Science&Philosophy Vol. 1, No 2, (2013) pp. 49 – 78
ISSN 2282-7765 [online] ISSN 2282-7757 [testo stampato]

Probabilità e Statistica nella scuola primaria: esperienze didattiche e proposte

Luciana Delli Rocili e Antonio Maturo

Sunto Le prove INVALSI, con l'idea di valutare le scuole, e, quindi, gli insegnanti, valutando le abilità degli alunni, determinano, di fatto, un passaggio dalla scuola di massa, in cui l'obiettivo era di promuovere la cooperazione e la formazione uniforme di tutti gli studenti, con particolare attenzione per i più deboli, alla scuola di élite, in cui si esalta la competizione. Ci chiediamo allora quali sono gli obiettivi più importanti per la matematica nella scuola primaria: formazione, informazione, cooperazione o competizione? O altro? O un mix di tali obiettivi, e, in tal caso, in quali proporzioni? In questo lavoro, in particolare, approfondiamo gli obiettivi e le competenze collegati a Probabilità e Statistica. Il punto di partenza è che un ruolo importante nell'insegnamento di tali discipline è da attribuire al gioco che è il momento in cui il bambino si trova a dover valutare situazioni d'incertezza e a prendere decisioni in base alle proprie opinioni ed esperienze.

Parole chiave: Probabilità e Statistica nella scuola primaria, didattica con il gioco, formazione, informazione, competizione e cooperazione.

Abstract INVALSI tests, with the idea of evaluating schools, and teachers, evaluating students abilities, produce a passage from mass school, in which the goal was to promote cooperation and uniform training of all students, with particular attention to the weakest, to elite school, which enhances competition. We ask ourselves then what are the most important objectives for mathematics in primary school: training, information, cooperation or competition? Or something else? Or a mix of these objectives, and, if so, in what proportions? In particular, in this paper, we deepen the objectives and skills related to probability and statistics. The starting point is that an important role in the teaching of probability and statistics is to be attributed to the game that is the time when children are having to assess situations of uncertainty and make decisions according to their own opinions and experiences.

Keywords: Probability and Statistics in primary school, didactis playing, training, information, competition and cooperation.

1. Gli obiettivi di Probabilità e Statistica

La Probabilità e la Statistica impongono un diverso modo di ragionare rispetto ai rami classici della matematica.

La matematica tradizionale, puramente deduttiva, può apparire ad alcuni bambini poco collegata con la realtà e lontana dai loro interessi.

La caratteristica fondamentale della matematica può essere riassunta nella frase, presente nei programmi ministeriali del 1985, "*il pensiero matematico è caratterizzato dall'attività di risoluzione dei problemi*". I ragazzi (e anche gli adulti) che hanno una mentalità matematica si divertono a risolvere problemi! Si tratta di una sfida e una sperimentazione per conoscere le proprie potenzialità.

La mentalità del matematico, portato a provare piacere nel mettersi alla prova risolvendo problemi, è esemplificata dal seguente *orologio del matematico,* grande divertimento per chi ha uno spirito matematico e roba da maniaci per chi non condivide il gusto di misurare la propria abilità.

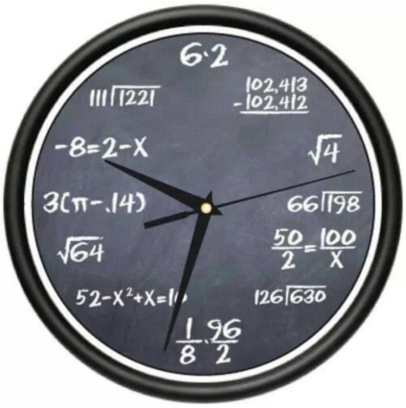

Figura 1 Orologio del matematico (fonte: dalla rete)

Nella matematica tradizionale, la fase di matematizzazione del problema e quella dell'interpretazione dei risultati sono abitualmente costituite da passaggi praticamente obbligati, che poco concedono alle opinioni e alla fantasia del ragazzo.

I calcoli dell'orologio del matematico, così come in generale i problemi della matematica classica, sono tesi alla ricerca di una soluzione oppure alla negazione della sua esistenza.

Si tratta comunque di agire in condizione di certezza. La soluzione di un problema esiste o non esiste di per sé, è come una realtà metafisica, non legata all'opinione di qualcuno, sia pure esperto. L'abilità e la competenza sono utilizzate per cercare la verità che esiste di per sé.

Invece, nei problemi legati al Calcolo delle probabilità e alla Statistica si tiene conto dell'incertezza presente nella vita reale e si introducono criteri logici per misurare e/o controllare tale incertezza. Le certezze sono spesso sostituite da opinioni espresse in maniera logicamente coerente, e c'è, di solito, un ampio spazio di riflessione, anche per le proposte personali degli allievi, al confronto d'idee, senza rinunciare alla rigorosità matematica.

Il bambino è stimolato a pensare, incoraggiato a prendere una decisione nei momenti d'incertezza, messo in condizione di vedere la realtà da diversi punti di vista, ad essere meno categorico nei giudizi ed è aiutato ad uscire dal suo egocentrismo e quindi ad essere più aperto e comprensivo verso gli altri.

Molto importante, in tale contesto, è il concetto definettiano di *valutazione soggettiva* della probabilità di un evento E come "grado di fiducia del verificarsi di E", dove la soggettività è intesa non come arbitrarietà, ma come opinione coerente di un esperto derivante dal complesso di informazioni in possesso del soggetto che valuta (de Finetti, 1970; 1989; Scozzafava, 1989; Coletti, Scozzafava, 2002; Maturo, 1992).

A tale impostazione fanno riferimento le varie teorie della scelta razionale in condizione d'incertezza (Lindley, 1998; March, 1998).

In conclusione, mentre i rami tradizionali della matematica sono basati su deduzioni da enti astratti, quelli racchiusi nelle parole chiave "*Probabilità, Statistica"* hanno lo scopo di aiutare il bambino a ragionare e trarre conclusioni partendo da situazioni reali incerte e complesse.

Una situazione reale complessa non si presenta in genere come un problema classico di matematica, con dati e incognite ben definiti (o univocamente individuabili), ma come un qualcosa di vago che ha bisogno di un'ampia fase di discussione, elaborazione, adattamento, per essere messa a fuoco e tradotta in linguaggio formale tipico della matematica.

In questa maniera i bambini imparano a maneggiare la matematica per una rappresentazione accettabile del mondo reale con le sue situazioni d'incertezza ed a percepire sia i vantaggi, sia i limiti, sia la soggettività dell'uso della matematica, soggettività che non è da confondere con l'arbitrio, ma anzi è consapevolezza della portata del ragionamento umano (de Finetti, 1970; Scozzafava, 1989; Maturo, 2001; Delli Rocili, Maturo, 2013a, 2013b).

In conclusione alcuni obiettivi della Probabilità e della Statistica sono:

(1) Introdurre il bambino allo studio di situazioni reali, individuare le criticità e i problemi ponendosi domande (fase dell'intuizione);
(2) Formulare correttamente, anche se in maniera vaga, i problemi (fase della formalizzazione);
(3) Risolvere, magari in maniera approssimata e parziale, i problemi connessi, anche se posti in maniera vaga (fase dell'elaborazione matematica);
(4) Addestrare il bambino al processo di matematizzazione del mondo che lo circonda anche in condizioni d'informazione parziale e quindi di incertezza;
(5) Sviluppare la creatività del bambino anche nel campo della matematica, e quindi favorire l'interesse verso di essa;
(6) Fornire al bambino non solo una visione della matematica come scienza astratta e deduttiva, ma anche e soprattutto mostrarne gli aspetti induttivi e sperimentali.

Per aiutare il bambino (ma anche l'adulto!) a sviluppare procedimenti logici e a organizzare il proprio pensiero è fondamentale l'approccio ludico. Attraverso il gioco, il bambino si sente a proprio agio e viene stimolato alla curiosità, all'intuizione, a ricercare procedimenti che lo portano a nuove scoperte da verificare successivamente.

D'altra parte è stato proprio il gioco che ha dato origine al Calcolo delle Probabilità. Nel XVII secolo il cavaliere De Méré, Pascal e Fermat elaborarono teorie sulla Probabilità proprio per comprendere e controllare situazioni legate ai giochi d'azzardo, per determinare in maniera razionale la distribuzione di rischi e guadagni.

Nella seconda parte del lavoro esamineremo in maniera critica alcuni giochi utili ai bambini per apprendere questioni logiche e terminologiche legate alla Probabilità e alla Statistica.

Nelle parti successive desideriamo approfondire le competenze specifiche, acquisibili dai bambini, legate alle impostazioni classica e statistica del Calcolo delle Probabilità. La parte quinta contiene alcune brevi conclusioni e prospettive di ricerca.

2. Un approccio ludico alla logica dell'incerto

Il gioco, come situazione in cui i ragazzi devono prendere decisioni dall'osservazione e dalle proprie opinioni e attitudini, si presta molto bene alla formulazione dei giudizi qualitativi tipici della logica dell'incerto e alle valutazioni di probabilità e quindi a fare scelte in base a tali giudizi o assegnazioni di probabilità. Tutti noi, durante la giornata, facciamo in continuazione implicitamente o esplicitamente valutazioni qualitative o quantitative di probabilità, di solito in maniera soggettiva, e su esse basiamo le nostre azioni quotidiane.

Il gioco è, per i bambini, l'attività più adeguata per affrontare situazioni di incertezza, in quanto li aiuta ad accostarsi alle situazioni aleatorie in modo sempre più razionale senza un atteggiamento emotivo che crea stress e induce a reazioni non coerenti con i propri obiettivi.

Il bambino si rende conto che l'incertezza può essere *dominata* e *misurata*. In questa maniera impara gradualmente a valutare l'*utilità* delle scelte in condizioni d'incertezza, analizzando razionalmente le alternative possibili e assegnando, in maniera soggettiva, un grado di fiducia al verificarsi dei vari eventi.

Ciò, ad esempio, è quello che avviene durante una partita di calcio (o di tennis), in cui vengono prese velocemente decisioni basate, di fatto, su valutazioni soggettive di probabilità, scegliendo, in condizioni di incertezza, l'azione che con maggiore probabilità permette il raggiungimento dell'obiettivo costituito dal goal (o da un aumento di punteggio).

Vediamo alcuni esempi di giochi utili per entrare nella terminologia e nello spirito della logica dell'incerto.

In questo lavoro, analizzando giochi e proposte didattiche usualmente svolti nella Scuola Primaria, proponiamo un'analisi critica e una metodologia ordinata per porsi problemi a partire da situazioni osservate. Inoltre proponiamo alcuni criteri per risolvere tali problemi utilizzando sia ragionamenti qualitativi (più adatti per le prime classi), sia elaborazioni quantitative (per i ragazzi più grandi).

2.1 Il gioco dei frutti

Si hanno due figurine con l'immagine di una mela.

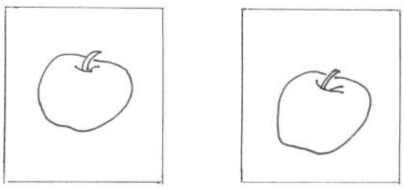

Figura 2 Due mele

Si capovolgono le figurine e si mescolano. Si pone al bambino la seguente domanda: *Scegliendo una figurina* ***sei certo*** *di "pescare" una mela*

In questo caso il bambino dirà di sì.

La maestra però chiede: *Perché sei certo?*

Abitua così il bambino a due fasi del ragionamento matematico:

- *deduzione logica* (anche se semplice);
- *formalizzazione*, ossia l'uso di un linguaggio specifico.

In un secondo momento si fanno osservare al bambino altre 3 figurine con l'immagine di tre frutti diversi dalla mela.

Si capovolgono le figurine e si mescolano. Si pone al bambino la seguente domanda: *Scegliendo una figurina* ***puoi*** *"pescare" una mela?*

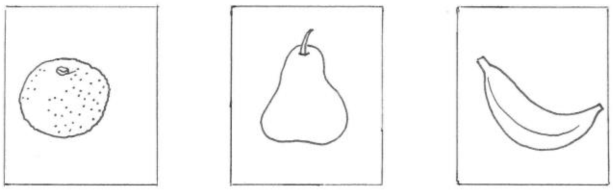

Figura 3 Nessuna mela

Il bambino risponderà "*è impossibile*". Anche in questo caso la maestra chiederà al bambino un ragionamento che motivi la sua risposta e che sia espresso con un linguaggio formalmente corretto.

In questa maniera il bambino avrà assimilato i concetti di *evento certo* e di *evento impossibile*. Da notare che l'evento è stato espresso da una proposizione logica, in accordo con l'impostazione soggettiva di de Finetti, che sembra la più adeguata.

Successivamente si presentano tre figurine, con una banana, una pera e una mela.

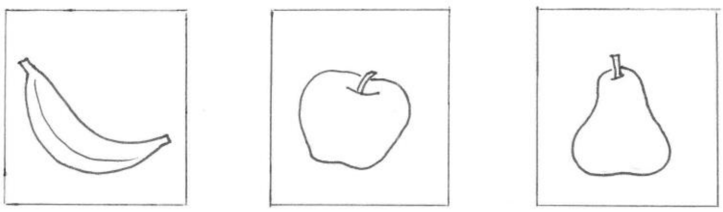

Figura 4 Una mela e due altri frutti

Si capovolgono le figurine e si mescolano. Si pone al bambino la seguente domanda:

Scegliendo una figurina **sei certo** *di "pescare" una mela?*

Il bambino dovrebbe dare una risposta del tipo: "*E' possibile, ma non è certo*".

A questo punto la maestra sostituisce la pera con un'altra mela e ripete la domanda:

Scegliendo una figurina **sei certo** *di "pescare" una mela?*

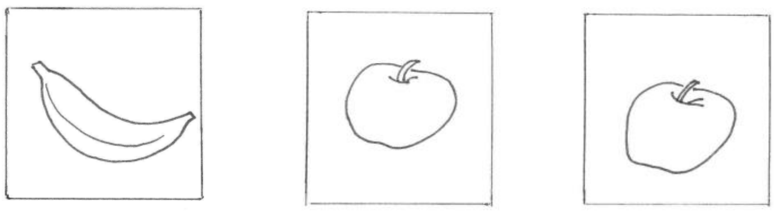

Figura 5 Due mele e un altro frutto

Il bambino può ripetere la risposta di prima, però si accorge che qualcosa è cambiato. La maestra chiede: *Cos'è cambiato rispetto a prima?*

Con la conversazione la maestra stimola il bambino ad arrivare alla conclusione che ora, pur essendoci incertezza sul fatto di avere o no una mela, è più facile che si scelga una mela rispetto al caso precedente.

Si fa intuire così, con il gioco, il concetto di *probabilità qualitativa*, che deve precedere logicamente quello di *probabilità come misura* (de Finetti, 1970; Scozzafava,1982).

Si introducono poi, gradualmente, valutazioni di probabilità qualitative più complesse. Si presenta la situazione della seguente figura.

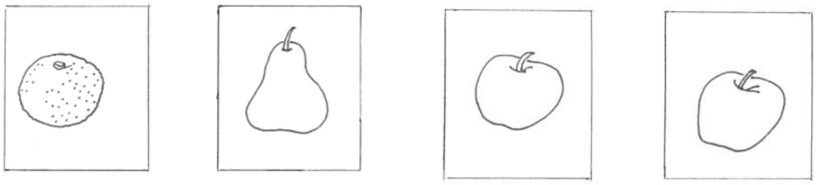

Figura 6 Due mele e due altri frutti

La maestra domanda: *Fra le situazioni della figura 5 (due mele e un altro frutto) e della figura 6 (due mele e due altri frutti) in quale dei due casi è più facile pescare una mela? E fra le situazioni delle figure 4 (una mela e due altri frutti) e 6 (due mele e due altri frutti)?*

Il bambino è indotto a fare ragionamenti più sottili e approfonditi. Può arrivare alla conclusione che aggiungendo un caso sfavorevole (un altro frutto) la facilità di ottenere una mela diminuisce e, invece, aggiungendo una mela, le possibilità di "pescare" una mela aumentano.

Di fatto, così, il bambino, senza accorgersene, acquista familiarità con gli assiomi della probabilità qualitativa.

Evidenziamo il fatto che sarebbe una strategia didattica errata introdurre in questa fase la probabilità come *rapporto* fra casi favorevoli e casi possibili, in quanto, anche se i bambini conoscessero le frazioni, si introdurrebbero degli automatismi di calcolo che sarebbero di ostacolo allo sviluppo del ragionamento logico.

2.2 Frutti aggiunti e frutti tolti a carte coperte

<u>*Frutto tolto*</u>

Ragioniamo nella situazione della figura 4, una mela e altri due frutti. Copriamo le figurine e le mescoliamo. Poi togliamo una figurina e ne facciamo rimanere due. Chiediamo al bambino:

E' più facile pescare una mela adesso o prima di togliere la figurina? Oppure è ugualmente facile?

Il bambino sarà sospettoso. Penserà che, se è stata tolta la mela, adesso è impossibile ottenerla; se invece è stato tolto un altro frutto ora è più facile rispetto a prima ottenere la mela.

Ma nessuno sa quale figurina è stata tolta. Questa mancanza d'informazione fa in modo che la facilità di ottenere una mela è ancora la stessa di prima, ognuna delle figurine rimanenti è una scelta a caso.

Questo problema, di tipo logico, può essere risolto con le probabilità condizionate (occorre però una classe, almeno di scuola media, ben addestrata).

E' necessario saper attribuire dei simboli come nomi degli eventi, dopo aver scelto opportunamente le proposizioni logiche che rappresentano gli eventi stessi.

Indichiamo con:

- M l'evento "pesco una mela nella situazione iniziale, della figura 4 (una mela e altri due frutti)";

- M_2 l'evento "pesco una mela dopo aver tolto una figurina";
- T_M = "ho tolto una mela", T_F = "ho tolto un altro frutto".

Considerando le probabilità si ottiene:

$$p(M_2) = p(M_2 \cap T_M) + p(M_2 \cap T_F),$$

e quindi

$$p(M_2) = p(T_M)\, p(M_2/T_M) + p(T_F)\, p(M_2/T_F),$$

dove nel secondo membro si hanno probabilità di situazioni con maggiore informazione (in $p(M_2/T_M)$ so che ho tolto una mela e in $p(M_2/T_F)$ so che ho tolto un altro frutto).

Se la figurina è stata tolta a caso risulta:

$$p(T_M) = p(M) = 1/3,\ p(T_F) = 2/3.$$

Inoltre:

$$p(M_2/T_M) = 0,\ p(M_2/T_F) = 1/2.$$

Segue

$$p(M_2) = 2/3 \times 1/2 = 1/3 = p(M).$$

Frutto aggiunto

Poniamo ora il problema di valutare la facilità di ottenere una mela *aggiungendo* un frutto a caso partendo dalla situazione della figura 4 (una mela e altri due frutti). Abbiamo ora 4 figurine, di cui la quarta con un frutto sconosciuto. Mescoliamo e chiediamo al bambino:

E' più facile pescare una mela adesso o prima di aggiungere la figurina? Oppure è ugualmente facile?

Il bambino sarà sospettoso. Penserà che, se è stata aggiunta una mela, adesso è più facile ottenerla; se invece è stato aggiunto un altro frutto, è più difficile rispetto a prima ottenere la mela.

Ma nessuno sa quale figurina è stata aggiunta.

A differenza del problema precedente, in cui è stata tolta una figurina, in questo caso si ha un grado d'informazione minore, che non permette di concludere che la facilità di ottenere una mela è ancora la stessa di prima, oppure che è maggiore o minore.

Bisogna vedere da quale insieme di figurine è stata presa a caso la quarta figurina. Se in questo insieme c'è una mela ogni tre figurine, allora la facilità di ottenere una mela è la stessa di prima, altrimenti le cose cambiano.

Anche in questo caso, il problema può essere risolto con le probabilità condizionate in una classe ben addestrata, almeno di scuola media.

Siano:

- M l'evento "pesco una mela nella situazione iniziale, della figura 4 (una mela e altri due frutti)";
- M_2 l'evento "pesco una mela dopo aver aggiunto una figurina";
- A_M = "ho aggiunto una mela";
- A_F = "ho aggiunto un altro frutto".

Risulta:

$$p(M_2) = p(M_2 \cap A_M) + p(M_2 \cap A_F),$$

e quindi

$$p(M_2) = p(A_M)\, p(M_2/A_M) + p(A_F)\, p(M_2/A_F).$$

Si ha:

$$p(M_2/A_M) = 2/4,\ p(M_2/A_F) = 1/4.$$

Segue

$$p(M_2) = p(A_M) \times 2/4 + p(A_F) \times 1/4.$$

Otteniamo $p(M_2) = p(M) = 1/3$ se e solo se $p(A_M) = 1/3$ (e quindi $p(A_F) = 2/3$), ossia se la nuova figurina è stata presa a caso da un insieme in cui c'è una mela ogni 3 figurine.

2.3 Il gioco e la probabilità qualitativa

Nel gioco della mela si è dato per scontato che il bambino intuisse il significato del confronto fra le *facilità di verificarsi* di eventi e quindi della *probabilità qualitativa* (detta anche *comparativa*). E' opportuno, però, chiarire almeno le definizioni di base della probabilità qualitativa anche per capire il suo ruolo di struttura logica che precede la probabilità numerica. Per approfondimenti si vedano (Scozzafava, 1982; Maturo, 2000).

Supponiamo che K sia un'*algebra di eventi*, ossia una famiglia di eventi tale che:

(A1) l'evento certo Ω appartiene a K;

(A2) se A appartiene a K allora anche il suo contrario A^c appartiene a K;

(A3) se A e B appartengono a K anche la loro unione appartiene a K.

Come conseguenza dei precedenti assiomi anche l'evento impossibile Ø appartiene a K. Inoltre se A e B appartengono a K allora anche la loro intersezione e la loro differenza appartengono a K.

Supponiamo inoltre che K sia non banale, ossia che esista in K almeno un evento aleatorio.

Una relazione di *preordine completa* in K è una relazione, indicata con <≈ (minore o equivalente) che gode delle seguenti proprietà:

(PQ1) *transitività*: se A, B, C sono elementi di K tali che A <≈ B, B <≈ C, allora A <≈ C;

(PQ2) *completezza*: se A e B appartengono a K allora vale almeno una delle due proprietà A <≈ B oppure B <≈ A.

Se valgono entrambe le A <≈ B e B <≈ A diciamo che A e B sono *equivalenti* e scriviamo A≈B. Se vale solo la A <≈ B e non la B <≈ A diciamo che A è minore di B (oppure che B è maggiore di A) e scriviamo $A<B$ oppure $B>A$.

Una *probabilità qualitativa* in K è una relazione di preordine completa che soddisfa le seguenti proprietà:

(PQ3) *isola l'evento impossibile*: se A è un evento non impossibile allora $\emptyset<A$;

(PQ4) *compatibile con l'unione*: se A <≈ B e C è un evento incompatibile sia con A che con B allora A ∪ C <≈ B ∪ C;

(PQ5) *compatibile con la differenza*: se A <≈ B e C è un evento contenuto sia in A che in B allora A - C <≈ B – C.

In particolare dagli assiomi segue che, per ogni evento $A\neq\Omega$, $A < \Omega$.

Una domanda sorge spontanea: vale la pena far studiare la probabilità qualitativa prima di quella numerica? Il problema è analogo a quello che si pone in Geometria: è opportuno un confronto non numerico fra le estensioni delle figure prima di introdurre le aree? Riteniamo decisamente di sì, perché le strutture logiche devono precedere i calcoli, altrimenti si rischia di avere ragazzi bravi a calcolare ma che non sanno il significato del risultato trovato.

2.4 Il gioco della battaglia navale

I bambini, alla fine del percorso di studi nella Scuola Primaria, sono già in grado di rappresentare con le frazioni le probabilità di semplici eventi, ma possono utilizzare anche altre rappresentazioni: le percentuali, le tabelle, i diagrammi ad albero.

Il classico gioco della *Battaglia navale* ci permette di fare alcune interessanti osservazioni didattiche e di proporre problemi per applicare le più importanti formule di probabilità. Ci permette anche di stimolare gli alunni a porsi problemi.

Com'è noto vince chi, per primo, riesce a "affondare" tutte le navi. In questo lavoro, per semplicità, ci limitiamo a considerare solo alcuni problemi particolari riferiti a un caso specifico di gioco di battaglia navale.

Si invitano i bambini a disegnare un quadrato 10x10 con lettere per indicare le righe e numeri per indicare le colonne.

I bambini devono poi disporre nel reticolo 10 navi, ad esempio:

1 da 5 quadretti, 2 da 4 quadretti, 3 da 3 quadretti, 1 da 2 quadretti, 3 da 1 quadretto

Si potrà avere, ad esempio, la seguente situazione:

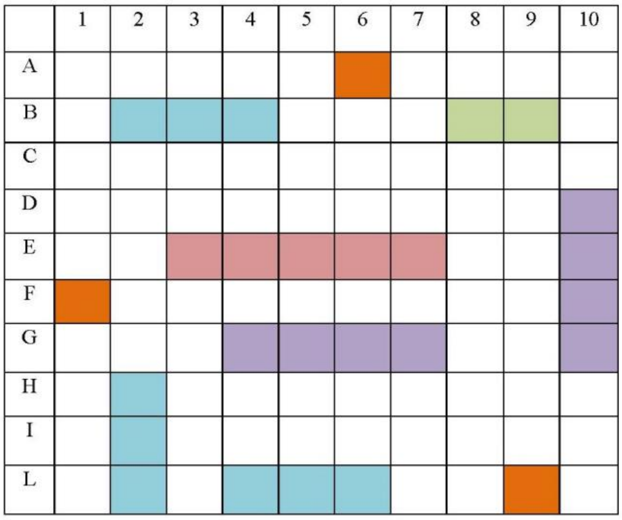

Figura 7 La Battaglia Navale

Le navi occupano 27 caselle. Rimangono vuote 73 caselle.

Poniamo ai bambini la seguente domanda: "*Qual è la probabilità di colpire ciascuna nave al primo 'tiro'?*"

I bambini dovranno rappresentare la probabilità prima con una frazione e poi trasformarla in percentuale. Il passaggio alle percentuali è molto importante poiché porta al concetto di frequenza, base per la comprensione di tutti i problemi statistici e per il confronto fra le proprietà statistiche di insiemi con numerosità diversa.

La conversazione porterà a stabilire le seguenti probabilità:

Una nave di 5 quadretti, …5 su 100,… cioè 5/100…cioè il 5%
Una nave di 4 quadretti,…4 su 100,… cioè 4/100…cioè il 4%
Una nave di 3 quadretti,…3 su 100,… cioè 3/100…cioè il 3%
Una nave di 2 quadretti,…2 su 100,… cioè 2/100… cioè il 2%
Una nave di 1 quadretto,…1 su 100,…cioè 1/100…cioè l'1%
Nessuna nave … 73 su 100,…cioè 73/100,… cioè il 73%

E' importante, però, tener presente anche il numero delle diverse navi, pertanto si potrebbe chiedere ai bambini:

"*E' più probabile che venga colpita la nave di 5 quadretti o la nave di 2?*", oppure: "*E' più probabile che venga colpita una nave qualunque o nessuna nave?*".

La situazione può essere complicata a piacimento e la discussione può condurre a riflettere su diversi aspetti (il numero, la dimensione, la posizione della nave).

2.5 Probabilità di affondare una nave

Limitiamoci a considerare il seguente problema:

Date due navi, una da una casella e una da due caselle, calcolare le probabilità di affondarle, rispettivamente, in uno e due colpi.

Per la nave di una sola casella la probabilità di affondarla al primo colpo è 1/100.

Per la nave di due caselle indichiamo con C1 l'evento "colpita al primo colpo" e con C2 "colpita al secondo colpo". Si tratta di calcolare la probabilità di C1 ∩ C2.

L'evento C1 è l'unione di tre eventi incompatibili:

- C1i = "la nave è colpita al primo colpo in un punto *interno* al reticolo (non su un bordo)";
- C1b = "la nave è colpita al primo colpo in un punto *di frontiera* del reticolo ma non su uno spigolo";
- C1s = "la nave è colpita al primo colpo in un punto *di frontiera* del reticolo su uno spigolo".

Allora risulta:

$$p(C1 \cap C2) = p(C1i \cap C2) + p(C1b \cap C2) + p(C1s \cap C2).$$

C1i è l'intersezione di due eventi: C1 = "colpita al primo colpo", Si = "scelto un punto interno";

C1b è l'intersezione di C1 = "colpita al primo colpo", Sb= "scelto un punto di frontiera diverso dagli spigoli;

C1s è l'intersezione di C1 = "colpita al primo colpo", Ss= "scelto un punto di frontiera coincidente con uno spigolo".

Segue allora:

$$p(C1i \cap C2) = p(Si)\, p(C1/Si)\, p(C2/(Si \cap C1);$$

$$p(C1b \cap C2) = p(Sb)\, p(C1/Sb)\, p(C2/(Sb \cap C1);$$

$$p(C1s \cap C2) = p(Ss)\, p(C1/Ss)\, p(C2/(Ss \cap C1).$$

Abbiamo p(C1) = 2/100 indipendentemente dal fatto che i colpi siano su punti interni o di frontiera. Quindi p(C1/Si) = p(C1/Sb) = p(C1/Ss) = 2/100.

Se ammettiamo che il secondo colpo è portato con intelligenza, per colpire di nuovo la nave, il bambino capisce che conviene provare una delle caselle vicine a quella colpita.

Bisogna distinguere tre casi:

1. la casella colpita al primo colpo non è sul bordo del reticolo; le caselle vicine sono 4, per cui $p(C2/(Si \cap C1)) = 1/4$. La probabilità di affondare la nave al secondo colpo, se il primo colpo non è sul bordo del reticolo ed ha raggiunto l'obiettivo, è allora:

$$p(C1i \cap C2) = p(Si) \times 2/100 \times 1/4 = p(Si) \times 1/200.$$

2. la casella colpita è sul bordo del reticolo, ma non su uno spigolo; le caselle vicine sono 3, per cui $p(C2/(Sb \cap C1)) = 1/3$. La probabilità di affondare la nave al secondo colpo, se il primo colpo ha raggiunto l'obiettivo ed è sul bordo del reticolo ma non su uno spigolo, è allora:

$$p(C1b \cap C2) = p(Sb) \times 2/100 \times 1/3 = p(Sb) \times 1/150.$$

3. la casella colpita al primo colpo è su uno spigolo del reticolo; le caselle vicine sono 2, per cui $p(C2/(Ss \cap C1)) = 1/2$. La probabilità di affondare la nave al secondo colpo, se il primo colpo ha raggiunto l'obiettivo ed è su uno spigolo, è allora:

$$p(C1s \cap C2) = p(Ss) \times 2/100 \times 1/2 = p(Ss) \times 1/100.$$

In conclusione, la probabilità di affondare la nave in due colpi è:

$$p(C1 \cap C2) = p(C1i \cap C2) + p(C1b \cap C2) + p(C1s \cap C2) =$$

$$= p(Si) \times 1/200 + p(Sb) \times 1/150 + p(Ss) \times 1/100.$$

Se la scelta del primo punto da colpire è casuale risulta:

$$p(Si) = 1/64;\ p(Sb) = 1/32;\ p(Ss) = 1/4.$$

Si possono però avere valori diversi di p(Si), p(Sb), p(Ss) a seconda dei criteri di scelta utilizzati.

Il problema è più complesso se si tratta di calcolare la probabilità di affondare in tre colpi una nave di tre caselle.

Infatti bisogna tener conto in via preliminare che $C1 = C1a \cup C1b$, dove C1a è l'evento "la nave con il primo colpo è colpita lateralmente" e C1b è "la nave con il primo colpo è colpita nel mezzo".

3. Le competenze legate all'impostazione classica della probabilità

L'impostazione classica del calcolo delle probabilità è basata sulla definizione di probabilità di un evento come *rapporto fra il numero di casi favorevoli all'evento e il numero di casi possibili*. Essa, essendo un'impostazione teorica, con *valutazioni a priori*, è quella che più si avvicina al modo di procedere deduttivo, per assiomi, definizioni e teoremi, della matematica classica.

Da un punto di vista logico l'impostazione classica è basata sulla convinzione che esiste una "partizione finita privilegiata" dell'evento certo tale che tutti gli eventi della partizione siano equiprobabili.

I tentativi di estendere l'impostazione classica a partizioni infinite si sono scontrati con grandi difficoltà di tipo matematico.

Le principali *abilità* richieste nell'impostazione classica sono:

1) saper calcolare il numero di elementi di un insieme finito;
2) conoscere bene il calcolo con le frazioni.

La prima abilità è la più importante e delicata. Si va dal *calcolo combinatorio* ai vari metodi della *matematica discreta*. Particolarmente significativo è il caso dell'unione di insiemi finiti che possono avere parti in comune, in cui si ottiene il *teorema di Poincaré*, molto rilevante per la soluzione di un gran numero di quesiti di probabilità e per le generalizzazioni della teoria della probabilità a casi in cui non vale l'additività.

Dopo aver introdotto la probabilità classica, il passo successivo è la comprensione del *problema delle prove ripetute* e della *distribuzione* *binomiale*. Normalmente si parte dal classico esperimento di testa e croce con una moneta. Riteniamo preferibile però sostituire le monete con le figurine, poiché esse sono sempre presenti nella realtà quotidiana dei bambini di questa età e possiamo sfruttare il fascino che esse esercitano su di loro utilizzandole per apprendere la probabilità giocando.

Attraverso le figurine possiamo anche sviluppare nuove conoscenze e abilità, facendo apprendere e utilizzare praticamente i primi elementi di *rappresentazione matriciale* e *teoria dei grafi*, i concetti di *n-pla ordinata* e *non ordinata* di elementi di un insieme, le *relazioni di equivalenza* e varie tipologie di *funzioni*.

3.1 Probabilità classica e figurine

Proponiamo ai bambini di analizzare i risultati possibili che si ottengono lanciando in aria una o più figurine e osservando se esse ricadono dalla parte della scritta o da quella dell'immagine.

Successivamente, dopo aver introdotto l'impostazione statistica della probabilità, facciamo fare alcuni esperimenti per confrontare i risultati ottenuti con quelli teorici.

Si fa dapprima accettare, con ragionamenti e esperimenti, ai bambini il fatto che, lanciando una figurina, si ha la stessa probabilità che essa ricada dalla parte dell'immagine (I) o dalla parte della scritta (S) che si trova nella parte posteriore.

Abbiamo quindi sia per I e sia per S: probabilità 1 su 2, cioè 1/2 che corrisponde a 50/100 e perciò al 50%.

Chiediamo poi ai bambini:

"*Se invece lanciamo 2 figurine, quali risultati possiamo ottenere?*"

Il punto cruciale del quesito è che i bambini dovranno imparare a distinguere fra i concetti di coppia ordinata e coppia non ordinata e capire se, con la parola "risultato", ci si riferisce a coppie di figurine ordinate o non ordinate. Il quesito è volutamente impreciso, per fare in modo che i bambini possano dare la loro interpretazione.

Osserviamo che, se x e y sono due elementi di un insieme, il simbolo (x, y) rappresenta una coppia ordinata. Allora bisognerà chiedere ai bambini di pensare un simbolo per le coppie non ordinate. Può andare bene la notazione [x, y]. Facciamo osservare che [x, y] = [y, x] e che il simbolo [x, x] indica che si ripete due volte lo stesso oggetto x.

I bambini si renderanno conto che possiamo ottenere 4 coppie ordinate, precisamente: 2 immagini (I, I), 2 scritte (S, S), immagine e scritta (I, S), scritta e immagine (S, I).

Le coppie ordinate possono essere rappresentate con una tabella a doppia entrata:

2° fig. / 1° fig.	I	S
I	(I, I)	(I, S)
S	(S, I)	(S, S)

Tabella 1 Matrice delle coppie ordinate

La stessa situazione può essere rappresentata con un grafo, in particolare un diagramma ad albero, in cui ogni arco, considerato orientato dalla prima figurina alla seconda, rappresenta una coppia ordinata.

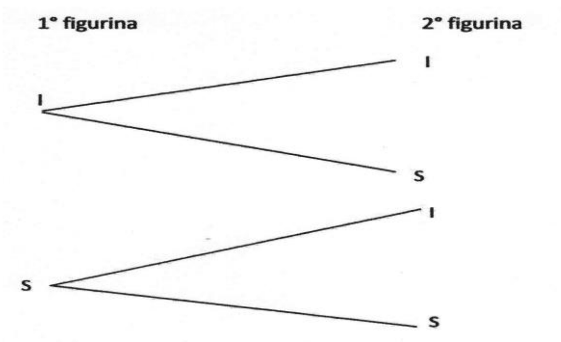

Figura 8 Grafo delle coppie ordinate

Chiediamo ai bambini: "*Quante volte si può verificare ogni coppia di figurine?*"

I bambini osserveranno che ogni coppia ordinata può verificarsi una sola volta, mentre, volendo ragionare sulle coppie non ordinate di figurine, noteranno che:

- la coppia [I, I] appare 1 volta su 4, ossia il 25% dei casi;

- la coppia [S, S] appare 1 volta su 4, ossia il 25% dei casi;
- la coppia [I, S] = [S, I] appare 2 volte su 4, ossia il 50% dei casi.

In maniera analoga si può discutere il caso di 3 o più figurine. Per 3 figurine, se x, y, z sono rispettivamente le facce ottenute per la prima, la seconda e la terza figurina, allora (x, y, z) rappresenta una terna ordinata, mentre [x, y, z] una terna non ordinata.

Lanciando tre figurine otterremo 8 terne ordinate:

(I–I–I), (I–I–S), (I–S–I), (I–S–S), (S–I–I), (S–I–S), (S–S–I), (S–S–S).

Si ha la seguente rappresentazione con un diagramma ad albero, in cui ogni cammino di lunghezza 2, ossia formato da due archi, rappresenta una terna ordinata:

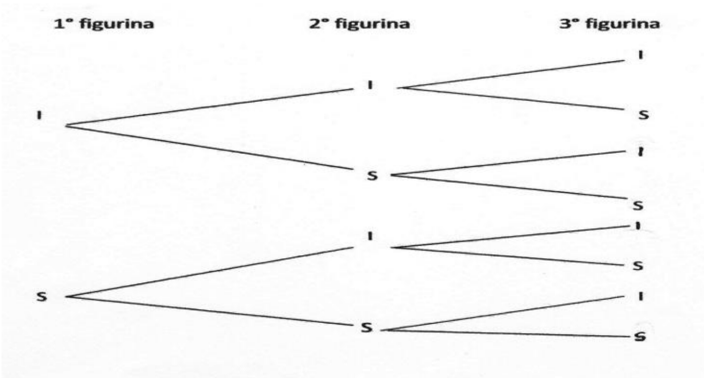

Figura 9 Grafo delle terne ordinate

Chiediamo ai bambini: "*Quali terne hanno più probabilità di presentarsi?*"

I bambini dovranno chiedersi se è opportuno parlare di terne ordinate o terne non ordinate. Ogni terna ordinata si presenta una sola volta, quindi tutte le terne ordinate hanno la stessa probabilità.

Per arrivare al concetto di terna non ordinata bisogna introdurre una *relazione di equivalenza*. Due terne ordinate si considerano equivalenti se hanno lo stesso numero di immagini (e quindi di scritte). Le terne non ordinate sono le *classi di equivalenza*.

I bambini dovranno contare quanti cammini del diagramma ad albero hanno un fissato numero di immagini. Si accorgeranno che le terne non ordinate sono 5, precisamente: [I, I, I], con 3 immagini; [I, I, S], con 2 immagini e 1 scritta, [I, S, S], con 1 immagine e 2 scritte, [S, S, S], con 3 scritte. Noteranno che un solo cammino ha 3 immagini, 3 hanno 2 immagini, 3 hanno 1 immagine e uno ha solo 3 scritte e quindi nessuna immagine.

Quindi le situazioni [I, I, I] e [S, S, S] si verificano una sola volta, mentre le [I, I, S] e [I, S, S] si verificano 3 volte. I bambini concluderanno che le terne ordinate più probabili sono [I, I, S] e [I, S, S].

Chiediamo ancora: "*In che percentuale?"*

I bambini dovranno tener conto che, essendo 8 le terne ottenute, le terne [[I, I, S] e [I, S, S] avranno ciascuna i 3/8 di possibilità di presentarsi, cioè il 37,5%.

Possiamo chiedere ancora: "*Quali terne hanno meno probabilità di presentarsi?*"

A questo punto diventa semplice dedurre che ciascuna delle due terne [I, I, I] e [S, S, S] avrà 1/8 di probabilità pari al 12,5%.

Si impone una riflessione su come presentare i concetti di terna ordinata o non ordinata di elementi di un insieme. Se B è un insieme di bambini, una terna ordinata di elementi di B può essere definita come un elenco di tre bambini che ricevono tre regali, R1, R2, R3, in ordine decrescente di importanza oppure come una funzione che ad ogni regalo associa un bambino. Può capitare che un bambino prenda più di un regalo!

Si può arrivare al concetto di terna non ordinata se diciamo ai bambini che i tre regali hanno la stessa importanza e quindi per ogni bambino conta solo il numero di regali che riceve.

Il passaggio dalle terne ordinate a quelle non ordinate è ottenuto per mezzo di una *relazione di equivalenza*. Due elenchi di tre bambini sono equivalenti se negli elenchi sono presenti gli stessi bambini e ognuno di essi ha lo stesso numero di regali. Le terne ordinate sono le *classi di equivalenza*.

3.2 Il ruolo dell'impostazione classica rispetto agli obiettivi di formazione, informazione, cooperazione o competizione

L'impostazione classica si presta alla *competizione* in quanto la comprensione e la velocizzazione delle applicazioni del calcolo combinatorio, e in generale della matematica discreta, possono creare molte diversità di risultati positivi ai test fra gli studenti.

Il filone in cui s'inserisce l'impostazione classica del calcolo delle probabilità è di grande interesse e attualità; esistono collegamenti con geometrie finite, teoria dei grafi, etc. Inoltre i teoremi più importanti del calcolo delle probabilità sono ottenuti in maniera abbastanza semplice.

Meno interessante sembra il ruolo della probabilità classica dal punto di vista della *formazione logica* e da quello della *ricerca empirica*.

Dal punto di vista logico spesso manca la visione dell'evento come *proposizione logica*. L'evento è visto intuitivamente come “*qualcosa che accade*”, oppure come un *insieme* di “casi possibili”, sottoinsieme di un insieme *fissato a priori* di “casi favorevoli”.

Si parte spesso dall'idea che l'insieme dei casi possibili abbia un’esistenza propria, obiettiva, indipendente dalle opinioni delle persone, non si immagina che sia una creazione mentale di qualcuno per determinati obiettivi.

In particolare mancano *l'analisi della frase* che definisce l'evento e le *valutazioni* (necessariamente soggettive) dell'esperto. Inoltre le *premesse logiche* (ad esempio: Quali sono i casi possibili? Perché proprio quelli e non altri? Perché sono ugualmente possibili?) sono spesso date per scontate e non meritevoli di approfondimento.

La probabilità classica è data *a priori*, senza verifica sperimentale e senza essere preceduta da un’induzione dal mondo reale.

L'aspetto *interdisciplinare* è poco presente, proprio per il ruolo limitato che hanno l'analisi logica della frase, la valutazione critica del soggetto e così via.

In conclusione, la probabilità classica, pur essendo molto utile per rilevare alcune *abilità di calcolo*, è ancora fondamentalmente un capitolo della matematica teorica, deduttiva, e presenta pochi aspetti interdisciplinari.

Inoltre, almeno al livello di scuola del primo ciclo, il confronto con il mondo reale è limitato a modelli collegati a situazioni di gioco.

4. L'impostazione statistica e la ricerca empirica

L'impostazione statistica del calcolo delle probabilità è basata sulla definizione di probabilità di un evento come frequenza, ossia come rapporto fra il numero di volte in cui l'evento si verifica e il numero di prove (osservazioni o esperimenti).

Spesso viene precisato che questa definizione è approssimata, e si afferma che la definizione precisa di probabilità di un evento è il *limite della frequenza* quando il numero di prove tende a infinito.

Dal punto di vista logico ci si scontra con il fatto che un evento *non è ripetibile*, sia che si definisca come “proposizione logica”, sia, in maniera approssimativa, come “qualcosa che accade”. Allora è da precisare il senso logico della definizione. In realtà si considera un numero finito n di eventi, E1, E2, …, En, che da un certo punto di vista, vengono considerati “equivalenti” e “indipendenti”, precisamente *equiprobabili* e tali che *abbiamo sufficienti o ragionevoli motivi per ritenere* che il verificarsi di uno di essi non altera la probabilità di verificarsi degli altri.

La frase “numero di volte in cui l'evento si verifica” va interpretata, dal punto di vista logico, nel senso che si considera il *numero di eventi che si verificano* fra quelli dell'insieme {E1, E2, …, En}.

Il primo passo nella probabilità statistica è far familiarizzare i bambini con i concetti di *equivalenza, classificazione, osservazione, esperimento* e *frequenza* attraverso dei giochi.

Per far compiere ai bambini rilevamenti statistici fin dai primi anni della Scuola Primaria e quindi cominciare a capire i concetti fondamentali di *classificazione, osservazione, sperimentazione* e *frequenza,* è importante:

- prendere in esame fatti reali piuttosto semplici;
- far scegliere loro i simboli da utilizzare;
- farli operare concretamente con la manipolazione di materiali;
- far registrare i dati raccolti;
- osservare insieme le informazioni (che gradualmente saranno più sintetiche);
- aiutarli ad interpretare i dati;
- far rappresentare i risultati con dei grafici;
- leggere i grafici attraverso conversazioni guidate.

4.1 L’indagine statistica nel primo biennio della scuola primaria

Un itinerario da percorrere per far eseguire i rilevamenti statistici ai bambini del primo biennio della scuola primaria è basato su indagini che prevedono due sole possibilità di scelta, con la condizione che una scelta, comunque, è da considerarsi obbligata, ossia il bambino deve scegliere una e una sola di due alternative.

In un secondo tempo, dopo una discussione in classe, si può considerare anche il caso che, di due possibilità, non venga scelta nessuna o vengano scelte entrambe.

Per chiarezza di esposizione facciamo riferimento al classico gioco dell’animale preferito.

Ad esempio si possono porre al bambino le seguenti domande:

D1 = “Quale animale preferisci tra il *cane* e il *gatto*.”

D2 = “Quale animale hai in casa fra il *cane* e *gatto*?”

Nel primo quesito si hanno due alternative fra cui scegliere una sola, nel secondo le alternative sono sempre due, ma abbiamo 4 possibili risposte (cane, gatto, nessuno, entrambi).

In un gruppo di 13 bambini è stata svolta un’indagine sulle risposte al quesito D1. Per rappresentare e interpretare i dati a ciascun bambino sono state date due palline di due colori diversi (rosso e blu) e ad ogni colore è stata attribuita la preferenza di un animale; associando al colore rosso il cane e al colore blu il gatto.

Ogni bambino poteva esprimere la propria preferenza infilando una pallina in una cordicella predisposta per raccogliere le preferenze riservate al cane, oppure nella cordicella che raccoglieva le preferenze per il gatto.

Alla fine sono state appese le cordicelle a ganci fissati su un listello e, confrontando la lunghezza, è stato semplice individuare la preferenza espressa dal maggior numero di bambini.

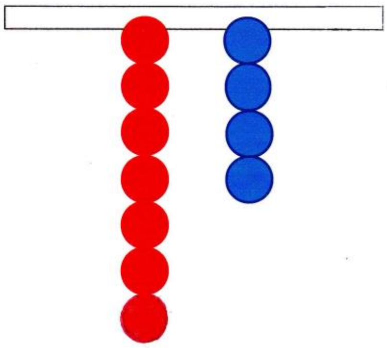

Figura 10 Preferenza con le palline dei 13 bambini

L’insegnante ha poi chiesto ai bambini di verificare l’adeguatezza e la completezza della rappresentazione effettuata, proponendo il seguente problema:

“*Come possiamo far sapere a chi non era in classe di che cosa abbiamo parlato?”*

“Come possiamo far capire che si tratta di un’indagine sull’animale preferito?”.

Per rendere l’indagine chiara a tutti e leggibile anche a chi non era presente, gli alunni sono stati invitati a realizzare un cartellone con un grafico a blocchi con i disegni del cane e del gatto.

I bambini, essendo la prima volta che facevano questa esperienza, hanno incollato i disegni in modo disordinato e allora l'insegnante ha dovuto orientarli per fissare una "stessa linea di partenza" e allineare i disegni in modo "regolare".

I bambini hanno compreso che era sufficiente mettere l'immagine dell'animale solo alla base di ciascuna colonna e che era necessario usare cartoncini delle stesse dimensioni, ma di colore diverso (rossi e blu, come le palline); abbiamo finalmente costruito un nuovo cartellone.

In seguito la rappresentazione è stata riportata sul quaderno con fogli quadrettati e si passerà alla lettura del grafico. L'insegnante ha stimolato gli alunni con domande per l'osservazione e l'interpretazione dei dati.

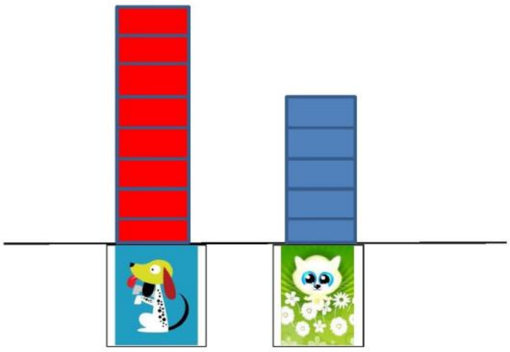

Figura 11 Preferenze con i cartoncini dei 13 bambini

4.2 L'indagine statistica dopo il primo biennio della Scuola Primaria

Negli anni dalla terza alla quinta elementare gli alunni imparano a rappresentare in modo schematico i dati raccolti e registrati durante un'indagine e a trarre le loro conclusioni; imparano inoltre a rappresentare la frequenza mediante istogrammi e ortogrammi, a leggere la *moda*, a calcolare la *media*, la *mediana*, *etc.*

E' importante far comprendere ai bambini che è necessario scegliere il diagramma più efficace per rappresentare una data situazione. Alla fine del percorso di Scuola Primaria, l'insegnante può proporre l'uso di *grafici cartesiani* per visualizzare l'evoluzione di un fenomeno in un dato periodo (ad esempio la temperatura registrata nell'arco del mese).

Utilissimo è introdurre *l'ideogramma*, servendosi di disegni che indicano quantità (ad esempio per rappresentare gli ettari di terreno coltivati a frutto in alcune Province, la densità di popolazione), *l'areogramma circolare* o diagramma a torta che permette di osservare quantità e percentuali con settori circolari (per rappresentare, ad esempio, la composizione di un terreno agricolo).

Un classico gioco per aiutare i bambini a imparare a costruire grafici, è il *gioco del cornetto farcito*, consistente nel fare un'indagine su come gli alunni di una classe preferirebbero farcire il loro cornetto.

Da un'indagine condotta in una classe di 24 bambini sono state ottenute le preferenze fra 4 diversi tipi di farcitura: *crema*, *cioccolato*, *marmellata* e *panna*. I bambini, guidati dalla maestra, hanno raccolto i dati con il seguente diagramma cartesiano.

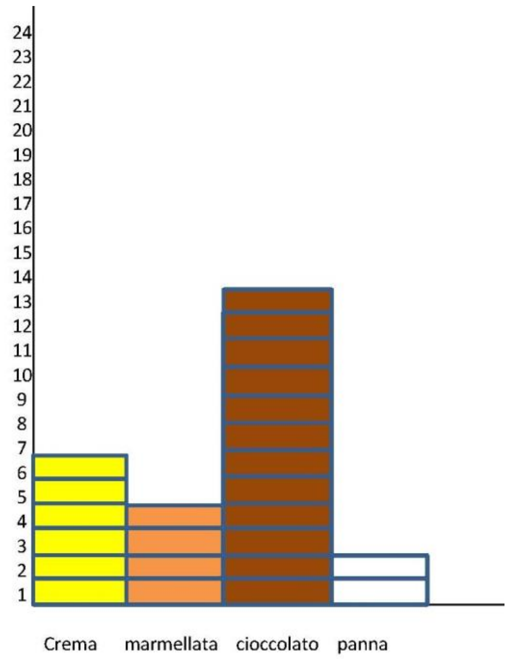

Figura 12 La farcitura preferita

Per introdurre ai concetti di frequenza e frequenza percentuale la maestra ha chiesto agli alunni:

Che rapporti ci sono tra le preferenze espresse e il numero totale dei bambini in classe?

I bambini sono stati indotti a lavorare su frazioni e percentuali e su come organizzare una tabella in cui riportare in maniera efficace i risultati trovati.

Dopo discussioni in classe, è stata compilata la seguente tabella delle frequenze:

farciture	frequenza assoluta	frequenza come frazione	frequenza come numero decimale	frequenza percentuale
crema	6 su 24	6/24	0,25	25
marmellata	4 su 24	4/24	0,17 circa	17
cioccolato	12 su 24	12/24	0,50	50
panna	2 su 24	2/24	0,08 circa	8
Totale	24 su 24	24/24	1	100

Tabella 2 Le frequenze delle farciture

4.3 Rappresentazioni non cartesiane dei dati

Un itinerario a parte è quello della ricerca delle rappresentazioni dei dati più efficaci per rendere visibile e intuitiva l'interpretazione del fenomeno.

A partire dalla indagine precedente ci siamo limitati al disegno di un areogramma circolare. L'importanza di questa rappresentazione è nello stabilire un'attività interdisciplinare fra la Statistica, la Geometria e la manualità del Disegno. Inoltre si comincia a introdurre implicitamente il concetto di frequenza, e quindi di probabilità, come misura di un'area.

L'area di ciascun settore circolare doveva essere direttamente proporzionale al valore della frequenza e quindi si doveva trasformare la frequenza in gradi.

Sono stati stimolati gli alunni con la domanda:

"*Come possiamo fare?*"

Siccome il cerchio corrisponde a un angolo giro, di 360°, bisognava trovare l'ampiezza di ogni settore circolare, che corrispondeva alla relativa frequenza, dividendo i 360° per 100 e moltiplicando il risultato per la frequenza percentuale.

Farciture	Frequenza percentuale	Ampiezza Settori
crema	25	(360:100) x 25 = 90°
marmellata	17	(360:100) x 17 = 61° circa
cioccolato	50	(360:100) x 50 = 180°
panna	8	(360:100) x 8 = 29° circa
Totale	100	360°

Tabella 3

Con il compasso e il goniometro è stato disegnato il cerchio e sono stati delimitati i vari settori partendo da un raggio.

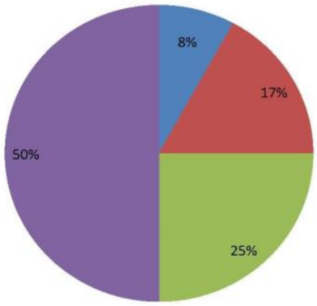

Figura 13 Le frequenze come settori circolari

4.4 Il ruolo dell'impostazione statistica rispetto agli obiettivi di formazione, informazione, cooperazione o competizione

La definizione di probabilità come frequenza porta a sviluppare molte abilità, fra cui:

1) saper osservare accuratamente il mondo reale;
2) capacità di valutare se valgono le condizioni in cui le osservazioni o esperimenti portano a considerare eventi "equivalenti" e "indipendenti";
3) capacità di classificare, fare grafici e tabelle per rappresentare i dati osservati;
4) essere in grado di pianificare gli esperimenti, ossia creare le condizioni per poter osservare eventi "equivalenti" e "indipendenti";
5) conoscere bene il calcolo con le frazioni.

Traducendo il linguaggio statistico in linguaggio logico, si considera una successione E1, E2, …, En, ... di eventi "equivalenti" e "indipendenti".

La probabilità approssimata di un evento dello stesso tipo, valutata sull'osservazione dell'insieme finito {E1, E2, …, En}, è il rapporto m/n, dove m è il numero di elementi dell'insieme che si sono verificati. La "probabilità precisa" dovrebbe essere il limite di tale rapporto per n che tende a infinito.

Le difficoltà logiche sul concetto di "probabilità precisa" come limite sono notevoli:

- Non si capisce cosa può significare fare un limite con infiniti esperimenti, mescolando teoria ed empirismo.
- Esistono dubbi legittimi sul fatto che il limite esista.
- E' preferibile fermarsi alla probabilità imprecisa, basata su un numero finito, ma "sufficientemente elevato" di osservazioni.

In conclusione, dal punto di vista *formativo*, la probabilità statistica appare efficace in quanto soddisfa la necessità del bambino di apprendere e elaborare idee restando in contatto con la realtà. Essa permette di collegare in modo critico il mondo reale con la teoria matematica, e induce il bambino a rappresentare i fenomeni che osserva con grafici e tabelle.

Dal punto di vista *competitivo* si può considerare la maggiore o minore abilità di predisporre o commentare grafici e tabelle.

Ma forse in questo senso sarebbe meglio sviluppare il senso di *cooperazione*, del mettere insieme le idee per una migliore rappresentazione e interpretazione del mondo reale in linguaggio matematico.

La probabilità statistica si adatta molto bene alla didattica attraverso il *gioco*. Ad esempio, volendo valutare qual è la squadra di calcio più forte, e in generale la probabilità che una squadra vinca o perda, i ragazzi sono indotti a raccogliere dati e fare tabelle da cui desumere la probabilità statistica.

4.5 Previsione e modellizzazione

Le relazioni fra la *probabilità a priori* (impostazione classica) e la *frequenza* o *probabilità empirica* (impostazione statistica) devono essere oggetto di discussioni in classe.

Infatti su tali relazioni si basano i processi di:

(a) *previsione*, che si può ricondurre al fatto di "indovinare" le frequenze a partire dalle probabilità a priori;

(b) *modellizzazione*, che può essere pensato come il processo inverso di indurre le probabilità teoriche dalle frequenze osservate.

In altri termini, i ragionamenti che permettono il passaggio dalla deduzione teorica al mondo reale e, viceversa, dall'induzione sui fenomeni osservati alla teoria, si riconducono, in gran parte, alle relazioni fra probabilità classica e frequenza.

I limiti di tali processi logici sono noti: molti giocatori si sono rovinati operando nel mondo reale con previsioni dedotte da modelli probabilistici; molti modelli del mondo reale si sono rivelati inadeguati perché i risultati empirici non erano sufficienti per costruirli o non sono stati sottoposti a sufficienti analisi critiche.

I rapporti fra previsioni teoriche e fatti reali si possono ricondurre al legame fra probabilità e frequenza ben delineato in (Castelnuovo, 1970) con l'enunciato della legge empirica del caso:

"*In una serie di prove ripetute un gran numero di volte nelle stesse condizioni, ciascuno degli eventi possibili si manifesta con una frequenza che è presso a poco uguale alla sua probabilità. L'approssimazione cresce ordinariamente col crescere del numero di prove.*"

L'imprecisione contenuta in tale legge è inevitabile, con le locuzioni "presso a poco", "ordinariamente", ma anche con "un gran numero" e "stesse condizioni". Eppure la legge empirica del caso governa tutte le scelte della nostra vita! E previsione e modellizzazione sono proprio i processi logici che segue il cervello umano che passa dalle idee ai fatti empirici e viceversa.

5. Prospettive di ricerca e conclusioni

Riteniamo che sia il caso di approfondire gli obiettivi generali dell'insegnamento, in particolare della matematica, nella scuola del primo ciclo. Alcuni di essi, talvolta fra loro contrastanti, sono *formazione, informazione*, *cooperazione, competizione.* Pensando, ad esempio, alla legge empirica del caso, si potrebbero aggiungere anche altri obiettivi come *intuizione* e *precisione*.

Ciascuno degli obiettivi può dividersi in *sub-obiettivi* a seconda che si guardi a breve termine, medio termine, lungo termine.

Per quanto riguarda i test INVALSI, si ha l'impressione che essi favoriscano soprattutto la competizione a breve termine. Le scuole si impegnano molto a preparare gli studenti per i test INVALSI, ma, a detta di molti docenti, ciò va a discapito di un processo formativo equilibrato a lungo termine e non favorisce la cooperazione.

Gareggiare va bene, può essere anche molto divertente, ma può emarginare gli studenti meno dotati e le scuole situate in condizioni ambientali e sociali più difficili. Inoltre le condizioni di ristrettezza di tempi in cui si svolgono le prove sembrano favorire la velocità di esecuzione rispetto a una riflessione più lenta ma metodica.

Riteniamo quindi che le prove INVALSI siano molto utili per alcuni obiettivi, ma che vada ridimensionato il loro impatto, dando spazio ad altre iniziative che possono soddisfare gli altri obiettivi.

Si impone quindi una riflessione generale sugli obiettivi e sulla misura in cui le varie alternative d'azione possono soddisfarli.

In particolare riteniamo fondamentale incentivare lo spirito di *cooperazione* fra allievi, scuole, docenti di vari livelli. Uno strumento può essere quello di favorire l'organizzazione di convegni e giornate di lavoro in cui tutti possono presentare i propri progressi e discuterli con altri.

La competitività va incoraggiata, ma bisogna osservare che quella a lungo termine è frutto di una formazione serena, un'informazione mirata e un lungo periodo di cooperazione.

Per definire e soddisfare gli obiettivi andrebbero favorite le iniziative di scuole estive fra pari, in cui si discutano i percorsi formativi, facendo intervenire anche gli studenti; andrebbero anche incoraggiate pubblicazioni di tipo didattico in cui si approfondiscono e si discutono alcuni problemi e metodologie didattiche.

Queste iniziative, di convegni, scuole di formazione fra pari, pubblicazioni, hanno costituito per anni una gran parte del lavoro della Mathesis, portato avanti con abnegazione da pochi volontari e a proprie spese. Riteniamo che sia il caso di guardare con maggiore interesse a tali eventi, che sono un notevole momento di crescita.

Un ruolo importante per la formazione matematica è svolto dalla interdisciplinarità, dal collegamento prima fra i vari rami della matematica, poi fra matematica e altre discipline e infine fra matematica e mondo reale.

Il Calcolo delle probabilità e la Statistica sono i settori della matematica sviluppatisi proprio per svolgere tale ruolo e, per questo motivo, riteniamo che le idee che sono alla base di tali materie vadano introdotte già dalla scuola primaria.

Riteniamo che le idee di base, i concetti logici, le deduzioni, le intuizioni e le induzioni collegati a tali discipline e alle loro applicazioni possano gradualmente essere padroneggiate dai ragazzi e che debbano essere assimilate in una fase che precede quella del calcolo. Spesso il calcolo induce ad automatismi che uccidono le idee, forse è meglio utilizzarlo quando i concetti si sono già formati.

Bibliografia

Castelnuovo G., (1970), Calcolo delle Probabilità, Zanichelli, Bologna

Coletti G., Scozzafava R., (2002), *Probabilistic logic in a coherent setting*, Kluwer Academic Publishers, London.

de Finetti B., (1970), *Teoria delle Probabilità*, vol. I e II, Einaudi, Torino.

de Finetti B., (1989), *La logica dell'incerto*, Mondadori, Milano.

Delli Rocili L., Maturo A., (2013a), Logica del certo e dell'incerto per la scuola primaria, *Science & Philosophy*, No 1- 2013, 37-58.

Delli Rocili L., Maturo A., (2013b), Probabilità e Statistica nella Scuola Primaria: riflessioni sulle Indicazioni Nazionali, esperienze e proposte, *Periodico di matematiche*, Serie XI, Anno CXXIII, Vol 2, 1-12.

Lindley D. V., (1990), *La logica della decisione*, Mondadori, Milano.

March J. G., (1998), *Prendere decisioni*, il Mulino, Bologna.

Maturo A., (1992), Una introduzione alla probabilità soggettiva, *Periodico di matematiche*, Serie VI, Vol 3, 3, 19-36.

Maturo A., (2000), Misure e probabilità qualitative, condizionate e stratificate..., *Periodico di matematiche*, Serie VII, Vol 7, 3-4, 37-52.

Maturo A., (2001), Didattica della Matematica a partire da situazioni di incertezza, in *Atti del Congresso Nazionale Mathesis* 2000, pp. 277-292, Editrice Rotas, Barletta, 2001

Scozzafava R., (1982), *Il ruolo della probabilità comparativa, finitamente additiva, nella statistica bayesiana*, Istituto di Matematica Applicata, Roma.

Scozzafava R., (1989), *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*, Masson, Milano

D.P.R. 104, 12-2-1985, (1985), *I programmi della Scuola elementare*, Armando Editore, Roma