in grado di coprire l'intero poligono *P*. Quanti di tali guardiani servono per coprire *P*? Detto *n* il numero dei vertici di *P*, per il principio della piccionaia (*pigeon-hole principle*) c'è almeno un colore cui competono al massimo $\lfloor n/3 \rfloor$ guardiani che coprono *P*; e questo prova quanto si voleva dimostrare.

Per il 11-agono in figura 4 le 3 guardie poste nei vertici blu *D*, *H* e *K* bastano per coprire l'intero poligono.

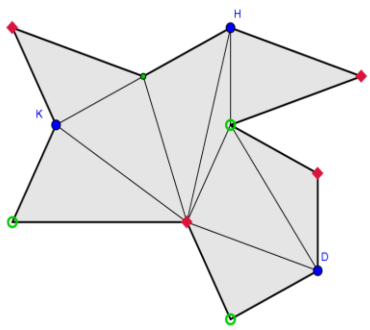
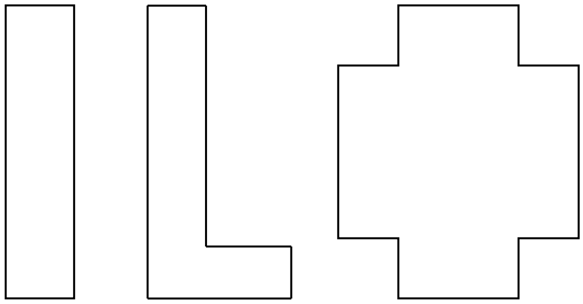


Figura 4. Le guardie poste in *D*, *H* e *K* coprono l'intero 11-agono.

4 Poligoni Ortogonali

Difficilmente una galleria d'arte presenta una planimetria del tipo di quelle illustrate nelle precedenti figure; più facilmente essa avrà le sembianze di un poligono ortogonale.
Un *poligono* semplice si dice *ortogonale* se i suoi lati sono tutti paralleli o ortogonali ad una retta prefissata del piano. Quindi in un poligono ortogonale un lato 'orizzontale' è sempre seguito da uno 'verticale' e un qualunque angolo interno o è retto o è l'esplementare di un angolo retto. I rettangoli sono gli unici poligoni ortogonali convessi. Un poligono ortogonale ha sempre un numero n pari di lati, con $n \geq 4$.
In figura 5, oltre al rettangolo P, è rappresentato l'esagono P' con un angolo interno concavo e il dodecagono P" con 4 angoli interni concavi.



P *P*' *P*"

Figura 5. Poligoni ortogonali.

Relativamente agli angoli interni di un poligono ortogonale si può facilmente dimostrare il seguente teorema.

Teorema (O'Rourke) – In un n-agono ortogonale il numero k degli angoli interni retti è tale che: $k = 2 + n/2$.

Infatti se k è il numero degli angoli retti dell'n-agono, n-k è quello degli angoli esplementari di un angolo retto. La somma degli angoli interni del poligono ha ampiezza pari a: $k \cdot 90° + (n\text{-}k) \cdot 270° = (n\text{-}2) \cdot 180°$. Da qui segue che $k = 2 + n/2$.

Quindi un esagono ortogonale ha 5 angoli interni retti, mentre un dodecagono ne avrà 8. Si osservi che affermare quanto sopra equivale a dire che "in un n-agono ortogonale il numero r degli angoli interni concavi è tale che: $r = n/2 - 2$" (Urrutia, 2004).

5 Galleria d'Arte Ortogonale

Quanti guardiani sono sufficienti per coprire un *n*-agono ortogonale? In figura 6: il 16-agono di sinistra (a 'pettine') necessita di 4 guardiani, posti per esempio in *B*, *Q*, *R* e *C*; invece il 16-agono di destra (a 'scala') necessita solo di 3 guardiani, collocati per esempio in *S*, *G* e *T*.

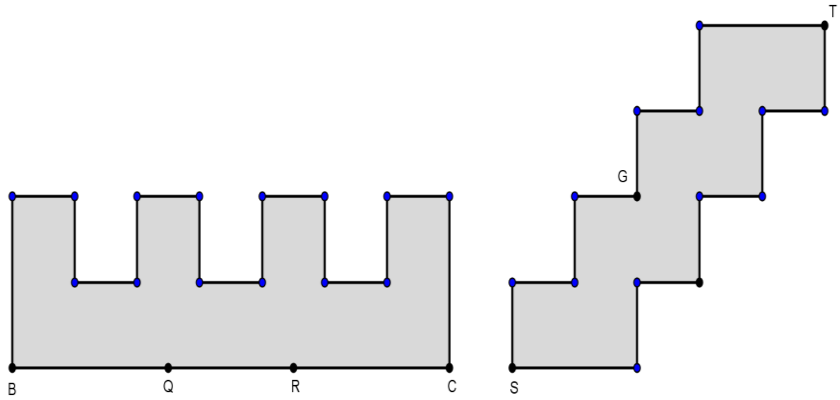


Figura 6. Guardiani per poligoni ortogonali.

Nel 1980 Jeff Kahn (1950), Maria Klawe (1951) e Daniel Kleitman (1934) provarono la seguente versione del teorema della galleria d'arte relativa a poligoni ortogonali (Kahn, 1980).

Teorema della galleria d'arte ortogonale (Kahn, Klawe, Kleitman) – Per coprire un poligono ortogonale di *n* lati sono sempre sufficienti $\lfloor n/4 \rfloor$ guardiani; per alcuni *n*-agoni sono necessari $\lfloor n/4 \rfloor$ guardiani.

Analogamente a quanto visto per il teorema di Chvátal, occorre suddividere il poligono ortogonale *P* in quadrilateri convessi non aventi punti interni in comune, ciascuno dei quali ha per lati sia lati che diagonali di *P*. Si dimostra che ogni poligono ortogonale *P* è suddivisibile in quadrilateri convessi (Kahn, 1980; O'Rourke, 1987). Fatta la suddivisione di *P* in quadrilateri convessi, si attribuisce a ciascun vertice di ogni quadrilatero un differente colore o simbolo tra quattro prescelti. Prendendo tutti i vertici (guardiani) di *P* con lo stesso colore si nota che tali vertici, in numero massimo di $\lfloor n/4 \rfloor$, bastano a coprire *P*.

In figura 7 nel dodecagono di sinistra occorrono $\lfloor 12/4 \rfloor = 3$ guardiani (per esempio quelli contraddistinti con un +) per coprire l'intero poligono; nel dodecagono di destra, invece, bastano 2 guardiani, quelli individuate dal simbolo ×.

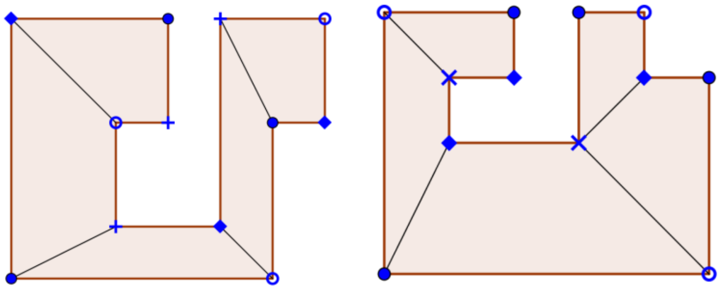


Figura 7. Poligoni ortogonali suddivisi in quadrilateri.

6 Poligoni Ortogonali con Buchi

Il problema di coprire o illuminare una galleria d’arte presenta formulazioni diverse a seconda della forma che tale galleria assume. Molto frequente è il caso della galleria d’arte pensata come un poligono da cui sono sottratti uno o più poligoni (detti *buchi*), caso che si presenta spesso nelle planimetrie di gallerie d’arte (o appartamenti) reali. Se il poligono è ortogonale anche i buchi saranno poligoni ortogonali con lati paralleli a quelli del poligono di partenza. Il numero n dei lati (o dei vertici) di un poligono ortogonale con h buchi è dato dalla somma del numero dei lati (o dei vertici) del poligono esterno con il numero di lati (o dei vertici) di ciascun buco (figura 8).

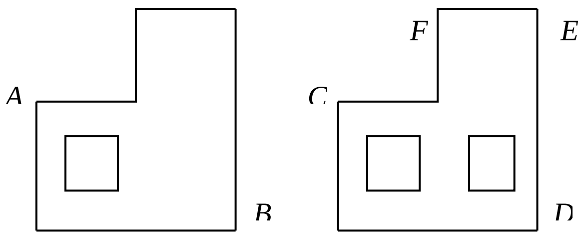


Figura 8. Poligoni con buchi: a sinistra n=10, h=1; a destra n=14, h=2.

Il problema della galleria d’arte è stato studiato anche in casi di questo tipo. Nel 1982 Thomas C. Shermer avanzò la seguente:

Congettura (Shermer) - Un poligono ortogonale con n vertici e h buchi può sempre essere coperto da $\left\lfloor \frac{n+h}{4} \right\rfloor$ guardiani posti nei vertici del poligono.

La congettura di Shermer può essere facilmente verificata per i poligoni ortogonali in figura 8: per coprire il poligono di sinistra bastano i

$\left\lfloor \frac{10+1}{4} \right\rfloor = 2$ guardiani posti in *A* e in *B*; per quello di destra occorrono invece $\left\lfloor \frac{14+2}{4} \right\rfloor = 4$ guardiani, ad esempio quelli posti nei vertici *C*, *D*, *E* e *F*.
Nel 1984 la congettura di Shermer fu provata da Alok Aggarwal per h = 1, 2 (Aggarwal, 1984; Zylinski, 2006). Qualche anno dopo O'Rourke dimostrò il seguente teorema (O'Rourke, 1987).

Teorema (O'Rourke) - Un poligono ortogonale con n vertici e h buchi può sempre essere coperto da $\left\lfloor \frac{n+2h}{4} \right\rfloor$ guardiani posti nei vertici del poligono.
Un più recente risultato è stato fornito da Hemanshu Kaul: bastano $\left\lfloor \frac{n+5h/3}{4} \right\rfloor$ guardiani posti nei vertici per coprire un poligono ortogonale con n vertici e h buchi (Kaul, 2014).
Si stacca dai precedenti il seguente risultato ottenuto da Frank Hoffmann e Klaus Kriegel, in quanto il numero minimo di guardiani è indipendente dal numero dei buchi (Hoffmann, 1996).

Teorema (Hoffmann, Kriegel) - Un poligono ortogonale con n vertici e h buchi può sempre essere coperto da $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ guardiani posti nei vertici del poligono.
Confrontando questo teorema con la congettura di Shermer, risulta che da $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n+h}{4} \right\rfloor$ segue $n \geq 3h$. Quest'ultima condizione si verifica senz'altro perché ogni buco del poligono ortogonale P comporta l'aggiunta di almeno 4 lati a n ; quindi, se P ha h buchi risulta: $n \geq 4+4h > 3h$. Ad esempio, il poligono ortogonale in figura 9 presenta n=12 e h=2 ed è coperto dai 3 guardiani posti in *A*, *B* e *C* , coerentemente al limite congetturato da Shermer; mentre il limite di Hoffmann-Kriegel prevede la presenza di 4 guardiani.

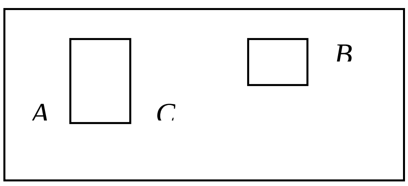


Figura 9. Poligono con buchi: n=12, h=2.

7 Conclusione

Altre estensioni del teorema della galleria d'arte riguardano casi in cui i guardiani: sono mobili lungo un lato del poligono o lungo un segmento qualsiasi; oppure sono fissi, ma hanno una visibilità limitata, per esempio a 180° o a 90° (Urrutia, 2004).
Un settore particolare della ricerca è indirizzato ai poligoni ortogonali con vertici posti nei nodi di una griglia ortogonale a maglie quadrate (Bajuelos, 2007); un altro si rivolge a poligoni con contorni curvilinei (Karavelas, 2009).
Per molti dei casi studiati sono stati costruiti algoritmi che consentono di tradurre i problemi della galleria d'arte in ambito informatico (O'Rourke, 1987; Elnagar, 2004).
Concludendo, occorre far presente che molte sono le applicazioni dei teoremi della galleria d'arte in matematica computazionale, in robotica, nei sistemi di sicurezza, nella programmazione di video game, nell'architettura supportata dal computer e in altri settori (Elnagar, 2004).

Bibliografia

[1] Aggarwal A. (1984). The Art Gallery Theorem: Its Variations, Applications, and Algorithmic Aspects. Ph.D. Thesis, The Johns Hopkins University.

[1] Bajuelos, A.L.; Canales, S.; Hernández, G. and Martins, M. A. (2007). "Solving some Combinatorial Problems in grid n-ogons". International Journal on Mathematics and Computers in Simulation, 2, 1, 177-183.

[2] Chvátal, V. (1975). "A combinatorial theorem in plane geometry". Journal of Combinatorial Theory (B) 18, 39-41.

[3] Elnagar, A. and Lulu, L. (2004). "Guarding polygons with holes for robot motion planning applications". *2004 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, 1, 923-928.

[4] Fisk, S. (1978). "A Short Proof of Chvátal's Watchman Theorem". Journal of Combinatorial Theory (B) 24, 374.

[5] Hoffmann F.; Kriegel K. (1996). "A graph coloring result and its consequences for polygon guarding problems". SIAM J. Discrete Mathematics, 9(2), 210-224.

[6] Kaul, H. (2014). The Art Gallery Problem. Chicago: Illinois Institute of Technology.

http://www.math.iit.edu/~kaul/talks/LongArtGalleryTalk.pdf (ultimo accesso: 19-07-2018).

[7] Kahn, J.; Klawe, M.M. and Kleitman, D. (1980). "Traditional Galleries Require Fewer Watchmen". SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods. 4. 10.1137/0604020.

[8] Karavelas, M.I.; Toth, C.D. and Tsigaridas, E.P. (2009). "Guarding curvilinear art galleries with vertex or point guards". Computational Geometry, 42, 522–535.

[9] O'Rourke, J. (1987). Art Gallery Theorems and Algorithms. New York-Oxford: Oxford University Press.

[10] Urrutia, J. (2004). Art Gallery and Illumination Problems. Mexico City: Instituto de Matemáticas Universitad Autonoma de Mexico.

[11] Zylinski, P. (2006). "Orthogonal art galleries with holes: a coloring proof of Aggarwal's Theorem". The Electronic Journal of Combinatorics, 13, 1-10.