Science & Philosophy, 2(1)/2014, 23--38 ISSN online: 2282-7765
print: 2282-7757

Le Geometrie Finite: uno strumento per una migliore comprensione della Geometria Euclidea

Antonio Maturo

Department of Humanities, Arts, and Social Sciences
University "G. d'Annunzio"of Chieti-Pescara
amaturo@unich.it

Sunto

Uno strumento efficace per comprendere realmente la geometria euclidea è lo studio di modelli alternativi e delle loro applicazioni. Infatti essi permettono di capire la reale portata di vari assiomi che visti dall'interno della geometria euclidea sembrerebbero scontati o addirittura inutili. Il lavoro parte da una rivisitazione dell'assiomatica di Hilbert a partire dal punto di vista più generale adottato da Albrecht Beutelspacher e Ute Rosenbaum nel loro libro del 1998 sui fondamenti della geometria proiettiva generale, definita attraverso un sistema di assiomi di incidenza.

Parole chiave: Critica dei fondamenti. Geometrie finite. Assiomi di Hilbert. Applicazioni.

1. Gli assiomi di incidenza nell'assiomatica di Hilbert

Un punto fermo nell'assiomatizzazione della Geometria Euclidea è costituito dai Grundlagen der Geometrie di David Hilbert del 1899 (ed. italiana: Fondamenti della Geometria, 1980, Feltrinelli).

Rileggiamo alcuni aspetti dell'assiomatica di Hilbert a partire dalla terminologia più generale utilizzata in (Beutelspacher and Rosenbaum, 1998; Hirschfeld 1979).

Definizione 1 Una geometria è una coppia $G = (\Omega, I)$ dove Ω è un insieme non vuoto e I una relazione in Ω, detta relazione di incidenza, tale che valgono le seguenti proprietà:

(1) proprietà riflessiva: per ogni $x \in \Omega$, $x\ I\ x$;

(2) proprietà simmetrica: per ogni $x, y \in \Omega$, $x\ I\ y \Rightarrow y\ I\ x$.

Se $x\ I\ y$ diciamo che x è incidente a y (in Hilbert si usa la notazione x appartiene a y).

Definizione 2 Una bandiera di una geometria $G = (\Omega, I)$ è un insieme di elementi di Ω a due a due incidenti. Una bandiera B è massimale se:

(MA1) $x \in \Omega - \{B\} \Rightarrow B \cup \{x\}$ non è una bandiera.

Definizione 3 Una geometria di rango $k \geq 2$ è una geometria (Ω, I), con una successione finita $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ di k sottoinsiemi non vuoti di Ω tali che:

(K1) $\{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k\}$ è una partizione di Ω;

(K2) ogni bandiera massimale interseca ogni Ω_i in un solo elemento.

Si scrive $G = (\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k, I)$. Gli elementi di Ω_i si dicono elementi di tipo i. Gli elementi di tipo 1 si dicono punti, quelli di tipo 2 si dicono blocchi, quelli di tipo i si dicono spazi di tipo i.

Nota Sia $G = (\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k, I)$ una geometria di rango k. Siano x un elemento di tipo i, y un elemento di tipo j, $i \leq j$. Per indicare che x è incidente a y useremo in seguito la terminologia geometrica usuale "x è contenuto in y", in simboli "$x \subseteq y$" oppure "y contiene x", in simboli "$y \supseteq x$".

In particolare:

(1) Una geometria di rango 2, $G = (P, B, I)$, è una geometria (Ω, I) con una coppia (P, B) di sottoinsiemi di Ω formanti una partizione di Ω. Gli elementi di P sono detti punti e quelli di B blocchi. Inoltre valgono le seguenti proprietà:

(R1) ogni punto è contenuto in almeno un blocco;

(R2) ogni blocco contiene almeno un punto;

(R3) se A e B sono punti distinti nessuno di essi contiene l'altro;

(R4) se r e s sono due blocchi distinti nessuno di essi contiene l'altro.

(2) Una geometria di rango 3, $G = (P, B, S, I)$ è una geometria (Ω, I) con una terna (P, B, S) di sottoinsiemi di Ω formanti una partizione di Ω. Gli

elementi di P, B, S, sono detti, rispettivamente punti, blocchi, spazi di tipo 3. Ogni bandiera massimale è formata da 3 elementi: un punto, un blocco e uno spazio di tipo 3.

In questo ordine di idee, la geometria di Hilbert è una geometria di rango 3, G = (P, B, S, I) dove P è l'insieme dei punti, B è l'insieme delle rette, S è l'insieme dei piani.

Se x è un punto, y una retta o un piano, oppure se x è una retta e y un piano, se risulta x I y, diciamo che x è contenuto in y ($x \subseteq y$), oppure che y contiene x ($x \supseteq y$). Teniamo conto che in geometria usualmente un punto è identificato con l'insieme formato solo da un punto, per cui la relazione di appartenenza può essere sostituita dall'inclusione.

La geometria di Hilbert è caratterizzata da 5 gruppi di assiomi:
(Gruppo I) Assiomi di collegamento (8 assiomi);
(Gruppo II) Assiomi di ordinamento (4 assiomi);
(Gruppo III) Assiomi di congruenza (5 assiomi);
(Gruppo IV) Assiomi delle parallele (1 assioma);
(Gruppo V) Assiomi di continuità (2 assiomi).

In questo lavoro ci focalizziamo esclusivamente sugli assiomi dei gruppi I e IV, detti assiomi di incidenza.

Vi sono diverse geometrie che soddisfano agli assiomi di incidenza. Particolarmente importanti, sia dal punto di vista teorico, sia da quello applicativo sono le geometrie finite, ossia tali che Ω è formato da un numero finito di elementi.

Alcuni piani affini o piani proiettivi formati con pochi elementi sono esempi di geometrie finite che possono essere compresi anche da alunni del primo ciclo d'istruzione e che fanno capire il ruolo fondamentale dell'assiomatica.

Diamo di seguito una rilettura critica degli assiomi di incidenza di Hilbert, utilizzando però, quando occorre, una notazione diversa, utile per il seguito del lavoro.

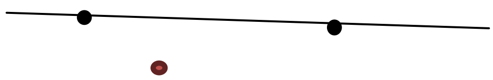
Dividiamo gli assiomi d'incidenza in 4 gruppi, che chiamiamo:
(a) Assiomi di collegamento fra punti e rette;
(b) Assiomi di collegamento fra punti e piani;
(c) Assiomi di collegamento fra rette e piani;
(d) Assioma delle parallele.

Assiomi di collegamento fra punti e rette (in nero gli oggetti dati, in rosso quelli di cui si afferma l'esistenza)

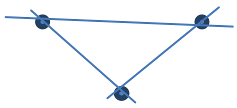
Assioma 1 (corrisponde agli assiomi I1 e I2 di Hilbert) Dati due punti distinti A e B esiste una sola retta r contenente entrambi, ossia tale che $A \subseteq r$ e $B \subseteq r$. La retta r è indicata con AB.

Assioma 2 (corrisponde alla prima parte dell’assioma I3 di Hilbert) Ogni retta contiene almeno due punti (ossia, data una retta r esistono almeno due punti A e B tali che A $\subseteq$ r e B $\subseteq$ r, e quindi tale che r = AB).

Assioma 3 (corrisponde alla seconda parte dell’assioma I3 di Hilbert) Esistono 3 punti non contenuti nella stessa retta (ossia, data una retta r, esiste almeno un punto P non contenuto in r).

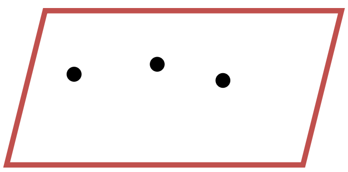


Nota. Gli assiomi precedenti implicano che esistono almeno 3 rette distinte e quindi la configurazione minimale che soddisfa gli assiomi precedenti è data dalla figura seguente, in cui una retta è l’insieme dei due punti contenuti in essa.

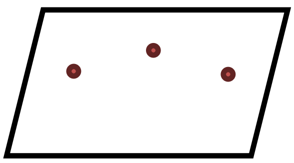


Assiomi di collegamento fra punti e piani

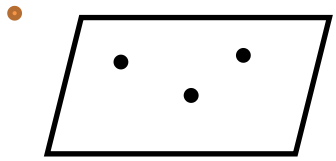
Assioma 4 (corrisponde agli assiomi I4 e I5 di Hilbert) Dati tre punti A, B e C non allineati (ossia non contenuti nella stessa retta) esiste un solo piano π, indicato con ABC, che li contiene, ossia tale che A $\subseteq \pi$, B $\subseteq \pi$, C $\subseteq \pi$.



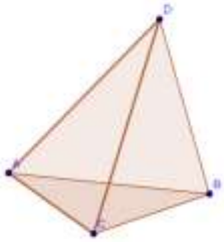
Assioma 5 Ogni piano contiene almeno tre punti non allineati (ossia, dato un piano π, esistono almeno tre punti A, B, C non allineati tali che A $\subseteq \pi$, B $\subseteq \pi$, C $\subseteq \pi$, e quindi π = ABC).



Assioma 6 (corrisponde all'assioma I8 di Hilbert) Esistono 4 punti non contenuti nello stesso piano (ossia, dato un piano π, esiste almeno un punto P non contenuto in π).



Nota. Gli assiomi precedenti implicano la configurazione minimale (tetraedro) della figura seguente, in cui una retta è un insieme di due punti e un piano un insieme di 3 punti. Vi sono 4 punti, 6 rette e 4 piani.

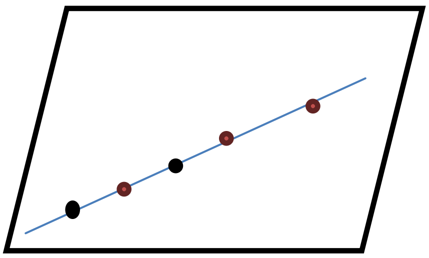


Nota. Gli assiomi di collegamento 4, 5, 6, riguardanti le coppie (punti, piani) sono gli analoghi degli assiomi 1, 2, 3, riguardanti le coppie (punti, rette). In virtù degli assiomi seguenti, di collegamento fra rette e piani, l'assioma 5 può essere sostituito dall'assioma più debole "un piano contiene almeno un punto".

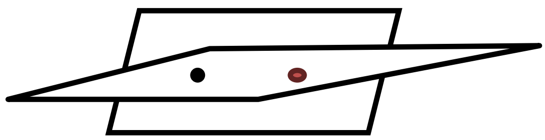
Assiomi di collegamento fra rette e piani

Assioma 7 (corrisponde all'assioma I6 di Hilbert) Se A e B sono due punti contenuti in un piano π allora tutti i punti della retta AB sono contenuti in π e si assume che la retta AB è incidente a π (e quindi contenuta in π).

Nel linguaggio geometrico, se AB $\subseteq$ π si usa anche dire che AB giace nel piano π.



Assioma 8 (corrisponde all'assioma I7 di Hilbert) Dati due piani α e β contenenti uno stesso punto P, esiste un punto Q diverso da P che è contenuto in entrambi i piani.



Date due rette r e s indichiamo con $r \cap s$ l'insieme dei punti contenuti in r e in s.

Assioma delle parallele

Assioma 9 (delle parallele) Siano dati una retta r e un punto P non contenuto in r. Sia π il piano contenente r e P. Allora esiste una sola retta s in π contenente P e tale che $r \cap s = \emptyset$. La retta s è detta parallela a r per P.

2. La geometria proiettiva come geometria di rango 2

Nelle geometrie d'incidenza soddisfacenti gli assiomi precedenti, il parallelismo fra rette è una relazione di equivalenza. Sia C l'insieme delle classi di equivalenza. Chiamiamo punto improprio di una retta r la classe di equivalenza a cui appartiene r, retta impropria di un piano π l'insieme delle classi di equivalenza delle rette contenute in π e piano improprio l'insieme C.

Assumiamo che:

(1) ogni retta è incidente al suo punto improprio;

(2) ogni piano è incidente alla sua retta impropria.

In questo ordine di idee, dalla geometria di Hilbert G = (P, B, S, I) si ottiene una nuova geometria di rango 3, G* = (P*, B*, S*, I*), detta geometria proiettiva, dove P* è l'unione dell'insieme dei punti di G (detti punti propri) e di quello dei punti impropri, B* è l'insieme delle rette di G (dette rette proprie) e delle rette improprie, S è l'insieme dei piani di G (detti piani propri) e del piano improprio e I* è ottenuto estendendo l'incidenza agli elementi impropri assumendo (1) e (2).

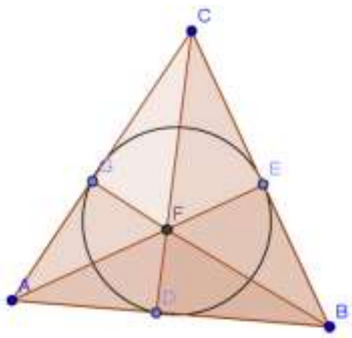
In questa geometria valgono gli assiomi di collegamento considerati nel paragrafo precedente, modificando però l'assioma 2 in:

Assioma 2* Ogni retta contiene almeno tre punti (ossia due punti propri e il punto improprio).

Non vale, in G*, l'assioma 9 delle parallele che è sostituito dal seguente:

Assioma 9* (d'incidenza) Siano dati una retta r e un punto P non contenuto in r. Sia π il piano contenente r e P. Allora, per ogni retta s per P contenuta in π, $r \cap s$ contiene un punto.

La minima configurazione del piano che soddisfa gli assiomi 1, 2*, 3, 9* è data dal seguente piano di Fano, formato da 7 punti e 7 rette.



Gli studi successivi a quelli di Hilbert (cfr, ad es. Beutelspacher, Rosenbaum 1998; Cerasoli, Eugeni, Protasi 1988; Tallini 1991; Innamorati, Maturo 1991, 1999), hanno portato ad una notevole semplificazione dell'assiomatica della geometria proiettiva classica. Infatti è stato messo in luce il fatto che, per definire la geometria proiettiva dello spazio, non è necessario introdurre nell'assiomatica il concetto di piano e quindi gli assiomi 4, 5, 6, 7, 8. Precisamente, è sufficiente partire da una geometria di rango 2, considerare gli assiomi 1, 2* e 3 e una modifica dell'assioma 9*, detto assioma di Veblen-Young, che permette di enunciare il contenuto dell'assioma 9* senza dover definire il piano.

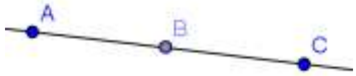
Ciò ha permesso anche di generalizzare in maniera semplice il concetto di geometria proiettiva e di considerare geometrie proiettive in in spazi ad un numero qualsiasi di dimensioni.

Introduciamo quindi la seguente definizione generale:

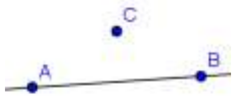
Definizione 4 Una geometria proiettiva è una geometria di rango 2, G = (P, B, I), soddisfacente i seguenti assiomi:

Assioma P1 (assioma della retta) Dati due punti distinti A e B esiste un solo blocco r contenente entrambi, ossia tale che A⊆ r, B⊆ r.

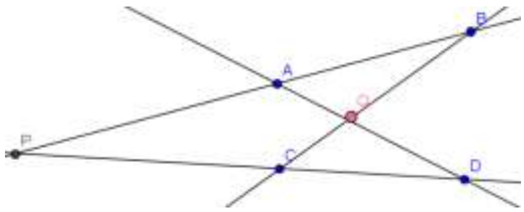
Assioma P2 (non degenerazione di un blocco) Ogni blocco contiene almeno 3 punti.



Assioma P3 (non degenerazione della dimensione) Esistono almeno 3 punti non appartenenti allo stesso blocco.



Assioma P4 (Veblen-Young) Siano A, B, C, D punti tali che i blocchi AB e CD contengono uno stesso punto P. Allora anche i blocchi AC e BD contengono uno stesso punto.



Usualmente, se vale l'assioma 1, i blocchi sono detti rette.

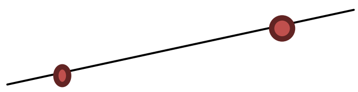
3. Piani affini

Il concetto più generale di piano affine si ottiene dai primi tre assiomi di Hilbert e da una forma più restrittiva dell'assioma 9 delle parallele. Precisamente si ha la seguente definizione:

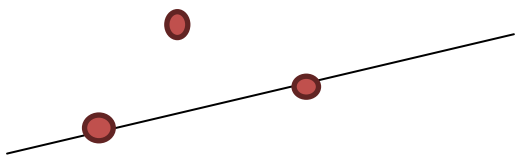
Definizione 5 Un piano affine è una geometria di rango 2, G = (P, B, I), soddisfacente i seguenti assiomi:

Assioma PA1 (assioma della retta) Dati due punti distinti A e B esiste un solo blocco r contenente entrambi, ossia tale che A$\subseteq$ r, B$\subseteq$ r.

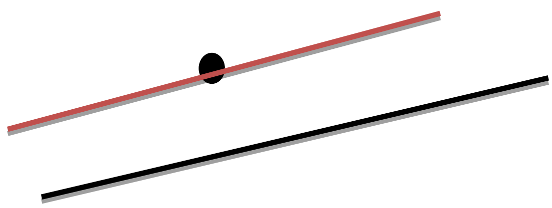
Assioma PA2 (non degenerazione di un blocco) Ogni blocco contiene almeno 2 punti.



Assioma PA3 (non degenerazione della dimensione) Esistono almeno 3 punti non appartenenti allo stesso blocco.



Assioma PA4 (Assioma delle parallele di Playfair) Se r è un blocco e P è un punto non contenuto in r allora esiste un unico blocco passante per P e non avente punti in comune con r.

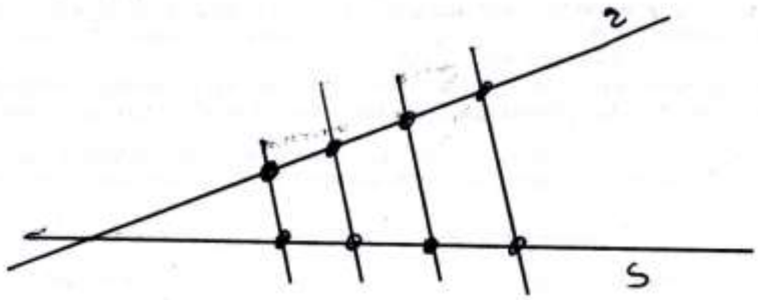


In particolare, per l'assioma PA1, i blocchi si dicono rette.

Dagli assiomi si deducono in particolare i seguenti corollari.

Corollario 1 Date due rette r e s esiste una corrispondenza biunivoca fra i punti delle due rette. In particolare se una retta ha un numero finito k di punti il numero k si indica con q e dice ordine del piano affine.

(Data una retta t che passa per un punto di r e uno di s, la corrispondenza biunivoca si ottiene considerando tutte le parallele a t.)



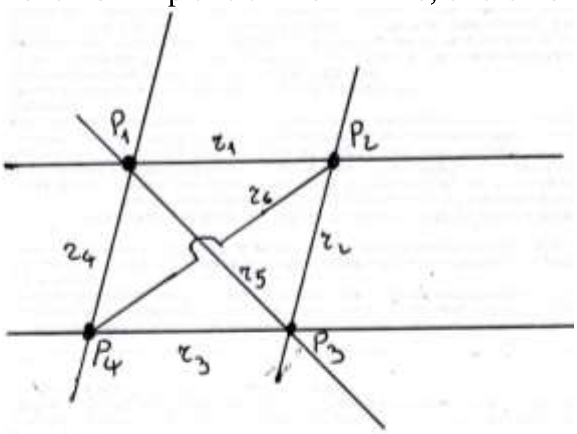
Corollario 2 Se un piano affine ha ordine q, per ogni punto P esistono q+1 rette uscenti da P.

(Sia t una retta che non contiene P. Le q+1 rette per P sono le q rette per P e un punto di t e la parallela per P a t.)

Corollario 3 Il numero di punti di un piano affine di ordine q è $v = q^2$ e il numero di rette è $b = q^2 + q$.

(Data una retta r, vi sono q-1 parallele a r. Contando i punti di r e delle parallele si ottiene $v = q^2$. Da ogni punto di r escono q rette diverse da r. Quindi contando tali rette, la retta r e le parallele a r si ottiene $b = q^2 + q$.)

Corollario 4 Il piano affine minimo, di ordine 2, ha 4 punti e 6 rette.



Una G geometria di rango 2 con m punti e n blocchi si rappresenta con una matrice A di tipo [m, n], la matrice di incidenza di G, avente come righe i punti, come colonne i blocchi. L'elemento a_{ij} della matrice A è uguale a 1 se il punto i è contenuto nel blocco j ed è uguale a 0 in caso contrario.

La matrice di incidenza del piano affine minimo è la seguente

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
P_1	1	0	0	1	1	0
P_2	1	1	0	0	0	1
P_3	0	1	1	0	1	0
P_4	0	0	1	1	1	0

I blocchi sono rette, ossia vale l'assioma PA1, se e solo se il prodotto scalare di due righe distinte è sempre uguale a 1.

Il prodotto scalare di due colonne di una matrice di incidenza è il numero di punti in comune dei corrispondenti blocchi. Allora, se i blocchi sono rette il prodotto scalare di due colonne distinte è uguale o a uno se le corrispondenti rette hanno un punto in comune ed è uguale a zero se tali rette sono parallele.

L'assioma PA2 equivale a dire che su una colonna si ha 1 almeno due volte. In particolare, se una retta ha un numero finito q di punti e G è un piano affine allora, per il corollario 1 su ogni colonna si hanno q unità e per il corollario 2 su ogni riga si hanno q+1 unità.

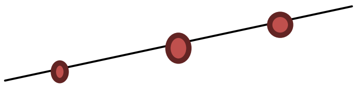
4. Piani proiettivi

Un piano proiettivo è una geometria proiettiva in cui l'assioma di Veblen-Young è sostituito da un assioma che impone che due rette hanno sempre un punto in comune. Precisamente si ha la seguente definizione:

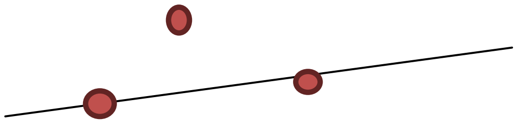
Definizione 6 Un piano proiettivo è una geometria di rango 2, G = (P, B, I), soddisfacente i seguenti assiomi:

Assioma PP1 (assioma della retta) Dati due punti distinti A e B esiste un solo blocco r contenente entrambi, ossia tale che A$\subseteq$ r, B$\subseteq$ r.

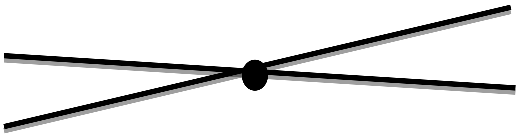
Assioma PP2 (non degenerazione di un blocco) Ogni blocco contiene almeno 3 punti.



Assioma PP3 (non degenerazione della dimensione) Esistono almeno 3 punti non appartenenti allo stesso blocco.



Assioma PP4 Se r e s sono due blocchi esiste un punto P contenuto in $r \cap s$.



In particolare, per l'assioma PP1, i blocchi si dicono rette.

Dagli assiomi si deducono in particolare i seguenti corollari.

Corollario 1 Date due rette r e s esiste una corrispondenza biunivoca fra i punti delle due rette. In particolare se una retta ha un numero finito k di punti il numero k -1 si indica con q e dice ordine del piano proiettivo.

(Dato un punto P non contenuto né in r né in s, la corrispondenza biunivoca si ottiene considerando tutte le rette per P.)

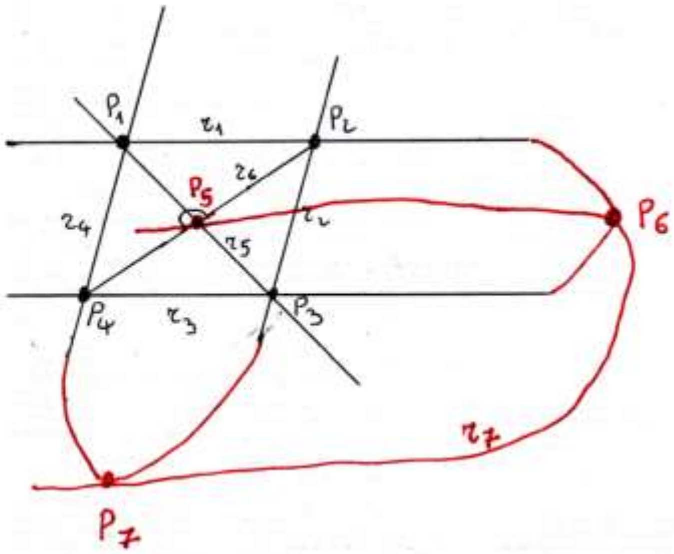
Corollario 2 Se un piano proiettivo ha ordine q, per ogni punto P esistono q+1 rette uscenti da P.

(Sia t una retta che non contiene P. Le q+1 rette per P sono le q rette per P e un punto di t.)

Corollario 3 Il numero di punti di un piano proiettivo di ordine q è $v = q^2 + q + 1$ e il numero di rette è $b = q^2 + q + 1$.

(Dato un punto P, le rette uscenti da P sono q+1. Ognuna di esse ha q punti diversi da P, per cui i punti del piano proiettivo diversi da P sono q(q+1). Considerando anche P si ottiene $v = q^2 + q + 1$. Data una retta r, vi sono q rette passanti per un punto di r e diverse da r. Poiché ognuna di tali rette ha q punti non appartenenti a r allora le rette uscenti dai punti di r e diverse da r sono q(q+1). Aggiungendo r si ottiene che le rette sono in numero $b = q^2 + q + 1$.)

Corollario 4 Il piano proiettivo minimo, di ordine 3, (Piano di Fano) ha 7 punti e 7 rette. Esso si ottiene dal piano affine minimo aggiungendo i punti impropri e la retta impropria (entrambi in rosso).



La matrice di incidenza del piano di Fano è la seguente

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7
P_1	1	0	0	1	1	0	0
P_2	1	1	0	0	0	1	0
P_3	0	1	1	0	1	0	0
P_4	0	0	1	1	1	0	0
P_5	0	0	0	0	1	1	1
P_6	1	0	1	0	0	0	1
P_7	0	1	0	1	0	0	1

Il prodotto scalare di due colonne di una matrice di incidenza di un piano proiettivo, numero di punti in comune delle corrispondenti rette, è uguale a 1. Il prodotto scalare di due righe, numero di rette passanti per i due punti corrispondenti, è uguale a 1.

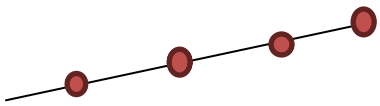
5. Sistemi di Steiner di rette

Una generalizzazione dei concetti di piano affine e piano proiettivo è quello di sistema di Steiner di rette.

Definizione 7 Un sistema di Steiner di rette S(2, k, v), con $2 \leq k < v$ è una geometria di rango 2, G = (P, B, I), soddisfacente i seguenti assiomi:

Assioma SS1 (assioma della retta) Dati due punti distinti A e B esiste un solo blocco r contenente entrambi, ossia tale che $A \subseteq r$, $B \subseteq r$.

Assioma SS2 (numero di elementi di un blocco) Ogni blocco contiene esattamente k punti.



Assioma SS3 (numero di punti) Il numero dei punti è uguale a v.

Valgono i seguenti corollari:

Corollario 1 In un sistema di Steiner S(2, k, v) per ogni punto P passa uno stesso numero di rette, dato da $b_1 = (v-1)/(k-1)$

Corollario 2 Il numero totale di rette è $b = b_1 v / k$.

Corollario 3 (Disuguaglianza di Fisher) $b_1 \geq k$.

Corollario 4 Il numero delle rette è non inferiore al numero di punti: $b \geq v$.

Definizione 8 Data una retta r e un punto P non contenuto in r le rette per P che non incontrano r si dicono **parallele** ad r.

Corollario 5 Data una retta r e un punto P non contenuto in r, il numero di rette per P parallele a r è uguale a $u = b_1 - k$.

Dal corollario 5 segue che:

- per $u = 0$ e $k > 2$ il sistema di Steiner si riduce ad un piano proiettivo di ordine $q = k-1$;
- per $u = 1$ il sistema di Steiner si riduce ad un piano affine di ordine $q = k$.

6. Applicazioni degli spazi di rette alla teoria dei giochi

In alcuni contesti economici o politici, data una geometria di rango 2, $G = (P, B, I)$, i punti si possono interpretare come giocatori di un gioco cooperativo e ogni sottoinsieme S di P come coalizione. Fra i primi e più importanti lavori sui giochi collegati alle geometrie finite si vedano, ad es. (Richardson, 1956; Shapley, 1962).

Una coalizione è detta:

- vincente se contiene tutti i giocatori incidenti a un blocco e, per ogni blocco r, contiene almeno un giocatore incidente a r. Interpretando un blocco come una società, una coalizione vincente ha il completo controllo di una società e non permette a nessun altro gruppo di avere un tale potere.
- Una coalizione è detta perdente se il suo complemento è una coalizione vincente. Interpretando un blocco come una società, una coalizione perdente non controlla completamente nessuna società e inoltre esiste una società che ha intersezione vuota con il blocco.

Si può osservare che ogni coalizione che contiene una coalizione vincente è, a sua volta, una coalizione vincente, per cui uno dei problemi più significativi è la ricerca delle coalizioni vincenti minimali, ossia di gruppi di individui che, pur non essendo maggioranze, hanno un potere economico o politico rilevante (Richardson, 1956; Shapley, 1962; Maturo 2003).

Nel caso dei piani proiettivi le coalizioni vincenti minimali sono proprio le rette. Nei piani affini sono le coppie di rette non parallele.

Un indirizzo di ricerca molto importante e ancora attuale è lo studio delle coalizioni che non sono né vincenti, né perdenti, dette coalizioni bloccanti o blocking set. Si veda ad esempio (Hirschfeld 1979; Innamorati S., Maturo, 1991, 1999; Maturo 2003). In pratica si tratta di vedere se con piccole coalizioni si riesce ad impedire che si formi un gruppo dominante.

Applicazioni recenti della teoria dei giochi cooperativi si trovano anche in lavori relativi a decisioni di gruppo, in cui si formano coalizioni per poter scegliere delle alternative convenienti (Maturo, Ventre, 2008, 2009).

Bibliografia

Beutelspacher A., Rosenbaum U., (1998), Projective Geometry, Cambridge University Press, Cambridge.

Cerasoli M., Eugeni F., Protasi M., (1988), Elementi di Matematica Discreta, Zanichelli, Bologna.

Hilbert D., (1899), Grundlagen der Geometrie, B. G. Teubner, Stuttgart, ed. italiana Fondamenti della Geometria, (1970), Feltrinelli, Milano.

Hirschfeld J.W.P., Thas J.A. (1991), General Galois Geometries, Clarendon Press, Oxford.

Hirschfeld J.W.P., (1998), Projective Geometries over Finite Fields, Clarendon Press, Oxford.

Innamorati S., Maturo A., (1991), On blocking sets of smallest cardinality in the projective plane of order seven, Combinatorics '88, Mediterranean Press, Cosenza, 1991, 79-96.

Innamorati S., Maturo A., (1999), The spectrum of minimal blocking sets, Discrete Mathematics, 208/209, 339-347.

Maturo A. (2003), Cooperative Games, Finite Geometries and Hyperstructures, Ratio Mathematica, 14, 2003, pp.57-70

Maturo A, Ventre A.G.S. (2008), Models for Consensus in Multiperson Decision Making. In: NAFIPS 2008 Conference Proceedings. Regular Papers 50014. IEEE Press, New York

Maturo, A., Ventre, A.G.S. (2009). Aggregation and consensus in multi objective and multi person decision making. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems vol.17, no. 4, 491-499.

Richardson M., (1956), On finite projective games, Proc. American Mathematical Society, 7 (1956), 458-465.

Scafati M., Tallini G., (1995), Geometria di Galois e teoria dei codici, CISU, Roma

Shapley L. S., (1962), Simple Games - An outline of the theory, Rand Corporation P-series Report.

Tallini G., (1991), Strutture Geometriche, Liguori Editore, Napoli.