Science & Philosophy **ISSN**: 2282-7757
Vol. 6(1), 2018, pp. 67--92 **eISSN**: 2282-7765

A Journey into the Polyhedrons' World (Un Viaggio nel Mondo dei Poliedri)

Giuseppe Conti[1], Alberto Trotta[2], Francesco Conti[3]

Received: 24-05-2018. **Accepted**: 25-06-2018. **Published**: 30-06-2018

doi: 10.23756/sp.v6i1.406

Abstract

In this article the authors intend to present a very important topic of the geometry of space: the polyhedra. After having introduced their definition, their presence will be shown in nature, in everyday life and in art, starting from ancient Greece up to the present day. First of all, we will deal with regular polyhedra; subsequently we will introduce the important family, especially in the applications, of the Archimedean polyhedra. Finally, the interesting Goldberg polyhedra will be presented.

Keywords: Polyhedra, convex figures, space tessellation, golden rectangle, Euler's relation.

Sunto

[1] Università degli Studi di Firenze, Dipartimento di Matematica, Viale Morgagni 67/A, Firenze, Italia; gconti@unifi.it.

[2] IISS Santa Caterina-Amendola, Salerno, Italia; albertotrotta@virgilio.it.

[3] Via G. D. Romagnosi 14, 50134 Firenze, Italia, franci8conti@gmail.com.

In questo articolo gli autori intendono esporre un argomento molto importante della geometria dello spazio: i poliedri. Dopo avere introdotto la loro definizione, sarà mostrata la loro presenza, nella natura, nella vita quotidiana e nell'arte, partendo dall'antica Grecia fino ad arrivare ai nostri giorni. Anzitutto tratteremo i poliedri regolari; successivamente introdurremo la importante famiglia, soprattutto nelle applicazioni, dei poliedri archimedei. Infine, saranno presentati gli interessanti poliedri di Goldberg.

Parole chiave: Poliedri, figure convesse, tassellazione dello spazio, rettangolo aureo, relazione di Eulero.

1. Introduzione

I poliedri costituiscono un argomento importante ed affascinante nell'ambito della geometria dello spazio sia per le loro notevoli proprietà geometriche, sia per la loro presenza in vari contesti scientifici, e non solo. Essi hanno sempre colpito la fantasia degli studiosi che hanno indagato le loro caratteristiche geometriche fino dall'antichità.

Con il presente articolo intendiamo fornire un contributo alla divulgazione di queste figure, affrontando tale argomento in maniera un po' diversa da quella tradizionale. Non intendiamo, dunque, presentare un trattato sui poliedri, ma mostrare che questi hanno molte attraenti, interessanti e, anche, divertenti applicazioni nell'arte, nella natura e, perfino, nella vita quotidiana.

2. I Poliedri Regolari

Ricordiamo che un poliedro (convesso) si dice regolare se tutte le sue facce sono poligoni regolari, congruenti fra loro, ed in ogni vertice arriva lo stesso numero di facce.

Proclo, storico della matematica del V secolo dopo Cristo, attribuisce a Pitagora la scoperta dei poliedri regolari; Proclo afferma: "Egli (Pitagora) scoprì il fatto degli irrazionali e la costruzione delle figure cosmiche (i poliedri regolari)".

In realtà i pitagorici conoscevano il tetraedro, il cubo e il dodecaedro. In seguito i greci introdussero anche l'ottaedro e l'icosaedro (Brusotti, 1955).

La loro scoperta può essere ricondotta al fatto che nella Magna Grecia si rinvenivano facilmente cristalli di pirite che hanno la forma di un cubo, di un ottaedro e di un dodecaedro (anche se non regolare).

Successivamente Teeteto (circa 410 a. C.) dimostrò che i poliedri regolari sono soltanto questi cinque (Brusotti, 1955); la dimostrazione è abbastanza semplice e si basa essenzialmente sul fatto che la somma delle facce di un angoloide è minore (strettamente) di un angolo giro.

I cinque tipi di poliedri regolari sono detti anche solidi platonici, poiché Platone ne parla esplicitamente nella sua opera *Il Timeo* (Frajese, 1951). Secondo Platone, ognuno di questi solidi doveva corrispondere alla struttura degli elementi fondamentali della materia. Infatti, il tetraedro fu abbinato al fuoco, l'ottaedro all'aria, l'icosaedro all'acqua, il cubo alla terra e il dodecaedro alla quintessenza.

Fra i poliedri regolari, il cubo era considerato dal greco Filolao (480-400 a. C.) il più perfetto, perché possiamo vedere che, fra i numeri delle sue facce, vertici e spigoli, intercorrono i rapporti musicali di ottava (12/6 = 2/1), quinta (12/8 = 3/2) e quarta (8/6 = 4/3). Per questo motivo nel Rinascimento molti palazzi avevano la forma di un cubo, come, ad esempio, avevano inizialmente il Palazzo Medici-Riccardi ed il Palazzo Rucellai a Firenze; dobbiamo, tuttavia, tenere presente che gran parte di queste costruzioni hanno perso il loro aspetto originario per le trasformazioni attuate nei secoli successivi (Conti et Al, 2017).

Per il fatto che il dodecaedro era associato alla quintessenza, Salvator Dalì ambientò il suo dipinto, *Ultima cena,* all'interno di questo poliedro.

Figura 1. Salvator Dalì. Ultima Cena

Inoltre, tutto il dipinto è contenuto in un rettangolo aureo (Livio, 2003); infatti, le dimensioni della tela sono 167x268, il cui rapporto è molto vicino a quello aureo. Questo fatto non è casuale; difatti Luca Pacioli, nel suo famoso volume *De divina proportione,* stampato a Venezia (1509), scoprì che i centri delle facce di un dodecaedro determinano tre rettangoli aurei (due a due perpendicolari fra loro); inoltre, egli dimostrò che anche i 12 vertici dell'icosaedro formano tre rettangoli aurei, sempre due a due perpendicolari. Questo fatto può suggerire un semplice modo per costruire un icosaedro.

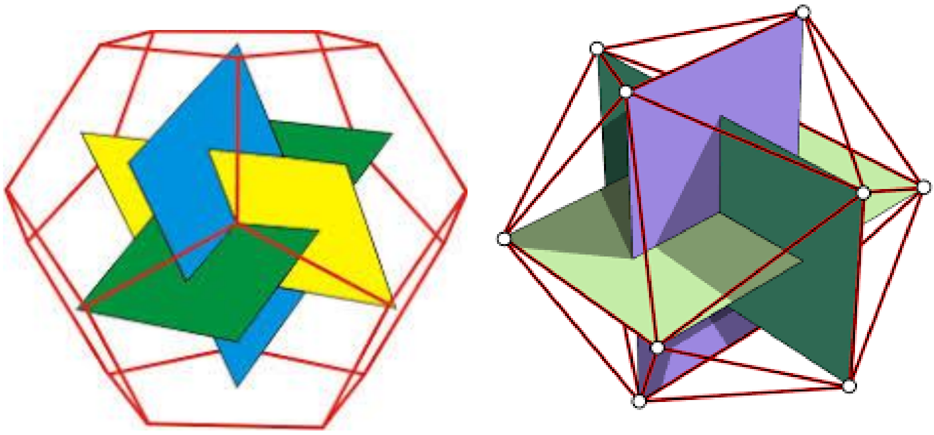

Figura 2. Rettangoli aurei nel dodecaedro e nell'icosaedro

Il *De divina proportione* è diviso in tre parti (Sgarbi, 1982); la terza parte è ripresa quasi integralmente dal libro di Piero della Francesca: *Libellus de quinque corporibus regularibus* (1482-1492), che tratta i cinque poliedri regolari. Notiamo che Luca Pacioli era allievo di Piero della Francesca ed entrambi erano originari di Borgo San Sepolcro (Arezzo). Osserviamo che il Vasari critica aspramente il comportamento di Luca Pacioli nei confronti di Piero della Francesca; infatti dice di Pacioli (Vasari, 1991): "… come empio e maligno cercò di annullare il nome di Piero suo precettore, et usurpar quello onore che solo a lui doveva …".

Nel suo trattato Piero sostiene che il mondo è pieno di corpi complessi o senza una particolare forma, ma ognuno di essi può essere ricondotto ai cinque poliedri regolari che rappresentano la forma eterna, l'eterna perfezione.

I disegni dei solidi, presenti nel libro di Luca Pacioli, sono opera di Leonardo da Vinci.

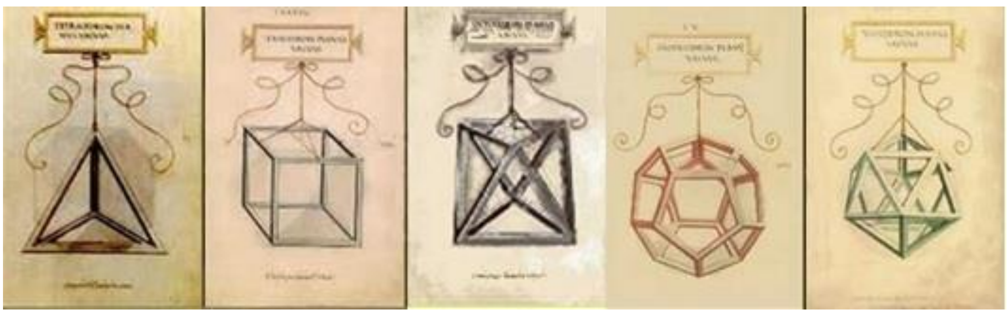

Figura 3. I poliedri regolari disegnati da Leonardo da Vinci

Sottolineiamo il fatto che nei disegni di Leonardo, come in quelli di Piero della Francesca, si nota una profonda conoscenza delle regole prospettiche. Il *Libellus de quinque corporibus regularibus* è successivo al suo *De prospectiva pingendi* (1472-1475), nel quale Piero mostra le regole della prospettiva, che erano già presenti nel primo libro del *De pictura* (l'edizione in volgare è del 1435), in cui Leon Battista Alberti espone i principi geometrici e le applicazioni della prospettiva che aveva appreso da Brunelleschi.

Nei libri di Pacioli e di Piero della Francesca si trovano molte figure e disegni esplicativi. Oggi questo fatto ci appare scontato, ma a quei tempi le cose andavano diversamente: infatti, gli umanisti dell'epoca ritenevano che le sole parole fossero sufficienti per spiegare i concetti geometrici.

I poliedri regolari sono presenti in vari aspetti dell'arte, della natura e della vita quotidiana a partire dall'antichità fino ai giorni nostri.

In Scozia sono state trovate figure di argilla, risalenti al 2000 a. C. circa, la cui forma si avvicina moltissimo ai poliedri regolari. Si ritiene che questi oggetti fossero elementi decorativi o, forse, destinati ad una specie di gioco. Tali manufatti sono attualmente esposti nel Museo Ashmolean di Oxford.

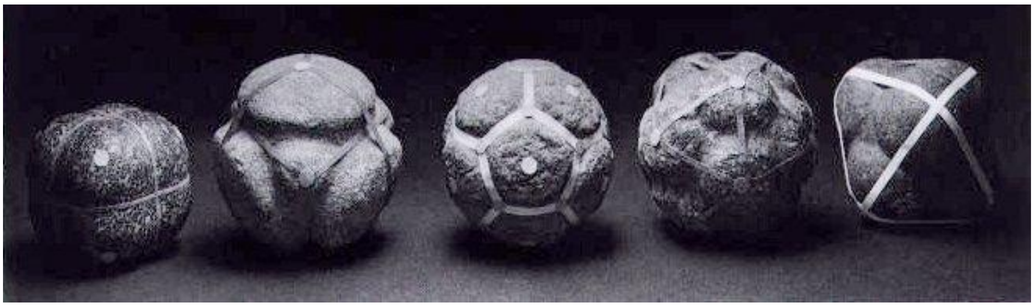

Figura 4. Figure a forma di poliedri regolari ritrovate in Scozia. Periodo neolitico

L'origine di questi pezzi può essere estetica, mistica, oppure religiosa, ma è anche possibile che siano stati osservati in natura sotto forma di scheletri di animali marini, come i Radiolari.

Infatti, gli scheletri di alcuni Radiolari hanno la forma di poliedri regolari (D'Arcy, 2003) ed esistono in natura cristalli di fluorite e di pirite che, come già detto, possono avere la forma di un cubo, di un ottaedro e di un dodecaedro (quest'ultimo non regolare).

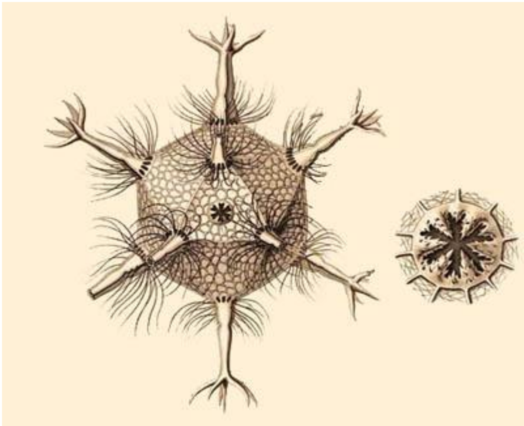

Figura 5. Fossile di una specie di Radiolaria a forma di icosaedro

Sono stati trovati, soprattutto nel nord della Francia ed in Germania, numerosi oggetti d'epoca romana, risalenti a II e III secolo d. C., che hanno la forma di un dodecaedro e di un icosaedro regolari. Non è noto quale fosse l'uso di questi manufatti; sono state avanzate numerose ipotesi sul loro impiego, ma la loro funzione rimane ancora oggi un mistero, tenendo anche conto che non sono presenti in alcun'altra opera di epoca romana.

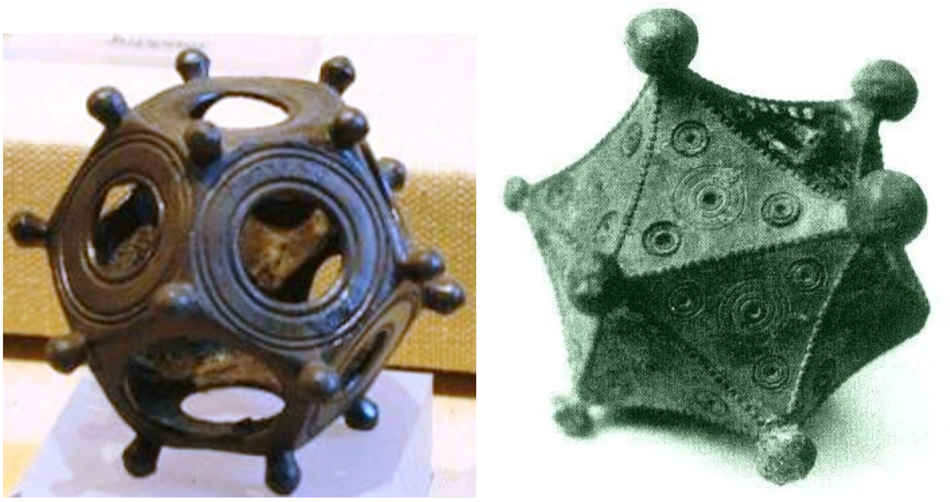

Figura 6. Oggetti di epoca romana (II, III secolo d. C.) a forma di poliedri

Alcuni contenitori di sostanze liquide hanno la forma di un tetraedro regolare; le prime confezioni con questa conformazione risalgono alla ditta Tetra Pak (1952).

Figura 7. Contenitori di bevande a forma di tetraedro

Dalla variazione della sola struttura cristallina nascono le enormi differenze tra la grafite ed il diamante; nella grafite gli atomi di carbonio formano degli esagoni disposti su piani paralleli fra loro (da qui deriva la tenerezza della grafite), dove ognuno di questi esagoni si lega ad altri tre; nei diamanti gli atomi di carbonio, invece, formano dei tetraedri regolari.

La molecola di metano CH_4 ha una struttura tetraedrica.

Figura 8. Molecola di Metano, CH_4

Il tetrapode è una struttura, di solito in cemento armato, utilizzata come frangiflutti; i suoi estremi si trovano nei vertici di un tetraedro regolare. Con la sua forma dissipa in maniera efficiente la forza delle onde, permettendo all'acqua di fluire attorno alla struttura piuttosto che contro essa.

Figura 9. Tetrapodi utilizzati come frangiflutti

L'Atomium è una costruzione in acciaio che rappresenta i 9 atomi di un cristallo di ferro; questo è rappresentato da otto sfere, che si trovano nei vertici di un cubo; la nona sfera è collocata nel centro del cubo. Venne innalzato in occasione dell'Esposizione Universale di Bruxelles del 1958.

Figura 10. Atomium. Bruxelles

Nel Cloruro di sodio NaCl lo ione Na^+ è circondato da sei primi vicini ioni di Cl^- disposti nei vertici di un ottaedro, il cui centro è occupato da Na^+. In questo modo i sei Cl^-, coordinati ottaedricamente, neutralizzano con i loro legami la carica dello ione Na+, posto al centro del poliedro. Ma anche Cl^- ha intorno a sé sei ioni Na^+, cosicché anche la forza. per ciascuno dei legami che raggiungono Cl^- è di 1/6; di conseguenza anche la carica sullo ione Cl^- viene neutralizzata dai sei ioni di Na^+, che risultano essere anch'essi coordinati ottaedricamente con lo ione Cl^-.

Una struttura ottaedrica si trova anche nella molecola di Esafluoruro di Zolfo SF_6. Lo Zolfo sta nel centro e gli atomi di Fluoro occupano i sei vertici dell'ottaedro.

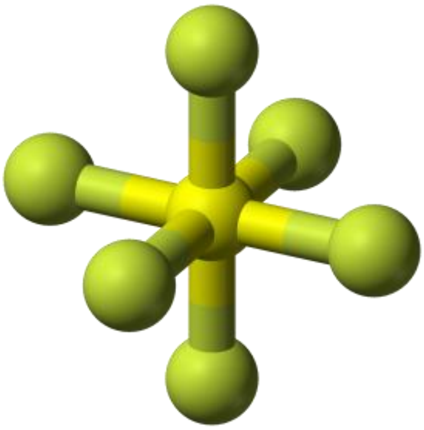

Figura 11. Esafluoruro di Zolfo.

Esistono altoparlanti aventi la forma di un dodecaedro, come il Dodecahedron Loudspeaker.

Figura 12. Dodecahedron Loudspeaker

Con la sua conformazione questo altoparlante distribuisce il suono in maniera uniforme in ogni direzione.

L'ingegnere Eduardo Torroja progettò nel 1951 un edificio a forma di dodecaedro per l'Istituto di Scienza della Costruzione dell'Università di Madrid. Come afferma lo stesso Torroja, esso era costruito, in maniera semplice ed economica, mediante giunzione di lastre prefabbricate pentagonali.

Questa struttura era originariamente progettata come deposito di carbone per il riscaldamento, ma negli anni successivi è diventata un segno distintivo dell'Istituto.

Figura 13. E. Torroja. Edificio a forma di dodecaedro. Università di Madrid

Nel Museo Galileo di Firenze si trovano orologi solari dodecaedrici.

Figura 14. S. Bonsignori. Orologio solare, 1587. Museo Galileo. Firenze

L'icosaedro si trova frequentemente in natura. Esso è la sagoma dell'involucro esterno (capside) di molti virus, come, ad esempio, il virus dell'epatite A, il virus HIV, l'adenovirus, l'herpesvirus, il reovirus. Il capside è la struttura proteica che racchiude l'acido nucleico del virus per proteggerlo. Il motivo per cui i virus hanno il loro involucro di forma icosaedrica dipende dal fatto che, essendo un poliedro regolare, i codici genetici per la riproduzione degli stessi virus sono più semplici (Du Sautoy, 2007). Inoltre, fra i cinque poliedri regolari, l'icosaedro è quello che, a parità di superficie esterna, racchiude il volume più grande, essendo quello che più si avvicina alla sfera.

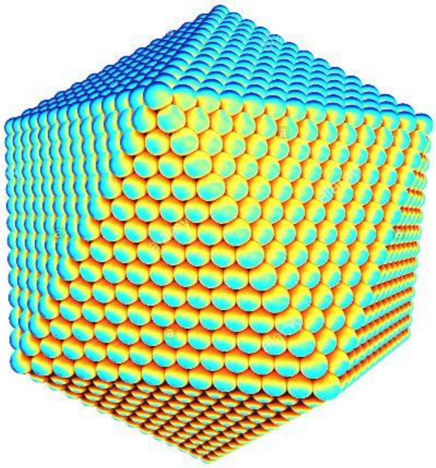

Figura 15. Struttura icosaedrica dei virus.

Nel suo *Mysterium cosmographicum* (1596) Keplero aveva creato un modello del sistema solare basato sui poliedri regolari. Keplero fu il primo a sostenere nel 1609 che le orbite dei pianeti sono ellittiche: tuttavia, al tempo della pubblicazione del *Mysterium*, egli le considerava ancora circolari, in accordo con l'opinione del tempo (Folicaldi, 2005).

Egli affermava: "L'orbita della Terra è la misura di tutte le cose. Si circoscriva attorno ad essa un dodecaedro, e il cerchio che lo contiene è l'orbita di Marte; attorno a Marte si circoscriva un tetraedro, e il cerchio che lo contiene è l'orbita di Giove; si circoscriva attorno a Giove un cubo, e il cerchio che lo contiene è l'orbita di Saturno. Poi si inscriva nell'orbita terrestre un icosaedro, e il cerchio contenuto sarà l'orbita di Venere, e ancora si inscriva all'interno dell'orbita di Venere un ottaedro e il cerchio contenuto sarà l'orbita di Mercurio."

Notiamo che al tempo di Keplero i pianeti conosciuti erano sei.

Tuttavia questo modello del sistema solare fu abbandonato dallo stesso Keplero poiché non corrispondeva alle reali misure delle distanze fra i pianeti, i quali, inoltre, percorrono orbite ellittiche e non circolari.

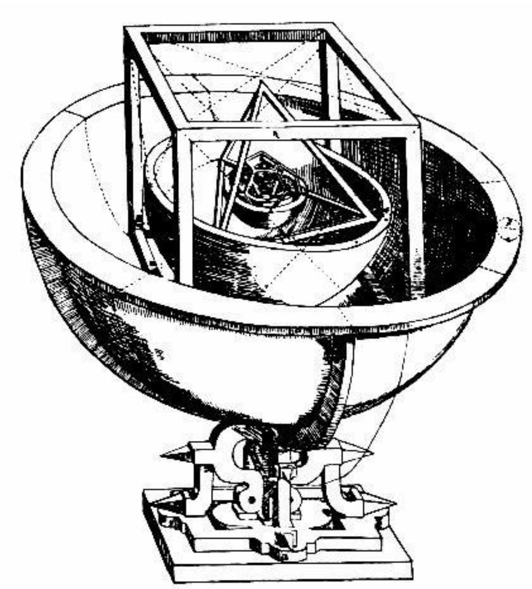

Figura 15. Modello del sistema solare di Keplero

3. I Poliedri Archimedei

Spesso si afferma che la palla è rotonda, ma questo non è sempre vero. Un pallone di calcio non è una sfera perfetta; esso è composto da pezzi che s'inarcano verso l'esterno quando lo gonfiamo, facendogli assumere così una forma simile ad una sfera. Sicuramente la prima risposta che viene in mente è che questi pezzi siano degli esagoni regolari. Ma, riflettendoci, possiamo osservare che non può essere così: infatti, gli esagoni regolari permettono di "piastrellare" una superficie piana, mentre, aggiungendo dei pentagoni, si riesce ad ottenere una superficie chiusa.

Per dare una risposta esauriente, dal punto di vista pratico e geometrico, alla forma del pallone da calcio, occorre anzitutto tornare indietro nel tempo.

Nel IV secolo d. C., in un'opera di Pappo di Alessandria, comparve una nuova famiglia di poliedri. Pappo, che li elencò e li studiò, li attribuì ad Archimede; per questo motivo essi furono chiamati in suo onore poliedri archimedei (Brusotti, 1955). Talvolta sono denominati anche poliedri semiregolari,

Si definisce poliedro (o solido) archimedeo un poliedro convesso che soddisfa le proprietà seguenti:

1) le sue facce, di almeno due tipi distinti, sono poligoni regolari e, di conseguenza, i suoi spigoli sono tutti congruenti;

2) le facce devono essere disposte nello stesso ordine intorno a ciascun vertice;

3) il solido non è un poliedro regolare, né un prisma archimedeo, né un antiprisma archimedeo.

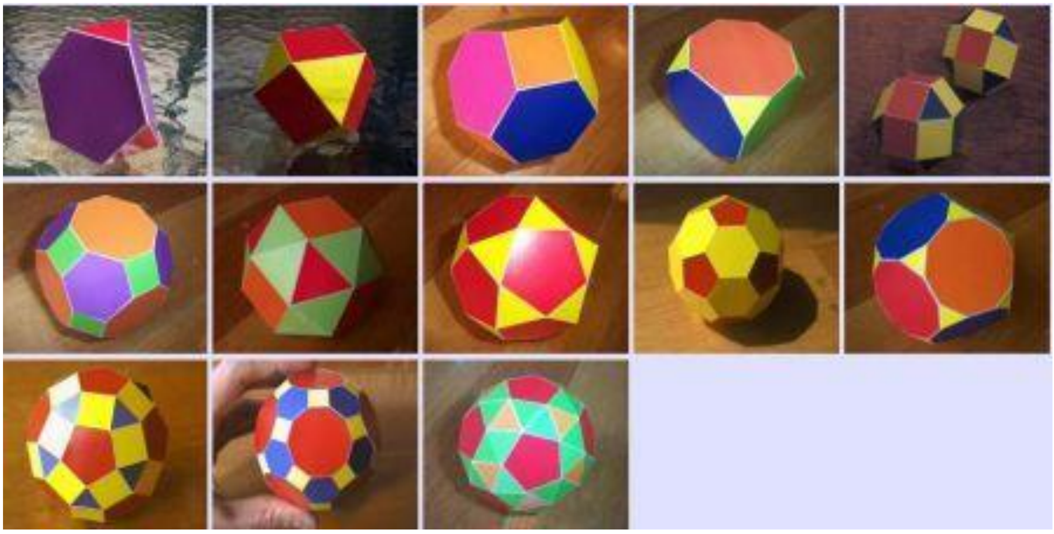

Figura 16. I 13 poliedri archimedei

Ricordiamo che un antiprisma archimedeo è un poliedro formato da due poligoni regolari, chiamati basi, paralleli fra loro, con *n* lati (*n* > 3), e da *2n* triangoli equilateri che congiungono ciascun lato di una base con il vertice opposto dell'altra base, e ruotata rispetto alla prima di 45°. Dunque, a differenza dei prismi archimedei, le basi di un antiprisma sono connesse da triangoli equilateri invece che da *n* quadrati.

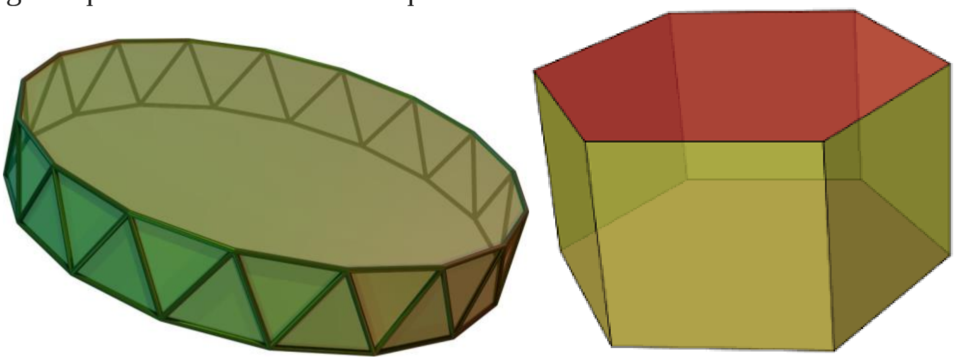

Figura 17. Un antiprisma archimedeo e un prisma archimedeo

Un poliedro convesso, le cui facce siano tutte costituite da poligoni regolari, ma che non sia né un solido platonico, né un solido archimedeo, né un prisma, né un antiprisma, si chiama solido di Johnson.

Il più semplice esempio di solido di Johnson è la piramide a base quadrata e avente per facce laterali quattro triangoli equilateri.

Essi furono scoperti da Norman Johnson (Johnson, 1966) il quale ne elencò 92; in seguito fu dimostrato che i solidi di Johnson sono esattamente 92 (Zalgaller, 1967).

I solidi archimedei sono 13 e sono tutti inscrivibili in una sfera, che passa per tutti i vertici del poliedro; tuttavia essi non circoscrivibili ad una sfera (Cundy et Al., 1974).

Cinque di questi (tetraedro troncato, cubo troncato, ottaedro troncato, dodecaedro troncato, icosaedro troncato) possono essere ottenuti per *troncamento*, tagliando, cioè, gli angoli dei cinque solidi platonici in modo che gli spigoli del poliedro così ottenuto siano tutti uguali fra loro, ma non uguali alla metà degli spigoli del poliedro di partenza.

Tagliando gli spigoli di un cubo a metà degli spigoli stessi, si ottiene il cubottaedro; eseguendo la stessa operazione per l'icosaedro, si ha l'icosidodecaedro.

Gli altri sei poliedri archimedei sono: il cubottaedro troncato, l'icosidodecaedro troncato, il rombicosidodecaedro, il rombicubottaedro, il cubottaedro camuso e l'icosidodecaedro camuso.

Gli ultimi due sono poliedri chirali, ovvero non sono equivalenti alla propria immagine riflessa; ad esempio, due guanti (destro e sinistro) sono oggetti chirali. Notiamo che, se consideriamo anche le loro immagini riflesse, i poliedri archimedei diventano 15.

Alcuni orologi solari, presenti nel Museo Galileo a Firenze, hanno la forma di un tetraedro troncato. Esso ha 4 facce triangolari e 4 facce esagonali.

Altri orologi solari, esposti nello stesso Museo, hanno la forma di un ottaedro troncato; notiamo che questo solido archimedeo possiede 6 facce quadrate, 8 esagonali, 36 spigoli e 24 vertici.

Figura 18. Ottaedro troncato. Orologio solare del XVI secolo. Museo Galileo. Firenze

Nel 1887 Lord Kelvin si chiese come fosse possibile eseguire una tassellazione dello spazio con poliedri di uguale volume, aventi superficie minima. Lord Kelvin pensava che questi poliedri dovessero avere la forma di un ottaedro troncato. Tuttavia, non dette la dimostrazione di tale risultato, il quale per più di un secolo rimase una congettura, poiché non si riusciva a trovare né una dimostrazione, né un controesempio.

Figura 19. Tassellazione dello spazio con ottaedri troncati

Soltanto nel 1993 i fisici R. Phelan e D. Weaire del Trinity College di Dublino hanno trovato due poliedri irregolari di uguale volume, un dodecaedro irregolare con facce pentagonali, e un tetracaidecaedro formato da 2 esagoni e 12 pentagoni con i lati tutti diversi, che tassellano lo spazio. Notiamo che a questa struttura si sono ispirati i progettisti del Centro Acquatico di Pechino.

Figura 20. Centro Acquatico di Pechino

L'area della superficie della configurazione di Weaire-Phelan è inferiore a quella della struttura di Kelvin dello 0, 3%, ma non è stato ancora dimostrato che essa sia la soluzione della congettura di Kelvin.

Il pallone da calcio non è altro che un icosaedro troncato; esso è formato da 90 spigoli, 60 vertici, 12 facce pentagonali e 20 facce esagonali. La storia del pallone di calcio è davvero molto interessante. Questo design fu portato alla ribalta dalla ditta Adidas per il Campionato Europeo di calcio del 1968 e per la Coppa del Mondo di calcio del 1970 in Messico. Esso fu chiamato Telstar, dal nome del satellite che assicurava i collegamenti televisivi intercontinentali. Furono scelti i pentagoni neri e gli esagoni bianchi per assicurare una migliore visione televisiva (in bianco e nero) rispetto al classico pallone a strisce di cuoio marrone.

Figura 21. La genesi geometrica del pallone da calcio

Inoltre, l'icosaedro troncato rappresenta il miglior equilibrio fra numero di facce ed approssimazione della sfera; infatti, un poliedro con un numero inferiore di facce approssima peggio la sfera, mentre, con numero maggiore, l'approssimazione è migliore ma diventa più complicata la sua realizzazione a causa dei troppi pezzi da assemblare (osserviamo che l'icosaedro approssima la sfera al 60%, mentre quello troncato l'approssima all'87% e, gonfiato, al 96%).

La storia del "pallone di calcio" non è ancora finita. Nel 1985 i chimici H. W. Kroto, R. F. Curl e R. E. Smalley ottennero un composto le cui molecole erano formate da 60 atomi di carbonio, legati in modo da formare la molecola C_{60}. In questa molecola gli atomi di carbonio sono disposti nei 60 vertici dell'icosaedro troncato, quindi essa ha proprio la forma del pallone da calcio. Per questa scoperta i tre scienziati ricevettero nel 1996 il premio Nobel per la Chimica.

Tale molecola, che è utilizzata in campo medico, nell'industria litografica e nella meccanica come lubrificante, è stata chiamata fullerene o buckyball, in onore dell'architetto statunitense Buckmister Fuller, che aveva costruito vari edifici con cupole geodetiche, le quali erano poliedri, spesso con facce pentagonali ed esagonali.

Figura 22. B. Fuller, cupola geodetica. Esposizione Montreal 1967

Una delle più famose fu la cupola per il padiglione degli Stati Uniti all'Expo '67 di Montreal. Questa cupola è formata da esagoni; ogni tanto viene inserito qualche pentagono per incurvare e chiudere la struttura (Barone et Al, 2017). Le sue facce sono suddivise in triangoli; infatti, per un teorema dovuto a Cauchy, se un poliedro convesso è costituito da facce non deformabili, allora il poliedro non è deformabile.

Vorremmo notare che anche Leonardo da Vinci disegnò un icosaedro troncato, nel già citato libro *De divina proporzione*, con il nome di Ycocedron Abscisus vacuus.

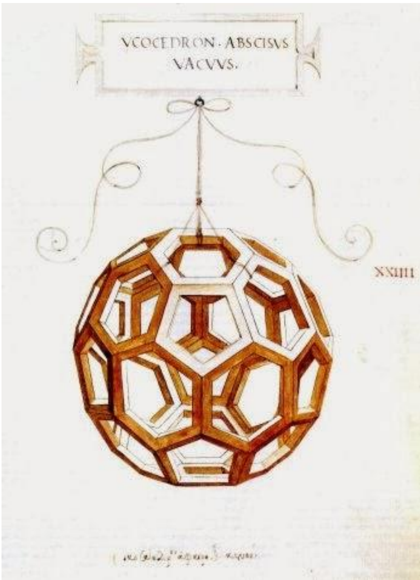

Figura 23. L'icosaedro troncato disegnato da Leonardo

Nelle Isole Faroe esistono delle costruzioni (Kivivik igloo) che hanno la forma di un icosaedro troncato.

Figura 24. Igloo delle Isole Faroe

Esistono altre costruzioni a forma di poliedri archimedei, come il Poliedro abitabile a Bogotà, opera dell'architetto Manuel Villa, che ha la forma di un cubottaedro troncato (formato da 12 quadrati, 8 esagoni e 6 ottagoni regolari).

Figura 25. Poliedro abitabile. Bogotà. Cubottaedro troncato

Nel Museo Nazionale di Capodimonte a Napoli si trova un dipinto che ritrae Luca Pacioli. La paternità del dipinto è controversa; molti studiosi lo attribuiscono a Jacopo de' Barbari (1470-1516), ma non tutti sono d'accordo.

Dietro Pacioli è raffigurato un giovane identificato con il duca Guidubaldo da Montefeltro. Sul tavolo è riprodotto un dodecaedro, posto alla sinistra di Pacioli e appoggiato su un libro, mentre dietro la sua spalla destra il pittore ha dipinto un poliedro archimedeo che pende dal soffitto tramite un filo: si tratta di un rombicubottaedro, formato da 8 triangoli equilateri e 18 quadrati.

Figura 26. Dipinto che raffigura Luca Pacioli

Notiamo che il rombicubottaedro è stato disegnato da Leonardo nel già citato libro di Luca Pacioli: *De divina proportione.*

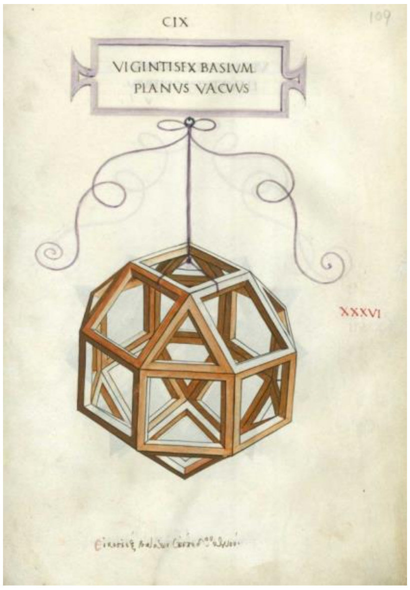

Figura 27. Rombicubottaedro disegnato da Leonardo

Anche l'edificio (inaugurato nel 2006) che ospita la Biblioteca Nazionale di Minsk ha la forma di un rombicubottaedro.

Figura 28. Biblioteca Nazionale. Minsk

4. I Solidi di Catalan

Interessanti, sia dal punto di vista geometrico, sia nelle applicazioni, sono i solidi (detti anche poliedri) di Catalan, (descritti nel 1865 dal matematico belga Eugène Charles Catalan), che si ottengono congiungendo i centri delle facce (poliedri duali) dei poliedri archimedei. Tali poliedri sono 13.

Un notevole esempio di poliedro è l'elemento posto a coronamento della Lanterna della cupola della Sagrestia Nuova, opera di Michelangelo, della chiesa di San Lorenzo a Firenze.

Michelangelo scelse questa forma, al posto della classica forma sferica, poiché le sue sfaccettature lo fanno somigliare a un cristallo che scompone la luce in varie direzioni.

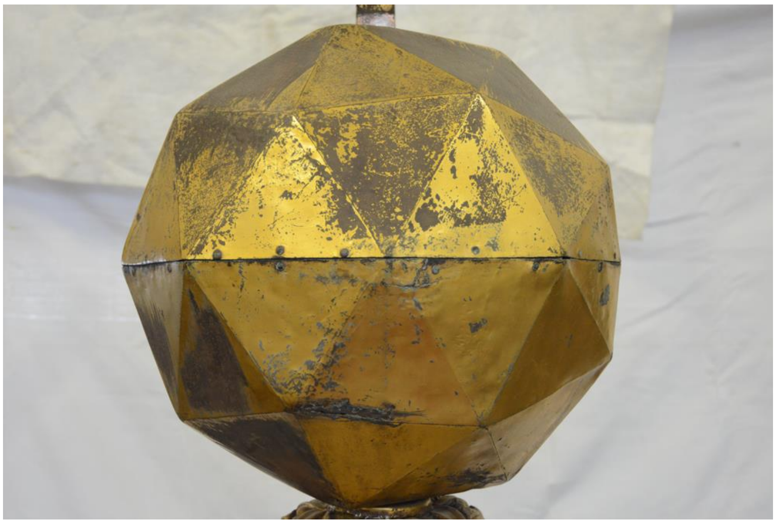

Figura 29. Poliedro della Lanterna della Sagrestia Nuova di San Lorenzo. Firenze

Esso si realizza a partire da un dodecaedro, dove, su ogni faccia (pentagonale), si costruisce una piramide avente quella faccia come base. Dunque, questo poliedro ha 60 facce triangolari; è curioso notare che il Vasari afferma che il poliedro realizzato da Michelangelo era "una palla a 72 facce".

Tale solido ricorda moltissimo il pentacisdodecaedro, che è uno dei tredici poliedri di Catalan, ed è il duale dell'icosaedro troncato archimedeo.

Osserviamo che anche questo solido è raffigurato da Leonardo da Vinci nel *De divina proportione*, con il nome di Duodecedron elevatus solidus.

In realtà il poliedro di Leonardo ha per facce dei triangoli equilateri, mentre quelle del pentacisdodecaedro sono dei triangoli isosceli aventi la base che sta nel rapporto $\left(9-\sqrt{5}\right)/6$ con gli altri due lati obliqui. Osserviamo che il poliedro di Michelangelo (formato da triangoli isosceli) è molto più simile al pentacisdodecaedro di quello di Leonardo.

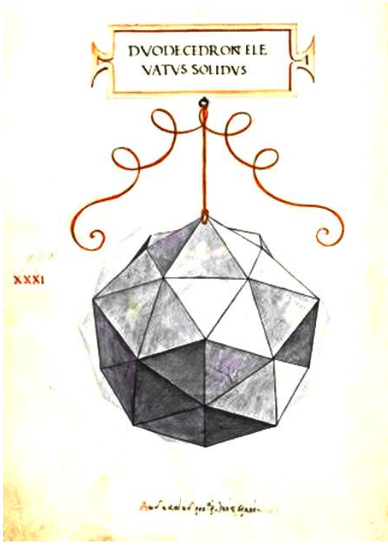

Figura 30. Il Duodecedron elevatus solidus di Leonardo

Il cristallo di Andradite (ed anche quello di Granato) è un solido di Catalan, chiamato dodecaedro rombico, poiché possiede 12 facce a forma di rombo ed è il duale di un solido archimedeo: il cubottaedro. Osserviamo che anche il dodecaedro rombico può tassellare lo spazio.

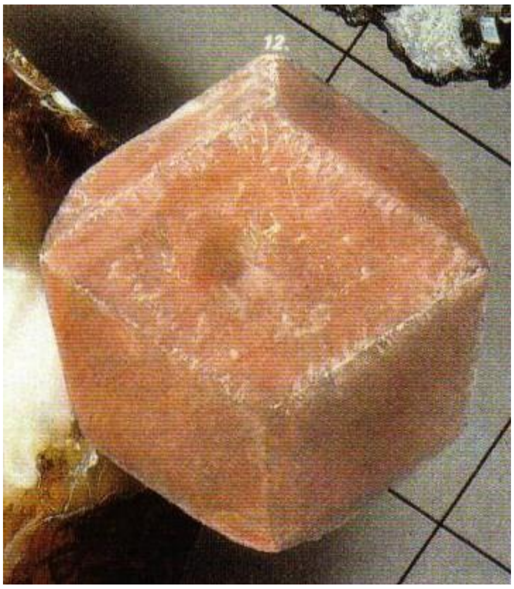
Figura 31. Cristallo di granato a forma di dodecaedro rombico

A Seattle si trovano le tre Amazon Spheres che fanno parte della nuova sede della Amazon. Esse si basano sulla forma di un esacontaedro pentagonale, un poliedro di Catalan, le cui facce sono dei pentagoni irregolari.

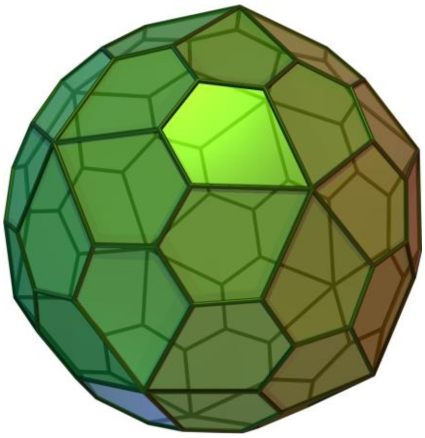

Figura 32. L'esacontaedro pentagonale

Tale poliedro è il duale di un poliedro archimedeo: il cubottaedro camuso.

In onore del matematico belga, lo studio Nbbj, che le ha progettate, le ha ribattezzato: Catalany.

Figura 33. Le Amazon Spheres

5. Conclusioni

Abbiamo passato in rassegna i poliedri regolari, quelli semiregolari (o di Archimede) e quelli di Catalan; inoltre, con degli esempi, abbiamo evidenziato la loro presenza nella natura, nell'arte ed in alcuni aspetti della vita quotidiana.

Esistono molti altri tipi di poliedri.

I più diffusi sono i prismi; hanno la forma di un prisma, ad esempio, le antiche torri difensive, che possono avere per base un poligono di 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 16 lati.

Un'altra classe interessante di poliedri sono i Poliedri di Goldberg (scoperti da Michael Goldberg nel 1937). Si tratta di poliedri convessi, le cui facce sono pentagoni o esagoni, tali che in ogni vertice concorrono esattamente tre facce.

Notiamo che gli esagoni che compongono i poliedri di Goldberg sono equilateri; tuttavia, non è detto che siano poligoni regolari. Invece, i pentagoni di questi poliedri sono sempre regolari. Dunque tali poliedri hanno tutti gli spigoli uguali.

Dalla formula di Eulero segue che tutti i poliedri di Goldberg possiedono esattamente 12 pentagoni; il numero degli esagoni, invece, è variabile.

La dimostrazione di questo fatto è davvero interessante. Indichiamo con F_5 e F_6 il numero delle facce pentagonali ed esagonali rispettivamente. Poiché ogni spigolo è comune a due facce e ogni vertice è comune a tre facce, si ha, indicando con *S* e *V* il numero degli spigoli e dei vertici rispettivamente:

$$\frac{5F_5+6F_6}{2}=S \text{ e } \frac{5F_5+6F_6}{3}=V\,.$$

Sostituendo tali valori nella relazione di Eulero $S-V=F-2$, ovvero $S-V=F_5+F_6-2$, si ottiene:

$\dfrac{5F_5+6F_6}{2}-\dfrac{5F_5+6F_6}{3}=F_5+F_6-2$, da cui, con facili calcoli, si ha:

$$5F_5+6F_6=6F_5+6F_6-12 \quad \text{ovvero } F_5=12\,.$$

Semplici esempi di questi poliedri sono il dodecaedro e l’icosaedro troncato.

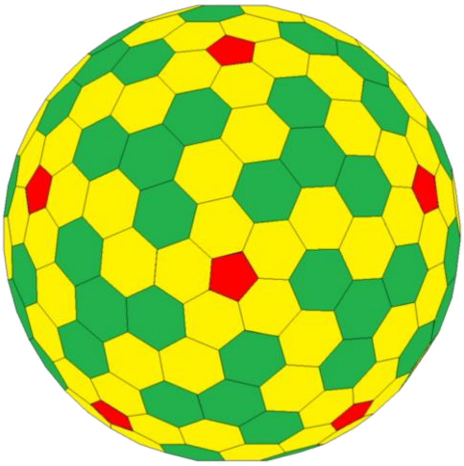

Figura 34. Un poliedro di Goldberg

I poliedri di Goldberg possono avere molte applicazioni per il semplice fatto che forniscono ottime approssimazioni di una sfera.

Esempi di questi poliedri si possono trovare nell'Eden Project, un complesso turistico in Cornovaglia, a circa 2 km dalla città di St Austell, ricavato nello spazio interno di una ex-cava. Esso è composto da cupole geodetiche le cui facce sono esagoni e pentagoni.

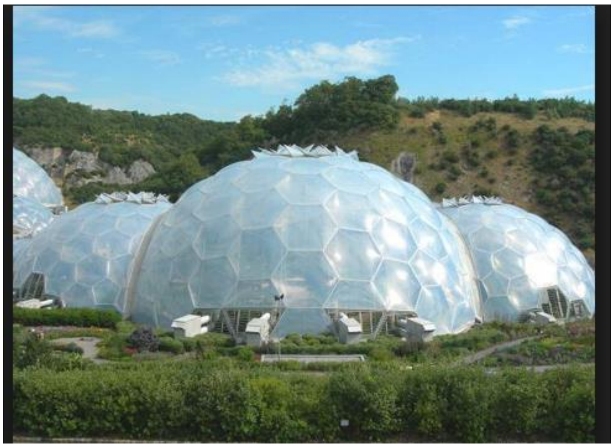

Figura 35. Poliedri di Goldberg dell'Eden Project. Cornovaglia

Un altro esempio si ha nell'impianto all'aperto per testare i motori a reazione progettati dalla Rolls- Royce.

Nella figura seguente sono evidenziate le facce pentagonali.

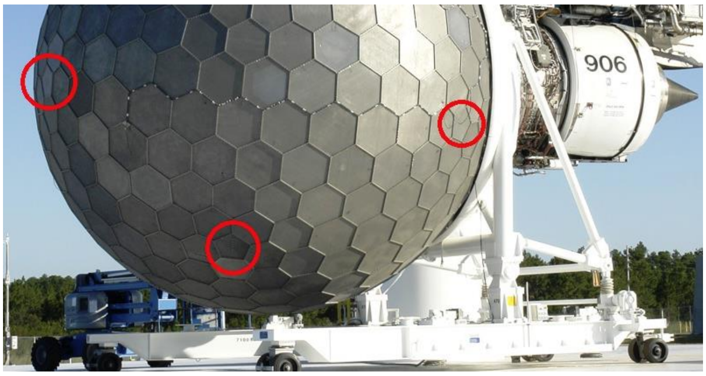

Figura 36. Impianto prova motori della Rolls-Royce

Bibliografia

V. Barone, P. Bianucci, (2017), *L'infinita curiosità: Breve viaggio nella fisica contemporanea*, Edizioni Dedalo, Bari.

L. Brusotti (1955), *Poligoni e poliedri.* Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi, Volume II – Parte 1ª, Editore Ulrico Hoepli, Milano, pp. 255-322.

F. Folicaldi a cura di (2005), *Il Numero e le sue Forme*, Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze, Nardini Editore, Firenze.

A. Frajese (1951), *La matematica nel mondo antico,* Editrice Studium, Roma.

V. Sgarbi (1982), *De divina proportione,* FMR n. 9, Franco Maria Ricci, Milano.

G. Conti, B. Sedili, A. Trotta (2017), *Matematica, musica e architettura*, Science & Philosophy, Vol. 5 (1), pp. 129-148.

H. M. Cundy. A. P. Rollett (1974), *I modelli matematici*, Giangiacomo Feltrinelli Editore, Milano.

W. D'Arcy Thompson (2003), *Crescita e forma*, Bollati Boringhieri, Torino.

N. Johnson (1966): *Convex Solids with Regular Faces*, Canadian Journal of Mathematics, **18**, pp. 169–200.

M. Livio (2003), *La sezione aurea*, Rizzoli Editore, Milano.

M. Du Sautoy (2007), *Il disordine perfetto*, Saggi BUR, Rizzoli Editore, Milano.

G. Vasari (1991), *Le vite dei più eccellenti pittori, scultori e architetti,*
Newton Compton Editori, Roma.

V. A. Zalgaller (1967), *Convex Polyhedra with Regular Faces*, Zap. Nauchn. Sem. LOMI, **2**, Nauka, Moscow–Leningrad, pp. 5–221. Versione inglese: Seminars in Mathematics, V. A. Steklov Mathematical Institute, Leningrad, 1969, 2.