

Construction of the Tangent to a Cycloid Proposed by Wallis and Fermat

Loredana Biacino

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni
Università Federico II, Napoli
loredana.biacino2@unina.it

Received on: 01-09-2016. **Accepted** on: 22-09-2016. **Published** on: 01-02-2017

doi: 10.23756/sp.v4i2.293



© Loredana Biacino

Abstract

In this paper some methods used in the XVII century for the construction of the tangents to a cycloid in a point are exposed: the kinematical method employed by Roberval, the classical geometrical method used by Wallis and the Fermat's construction as a consequence of his tangents method.

Keywords: Cycloid. Tangent to a curve. Kinematical method of tangents. Tangents method by Fermat.

Sunto

In questo lavoro sono esposti vari metodi in uso nel '600 per la costruzione della tangente ad una cicloide in un suo punto: il metodo cinematico impiegato da Roberval, il metodo geometrico classico usato dal Wallis e la costruzione di Fermat come conseguenza del suo metodo delle tangenti.

Parole Chiave: Cicloide, Tangente ad una curva, Metodo cinematico delle tangenti, Metodo delle tangenti di Fermat.

1. Introduzione

E' ben noto che la cicloide è la curva descritta da un punto di una circonferenza quando la circonferenza stessa rotola su una retta. Il segmento di tale retta compreso tra due punti consecutivi in cui il punto ruotante viene a trovarsi su di essa è detto base della cicloide. Nonostante la sua semplice definizione e nonostante la si possa trovare facilmente in natura, basti pensare alla curva tracciata da un chiodo che sporge dalla ruota di un carro graffiando un muro, non se ne trova cenno negli scritti dell'antichità: il primo che se ne occupò e la considerò oggetto degno di studio fu Galileo, che intuì che l'area sotto la curva era tripla dell'area del cerchio generatore; Galileo però non riuscì a dimostrare geometricamente questa sua congettura: pensò quindi di ritagliare un cartone il cui contorno era formato dalla cicloide e dalla sua base e di pesarlo: il risultato di quell'operazione gli forniva un rapporto col cerchio sempre inferiore a tre, per cui gli venne il sospetto che quel rapporto fosse irrazionale. Decise allora di abbandonare tale studio ma esortò gli altri matematici a risolvere in qualche modo quella questione. Se ne occupò Evangelista Torricelli (1608-1647), affezionato discepolo di Galilei. Galilei aveva posto però la questione della curva anche a padre Mersenne a Parigi: tramite Mersenne, Gilles Personne de Roberval (1602-1675) nel 1629 venne a conoscenza della curva e dei problemi ad essa legati (area sotto la curva, baricentro della regione sotto la curva, lunghezza della curva, tangenti alla curva).

Sia Torricelli che Roberval risolsero gran parte dei problemi legati alla curva, in modo indipendente. Torricelli pubblicò la soluzione del problema dell'area nelle sue Opere Geometriche, del 1644, fornendo tre diverse dimostrazioni che l'area sotto la cicloide è il triplo del cerchio generatore, due basate sulla teoria degli indivisibili e la terza basata invece sul metodo di esaustione. In tal modo egli precedeva nella pubblicazione Roberval, che probabilmente era giunto prima di lui alla soluzione del problema: infatti la soluzione di Roberval, contenuta nel suo *Traité des indivisibles*, scritto nel 1634, sarebbe stata data alle stampe solo nel 1693.

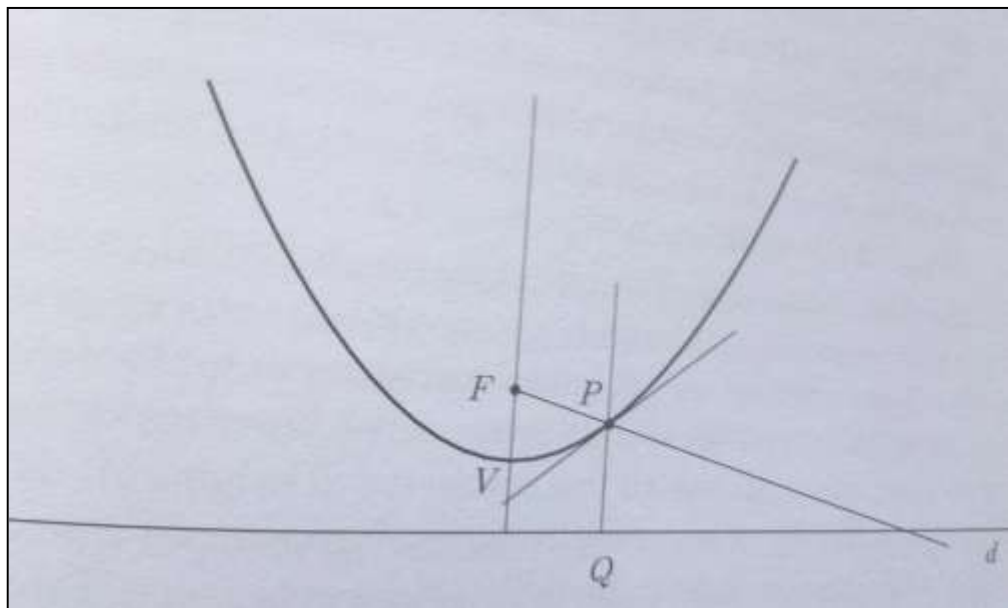
Ne nacque una controversia, che continuò per anni.

Dopo la morte di Torricelli, avvenuta nel 1647, Blaise Pascal (cfr. Pascal, 1980), nel 1657, durante una notte insonne per un fortissimo mal di denti, per dimenticare il dolore, si dedicò allo studio di alcuni problemi concernenti la cicloide. In seguito, dopo averne trovato alcune proprietà, propose una mezza dozzina di quesiti che la riguardavano, offrendo un premio per la soluzione migliore. Vennero presentate diverse soluzioni (e fra queste quelle di John Wallis): a nessuno fu assegnato il premio in quanto in tutte le

soluzioni comparivano degli errori di calcolo. Pascal pubblicò invece, nel 1658, in una serie di *Lettres de Amos Dettonville*, le sue soluzioni, con una *Histoire de la roulette* senza far alcun riferimento a Torricelli e attribuendo tutto il merito a Roberval. Nel 1663, l'ellenista Carlo Dati, per difendere Torricelli dalle accuse di Roberval e di Pascal e ristabilire i fatti scrisse la *Lettera ai Filateti di Timauro Antiata, Della Vera Storia della Cicloide e della Famosissima Esperienza dell'Argento vivo*, in cui venivano fornite molte informazioni su come erano effettivamente andate le cose (cfr. Torricelli 1975). Comunque ancora oggi tale curva è spesso chiamata, specialmente nei trattati non italiani, con il nome di *Roulette di Cartesio*.

2. La costruzione della tangente alla cicloide proposta da Roberval

Supponiamo che sia assegnata una parabola, il fuoco F, la direttrice d, un punto P su di essa e supponiamo di volere disegnare la tangente in P. Tra le varie possibilità c'è la seguente:

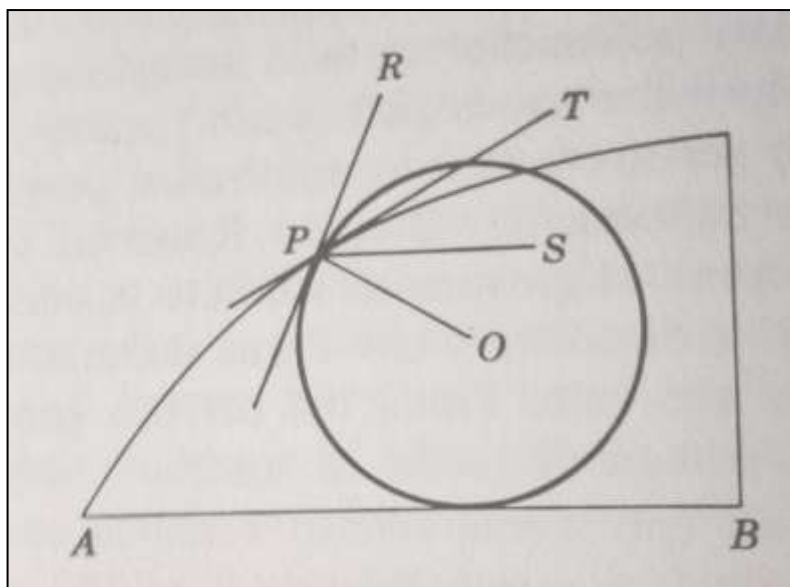


si tracciano la retta congiungente P con F orientata da F verso P e la semiretta normale per P a d orientata verso l'interno: la bisettrice dell'angolo da esse formato è la tangente richiesta.

Perché?

La velocità di un punto che si muove su una curva è un vettore la cui direzione coincide punto per punto con la direzione della tangente. Quindi per stabilire la tangente basta determinare la direzione della velocità. Ora, se un punto P si muove su di una parabola il suo moto si può pensare come risultante di due moti, uno sulla perpendicolare per P alla direttrice, l'altro sulla retta passante per P e per F in modo tale che la distanza PF e la distanza di P da d siano eguali. Per questo motivo le velocità nei due moti sono eguali, il parallelogramma delle velocità si riduce a un rombo e di conseguenza la tangente si ottiene come bisettrice dell'angolo formato dalla retta PF e dalla normale per P a d..

Questa e simili costruzioni (si pensi ad esempio ai casi analoghi dell'ellisse e dell'iperbole), in uso già nell'antichità, furono utilizzate in modo sistematico da Roberval e da Torricelli tra il 1638 e il 1641 per risolvere il problema della determinazione e del disegno delle tangenti a svariate curve. In particolare per la cicloide Roberval ragionò al seguente modo. Se un punto P si muove sulla cicloide il suo moto può pensarsi composto di due moti: uno orizzontale di traslazione del centro della circonferenza generatrice, uno circolare attorno al centro di tale circonferenza. Le velocità nei due moti sono eguali:



infatti, detto θ l'angolo, l'arco descritto da P a partire dalla posizione iniziale è $r\theta$ e tale, per la proprietà della cicloide, è pure l'ascissa del centro del cerchio generatore. Quindi la velocità di traslazione del centro è r come pure la velocità nel moto circolare. Pertanto il parallelogramma delle velocità si riduce pure in questo caso ad un rombo. Roberval concludeva dunque che in ogni punto la retta tangente coincide con la bisettrice dell'angolo formato dalla parallela alla base della cicloide, che possiede direzione e verso della traslazione e dalla tangente alla circonferenza orientata nel verso del moto (cfr. ad es. Boyer, 1976).

3. La costruzione di Wallis

Tra i matematici che parteciparono alla gara proposta da Blaise Pascal come è stato già detto, ci fu John Wallis. Nonostante Pascal non consegnasse a nessuno dei concorrenti il premio, per aver constatato errori in tutte le dimostrazioni presentate, Wallis volle pubblicare, nel 1659, un trattato sulla cicloide, sulla cissoide e sulla rettificazione delle curve, dove calcolava l'area della cicloide, ne determinava la retta tangente e ne stabiliva la lunghezza, trasferendo poi i metodi impiegati per risolvere le questioni analoghe per la cissoide.

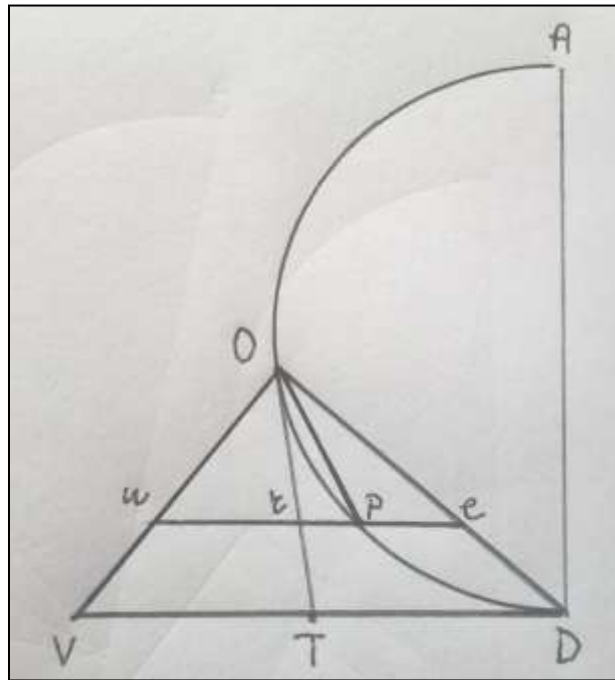
Vediamo come costruiva la tangente alla cicloide (cfr. Wallis, 1659).

La sua costruzione si basava sul seguente lemma:

LEMMA 1 - Dato il cerchio AOD di diametro AD, siano VD tangente al cerchio e OV perpendicolare a OD in O. Allora la tangente VD è maggiore dell'arco OD.

Si conduca poi urp parallela a VD, dove u giace su VO, r sulla tangente OT in O al cerchio, p sulla circonferenza: ebbene il segmento up è maggiore dell'arco Op mentre il segmento interno pe (essendo e l'intersezione di urp con OD) è minore dell'arco Op.

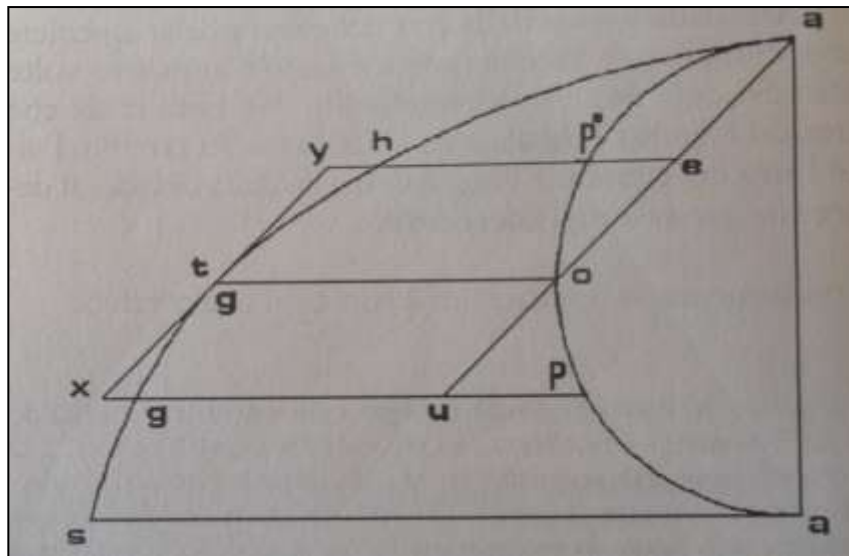
Dimostrazione: Si conduca la tangente alla circonferenza OT. Poiché gli angoli $\angle TOD$ e $\angle ODT$ sono uguali perché insistono sullo stesso arco anche gli angoli $\angle TOV$ e $\angle OVT$ sono uguali in quanto complementari di angoli uguali. Dunque $VD = VT + TD = OT + TD$ e quindi VD è maggiore dell'arco OD e la prima asserzione del Lemma è provata.



Si conduca ora urp parallela a VD e si supponga l'angolo Opu acuto: come già osservato l'angolo VOT risulta eguale all'angolo OVT. Inoltre i due angoli Oup e OVT sono eguali in quanto corrispondenti formati dalle due rette up e VD. Ne segue che i due angoli uOr e Our sono eguali e quindi $ur=Or$. Pertanto $up=ur+rp=Or+rp$ risulta maggiore dell'arco Op. Inoltre il triangolo Ore è isoscele in quanto gli angoli TOD e ODT sono eguali e l'angolo Oer è eguale all'angolo ODT. Pertanto nel triangolo Ope l'angolo pOe è minore dell'angolo Oep: ne segue che il lato pe è minore del lato Op a sua volta minore dell'arco Op e quindi il Lemma 1 è dimostrato nel caso che l'angolo Opu sia acuto. In maniera analoga si ragiona nel caso che l'angolo Opu sia ottuso.

Utilizzando il lemma precedente Wallis fornisce la seguente costruzione della tangente alla cicloide.

Construction of the Tangent to a Cycloid Proposed by Wallis and Fermat

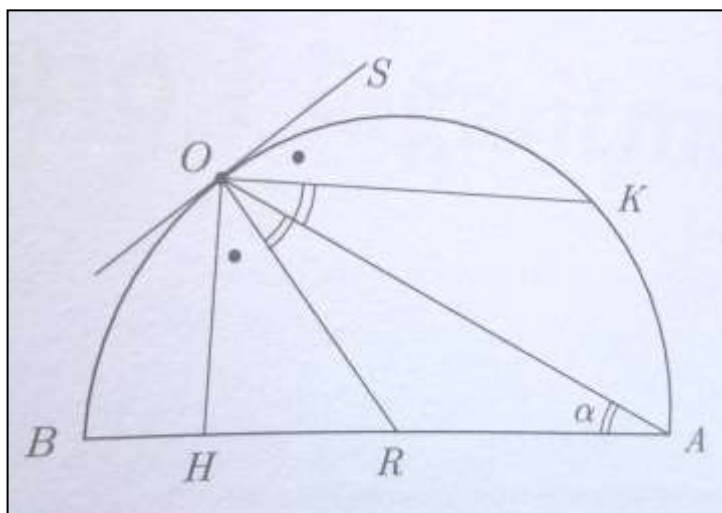


Con riferimento alla figura, sia aas metà della cicloide, t un suo punto; sia aoa il cerchio generatore della cicloide, sia to la retta passante per t parallela alla base della cicloide, che incontra in o la circonferenza aoa e sia u un punto sulla retta ao . Allora, costruito il parallelogramma $toux$, tx è la tangente alla cicloide in t . Wallis dimostra che tx è tangente provando che la retta xty non può avere punti interni alla cicloide né verso la base, né verso il vertice. Infatti supponiamo prima che il punto x sia interno alla curva; sia p l'intersezione di xu con la semicirconferenza aoa e sia g l'intersezione di xu con la cicloide. Per la proprietà della cicloide si ha $gp = pop'a$ e $to = op'a$. D'altro canto $xp = to + up$: quindi, essendo up maggiore dell'arco op per il Lemma 1, xp risulta maggiore dell'arco $pop'a$, cioè di gp e allora x cade al di fuori della cicloide, contro quanto si era supposto. Supponiamo allora che il punto y cada all'interno della cicloide. Si conduca la parallela alla base della cicloide $yp'e$ che prolungata interseca la cicloide nel punto h . Quindi $ye = to$; ora to è la somma degli archi op' e $p'a$, ma l'arco $p'a$ è uguale al segmento hp' , quindi $to = hp' + p'o$; inoltre per il Lemma 1 $p'e$ è minore dell'arco $p'o$ e pertanto il segmento $hp'e$ è minore di $hp' + p'o$ cioè di to : ne segue che y è esterno alla cicloide contro quanto si è supposto.

4. La costruzione della tangente alla cicloide proposta da Fermat

La costruzione della tangente alla cicloide è esposta anche da Fermat nel suo *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*¹ insieme con diverse applicazioni ad alcune curve classiche, quali la cissoide, la concoide di Nicomede e la quadratrice di Dinostrato. La dimostrazione che Fermat fornisce è basata sul seguente semplice lemma che egli sottintende.

LEMMA 2 – Sia dato un semicerchio; sia A un estremo del diametro che lo delimita e O un punto sulla circonferenza. Da O si tracci la perpendicolare OH al diametro considerato. Allora la retta OA è bisettrice dell'angolo formato da OH e dalla tangente alla semicirconferenza in O.



Dimostrazione: - Sia B l'altro estremo del diametro, sia H il piede della perpendicolare ad AB per O e sia K l'altra intersezione della semicirconferenza con la parallela per O ad AB. Allora, indicato con R il centro del cerchio e supposto l'angolo ARO ottuso si ha che posto $\alpha = \text{OAR}$, risulta $\text{AOR} = \alpha$, $\text{AOK} = \alpha$, perché le rette OK e BA sono parallele, $\text{KOS} = \text{ROH}$

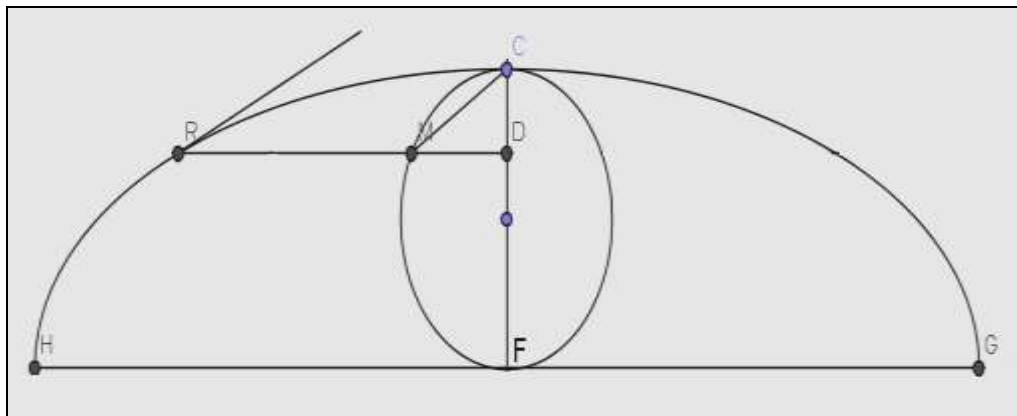
¹ Questo trattato fu inviato tramite Mersenne a Cartesio, che lo ricevette nel gennaio del 1638; seguì un'aspra controversia a proposito della diversa impostazione che i due autori davano al problema delle tangenti. Come si vede da un confronto delle date Fermat lavorò sulla cicloide quasi contemporaneamente a Roberval.

Construction of the Tangent to a Cycloid Proposed by Wallis and Fermat

perché hanno i lati a due a due perpendicolari e quindi $\text{AOS}=\text{AOH}$, in quanto somme di angoli uguali, come volevasi dimostrare. In maniera analoga si ragiona se l'angolo ARO è acuto.

Fermat considera la semicicloide HCF, il suo cerchio generatore considerato nella posizione in cui si trova dopo aver ruotato di una semicirconferenza in modo che il punto che descrive la cicloide si trovi nella posizione più alta che può raggiungere, C; sia CF il diametro del cerchio generatore perpendicolare alla base della cicloide e sia R un punto sulla cicloide in cui si deve determinare la tangente. A tal fine Fermat indica la seguente costruzione:

si consideri la parallela per R alla base della cicloide e si indichino con M e D i punti in cui tale retta incontra rispettivamente la semicirconferenza generatrice e la retta CF; allora la parallela per R alla retta MC è la tangente richiesta.



Tramite il Lemma 2 si vede che tale costruzione è equivalente a quella di Roberval. Infatti in virtù di tale lemma la retta MC è la bisettrice dell'angolo formato dalla retta rd e dalla tangente alla circonferenza generatrice nel punto M. Fermat non svolge le considerazioni di Roberval, ma con il suo metodo delle tangenti (cfr. Fermat, 1891-1916 e Biacino, 2009) ottiene una relazione che esprime analiticamente la proprietà evidenziata da Roberval.

Bibliografia

Biacino L., Il metodo cinematico delle tangenti, *Periodico di Matematiche*, Serie XI, Vol. 1, N.2 (2009), pag.75-84.

Boyer C. B., *Storia della Matematica*, ISEDI, 1976.

Fermat P., *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, VI, *Ad eandem Meyhodum*, *Oeuvres de Fermat*, Gauthier Villars, Parigi, 1891-1916

Pascal B., *Oeuvres complètes, La Roulette et Traités connexes*, Gallimard, Paris, 1980, pag.173-312.

Torricelli E., *Opere Scelte*, a cura di Lanfranco Belloni, UTET, 1975.

Wallis J., *Tractatus duo. Prior, De Cycloide et corporibus inde genitis. Posterior, Epistolaris; in qua agitur, De Cissoide et corporibus inde genitis: Et De Curvarum*, 1659, in *Opera Mathematica I*, pag. 489-569altra.