

## Le curve Lossodromiche in Architettura

<sup>1</sup>Giuseppe Conti , <sup>2</sup>Beatrice Sedili , <sup>3</sup>Alberto Trotta

<sup>1</sup> Dipartimento di Matematica DIMAI  
Università di Firenze, Italia  
gconti@unifi.it

<sup>2</sup> Viale Talenti 150  
50142 Firenze Italia  
beatrice.sedili@gmail.com

<sup>3</sup> IISS Santa Caterina-Amendola  
Salerno, Italia  
albertotrotta@virgilio.it

### Sunto

In questa nota si espongono le proprietà geometriche delle curve lossodromiche e si mostra come le loro proprietà siano state utilizzate in moltissime opere architettoniche. Per questo motivo mostreremo diversi esempi di architetture in cui i mattoni, che le compongono, si dispongono lungo delle lossodromiche. Questo fatto non deve meravigliare poiché, come vedremo, queste linee sono individuate da una regola che rende semplice la loro determinazione in fase applicativa ed utile il loro uso.

**Parole Chiave:** Superfici di rotazione. Meridiani. Paralleli. Proiezione stereografica. Equazione polare. Cilindri circolari ed ellittici.

## 1. La spinapesce e le curve lossodromiche

Uno dei problemi nella costruzione delle cupole e delle volte è la questione delle centine. Esse forniscono la geometria della struttura e, insieme alle armature, sostengono la costruzione fino a che questa non è terminata. Tuttavia la realizzazione delle centine comporta problemi tecnici non indifferenti, a cominciare dal reperimento dei materiali (quasi sempre legno e ferro), per finire al loro disarmo.

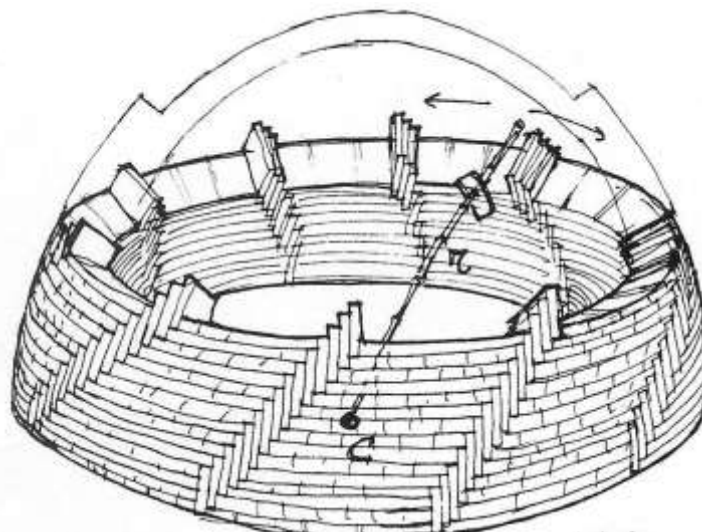
Per questo motivo, fino dall'antichità si è cercato di ridurre al minimo l'uso delle centine; presso i bizantini ed altri popoli dell'area orientale si usava per le cupole di rotazione, come vedremo, la cosiddetta tecnica a *spinapesce*. Filippo Brunelleschi modificò tale metodologia, adattandola per la costruzione della cupola di Santa Maria del Fiore, che non è, come vedremo, una cupola di rotazione, ma una volta a padiglione ottagonale.

Successivamente, nel Rinascimento, questo sistema costruttivo fu usato da molti architetti, come i Sangallo ed il Buontalenti.

Quando si costruisce una cupola di rotazione, i mattoni vengono disposti lungo i paralleli della superficie di rotazione; si ottengono, in tal modo, anelli concentrici di mattoni. Questi si reggono a vicenda e la cupola, mentre cresce, si sostiene da sé: è una struttura *autoportante*.

Il controllo geometrico della muratura viene fatta con un bastone, od un filo di ferro, che ha un estremo nel centro della superficie di rotazione. Con questo bastone si determina anche l'inclinazione dei mattoni.

Quando l'angolo dei mattoni, disposti lungo i paralleli, diventa eccessivo, questi, fino a che la malta non si è solidificata, potrebbero scivolare verso il basso. Per impedire il suddetto scivolamento durante la fase edificativa di una cupola di rotazione, si usa la tecnica a *spinapesce*, che consiste nel giustapporre, ad intervalli regolari, un mattone posto a coltello a un mattone posto di piatto.



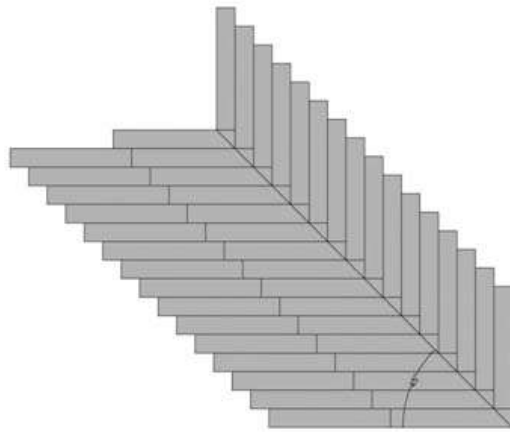
**Figura 1**

**Mattoni disposti a *spinapesce* nelle cupole di rotazione**

I mattoni posti a spina pesce formano, dunque, angoli di 45° gradi con i paralleli (ed i meridiani) della superficie di rotazione.

## Le curve Lossodromiche in Architettura

Se supponiamo che la cupola sia una superficie sferica, i mattoni disposti a *spinapesce* determinano, perciò, delle curve che formano un angolo costante con i paralleli (ed i meridiani) della superficie sferica. Tali linee sono chiamate *lossodromiche della sfera* oppure, anche *spirali sferiche*: infatti, esse hanno la forma di una spirale che si avvolge intorno alla sfera stessa.



**Figura 2**  
**Angolo formato dai mattoni disposti a *spinapesce***

La parola *lossodromica* deriva dal greco e significa “stesso angolo”; infatti, in generale, si chiama *lossodromica* rispetto ad una famiglia  $\Phi$  di curve, contenute in una superficie  $\Sigma$ , una curva di  $\Sigma$  che in ogni suo punto forma un angolo costante con la curva della famiglia  $\Phi$  che passa per quel punto. Nel caso della *lossodromica della sfera*, la famiglia  $\Phi$  è l’insieme dei meridiani (o dei paralleli).

Le equazioni parametriche della *lossodromica* di una sfera sono le seguenti:

$$\begin{cases} x(\vartheta) = \frac{R \cos \vartheta}{\cosh(k\vartheta)} \\ y(\vartheta) = \frac{R \sin \vartheta}{\cosh(k\vartheta)} \\ z(\vartheta) = R \tanh(k\vartheta) \end{cases}$$

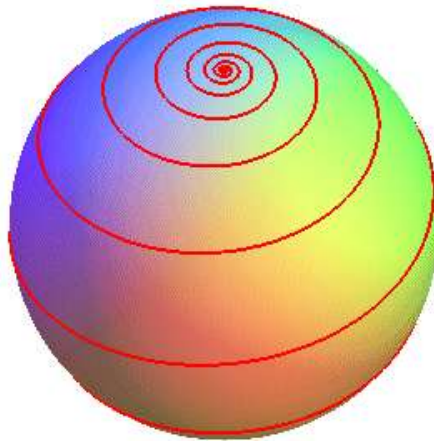
dove  $\vartheta$  rappresenta la longitudine,  $R$  è il raggio della sfera,  $\cosh$  indica il coseno iperbolico,  $\tanh$  indica la tangente iperbolica e  $k = \tan \alpha$ , con  $\alpha$  l’angolo che la lossodromica forma con i paralleli (vedere Loria 1925).

Le equazioni in coordinate cilindriche delle *lossodromiche* della sfera sono:

$$\begin{cases} \rho(\vartheta) = \frac{R}{\cosh(k\vartheta)} \\ z(\vartheta) = R \tanh(k\vartheta) \end{cases}$$

Nel caso della *lossodromica* formata dalla spinapesce di una cupola semisferica si ha  $\alpha = 45^\circ$ , perciò  $k = 1$ .

Le *lossodromiche* di una sfera si avvolgono indefinitamente intorno al polo.



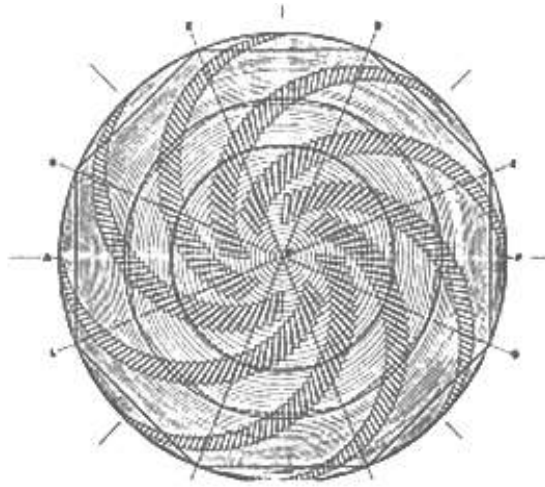
**Figura 3**  
**Una *lossodromica* sulla sfera**

La proiezione ortogonale della *lossodromica* sul piano  $xy$  è la curva di

equazioni parametriche: 
$$\begin{cases} x(\vartheta) = \frac{R \cos \vartheta}{\cosh(k\vartheta)} \\ y(\vartheta) = \frac{R \sin \vartheta}{\cosh(k\vartheta)} \end{cases}$$

ovvero di equazione polare  $\rho(\vartheta) = \frac{R}{\cosh(k\vartheta)}$ .

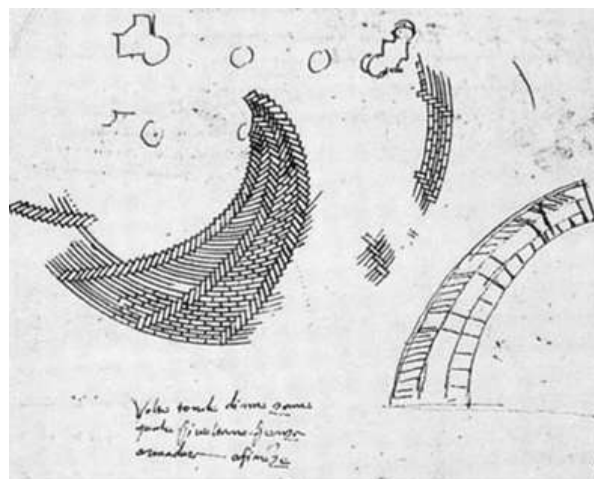
Tale curva è una *spirale di Poincot limitata* (vedere Loria 1925).



**Figura 4**  
**Proiezioni ortogonali delle *spinapesce* di una sfera**

Dopo che Filippo Brunelleschi, con la costruzione della Cupola di Santa Maria del Fiore, introdusse all'inizio del Rinascimento la tecnica della *spinapesce*, tale metodo costruttivo ebbe grande diffusione per la costruzione di cupole e volte.

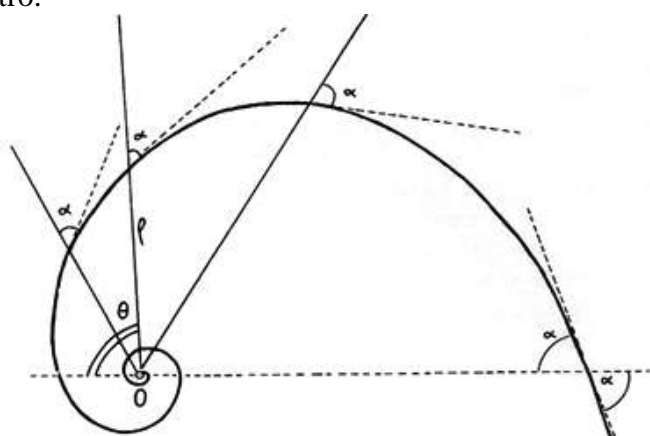
Esiste un disegno (*Gabinetto Disegni e Stampe degli Uffizi* a Firenze n. 900 A), attribuito ad Antonio da Sangallo il Giovane, che descrive la tecnica della *spinapesce* per le cupole di rotazione con la scritta: “volte tonde di mezane (mattoni) quali si costruiscono senza armadura a Firenze”.



**Figura 5**  
**Disegno di Sangallo il Giovane che rappresenta le *spinapesce* di una sfera**

Questo disegno è interessante anche dal punto di vista geometrico perché vi sono rappresentate le proiezioni stereografiche di tre *spinapesce* appartenenti

ad una superficie sferica. Sappiamo che la proiezione stereografica di una *lossodromica della sfera* è una *spirale logaritmica*, avente per centro la proiezione di uno dei poli (vedere Loria 1925). Questo deriva dal fatto che la proiezione stereografica è *conforme*, cioè mantiene gli angoli; poiché nella proiezione stereografica di una sfera i suoi meridiani si trasformano in rette, segue che la proiezione della *lossodromica della sfera* è una curva piana che forma angoli costanti con le semirette per l'origine, quindi è una *spirale logaritmica*. Per la suddetta proprietà tale curva si chiama anche *spirale equiangolare*; di conseguenza essa è una *lossodromica* delle semirette aventi origine nel suo centro.



**Figura 6**  
**La spirale logaritmica o equiangolare**

Questa curva è molto diffusa sia in architettura che natura; ad esempio si trova nelle volute dei capitelli ionici, nei mosaici romani, nelle conchiglie, nelle corna degli animali, nell'orecchio umano (per approfondire questo argomento, si può consultare l'interessante saggio di D'Arcy Thompson 1992).



**Figura 7**  
**La spirale logaritmica nella conchiglia del Nautilus**



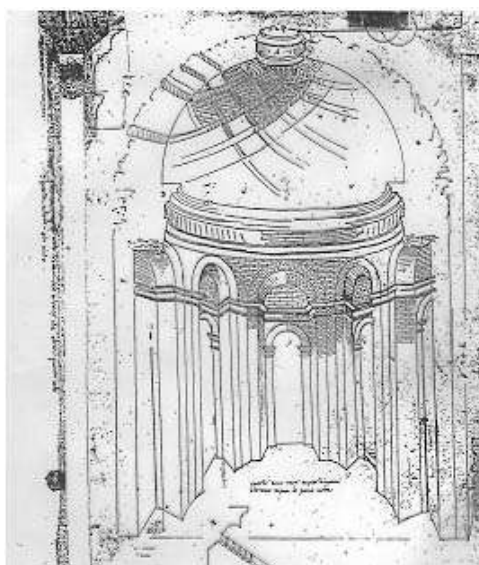
**Figura 8**  
**Mosaico di una villa romana a Leptis Magna. Le spirali logaritmiche delle due famiglie sono ortogonali**

L'equazione polare della spirale logaritmica è la seguente (vedere Loria 1925):  $\rho(\vartheta) = ae^{k\vartheta}$ .

Il disegno del Sangallo può essere messo in relazione con quello attribuito a Guidetto Guidetti (*Gabinetto Disegni e Stampe degli Uffizi* n. 1330 A).

Nella sua didascalia si legge “rilievo d'un tempietto antico a cupola con spinapesce incrociate nella volta”.

In questo disegno si notano due famiglie di *spinapesce*, una formata da curve destrorse e l'altra da curve sinistrorse, ispirato ad esempi del mondo romano come la cupola del Tempio di Venere e Roma, presente nel Foro Romano (vedere Zander 1988).



**Figura 9**

**Le doppie *spinapesce* nel disegno di Guidetto Guidetti**

In realtà questa analogia è del tutto formale; infatti, le curve che compaiono nella volta del Tempio di Venere e Roma non hanno alcuna importanza dal punto di vista strutturale ed, al più, servono come ornamento ed alleggerimento della struttura.

Molto probabilmente il disegno rappresenta l'apparecchiatura a *spinapesce* presenti nella cupoletta della sala di Simon Mago (vedere Docci, Migliari 1989), che è una delle otto sale ottagonali esistenti nella basilica di San Pietro, costruita da Antonio da Sangallo il Giovane, il quale ebbe stretti contatti con il Guidetti (vedere Conti, Guidelli, Livi 2014).





**Figura 10**  
**Le doppie *spinapesce* nel Tempio di Venere e Roma**

Come abbiamo già osservato, nel XV e nel XVI secolo la tecnica della *spinapesce* per la costruzione di cupole e di volte ebbe una grande diffusione. Esistono numerosi esempi di cupole costruite con questa tecnica; ne citiamo solo alcune (per un maggiore approfondimento su questo argomento si rimanda a Conti, Guidelli, Livi 2014; Docci, Migliari 1989; Docci 2011; Gurrieri 1987; Taddei, Taddei 2012): la volta del bastione di Santa Barbara nella Fortezza Vecchia di Livorno, la volta emisferica della sala d'armi del forte di Poggio Imperiale a Poggibonsi, la volta presente nella torre d'angolo vicino all'entrata della Fortezza di Castrocaro presso Forlì, alcune volte della Fortezza di Arezzo, le volte emisferiche del forte di Sarzanello (Sarzana), le volte della fortezza di Terra del Sole a Castrocaro, la volta prima stanza della Grotta del Buontalenti nel Giardino di Boboli a Firenze, la cupola del Forte Aventino a Roma.

Vorremmo aggiungere a questo elenco altri due esempi di *spinapesce* poco conosciuti: quello di alcune volte emisferiche del Palazzo Corsini al Prato a Firenze, dovute al Buontalenti, e quelle dei pennacchi della cupola della chiesa di San Giovannino dei Cavalieri a Firenze, risalente alla metà del XVI secolo (è plausibile che, in quest'ultimo caso, la tecnica della *spinapesce* sia stata usata anche per la costruzione della cupola emisferica sovrastante).



**Figura 11**

**La spinapesce in alcune volte nel Palazzo Corsini al Prato a Firenze**



**Figura 12**

**La spinapesce nella chiesa di San Giovannino dei Cavalieri a Firenze**

Notiamo che le tegole della Cupola della Cappella dal Pozzo (risalente al 1594), che si trova all'estremità orientale del Camposanto di Pisa, ha le tegole disposte secondo delle lossodromiche con angolo di  $45^\circ$ .



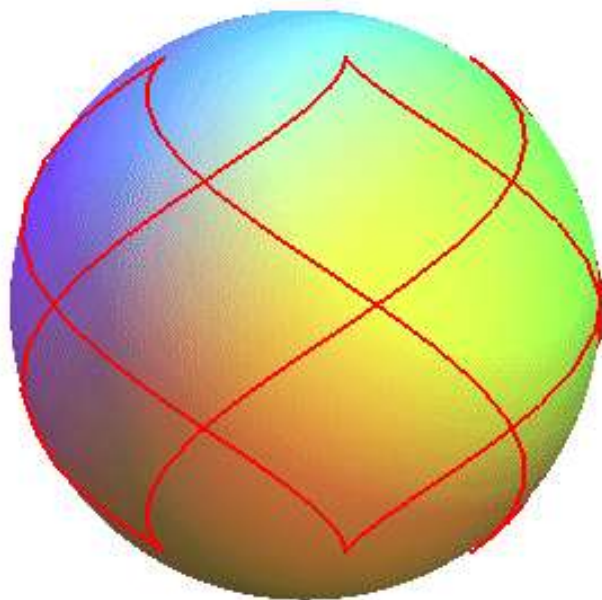
**Figura 13**  
**Lossodromica sulla cupola della Cappella dal Pozzo a Pisa**

Sulla sfera esistono altre curve che sono simili alle *lossodromiche* (e che talvolta vengono erroneamente confuse con queste): si tratta delle *eliche sferiche*. Esse sono delle curve tali che la tangente in un suo punto generico forma un angolo costante con un piano (generalmente il piano equatoriale).

Prendendo come piano equatoriale il piano  $xy$ , le equazioni parametriche di un'elica sferica sono le seguenti (vedere Loria 1925):

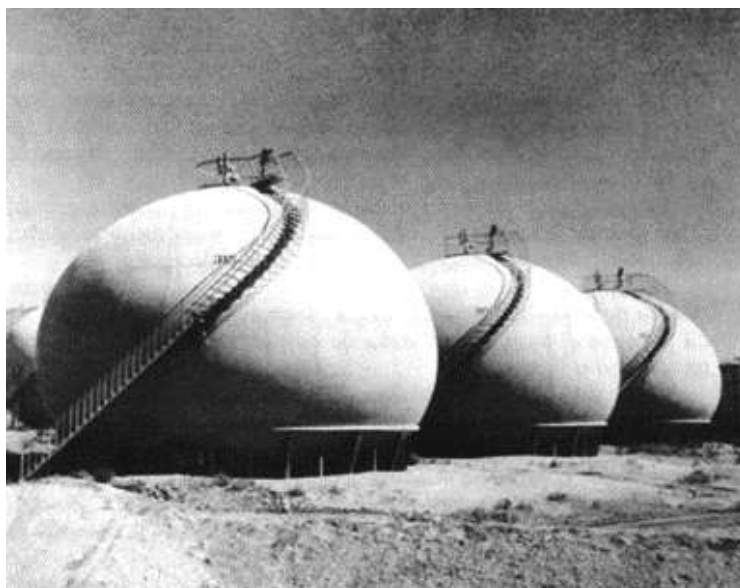
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} R(1 + \cos \vartheta) \cos t - \frac{1}{2} R(1 - \cos \vartheta) \cos\left(\frac{1 + \cos \vartheta}{1 - \cos \vartheta} t\right) \\ y(t) = \frac{1}{2} R(1 + \cos \vartheta) \sin t - \frac{1}{2} R(1 - \cos \vartheta) \sin\left(\frac{1 + \cos \vartheta}{1 - \cos \vartheta} t\right) \\ z(t) = R \sin \vartheta \cos\left(\frac{\cos \vartheta}{1 - \cos \vartheta} t\right) \end{cases}$$

dove  $R$  è il raggio della sfera e  $\vartheta$  è l'angolo che la curva forma con l'asse  $z$ .



**Figura 14**  
***Le eliche sferiche***

In architettura queste curve vengono usate nella costruzione di scale su serbatoi sferici.

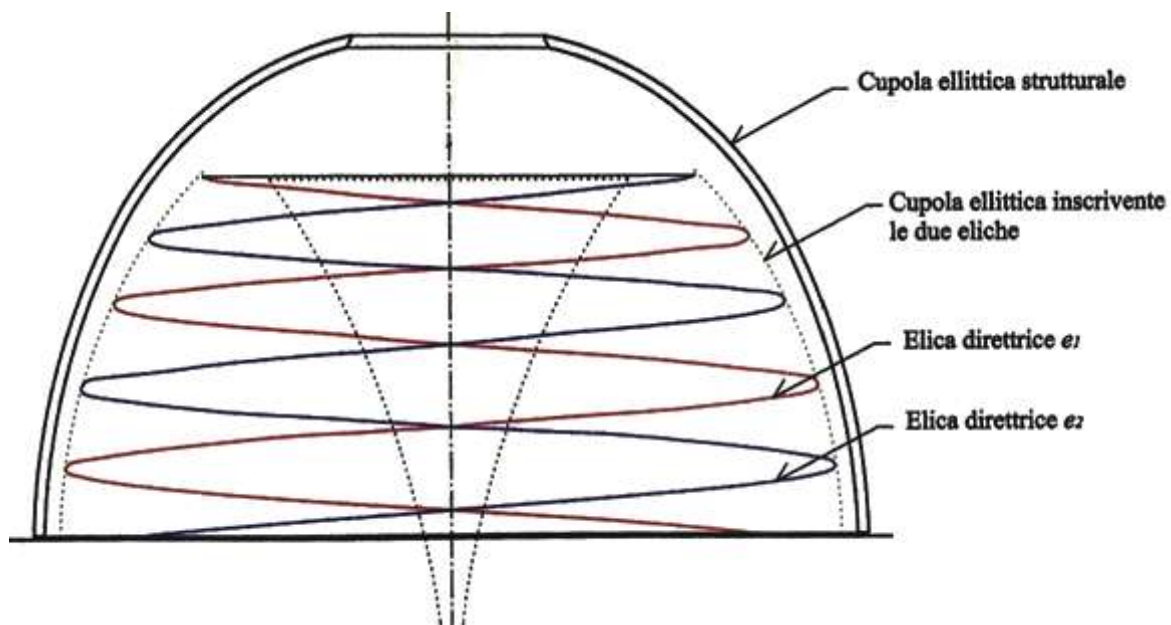


**Figura 15**  
**Serbatoi sferoidali. Chicago Bridge and Iron Co.**

La cupola del Reichstag di Berlino, progettata da Norman Foster nel 1999, ha una forma ellissoidale. Al suo interno si trovano due rampe elicoidali; si tratta di due curve che formano un angolo costante con il piano terra e appartengono ad un ellissoide. Tali rampe servono come percorso per il pubblico, ma anche per irrigidire la struttura. Per analogia con il caso sferico, potremmo chiamare queste curve *eliche ellissoidali*.



**Figura 16**  
La cupola del Reichstag di Berlino



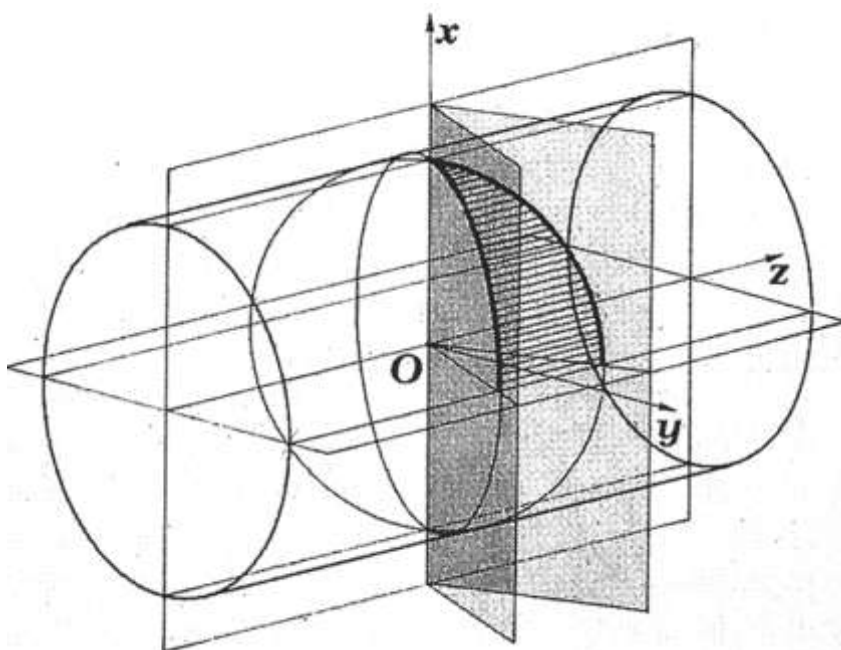
**Figura 17**  
Schema geometrico delle rampe nella cupola del Reichstag di Berlino

## 2. La Cupola del Brunelleschi e le eliche cilindriche

La cupola di Santa Maria del Fiore è una volta a padiglione a base ottagonale; ognuno degli otto spicchi della cupola (chiamati *vele*) è una porzione di cilindro ellittico di equazione, per quanto riguarda l'intradosso della vela interna (vedere Conti, Corazzi 2011):

$$\frac{\left(y + 13.5 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}{36^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \frac{x^2}{36^2} = 1.$$

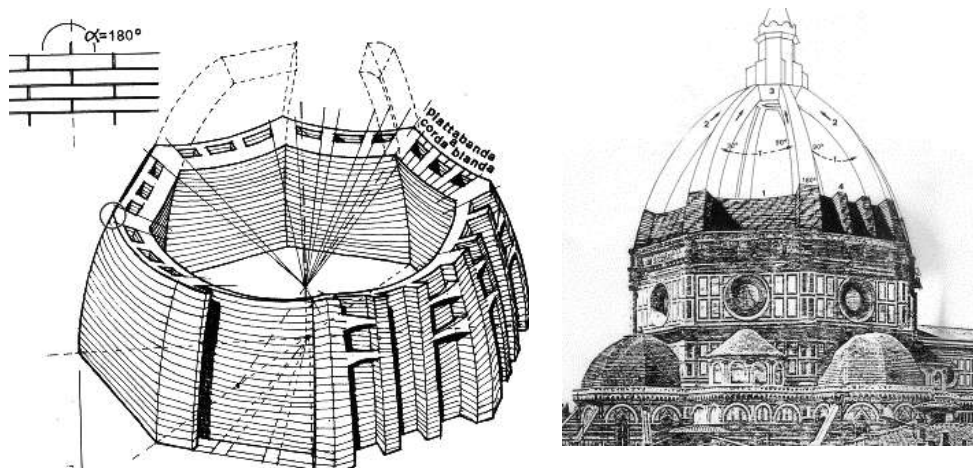
L'intersezione di ciascuna vela con quella adiacente è un arco di circonferenza, mentre tutte le altre *curve meridiane* (cioè le intersezioni delle vele con i piani passanti per l'asse della cupola) sono ellissi.



**Figura 18**  
Cilindro ellittico che determina la geometria delle vele della cupola del Brunelleschi

Nella cupola del Brunelleschi, i mattoni disposti in “orizzontale” non sono messi in realtà lungo le generatrici del cilindro, quindi paralleli al piano terra, ma determinano delle curve, chiamate *corde blande*, che formano rispetto al piano orizzontale una freccia variabile fino ad un massimo di circa cm. 70 all’incirca a 2/3 della cupola; nelle cupole di rotazione, invece, i mattoni disposti in “orizzontale” seguono i paralleli della superficie stessa, perciò sono paralleli al piano terra. La motivazione tecnologica e la regola geometrica seguita dal Brunelleschi per disporre i mattoni a *corda blanda* sono stati argomenti che gli studiosi della Cupola hanno affrontato fino dalla sua costruzione.

Il motivo di tale disposizione risiede nel fatto che in tal modo i mattoni delle porzioni di ciascun anello appartenenti a due vele adiacenti formano un angolo piatto. Con questo espediente non si hanno pericolosi angoli acuti fra mattoni adiacenti, cioè angoli che indebolirebbero la struttura. Il fatto geometricamente interessante consiste nell’osservare che le *corde blande* sono le *lossodromiche ortogonali* delle curve meridiane di ciascuna vela (per maggiori approfondimenti vedere Conti, Corazzi 2011).



**Figura 19**  
**Le corde blande della cupola del Brunelleschi**

Come abbiamo già detto, Filippo Brunelleschi, per la costruzione della Cupola di Santa Maria del Fiore, iniziata nel 1420, adottò la tecnica della *spinapesce*. Questo accorgimento costruttivo non parte dall’inizio della sua edificazione, ma nel 1426, in corrispondenza del secondo camminamento, quando i mattoni disposti secondo le *corde blande* raggiunsero un’inclinazione di circa 20° e potevano scivolare verso l’interno prima che gli anelli, che compongono la cupola, fossero terminati.

I mattoni disposti a *spinapesce* nella cupola di Santa Maria del fiore formano con il piano orizzontale (e, di conseguenza, con le generatrici del cilindro ellittico) un angolo costante di 45°; perciò esse determinano delle *eliche*

*cilindriche ellittiche* che sono curve *lossodromiche* delle generatrici del cilindro. Le equazioni parametriche di queste eliche sono della forma:

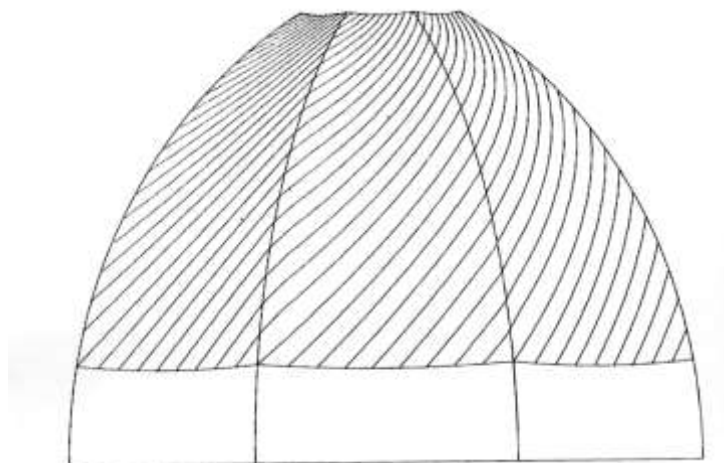
$$\begin{cases} x(t) = a \cdot \cos t \\ y(t) = b \cdot \sin t \\ z(t) = k \cdot \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u} \cdot du \end{cases} \quad t \geq 0$$

con  $a$  e  $b$  misure dei semiassi dell'ellisse ottenuta intersecando il cilindro ellittico, su cui si trova l'elica, con un piano perpendicolare all'asse del cilindro stesso.

Il numero  $k$  dipende dall'angolo costante  $\theta$  che l'elica forma con le generatrici del cilindro, secondo la formula  $\cos \theta = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$ . Nel caso dei mattoni disposti a *spinapesce*, si ha  $\theta = 45^\circ$  da cui si ottiene  $k = 1$ .

Per quanto riguarda la Cupola del Brunelleschi, si ha per l'intradosso della vela interna:

$$a = \text{m. } 33,26 \text{ e } b = \text{m. } 36.$$



**Figura 20**

**Eliche ellittiche formate dai mattoni disposti a *spinapesce* nella cupola di Santa Maria del Fiore. Possiamo notare che queste curve non iniziano dalla base della cupola.**

Dunque i mattoni che formano le vele della cupola hanno due andamenti: uno a *corda blanda* ed uno a *spinapesce*. Oltre a questi, esistono nella cupola del



Brunelleschi altri mattoni (e anche pietre) con differenti disposizioni (per approfondimenti vedere Conti, Corazzi 2011).



**Figura 21**

**Interno della Cupola di Santa Maria del Fiore. Si possono notare una *spinapesce* che “sale” verso destra e le *corde blande***

Quando l’elica è *circolare*, cioè  $a = b = r$ , le sue equazioni diventano, ponendo  $kr = h$ :

$$\begin{cases} x(t) = r \cdot \cos t \\ y(t) = r \cdot \sin t \\ z(t) = h \cdot t \end{cases} \quad t \geq 0$$

Le eliche hanno un’altra importante proprietà: sono anche delle *geodetiche*, cioè linee che realizzano il cammino più breve fra due punti del cilindro che non appartengono alla stessa generatrice.

Questo, probabilmente, è il motivo per cui molte lesioni della cupola si trovano in corrispondenza dei mattoni disposti a *spinapesce*: le tensioni tendono sempre a disporsi lungo il cammino più breve. Notiamo che le *lossodromiche della sfera* non sono curve *geodetiche*.



**Figura 22**

**Lesione presente nell'intradosso di una vela interna della Cupola di Santa Maria del Fiore e disposta lungo una *spinapesce***

Le eliche cilindriche determinano i profili delle scale elicoidali che possono essere *circolari* (la maggior parte) oppure *ellittiche*, come quella che si trova all'interno del Quirinale progettata da Ottaviano Mascarino nel 1584.



**Figura 23**  
**Scala a forma di elica ellittica del Quirinale**

Sulla superficie di un cono si possono determinare delle curve molto interessanti: esse sono le *lossodromiche delle generatrici* del cono, cioè curve che formano un angolo costante con le sue generatrici. Queste curve si chiamano *eliche coniche* oppure *spirali logaritmiche dello spazio*.

Le equazioni di queste curve in coordinate cilindriche sono (vedere Loria 1925):

$$\begin{cases} \rho(\vartheta) = ae^{k\vartheta} \\ z(\vartheta) = \cot \alpha e^{k\vartheta} \end{cases}$$

dove  $\alpha$  è l'angolo di apertura del cono e  $k = \sin \alpha \cot \beta$  con  $\beta$  l'angolo che la curva forma con le generatrici del cono.

Evidentemente la proiezione ortogonale sul piano  $xy$  di una *spirale logaritmica dello spazio* è una *spirale logaritmica del piano*, come si può notare anche dalla seguente figura, realizzata da Albrecht Dürer (1471-1528).

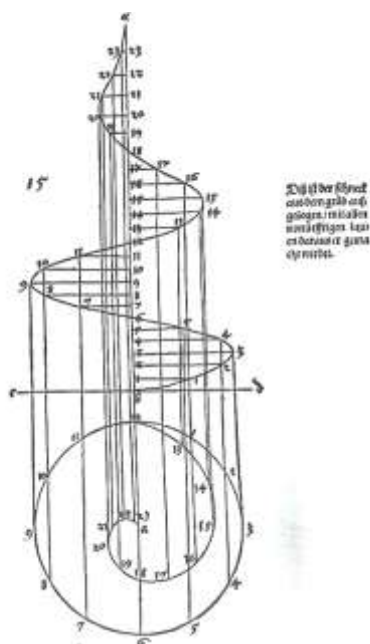


Figura 24

*Spirale logaritmica dello spazio e sua proiezione ortogonale. Incisione del Dürer*

La *spirale logaritmica delle spazio* è una curva molto diffusa in architettura. Citiamo ad esempio, la rampa del Guggenheim Museum a New York (progettato da Frank Lloyd Wright nel 1945), gli scaloni dei Musei Vaticani (progettati dell'Ing. Giuseppe Momo ed inaugurati nel 1932), le scale per salire alla sommità di un trullo.



Figura 25

**Interno del Guggenheim Museum a New York**



**Figura 26**  
**Scaloni dei Musei Vaticani**



**Figura 27**  
**Trullo presso Corato. Puglia**

## Bibliografia

Conti G., Corazzi R., (2011), *Il segreto della Cupola del Brunelleschi a Firenze. The secret of Brunelleschi's Dome at Florence*. Angelo Pontecorboli Editore. Firenze. Codice ISBN 9788897080107.

Conti G., Guidelli S., Livi S., (2014), *La spinapesce nel Rinascimento tra Filippo Brunelleschi, i Sangallo e Bernardo Buontalenti nella Grotta Grande del Giardino di Boboli. Alcune considerazioni matematiche*, Bollettino della Società degli Studi fiorentini, Vol. 22, Firenze, pp. 246-254, 2013-2014. ISSN 1129-8200.

D'Arcy Thompson W., (1992), *Crescita e forma*, Bollati Boringhieri, Torino.

Docci M., Migliari R., (1989), *La costruzione della spinapesce nella copertura della sala ottagonale di Simon Mago nella fabbrica di San Pietro*, «Palladio», 3,1989, Roma, pp. 61-72.

Docci M., (2011), *Le volte autoportanti apparecchiate a spina pesce. Le cupole Murarie: Storia, Analisi, Intervento*, a cura di Paolo Rocchi, Edizioni PRE progetti, Roma 2011, pp. 383-391. ISBN 978-88-95027-02-9.

Gurrieri F., (1987), *Addenda alla tecnica brunelleschiana della "spinapesce"*, «Quaderni dell'Istituto di Storia dell'Architettura» (Roma), fasc. 1-10, 1983-1987, Multigrafica editrice, Roma, 1987, pp. 213-220.

Loria G., (1925), *Curve sghembe speciali, Algebriche e trascendenti*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna.

Taddei A., Taddei D., (2012), *The "spina-pesce" and the "corda-blanda": florentine tradition in the (self-supporting) domes rotating*, Atti del Convegno: Domes in the world (Firenze, 19-23 Marzo 2012), a cura di Gennaro Tampone, Roberto Corazzi, Emma Mandelli, Firenze, Nardini Editore.

Zander G., (1988), *Gli ottagononi di San Pietro riconosciuti nel dis. Arch. Uff. n. 1330*, Roma, «Palladio»,1, 1988, pp. 67-82.