Science & Philosophy **ISSN**: 2282-7757
Vol. 6(1), 2018, pp. 127--135 **eISSN**: 2282-7765

From De Finetti to Today: Against the Domain of Mathematics for Deficients (Da De Finetti a Oggi: Contro il Dominio della Matematica per Deficienti)

Andrea Laforgia[1]

Received: 03-05-2018. **Accepted**: 01-06-2018. **Published**: 30-06-2018

doi: 10.23756/sp.v6i1.418

Abstract

We present original remarks on some possible applications of classical results of Calculus. Suggestions to the higher schools' teachers are also given.

1. Introduzione

In una Nota ormai classica [1], dall'eloquente titolo "Contro la 'Matematica per Deficienti' " De Finetti esprimeva forti critiche a un certo modo di insegnare e di imparare la Matematica in "forme 'adatte per deficienti', ossia per persone prive della capacità di vedere le cose in grande o impedite di, manifestarla, per limitarsi ad accumulare piccole insipide sterili sconnesse formali nozioncine didattiche".

[1] Dipartimento di Matematica e Fisica, Università di Roma 3, Largo San Leonardo Murialdo, 1; laforgia@mat.uniroma3.it.

Va da sé che tale “modo di insegnare” è del tutto inadatto alla formazione matematica dello studente e contribuisce a mantenere scadenti le capacità critiche dell’allievo.

Il pensiero di De Finetti ha ancora oggi parecchi aspetti di attualità. Di ciò mi sono occupato nel lavoro [3] dove ho suggerito al docente di Matematica (quello intelligente, premuroso e con elevato senso de dovere) alcuni spunti di riflessione utili a superare sacche di resistenza, purtroppo ancora esistenti, finalizzate alla conservazione del modo di insegnare e di imparare così ben descritto da De Finetti.

Nel presente lavoro sono sottoposti all’attenzione dei docenti alcuni scenari critici desunti da problemi specifici dell’Analisi matematica. Ritengo che sotto la sapiente e insostituibile guida del docente, ciascuno degli argomenti qui suggeriti possa essere collocato nelle pertinenti classi di scuola secondaria superiore.

2. Funzione Costante e Derivata Nulla

Alcuni anni fa, durante un convegno Mathesis, prendendo lo spunto da un quesito assegnato all’esame di Stato, ci si trovò a discutere la seguente “proprietà”: se una funzione ha derivata prima uguale a zero in ogni punto del suo dominio, allora essa è costante. Il “teorema” in questione è palesemente falso come immediatamente si verifica osservando la figura 2.1 dove è riportato il grafico della funzione

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} 1, \text{se } x > 0 \\ -1, \text{se se } x < 0 \end{cases}$$

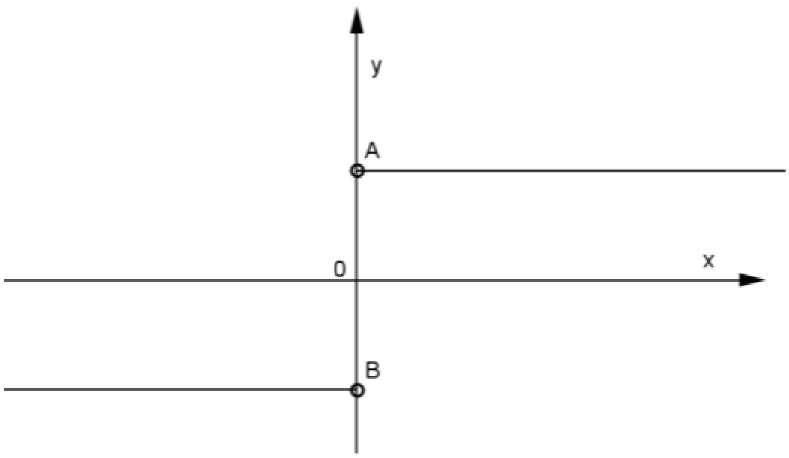

Figura 2.1

Questa funzione è definita in ogni $x \in R - \{0\}$, ha derivata nulla in ogni punto del suo dominio, ma non è costante, perché non assume un solo valore, $f(x) = k$, bensì due valori: 1 e -1. Durante il convegno feci notare a un autorevole dirigente dell'associazione il mio punto di vista opposto al suo. Egli si ostinò a difendere tenacemente la propria opinione e continuò a sostenere la sua tesi, anche quando il mio collega Luigi Verolino, presente al convegno, fornì ulteriori spiegazioni e esempi a favore delle mie argomentazioni sulle quali peraltro tutti gli altri presenti concordavano. L'insistenza del docente mi fece ritenere che il suo punto di vista potesse derivare da una lettura superficiale di un testo di un matematico autorevole.

E così torniamo a De Finetti. In [2, pag. 370] De Finetti scrive: "… essa ha infatti derivata $g'(x) - f'(x) = 0$, sicché ci si riduce a dimostrare che una funzione che non sia costante non può avere una derivata sempre nulla…"

Vale a dire: soltanto le funzioni costanti hanno derivata nulla. Questa affermazione sembrerebbe dar ragione alla mia controparte: solo una funzione costante può avere derivata nulla. Lo dice De Finetti! Ma leggiamo la frase di De Finetti nella sua interezza:

"…, e ciò lo dice appunto il teorema di Lagrange perché, se è $f(b) \neq f(a)$ esiste entro (a, b), un punto x_0 in cui

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \neq 0.$$

Insomma, De Finetti fa riferimento al Teorema di Lagrange di cui si era occupato in precedenza, valido, com'è noto, sotto le condizioni che f sia continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo aperto (a, b). La corretta versione del "teorema" precedente è la seguente.

Se la funzione f è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) e se $f'(x) = 0$ per ogni $x \epsilon (a, b)$, allora f è costante in (a, b).

Ho avuto modo di verificare che questo tipo di errore è piuttosto frequente tra gli studenti e ne ho dedotto che i docenti dovrebbero porre molta attenzione a questi problemi. L'invito è perciò a esaminare con attenzione le ipotesi dei teoremi studiati e a verificare attraverso controesempi, come la conclusione (tesi) di un teorema sia erronea quando viene meno anche una sola delle ipotesi.

3. Il Teorema di Rolle

Il Teorema di Rolle è ben noto e non è il caso di starlo qui a richiamare. Altrettanto note sono alcune sue semplici applicazioni, alcune delle quali richieste in anni recenti (e precisamente due anni fa) nella risoluzione di quesiti posti all'esame di Stato.

Per esempio, il teorema torna utile (ma non è indispensabile) per provare che l'equazione

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{e^x} + \mathrm{x} = 0$$

ammette una e soltanto una radice reale.

E' subito visto che $f(0) = 1 > 0, f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$ e quindi esiste una radice x_1 reale tra -1 e 0.

Per provare che essa è unica, basta supporre per assurdo che ne esista un'altra x_2. Allora sull'intervallo $[x_1, x_2]$ potrebbe applicarsi il teorema di Rolle per il quale esisterebbe un punto x^*, tale che $f'(x^*) = 0$. Ma ciò è assurdo perché $f'(x) = e^x + 1$ è sempre maggiore di zero.

In questo paragrafo ci occupiamo di alcune insolite applicazioni del teorema di Rolle. Non sono stato in grado di trovare simili applicazioni in letteratura.

3.1 Sia f una funzione che soddisfa alle ipotesi del teorema di Rolle, continua su $[a, b]$, derivabile su (a, b) e tale che $f(a) = f(b) = 0$. Provare che esiste almeno un punto $c \in (a, b)$, per il quale

$f(c) + cf'(c) = 0, \ c \in (a, b)$.

Soluzione. Posto $g = xf(x)$, è subito visto che la funzione g soddisfa tutte le condizioni del teorema di Rolle.

Dunque esiste un punto $c \in (a, b)$, tale che

$$g'(c) = f(c) + cf'(c) = 0, \ c \in (a, b).$$

Un interessante caso particolare del precedente risultato si ha quando $f(x) = senx, a = 0, \ b = \pi$. Allora esiste almeno un punto $c \in (0, \pi)$, tale che

$senc + ccosc = 0, \quad c \in (0, \pi)$.

Vale a dire: l'equazione $tgx = -x$ ha almeno una soluzione sull'intervallo $(0, \pi)$.

Osservazione. Il risultato può estendersi facilmente a ogni intervallo $(n\pi, (n+1)\pi), n = 0,1,2$ ... ottenendo così la proprietà più generale, che l'equazione $tgx = -x$ ha almeno una soluzione su ogni intervallo $(n\pi, (n+1)\pi), n = 0,1,2$ ...

3.2 La funzione f soddisfi tutte le ipotesi del teorema di Rolle sull'intervallo (a, b). Sia k una costante reale.

Allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = kf(c)$.

Soluzione. Sia $g(x) = e^{-kx}f(x)$. Allora la funzione g soddisfa tutte le condizioni del teorema di Rolle. Dunque esiste un punto $c \in (a,b)$: $g'(c) = 0$, ovvero

$g'(c) = -ke^{-kc}f(c) + e^{-kc}f'(c) = 0,$

$e^{-kc}[f'(c) + kf(c)] = 0,$

$f'(c) = kf(c).$

Se, come nell'esempio precedente, scegliamo $f(x) = senx$, otteniamo che su ogni intervallo $[n\pi, (n+1)\pi], n = 0,1,2 \dots$ la funzione tgx assume tutti i valori reali e perciò è suriettiva! Una impensabile connessione tra il teorema di Rolle e le funzioni suriettive.

Invitiamo il docente interessato a considerare ulteriori casi in cui la funzione g assume forme differenti.

4. Le Funzioni. Comuni Credenze e … ci Vuole Ordine

Invitiamo il docente a fornire una risposta ai quesiti che seguono e quindi a proporli in classe (prevalentemente nell'ultima classe di Liceo scientifico).

Stabilire se sono vere o false le seguenti affermazioni.

a) Se una funzione f è continua e decrescente per ogni $x > 0$ e $f(x) > 0$, allora la funzione ha esattamente una radice.

b) Se una funzione f ammette una inversa su (a,b) allora f è crescente o decrescente su (a,b).

c) Una funzione f è limitata su $\mathbb{R}$ se per ogni $x \in \mathbb{R}$, esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$.

Soluzioni

a) L'affermazione è falsa. Si consideri infatti la funzione $y = \frac{1}{x}$. Essa è continua e decrescente per tutti i valori positivi di x.

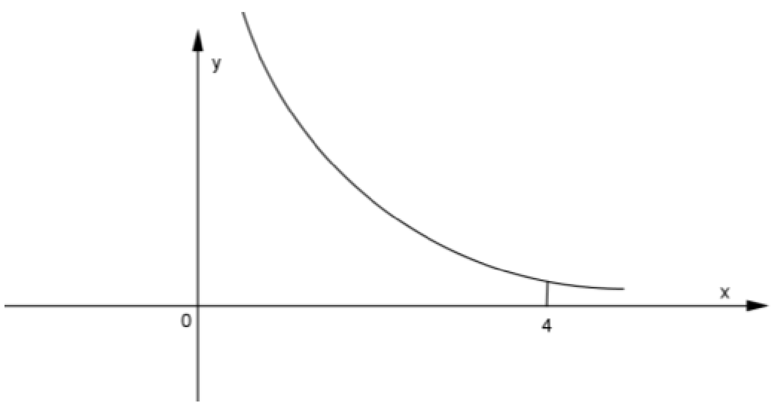

Figura 4.1

Tuttavia non esiste alcun valore positivo di x in cui f si annulli

b) L'affermazione è falsa. Basta osservare la figura 4.2

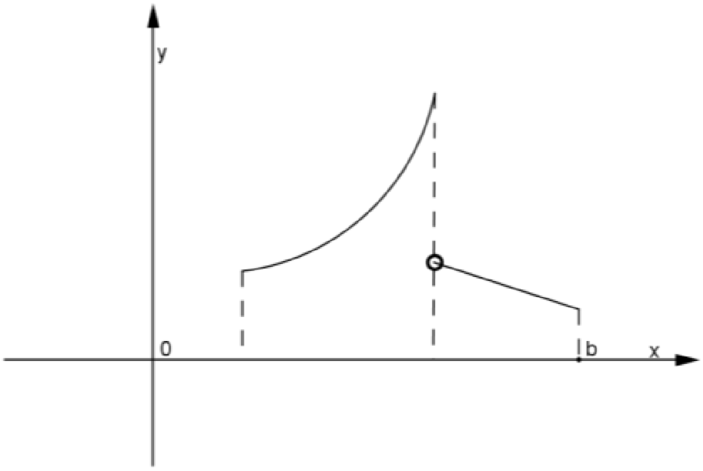

Figura 4.2

Il grafico della funzione mostra che f è biunivoca su (a, b), ma non è crescente, né decrescente su (a, b).

c) L'affermazione è falsa. Infatti se consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ per ogni valore reale di x, vediamo che c'è un numero $M > 0$ (per esempio $x^2 + 1$), tale che $|f(x)| \leq M$, mentre com'è noto, $f(x) = x^2$ è illimitata.

Si tratta di un errore frequente da parte degli alunni. L'ordine in cui è presentata la definizione è di fondamentale importanza: *una funzione f è limitata su $\mathbb{R}$ se esiste un $M > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$.*

E ora la ciliegia sulla torta.

Se f non è monotona su (a, b), allora la funzione quadrato f^2 non può essere monotona su (a, b).

Anche questa affermazione è falsa. Basta considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{se } x \text{ è razionale} \\ -x, \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

sull'intervallo $(0, +\infty)$. Il grafico è riportato nella figura 4.3.

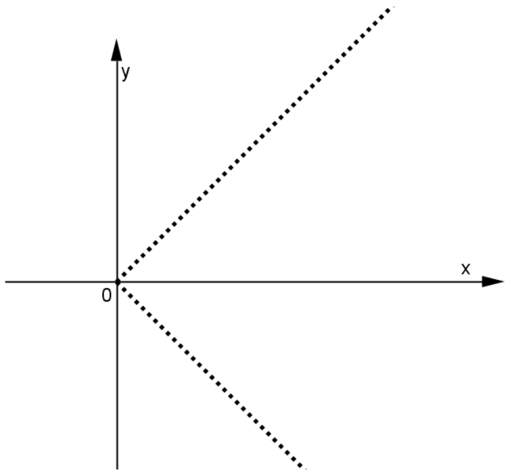

Figura 4.3

Chiaramente questa funzione non è monotona, ma il suo quadrato $f^2(x) = x^2, x > 0$ lo è.

5. L'integrale

Chiudiamo il presente lavoro con tre considerazioni relative agli integrali.

a) Il calcolo di $\int cos^2xdx$ e $\int sen^2xdx$ può farsi in più modi. Per esempio possiamo risolvere per parti il primo e calcolare il secondo attraverso la formula

(4.1)$\int sen^2xdx = \int(1 - cos^2x)dx$;

oppure possiamo calcolare il primo osservando che $cos^2x = \frac{cos2x+1}{2}$ e il secondo per mezzo della (4.1).

Qui proponiamo una terza via piuttosto insolita.

Posto

$$A = A(x) = \int cos^2xdx, \;\; B = \int sen^2xdx$$

risulta

$$A + B = \int 1 \cdot dx \; = x + C_1$$

$$A - B = \int cos2xdx = \frac{1}{2}sen2x + C_2$$

e risolvendo il sistema lineare in due equazioni in due incognite

$$A = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sen2x + C$$
$$B = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sen2x + C$$

b) Se F è una primitiva di f, $F' = f$, allora

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

L'affermazione è falsa. Sia per esempio $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = ln|x|$. Chiaramente F è una primitiva di f . Tuttavia l'integrale improprio

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}dx$$

non esiste. Va da sé che l'affermazione risulta vera se si fa l'ulteriore ipotesi che f sia continua su $[a, b]$.

c) Per finire propongo un test da eseguire alla fine dell'anno scolastico.

Perché nell'integrazione la costante arbitraria può scriversi nella forma $\log c,\ c > 0$ e non nella forma $e^c, senc, arctg\ c, \ldots$?

Bibliografia

1. De Finetti Bruno, *Contro la "Matematica per Deficienti"*, Periodico di Matematiche, 1974, serie 5, vol. 50, n. 1-2.

2. De Finetti Bruno, *Matematica logico intuitiva*, Terza edizione riveduta, Edizioni Cremonese, Roma, 1959.

3. Laforgia Andrea, *Resistere, resistere, resistere, in "La prova di Matematica all'esame di Stato: proposte per una nuova organizzazione della didattica e della prova finale",* Seminario di lavoro, Scuola Media Statale "E. Fieramosca", Barletta, 16-18 dicembre 2015, pp.5-21.