Science & Philosophy, 3(1)/2015, 73--106 ISSN online: 2282-7765
print: 2282-7757

Le Trasformazioni Geometriche nello Spazio: Isometrie

Ferdinando Casolaro[1], Luca Cirillo[2], Raffaele Prosperi[3]

[1] Dipartimento di Architettura Università "Federico II" di Napoli
ferdinando.casolaro@unina.it

[2] Università degli Studi del Sannio di Benevento
luca.cirillo@unisannio.it

[3] DISUFF Università degli Studi di Salerno
rprosperi@unisa.it

Sunto

Nel presente lavoro si propone la caratterizzazione delle Trasformazioni geometriche nello spazio, con particolare riferimento alle Isometrie ed alle Omotetie, con semplici dimostrazioni di carattere euclideo. Si evidenzia, inoltre, l'interrelazione tra la moderna classificazione delle Trasformazioni lineari in ambito proiettivo con il concetto di gruppo secondo Jordan, che permette di individuare le proprietà invarianti e, quindi, di proporre in alcuni casi anche giustificazioni di carattere proiettivo.

Keywords: Trasformazioni geometriche, isometrie, omotetie.

1 Introduzione

Le Trasformazioni dello spazio sono state proposte nei programmi Brocca negli anni '80 e, seppur con cenni, nelle Indicazioni nazionali della Scuola Secondaria di secondo grado con la riforma Berlinguer-De Mauro alla fine del secolo scorso.

Nei programmi del primo biennio, uno dei paragrafi del tema "*Geometria*" riguardava il riconoscimento delle "*simmetrie nei poliedri*", senza accennare prima al concetto generale di *isometria nello spazio*, che si rimandava al successivo triennio.

Nel nostro lavoro riterremo noti le nozioni fondamentali della "*geometria dello spazio*", in particolare quelle di parallelismo, di perpendicolarità e gli *enti fondamentali* quali diedro, triedro, poliedro, ecc., e procederemo direttamente

alla trattazione delle *isometrie* ed alla relativa classificazione, con cenni sulle composizioni e sui gruppi di isometrie.

Oltre le isometrie, daremo un cenno alle *omotetie* come particolari *similitudini* dello spazio; non riteniamo oggetto del nostro studio le affinità nello spazio.

Relativamente alle attuali "*Indicazioni nazionali*" per i licei, ci si limita a quanto segue (estratto dall'originale delle Indicazioni):

Lo studio della geometria proseguirà con l'estensione allo spazio di alcuni dei temi della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare, saranno studiate le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità, nonché le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione).

Personalmente riteniamo, però, che nelle Scuole di Formazione degli insegnanti si debba andare oltre le "*Indicazioni nazionali*" che, in generale sono relative al momento politico attuale; per preparare, invece, gli insegnanti del futuro, dobbiamo ripercorrere gli sforzi fatti dai didattici e pedagogisti della Matematica negli ultimi sessant'anni, dai quali emerge anche l'importanza delle conoscenze di quei concetti sviluppati negli ultimi 150 anni, come l'ampliamento del modello euclideo alle altre geometrie (Casolaro 2002, Casolaro, Pisano 2011), l'algebra lineare, una sempre maggiore razionalizzazione del calcolo delle probabilità e della Statistica.

Pertanto, l'esposizione pur essendo strutturata sul modello euclideo con le classiche dimostrazioni coerenti con "*gli Elementi*" di Euclide, conterrà alcune osservazioni di carattere proiettivo relative alla generalità delle Trasformazioni lineari (Cundari 1992, Casolaro 2003).

2 Definizioni e proprietà generali

Definizione 1. *Si dice isometria dello spazio, una corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio, tale che se a due punti A e B corrispondono i punti A' e B', i segmenti AB ed A'B' sono congruenti.*

Si può osservare che la definizione di isometria è data ritenendo primitivo (secondo l'assiomatica di Hilbert) il concetto di congruenza tra segmenti. Altri autori capovolgono il concetto: precisamente, dalla definizione metrica di isometria si definisce la congruenza tra due figure dello spazio.

Definizione 2. D*ue figure F ed F' dello spazio si dicono congruenti se esiste un'isometria I tale che I(F) = F'.*

La congruenza è una relazione di equivalenza; infatti valgono le proprietà:

a) Riflessiva: ogni figura è congruente a se stessa. Infatti, la trasformazione che lascia fisso ogni punto (*identità*) è un'isometria.

b) Simmetrica: Se *F* e *G* sono due figure dello spazio ed *F* è congruente a *G*, esiste un'isometria I tale che *G = I(F)*. Poiché un'isometria è un'applicazione biunivoca, esiste l'applicazione inversa I^{-1} che, ovviamente, è ancora una isometria. Allora anche la figura *G* è congruente ad *F* in quanto porta *G* in *F*.

c) Transitiva: Se *F, G, H*, sono figure tali che *G* è mutata da *F* in un'isometria *I* ed *H* è mutata da *G* in un'isometria *J*, si ha evidentemente:

$$J \circ I(F) = J(G) = H$$

cioè:

F congruente G; G congruente H => F congruente H.

Da *a), b), c),* risulta che:

- *La composizione di due isometrie è ancora un'isometria, per cui l'insieme delle isometrie è chiuso rispetto al prodotto* (*conseguenza della proprietà transitiva*).
- *Esiste l'isometria che trasforma una figura in se stessa, detta identità, che rappresenta l'elemento neutro rispetto al prodotto (conseguenza della proprietà riflessiva).*
- *La corrispondenza inversa di I, cioè la trasformazione* I^{-1} *che fa corrispondere ad un punto P' il punto P da cui essa proviene mediante I, è anch'essa un'isometria, che rappresenta l'elemento simmetrico di I rispetto al prodotto (conseguenza della proprietà simmetrica).*
- *Il prodotto di isometrie gode della proprietà associativa.*

Pertanto:

Le isometrie dello spazio formano gruppo di trasformazioni rispetto alla composizione (prodotto) di isometrie. (Casolaro, Prosperi, 2011).

2.1 Proprietà generali delle isometrie

Proprietà 1*. Se tre punti A, B, C dello spazio sono allineati, anche i punti corrispondenti A', B', C' sono allineati.*

Dim.: supponiamo, per fissare le idee che, su un qualsiasi piano π che contiene la retta *AB*, il punto *B* sia tra *A* e *C*; si ha: $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$; per la proprietà delle isometrie nel piano di conservare le lunghezze dei segmenti, si ha anche:

$$\overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}.$$

Se i tre punti *A', B', C'* non fossero allineati, si avrebbe, per la disuguaglianza triangolare, la contraddizione:

$$\overline{A'C'} < \overline{A'B'} + \overline{B'C'}.$$

Proprietà 2. *Ad una retta corrisponde una retta; al punto comune a due rette corrisponde il punto comune alle due rette corrispondenti.*
Dim.: È una conseguenza della proprietà 1) e dall'essere biunivoca la corrispondenza.

Proprietà 3. *Ad un segmento corrisponde un segmento, ad una semiretta corrisponde una semiretta, ad un semipiano corrisponde un semipiano.*
Dim.: Basta ragionare per assurdo, utilizzando le due proprietà precedenti, e tenendo conto della proprietà additiva dei segmenti.

***Proprietà* 4**. *A rette parallele corrispondono rette parallele.*
Dim.: per la proprietà 2), se alle rette *a* e *b*, parallele e non coincidenti, corrispondono le rette *a'* e *b'*, un eventuale punto comune ad *a'* e *b'* dovrebbe essere il corrispondente del punto comune ad *a* e *b* che sono parallele.

***Proprietà* 5**. *Ogni isometria, in quanto applicazione biunivoca, conserva l'incidenza.*
*Dim.: s*ia *I* un'isometria e *H* e *K* due sottoinsiemi dello spazio; per ogni punto *P* che appartiene ad $H \cap K$, il suo trasformato *P' = I(P)* appartiene sia a *I(H)* che a *I(K).*

***Proprietà* 6**. *Ad ogni angolo, convesso, piatto o concavo, corrisponde rispettivamente un angolo convesso, piatto o concavo. Angoli corrispondenti sono congruenti, quindi un'isometria conserva l'ampiezza degli angoli.*
Dim.: la prima parte della proprietà si ricava dalla proprietà 3). Per la seconda parte, basta considerare due angoli corrispondenti convessi. Sia $a\hat{O}b$ *un angolo convesso dello spazio*; l'angolo $a'\hat{O}'b'$ corrispondente ha per lati le semirette corrispondenti di *a* e di *b* e per vertice il punto *O'* corrispondente di *O*. Considerati, allora su *a* e *b* due punti qualsiasi *A* e *B*, i loro corrispondenti *A'* e *B'* sono su *a'* e *b'*. Per definizione di isometria si ha:

$$OA = O'A' ; \quad OB = O'B' ; \quad AB = A'B'.$$

I due triangoli *ABC* ed *A'B'C'* verificano, quindi, le ipotesi del terzo criterio di congruenza dei triangoli. Si ha allora: $a\hat{O}b = a'\hat{O}'b'$, come volevasi dimostrare.

***Proprietà* 7**. *Ad ogni poligono convesso corrisponde un poligono convesso; ad ogni poliedro convesso corrisponde un poliedro convesso.*
Dim.: anche questa proprietà è una conseguenza della proprietà 3.

***Proprietà* 8**. *In un'isometria, ad un piano e ad un semipiano corrispondono, rispettivamente, un piano e un semipiano.*
Dim.: facciamo vedere che *I* muta piani in piani.

Siano *r* ed *s* due rette incidenti di un dato piano α. Per la proprietà 2), le immagini di *r* ed s, secondo l'isometria *I,* sono due rette incidenti, che indichiamo rispettivamente, con *r'* ed *s'*. Se α' è il piano individuato da *r'* ed *s'*, dobbiamo dimostrare che *I(α) = α'*. A tal proposito, prendiamo un punto $P \in \alpha$ e mandiamo per *P* una retta qualsiasi *t*, incidente sia con *r* che con *s* (basta evitare le parallele per *P* ad *r* o ad *s*), indichiamo con *M* ed *N* le rispettive intersezioni di *t* con *r* ed *s*. Allora, la retta *t* viene trasformata dall'isometria *I* in una retta *t'* che contiene *P' = I(P)* e che passa per *M' = I(M) e N'= I(N)*; ma *M'* ed *N'*, come punti di *r'* ed *s'* stanno su *α'* e quindi anche la retta t', compreso P', giace completamente su α'. In conclusione, ogni punto *P* di α viene trasformato in un punto *P'* di *α'*, ossia *I* trasforma piani in piani.

Con osservazioni di carattere proiettivo, la dimostrazione di tale teorema è conseguenza delle proprietà delle *prospettività* tra piani.

Infatti, se σ è la prospettività da un qualsiasi centro di proiezione S tra due piani α e α', non sovrapposti, due qualsiasi rette incidenti *r* ed *r'* di α sono trasformate da σ in due rette incidenti *s* ed *s*' di α'. Poiché due rette non coincidenti identificano univocamente un piano, è evidente che il piano α è trasformato nel piano α'.

Per dimostrare che *I* trasforma semipiani in semipiani, consideriamo una retta *r* del piano α, che per la proprietà 2) è trasformata in una retta *r'* del piano *α'*; se *P* e *Q* sono due punti di α situati nello stesso semipiano di bordo *r*, il segmento *PQ* non taglia *r*, per cui anche il segmento *P'Q'* non taglia *r'* in quanto un'isometria conserva l'incidenza tra rette; dunque *P'* e *Q'* stanno dalla stessa parte di *r'*.

Conseguenza della proprietà sono le seguenti proprietà:

Proprietà 9. *Se tre semirette uscenti da un punto sono complanari, anche le semirette corrispondenti sono complanari.*

Proprietà 10. *In un'isometria, a semispazi corrispondono semispazi.*
Dim.: si ragiona in modo analogo alla dimostrazione della proprietà 8) nella trasformazione di semipiani in semipiani.

Proprietà 11. *In un'isometria, ad ogni sfera descritta attorno ad un punto arbitrario O (centro della sfera) corrisponde una sfera di ugual raggio attorno al trasformato O' (centro).*
Dim.: sia *K* una sfera di centro O e raggio *r* e sia O' = *I*(O) il trasformato di O nell'isometria *I*. Se *K'* è la sfera di centro O' e raggio *r*, il trasformato P'=*I*(P) di un punto $P \in K$ è situato certamente sulla sfera *K'*, in quanto deve risultare OP = O'P'=*r*, quindi *I*(K) è contenuto in *K'*. Ripetendo il ragionamento, partendo da

K' e applicando la I^{-1}, vediamo che I^{-1} (*K'*) è contenuto in *K*. Pertanto $I(K) \equiv K'$ (Morelli 1989).
Tenendo conto che le isometrie tra piani sono similitudini, che, quindi, mutano circonferenze in circonferenze, e che in un'isometria tra piani si conservano le distanze, possiamo ragionare in termini di geometria proiettiva, prendendo in considerazione le sezioni di una sfera con i piani passanti per il centro della sfera stessa. Infatti, per la proprietà 8, ad un piano α per il centro della sfera Γ nell'isometria corrisponderà un altro piano β tale che ai punti della circonferenza intersezione tra piano α e sfera Γ corrisponderanno punti sul piano β; al centro C delle circonferenze intersezioni di α con Γ corrisponderà il punto C', che sarà, per la conservazione delle distanze tra i punti dei piani (Casolaro, Cirillo, 1996), equidistante dai trasformati P' su β dei punti P della circonferenza Γ; per tale motivo, i punti P', equidistanti da C' e trasformati dei punti P della circonferenza Γ, si troveranno anch'essi su una circonferenza Γ'. Possiamo quindi affermare che in un'isometria ad una circonferenza (Γ) corrisponde ancora una circonferenza (Γ').
Poiché ciò vale per qualsiasi piano per il centro della sfera e, quindi per qualsiasi cerchio massimo, si evince che la sfera K si muta nella sfera K'.

Conseguenze immediate delle proprietà delle isometrie; un'isometria trasforma:

- *convessi in convessi,*
- *diedri (e loro interni) in diedri (e loro interni),*
- *triedri in triedri,*
- *tetraedri in tetraedri.*

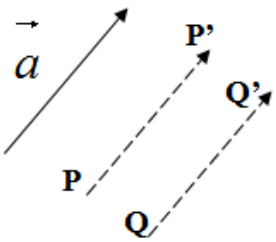
Un'isometria, oltre a conservare le relazioni di parallelismo tra rette, conserva le relazioni di parallelismo tra piani (a piani paralleli corrispondo piani paralleli), e tra rette e piani (una retta ed un piano, paralleli tra loro, sono trasformati in una retta ed un piano paralleli tra loro).

2.2 Isometrie Particolari

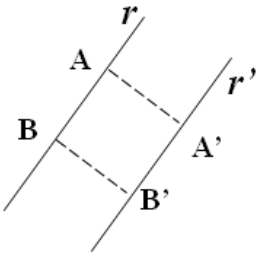
Le isometrie dello spazio si possono classificare in vari tipi. Esaminiamo dapprima i casi particolari di isometria.

2.2.1 Traslazione

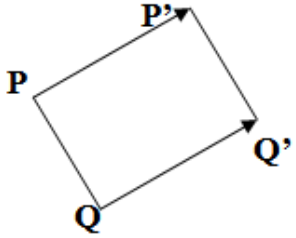
Definizione 3. *Dato un vettore* $\vec{a}$*, si dice traslazione di modulo a la corrispondenza* t_a *che ad un punto P associa il punto P' tale che il segmento orientato PP' appartiene al vettore* $\vec{a}$ ((Figura 1).



(Figura 1)



(Figura 2)



(Figura 3)

Poiché un *vettore* è una classe di segmenti orientati equipollenti, cioè di segmenti appartenenti a rette aventi la stessa direzione, possiamo affermare che:

Una traslazione sposta tutti i punti in una stessa direzione.
Le traslazioni godono delle seguenti proprietà:

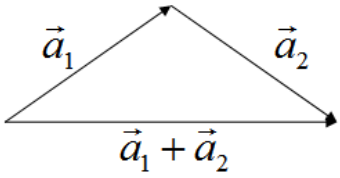
***Proprietà* 1.** *Due rette corrispondenti sono parallele.*
Dim.: se ad *r* corrisponde *r'* (**Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**), considerati i punti A e B su *r* ed i corrispondenti A' e B' su *r*', si ha che i segmenti AB ed A'B' sono lati opposti di un parallelogramma e quindi sono paralleli.

***Proprietà* 2.** *Le traslazioni sono isometrie.*
Dim.: siano P' e Q' i corrispondenti di due punti P e Q dello spazio; i segmenti PP' e QQ' sono paralleli e congruenti perché appartengono allo stesso vettore (Figura 3). Allora il quadrilatero PP'QQ' è un parallelogramma e quindi risulta:

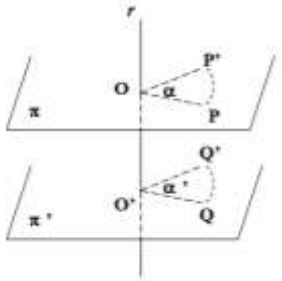
$$PQ = P'Q'$$

Fra le traslazioni dello spazio c'è da considerare anche l'*identità*, cioè la corrispondenza che ad ogni punto associa il punto stesso (*traslazione di vettore nullo*)**.**

***Proprietà* 3.** *L'insieme T delle traslazioni dello spazio forma gruppo abeliano rispetto al prodotto di trasformazioni.*
Dim.: se t_1 e t_2 sono due traslazioni (Figura 4) di vettori rispettivamente $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$, la traslazione $t_1 \circ t_2$ è individuata dal vettore $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ secondo la legge del parallelogramma.



(Figura 4)



(Figura 5)

(i) Poiché l'insieme dei vettori è chiuso rispetto alla somma, l'insieme delle traslazioni è chiuso rispetto al prodotto.

(ii) La traslazione di modulo il vettore nullo (l'identità), è l'elemento neutro rispetto al prodotto.

(iii) Il vettore $\vec{a}_1$ individua la traslazione t_1, il vettore $-\vec{a}_1$, cioè il vettore che ha modulo e direzione di $\vec{a}_1$ ma verso opposto, individua il simmetrico (rispetto al prodotto) della traslazione t_1.

(iv) La somma di vettori gode della proprietà associativa, per cui il prodotto di traslazioni è associativo.

E poiché la somma di vettori gode anche della proprietà commutativa, il gruppo delle traslazioni dello spazio è abeliano.

2.2.2 Rotazione intorno a una retta.

Definizione 4. *Data una retta r, su un piano perpendicolare ad r, un angolo orientato di ampiezza α, si dice rotazione di asse r la corrispondenza r_α che ad ogni punto di r fa corrispondere lo stesso punto e ad un punto P non appartenente ad r fa corrispondere il punto P' che è sul piano per P perpendicolare ad r ed è tale che, detto O l'intersezione di questo piano con r, risulta: 1) PO = P'O ; 2) l'angolo orientato* $P\hat{O}P'$ ***abbia ampiezza α*** **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata..**

$$r_\alpha : \begin{cases} O \to O, \qquad \forall O \in r \\ P \to P' \Rightarrow \begin{cases} OP = OP' \\ P\hat{O}P' = \alpha \end{cases} \end{cases}$$

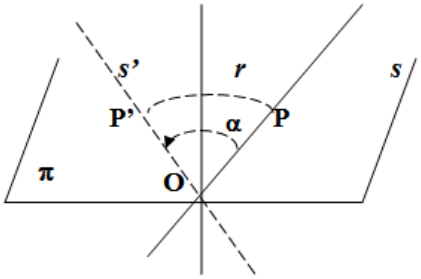
Osservazione. *La rotazione che ha per asse la retta r, nello spazio subordina su ogni piano π perpendicolare ad r, una rotazione che ha il centro nel punto di intersezione di π con r ed ampiezza α.*

Nel caso particolare che l'ampiezza della rotazione è quella di un angolo piatto, allora essa coincide con la rotazione inversa, ed è una simmetria assiale.

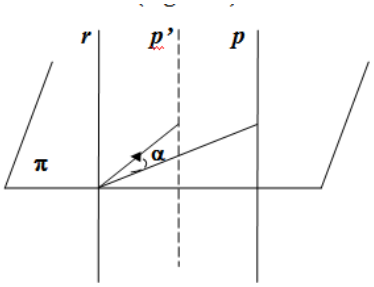
Come nelle trasformazioni del piano si studia la rotazione intorno ad un punto e si vede che essa è un'isometria, analogamente, nello spazio, si definisce la rotazione intorno ad una retta che è un'isometria dello spazio.

In una rotazione r_α, di asse *r* ed ampiezza α, si ha che:

- *una retta s, incidente r in un punto O, si trasforma in una retta s' incidente r ancora in O e tale che l'angolo diedro, avente per spigolo r e per facce i piani individuati rispettivamente dalla coppia di rette r ed s e dalla coppia di rette r ed s' abbia le sezioni normali uguali ad* α (Figura 6)

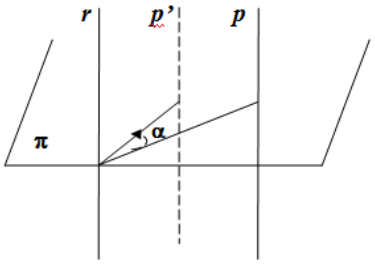


(Figura 6)



(Figura 7)

- *una retta p, parallela ad r, si trasforma in una retta p' parallela ad r e a p e tale che l'angolo diedro, avente per spigolo r e per facce i piani individuati rispettivamente dalla coppia di rette r e p e dalla coppia di rette r e p' abbia le sezioni normali uguali ad* α



-
- (Figura .
- una retta *q*, non parallela e non incidente con l'asse *r*, si trasforma in una retta *q'* sghemba con *r*.

Proposizione 2. *Le rotazioni coassiali formano gruppo abeliano di trasformazioni.*

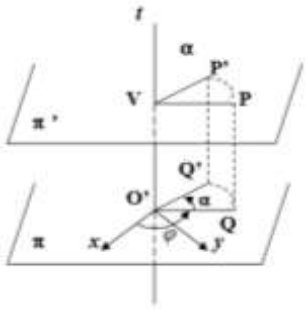
Dim.: se r_α e r_β sono due rotazioni intorno alla retta *r*, il prodotto $r_\alpha \circ r_\beta$ è la rotazione, ancora di asse *r*, che ha per ampiezza $\alpha+\beta$; pertanto l'insieme delle rotazioni coassiali è chiuso rispetto al prodotto.

(i) L'identità si può considerare come una rotazione di ampiezza nulla ed asse arbitrario; pertanto non è riduttivo considerare l'identità come rotazione di ampiezza nulla ed asse *r*, che individua l'elemento neutro rispetto al prodotto di rotazioni.

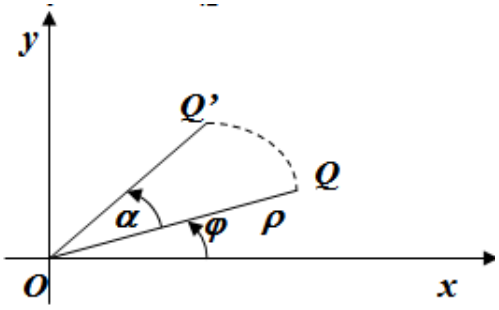
(ii) La corrispondenza inversa di una rotazione r_α, di ampiezza α ed asse *r*, è la rotazione di ampiezza $-\alpha$ che ha ancora asse *r*, e rappresenta il simmetrico di r_α.

(iii) Si verifica facilmente che la composizione di rotazioni aventi lo stesso asse è associativa e commutativa.

Per determinare le equazioni cartesiane di una rotazione nello spazio, è opportuno fissare un riferimento monometrico ortogonale *Oxyz*, in cui l'asse *z* coincide con *t* e l'origine *O* è l'intersezione dell'asse di rotazione *t* con un piano π perpendicolare a *t*; gli assi *x* ed *y* sono due rette (perpendicolari tra loro) del piano π passanti per *O* (Figura 8).



(Figura 8)



(Figura 9)

Se *P (x, y, z)* è un punto dello spazio, il corrispondente *P' (x', y', z')* è tale che *z' = z*, in quanto la rotazione avviene su un piano perpendicolare all'asse.

Indicando con *Q* e *Q'* le proiezioni ortogonali dei punti *P* e *P'* nel piano π (cioè sul piano *Oxyz*), da semplici proprietà di geometria elementare dello spazio, si deduce che i triangoli *VPP' e OQQ'* sono congruenti e quindi anche le coordinate *x, y* di *P* e di *Q* sono uguali alle corrispondenti coordinate *x', y'* di *P'* e di *Q'*. Posto $OQ = \rho$, ed indicato con φ l'angolo che la semiretta *OQ* forma con il semiasse positivo delle ascisse **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** si ha:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \, sen\varphi \end{cases} \quad (*)$$

Tenendo conto che $Q\hat{O}Q' = P\hat{V}P' = \alpha$, le coordinate di *P'* sono date da:

$$\begin{cases} x' = \rho\cos(\varphi+\alpha) \\ y' = \rho\,\mathrm{sen}\,(\varphi+\alpha) \\ z' = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \rho\cos\varphi\cos\alpha - \rho\,sen\,\varphi\,sen\,\alpha \\ y' = \rho\cos\varphi\,sen\,\alpha + \rho\,sen\,\varphi\cos\alpha \\ z' = z \end{cases}$$

Sostituendo i valori delle equazioni (*) si ha:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\,sen\,\alpha \\ y' = x\,sen\,\alpha + y\cos\alpha \\ z' = z \end{cases}$$

che rappresentano le *equazioni della rotazione di asse la retta t coincidente con l'asse z.*
Infatti, è facile verificare che il determinante della matrice dei coefficienti vale uno.

Un altro modo di esprimere le equazioni di una rotazione nello spazio è quello di considerare la rappresentazione in ***coordinate cilindriche.***

Fissato nello spazio un sistema di coordinate cartesiane *Oxyz*, si assuma nel piano *x y* un sistema di coordinate polari col polo nell'origine e l'asse polare coincidente col semiasse positivo delle *x* **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**.

Dato un punto *P (x, y, z)*, e detta *Q* la proiezione di *P* sul piano *x y*, siano ρ e ϑ le coordinate polari di *Q*, giacché risulta $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\,sen\,\vartheta$.

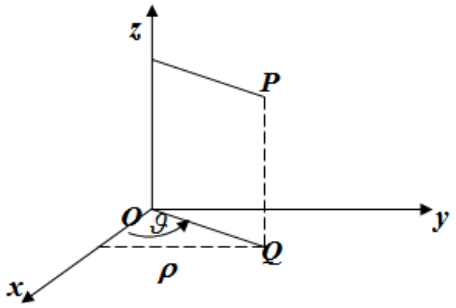


Figura 10

Il punto *P* è univocamente determinato dalle coordinate polari (ρ,ϑ) di *Q* e dalla sua terza coordinata *z: P* (ρ, ϑ, z), con $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,sen\vartheta \\ z = z \end{cases}$.

I numeri ρ, ϑ, z pendono il nome di *coordinate cilindriche* del punto *P*.

Tale denominazione è giustificata dal fatto che, fissato $\rho > 0$, al variare di ϑ e *z*, il punto (ρ, ϑ, z) descrive la superficie cilindrica S_ρ passante per *P* con le generatrici parallele all'asse *z* ed aventi per direttrice la circonferenza del piano *xy* di centro *O* e raggio ρ.

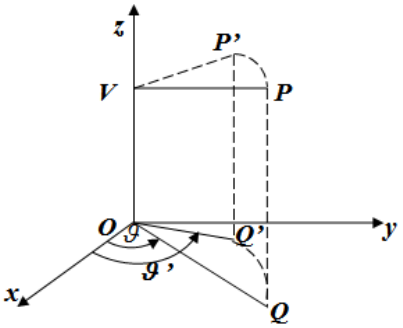


Figura 11

Con riferimento alla Figura 11, si può affermare che *la rotazione di ampiezza* α *ha, in coordinate cilindriche, equazioni:*

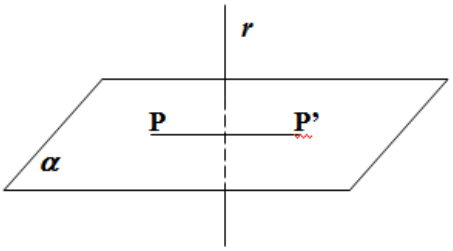
$$\begin{cases} \rho' = \rho \\ \vartheta' = \vartheta + \alpha \\ z' = z \end{cases}.$$

2.2.3 Simmetria assiale

Definizione. *Data, nello spazio, una retta r, si dice simmetria assiale di asse r la corrispondenza* s_r *dello spazio nella quale ad ogni punto di r corrisponde il punto stesso e ad un qualsiasi altro punto P corrisponde il punto P' situato sulla perpendicolare per P ad r e tale che, nel piano* α *individuato dalla retta r e dal punto P, i punti P e P' siano equidistanti da r, in semipiani opposti rispetto ad r* **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**.

Una simmetria assiale è un'isometria dello spazio che gode delle seguenti proprietà:

- *è una trasformazione involutoria;*
- *ha come punti uniti tutti e soli i punti dell'asse; le rette unite sono l'asse e tutte le rette incidenti ed ortogonali all'asse; i piani uniti sono:*
  - *(i) tutti i piani ortogonali all'asse*
  - *(ii) tutti i piani passanti per l'asse r.*



(Figura 12)

Proposizione 3. *Su ogni piano π, perpendicolare alla retta r, la s_r subordina su π l'isometria (simmetria centrale di centro P_o) che ha come unico punto fisso il punto P_o, intersezione di π con r.*

Si può facilmente verificare che si tratta della simmetria centrale del piano π rispetto a P_o. Dallo studio delle isometrie del piano è noto che tale simmetria si può ottenere come composizione di due simmetrie assiali piane che hanno come assi due rette incidenti in P_o e tra loro perpendicolari.

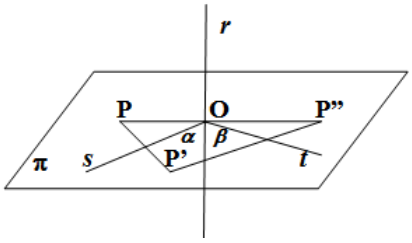
Proposizione 4. *Su ogni piano π passante per la retta r, la s_r subordina l'isometria (simmetria assiale del piano di asse r) che ha come punti fissi i punti di r.*

Riferendoci alle relazioni tra rette e piani, si può ottenere la simmetria assiale come composizione di due simmetrie planari. Precisamente:

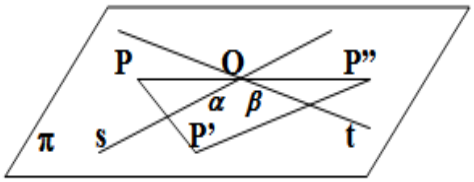
Proposizione 5. *La simmetria assiale s_r , rispetto ad una retta r, si può ottenere come composizione di due simmetrie rispetto a due piani qualsiasi, passanti per r e perpendicolari tra loro.*

Dim.: siano α e β due piani per *r* perpendicolari tra loro (Figura 13), e siano

- σ_α la simmetria rispetto al piano α che porta il punto *P* nel punto $P' = \sigma_\alpha(P)$
- σ_β la simmetria rispetto al piano β che porta il punto *P'* nel punto $P'' = \sigma_\beta(P') = \sigma_\beta[\sigma_\alpha(P)]$.



(Figura 13)



(Figura 14)

La corrispondenza $\sigma_\beta \circ \sigma_\alpha$ che porta *P* in *P"* è una corrispondenza del piano π individuato dai punti *P, P', P"*; tale piano è perpendicolare sia ad α che a β (e quindi a $r = \alpha \cap \beta$), in quanto *PP'* è perpendicolare a α e *P'P"* è perpendicolare sia ad α che a β.

Le tracce *s* e *t* dei piani α e β su π sono perpendicolari tra loro, per cui indicato con *O* il punto di intersezione tra *s* e *t* **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**, si ha:

(i) σ_α subordina su π una simmetria assiale σ_s di asse *s*, per cui essendo *s* l'asse del segmento *PP'*, risulta *PO = P'O*

(ii) σ_β subordina su π una simmetria assiale σ_t di asse *t*, per cui essendo *t* l'asse del segmento *P'P"*, risulta *P'O = P"O*

Pertanto, dalle due precedenti considerazioni, si ricava che *PO = P"O*.

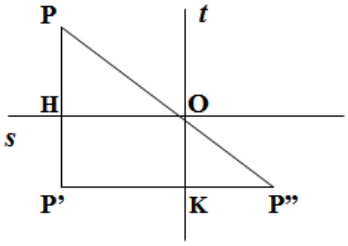
Inoltre i punti *P, O, P"* sono allineati **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** in quanto:

s è bisettrice di $P\hat{O}P'$, quindi $H\hat{O}P' = \frac{1}{2}P\hat{O}P'$

t è bisettrice di $P'\hat{O}P''$, quindi $P'\hat{O}K = \frac{1}{2}P'\hat{O}P''$

Sommando membro a membro:

$H\hat{O}P' + P'\hat{O}K = \frac{1}{2}\left(P\hat{O}P' + P'\hat{O}P''\right)$ cioè: $H\hat{O}K = \frac{1}{2}\left(P\hat{O}P''\right)$.



(Figura 15)

Essendo $H\hat{O}K = 90°$ si ricava che $P\hat{O}P''$=180°, cioè i punti *P, O, P"* sono allineati.

Pertanto, tenendo conto della proposizione 3, il punto *P"* è il corrispondente di P nella simmetria s_o centrale di centro *O* del piano π. La composizione $\sigma_\alpha \circ \sigma_\beta : P \to P''$ è una simmetria assiale che subordina su π una simmetria centrale.

Di tale proprietà si può dare anche una dimostrazione di carattere analitico che permette di dedurre le equazioni della trasformazione.

Dati due piani α e β tra loro perpendicolari, siano s_α ed s_β le simmetrie planari rispetto a tali piani. Se *r* è la retta di intersezione di α con β, prendiamo come sistema di riferimento quello che ha *r* come asse *z* ed un piano qualsiasi perpendicolare a *z* come piano *xy*; allora, per ogni punto *P (x, y, z)*, scegliendo α come piano *xz* e β come piano *yz*, si hanno le seguenti equazioni:

$$s_\alpha : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases} \qquad s_\beta : \begin{cases} x'' = -x' \\ y'' = y' \\ z'' = z' \end{cases}$$

Componendo le due simmetrie (sia $s_\alpha \circ s_\beta$ che $s_\beta \circ s_\alpha$) si ottiene una trasformazione che è, ovviamente, un'isometria con la seguente rappresentazione:

$$s_\beta \circ s_\alpha : \begin{cases} x" = -x \\ y" = -y \\ z" = z \end{cases} \qquad s_\alpha \circ s_\beta : \begin{cases} x = -x" \\ y = -y" \\ z = z" \end{cases}$$

che rappresentano le *equazioni della simmetria assiale rispetto alla retta r che coincide con l'asse z.*

Infatti, è facile verificare che:

- il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a 1
- l'asse *z*, ossia la retta $r = \alpha \cap \beta$ è una retta di punti fissi
- preso un punto *P (x, y, z)*, il punto P_0 (0, 0, *z)*, proiezione di P su *z*, è tale che $PP_0 = P'P_0 = \frac{1}{2}PP'$, ossia P_0 è il punto medio del segmento *PP'*
- invertendo l'ordine di composizione si ottengono le stesse equazioni, cioè la stessa trasformazione; tale trasformazione è la simmetria assiale s_r di asse *r*
- la trasformazione (simmetria di asse *r*) è completamente indipendente dalla scelta iniziale dei piani α e β, tranne che per il fatto di avere come intersezione *r* e di essere tra loro perpendicolari; infatti, prendendo altri due piani α' e β', e scegliendo il riferimento in modo analogo, otteniamo le stesse equazioni per la s_β e s_α, che ci garantiscono le stesse relazioni tra *P*, P_0 e *P'*, indipendenti dal riferimento scelto.

2.2.4 Simmetria Planare

Definizione 1. *Dato un piano α, si dice simmetria planare rispetto al piano α (piano di simmetria), la corrispondenza s_α che ad ogni punto di α fa corrispondere lo stesso punto e ad un qualsiasi punto P fa corrispondere il punto P' che è sulla perpendicolare per P ad α, nel semispazio opposto e ad uguale distanza da α* Figura 16.

Pertanto, una simmetria planare è un'isometria dello spazio che gode delle seguenti proprietà:

- lascia fisso ogni punto di α e scambia i semispazi opposti rispetto ad α; cioè se $A \notin \alpha$, e se $A' = s_\alpha(A)$, i punti *A* e *A'* si trovano in semispazi opposti;
- è *involutoria*, cioè:

$$A' = s_\alpha(A) \Rightarrow A = s_\alpha(A')$$

condizione espressa dalla relazione: $s_\alpha \circ s_\alpha = Identità$

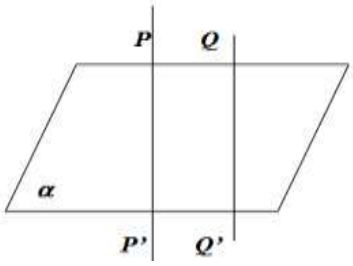


Figura 16

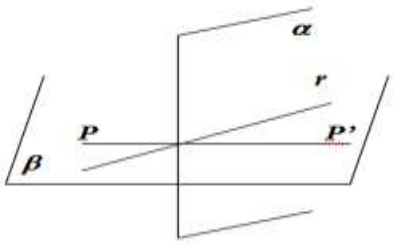


Figura 17

- la retta *AA'* (come ogni retta perpendicolare ad α) è trasformata in sé, cioè la retta *AA'* è unita in s_α.

Osservazione

Una simmetria planare s_α rispetto ad un piano α subordina su ogni piano β perpen-dicolare ad α una simmetria assiale s_r (avente per asse la retta r intersezione di α e β (Cundari, 1992).
Con riferimento alla Figura 17:

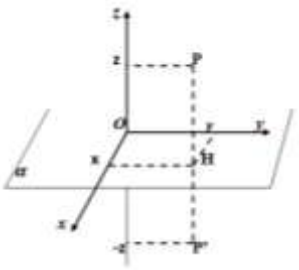
$$PP' \perp \alpha$$
$$\beta \perp \alpha$$
$$r = \alpha \cap \beta$$
$$s_\alpha(P) = P' \Rightarrow s_r(P) = P'$$

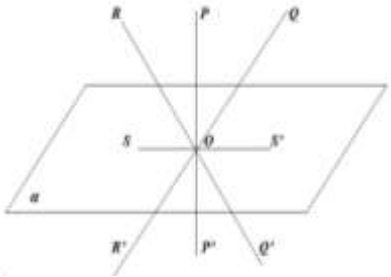
Per dare una rappresentazione cartesiana della simmetria rispetto ad un piano α, conviene scegliere un riferimento opportuno in cui gli assi delle x e delle y siano situati sul piano α.

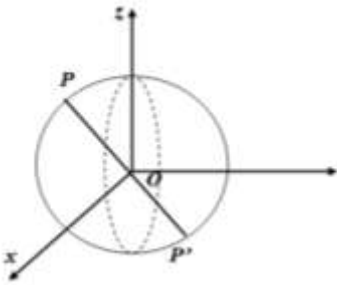
Se s_α è la simmetria di cui si vogliono trovare le equazioni, prendiamo su α due rette perpendicolari x ed y, incidenti in O, e come asse z consideriamo la retta perpendicolare ad a in O **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**. Una volta fissato un verso su x, y e z, è stabilito un riferimento cartesiano ortogonale.

Se $P\ (x, y, z)$ è un punto dello spazio, il simmetrico $P'\ (x', y', z') = s_\alpha\ (P)$ ha evidentemente le coordinate espresse da:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z \end{cases}$$







(Figura 18) (Figura 19) (Figura 20)

che rappresentano le *equazioni della simmetria planare* rispetto al piano α nel riferimento *Oxyz*

In modo analogo si ottengono le equazioni delle simmetrie

rispetto al piano *zy*: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$ e rispetto al piano *xz*: $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z \end{cases}$

Per ciascuno dei sistemi di equazioni appena introdotti si può verificare che il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a – 1.

2.2.5 Simmetria Centrale

Definizione 1. *Dato un punto O, si dice simmetria centrale di centro O (centro di simmetria) la corrispondenza s_o che ad O fa corrispondere O stesso e ad un punto qualsiasi P fa corrispondere il punto P' tale che O sia il punto medio tra P e P'* **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**.

Un altro modo per definire la *simmetria centrale* è il seguente:

Definizione 2. *Dato un punto O dello spazio, si dice simmetria centrale di centro O la corrispondenza s_o dello spazio nella quale al punto O corrisponde il punto O stesso e ad un qualsiasi altro punto P corrisponde l'ulteriore punto P' intersezione della retta PO con la superficie sferica di centro O e raggio OP* **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**.

Pertanto, una simmetria centrale è una isometria dello spazio che gode delle seguenti proprietà:

- *è una trasformazione involutoria*
- *ha l'unico punto fisso nel centro O, tutte le rette per O sono unite e tutti i piani per O sono uniti.*

Osservazione. *Una simmetria centrale s_o di centro O subordina su ogni piano della stella di centro O una simmetria centrale rispetto ad O.*

Proposizione 2. *La simmetria centrale s_o si può ottenere come composizione di tre simmetrie rispetto a tre piani passanti per O e a due a due perpendicolari.*

Dim.: Consideriamo tre piani $\alpha, \beta, \gamma,$ tra loro a due a due perpendicolari, tutti passanti per il punto *O*, e le simmetrie s_α, s_β, s_γ rispetto a tali piani. Fissato un riferimento cartesiano ortogonale che abbia α, β, γ come piani coordinati, la composizione delle tre simmetrie (ovviamente indipendente dall'ordine di composizione) è un'isometria che ha la seguente rappresentazione:

$$s_\gamma \circ s_\beta \circ s_\alpha : \begin{cases} x" = -x \\ y" = -y \\ z" = -z \end{cases}$$

Tali formule rappresentano le *equazioni della simmetria centrale* s_o *di centro O*. Infatti è facile verificare che:

- *il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a – 1;*
- *ha un solo punto fisso: il punto O comune ai tre piani e origine del riferimento;*
- *se P' (x', y', z') è il trasformato di P (x, y, z) mediante* s_o *, risulta:*

$$PO = P'O = \frac{1}{2} PP'$$

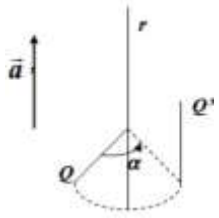
Inoltre scegliendo tre piani qualsiasi, tra loro mutuamente perpendicolari e passanti per *O*, sviluppando un ragionamento analogo al caso della simmetria assiale, si ottiene ancora una trasformazione che porta *P* in *P'*, in modo che *O* risulta punto medio di *PP'*, ossia ancora s_o; la trasformazione risulta, allora, indipendente dalla scelta iniziale dei tre piani.

2.3 Ulteriori Particolari Isometrie

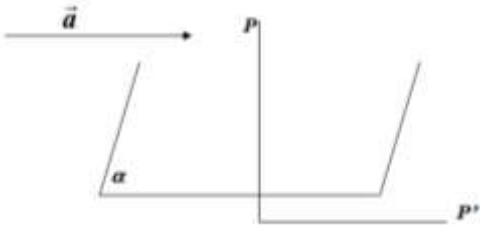
Attraverso opportune composizioni di due delle isometrie finora considerate, si possono ottenere altri casi particolari di isometria:

1) *Composizione di una rotazione intorno ad una retta r per una traslazione avente la direzione di r:* ***Movimento Elicoidale (o Rototraslazione)*** **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**.

Il movimento elicoidale è rappresentato dalla trasformazione che porta *Q* in *Q'*, ottenuta componendo la rotazione di ampiezza α con la traslazione di modulo **a** (entrambe non ridotte all'identità).



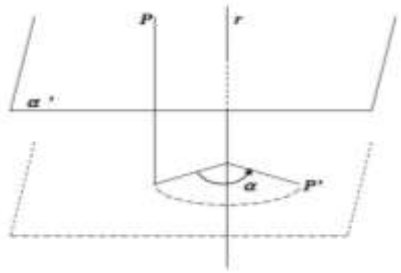
(Figura 21)



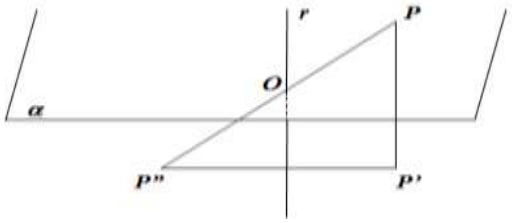
(Figura 22)

2) *Composizione di una simmetria planare rispetto ad un piano α con una traslazione (non identica) avente la direzione parallela al piano α:* ***Glissosimmetria (O Antitraslazione)*** (Figura 22).

3) *Composizione di una simmetria planare, rispetto ad un piano α con una rotazione non nulla, intorno ad una retta perpendicolare ad α: Antirotazione* (Figura 23).



(Figura 23)



(Figura 24)

4) *Composizione di una simmetria planare rispetto ad un piano α per una simmetria assiale, avente per asse una retta r perpendicolare ad α:* è la ***simmetria centrale*** rispetto al punto di intersezione di *r* e di α

5) (Figura 24).

Teorema Fondamentale

Le isometrie dello spazio si possono ottenere tutte mediante le simmetrie planari. Precisamente si ha il seguente teorema:

Ogni isometria dello spazio è il prodotto di al più quattro simmetrie planari. Precisamente, l'isometria può essere una simmetria planare, oppure è il prodotto di due, o di tre, o di quattro simmetrie planari.

*Dim.: l*a dimostrazione di questo teorema si fonda sulle seguenti osservazioni:
se un'isometria dello spazio non è un'identità e un punto A è unito per essa, detti P e P' due punti corrispondenti distinti, il piano di simmetria π del segmento PP' passa per A.

Infatti, se *A* è unito in *I*, e se *P' = I(P)* deve risultare $\overline{AP} = \overline{AP}'$, e quindi *A* deve appartenere al piano di simmetria π del segmento *PP'*.

Indicato con σ una qualsiasi isometria, distinguiamo i seguenti casi:

1. In σ quattro punti *A, B, C, D,* non complanari sono uniti. In questo caso σ è l'identità *I* : infatti se σ non fosse l'identità, detti *P* e *P'* due punti corrispondenti distinti, il piano di simmetria del segmento *PP'* dovrebbe

passare per *A, B, C, D* e che risulterebbero, quindi, punti complanari contro l'ipotesi.

2. In σ tre punti *A, B, C,* non allineati distinti sono uniti (non escludendo che vi siano altri punti uniti). In questo caso σ o è l'identità *I* o è la simmetria planare rispetto al piano π individuato da *A, B, C*. Infatti se σ non è l'identità, e se *P* e *P'* sono due punti distinti corrispondenti in σ e non appartenenti a π, il piano di simmetria del segmento *PP'*, dovendo passare per *A, B e C* deve coincidere con π. Consideriamo la simmetria σ_π rispetto al piano π (che porta *P'* in *P*), l'isometria $s_\pi \circ \sigma$, prodotto della isometria data σ per la simmetria planare s_π, è tale che:

$$s_\pi \circ \sigma : P \to P' \to P,$$

per cui il punto *P* è unito nell'isometria $s_\pi \circ \sigma$. Poiché anche i punti *A, B* e *C* sono uniti in $s_\pi \circ \sigma$ (in quanto uniti sia in σ – per ipotesi – sia in s_π perché appartengono al piano di simmetria π), l'isometria $s_\pi \circ \sigma$, avendo quattro punti non complanari uniti è – per il caso precedente – l'identità *I* :

$$s_\pi \circ \sigma = I$$

Moltiplicando a sinistra per s_π, si ha:

$$s_\pi \circ s_\pi \circ \sigma = s_\pi \circ I$$

e, tenendo conto che $s_\pi \circ s_\pi = s_\pi^2 = I$, si ha:

$$I \circ \sigma = s_\pi \circ I$$

cioè:

$$\sigma = s_\pi$$

Pertanto σ è la simmetria rispetto al piano π.

3. In σ due punti (almeno) *A* e *B* sono uniti. In questo caso σ o è l'identità *I* o è la simmetria planare o è il prodotto di due simmetrie planari (rispetto a due piani π_1 e π_2 del fascio di piani di asse la retta *AB*). Infatti, se σ non è l'identità, detti *P* e *P'* due punti distinti corrispondenti in σ e non appartiene a π, il piano di simmetria del segmento *PP'*, che contiene la retta *AB*. Sia s_π la simmetria rispetto al piano π, nell'isometria prodotto $s_\pi \circ \sigma$ i punti *A, B* e *P* sono uniti, quindi l'isometria avendo tre punti uniti, per il caso precedente si ha:

$$s_\pi \circ \sigma = I \text{ oppure } s_\pi \circ \sigma = s'$$

dove *s'* è una simmetria planare.
Da queste uguaglianze moltiplicando a sinistra per s_π, si ha:

$$\sigma = s_\pi \text{ oppure } \sigma = s_\pi \circ s'$$

Pertanto, σ è la composizione di due simmetrie planari.

4. In σ un punto A (almeno) è unito. In questo caso σ o è l'identità o è una simmetria planare o è il prodotto di due simmetrie planari o è il prodotto di tre simmetrie planari. Infatti, se σ non è l'identità, detti P e P' due punti distinti corrispondenti in σ e non appartenenti a π, il piano di simmetria del segmento PP' che passa per A. Sia s_π la simmetria rispetto al piano π dell'isometria $s_\pi \circ \sigma$, i punti A e P sono uniti, quindi l'isometria avendo due punti uniti, per il caso precedente si ha:

$$s_\pi \circ \sigma = I \quad \text{oppure } s_\pi \circ \sigma = s' \quad \text{oppure } s_\pi \circ \sigma = s' \circ s''$$

dove s' e s'' sono due simmetrie planari.
Da queste uguaglianze, moltiplicando a sinistra per s_π, si ha:

$$\sigma = s_\pi \quad \text{oppure } \sigma = s_\pi \circ s' \quad \text{oppure } \sigma = s_\pi \circ s' \circ s''$$

Pertanto, σ è la composizione di tre simmetrie planari.

5. In σ non si suppone unito alcun punto. In questo caso σ o è l'identità o è una simmetria planare o è il prodotto di due simmetrie planari o è il prodotto di tre simmetrie planari o è il prodotto di quattro simmetrie planari. Infatti, se σ non è l'identità, detti P e P' due punti distinti corrispondenti in σ e non appartenenti a π, il piano di simmetria del segmento PP'. Sia s_π la simmetria rispetto al piano π dell'isometria $s_\pi \circ \sigma$, poiché risulta che il punto P è unito, quindi l'isometria avendo un solo punto unito, per il caso precedente si ha:

$$s_\pi \circ \sigma = I \text{ oppure } s_\pi \circ \sigma = s' \text{ oppure } s_\pi \circ \sigma = s' \circ s'' \text{ oppure}$$
$$s_\pi \circ \sigma = s' \circ s'' \circ s'''$$

dove s' e s'' e s''' sono due simmetrie planari.
Da queste uguaglianze, moltiplicando a sinistra per s_π, si ha:

$$\sigma = s_\pi \text{ oppure } \sigma = s_\pi \circ s' \text{ oppure } \sigma = s_\pi \circ s' \circ s'' \text{ oppure}$$
$$\sigma = s_\pi \circ s' \circ s'' \circ s'''$$

Pertanto, σ è la composizione di quattro simmetrie planari. c.v.d.

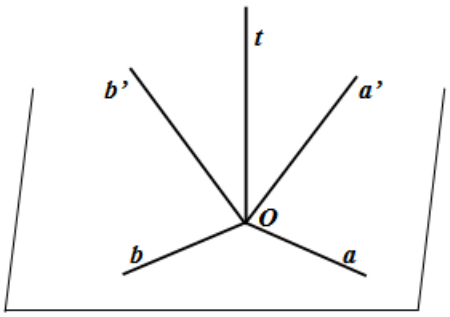
Teorema 5

Il prodotto di due rotazioni con gli assi incidenti è una rotazione con l'asse passante per il punto comune agli assi delle prime due.

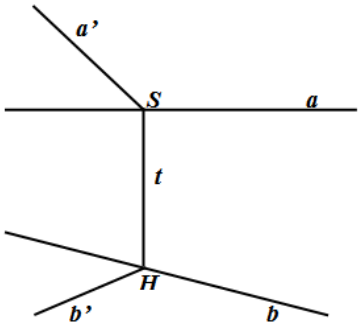
Dim.: se *a* e *b* sono gli assi delle due rotazioni (Figura 25), *O* è il loro punto comune. Considerato il piano contenente gli assi delle due rotazioni, sia *t* la retta ortogonale in *O* a tale piano.

Nel piano ortogonale alla retta *a* nel punto *O*, consideriamo la retta *a'* tale che $r_\alpha = s_{a'} \circ s_t$ avendo indicato con $s_{a'}$ e s_t le simmetrie assiali di assi *a'* e *t*.

Nel piano ortogonale alla retta *b* nel punto *O*, consideriamo la retta *b'* tale che $r'_\beta = s_t \circ s_{b'}$; si ha allora che:



(Figura 25)



(Figura 26)

$$I = r_\alpha \circ r'_\beta = s_{a'} \circ s_t \circ s_t \circ s_{b'} = s_{a'} \circ s_{b'},$$

da cui si ha che l'isometria *I* è una rotazione intorno alla retta per *O* ortogonale al piano di *a'* e *b'*.

c.v.d.

Teorema 6

Il prodotto di due rotazioni con gli assi sghembi è una rototraslazione ed in particolare una rotazione o una traslazione.

Dim.: Si può considerare il segmento *SH* di minima distanza tra le due rette sghembe *a* e *b* **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**; si indichi con *t* tale retta *SH*.

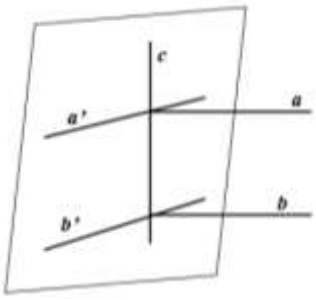
Se si sceglie sul piano per *S* ortogonale alla retta *a* la retta *a'* tale che $r_\alpha = s_{a'} \circ s_t$ e poi si considera sul piano per *H* ortogonale alla retta *b* la retta *b'* tale che $r'_\beta = s_t \circ s_{b'}$, si ha allora che: $I = s_{a'} \circ s_{b'}$. Per quanto visto, questa in generale è una rototraslazione ed in particolare una rotazione o una traslazione.

Teorema 7

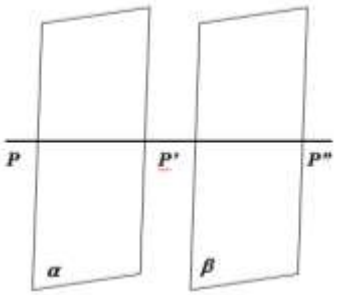
Il prodotto di due rotazioni con gli assi paralleli è una rotazione se r ed r' non sono simmetrie assiali; è una traslazione se r ed r' sono due simmetrie assiali.

Dim.: Se r_α ed r'_β sono due simmetrie assiali, $I = r_\alpha \circ r'_\beta$ è per definizione una traslazione. Se le rotazioni non sono simmetrie, si consideri una retta *c* ortogonale agli assi di r_α ed r'_β, nel piano ortogonale a tali assi e contenente *c*, le rette *a'* e *b'* tali che $r_\alpha = s_{a'} \circ s_c$ e $r'_\beta = s_c \circ s_{b'}$, da cui $I = s_a \circ s_{b'}$.

Se r_α ed r'_β sono due rotazioni di ampiezza α e β, se $\alpha + \beta = 0$, le rette *a'* e *b'* risultano parallele ed *I* è una traslazione, se invece $\alpha + \beta \neq 0$, le rette *a'* e *b'* risultano incidenti ed *I* è una rotazione **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**. *c.v.d.*



(Figura 27)



(Figura 28)

Osservazione.

Il prodotto di due rotazioni con lo stesso asse è una rotazione con quest'asse.

2.4 Composizioni di isometrie inverse

Consideriamo ora le *isometrie inverse* dello spazio: una di queste è la simmetria planare. Il teorema fondamentale *(pag. 17)* permette di classificare tutte le isometrie dello spazio (Morelli 1989).
Si possono, infatti, dimostrare i seguenti teoremi:

Teorema 1

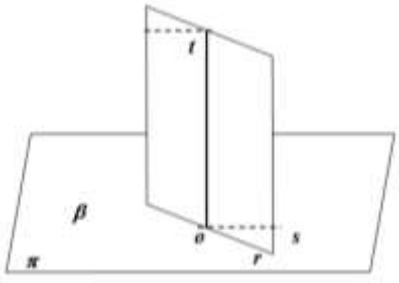
Il prodotto di due simmetrie planari con i piani di simmetria paralleli è la traslazione, il cui modulo è il vettore perpendicolare a questi piani con il verso che va dal primo al secondo di essi e di lunghezza doppia della distanza tra essi.
Dim.: Se s_α e s_β sono le simmetrie rispetto ai piani α e β, i segmenti *PP'* e *P'P''* **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** sono entrambi perpendicolari alla giacitura individuata da α e β. Poiché tali segmenti sono consecutivi e paralleli, allora risultano anche adiacenti ed allineati. Pertanto il punto *P* è trasformato nel punto *P''* da $s_\alpha \circ s_\beta$, mediante lo spostamento individuato dal segmento orientato *PP''* che definisce la trasformazione come traslazione avente per modulo il vettore $\overrightarrow{P\,P''}$.

Teorema 2

Il prodotto di due simmetrie planari con i piani di simmetria incidenti è la rotazione avente per asse la retta comune a questi due piani ed ampiezza doppia dell'angolo formato da essi.

Dim.: siano α e β due piani incidenti e sia t la loro retta di intersezione (Figura 29).

Se s_α è la simmetria dello spazio rispetto al piano α ed s_β è la simmetria dello spazio rispetto al piano β, il prodotto $s_\alpha \circ s_\beta$ presenta le seguenti caratteristiche:



(Figura 29)

1) $s_\alpha \circ s_\beta$ è un'isometria in quanto prodotto di due isometrie;
2) la retta $t \equiv \alpha \cap \beta$ è una retta di punti uniti in $s_\alpha \circ s_\beta$;
3) ogni piano π perpendicolare a t è unito in tale isometria, in quanto unito in ciascuna delle due simmetrie.

Proprio quest'ultima considerazione ci permette di asserire che per dimostrare l'asserto basta dimostrare che su ogni piano π perpendicolare a t, l'isometria $s_\alpha \circ s_\beta$ subordina una rotazione. A tale scopo siano r ed s le tracce di α e β su π (ovvero le rette di intersezione rispettivamente di α con π e di β con π); la simmetria s_α induce su π la simmetria rispetto ad r, e la s_β induce su π la simmetria rispetto ad s. Ma, dallo studio delle trasformazioni nel piano, sappiamo che il prodotto di due simmetrie è una rotazione ρ di centro $O \equiv t \cap \pi$ (ovviamente è anche $O \equiv r \cap s$) ed ampiezza δ uguale al doppio dell'ampiezza dell'angolo orientato (acuto o retto) formato da una semiretta di r e da una semiretta di s tale che $r\hat{O}s \leq \frac{\pi}{2}$.

Pertanto il prodotto $s_\alpha \circ s_\beta$ è una rotazione dello spazio che ha uniti tutti i punti della retta t ed ha per ampiezza $\delta = 2\ \varepsilon$, cioè il doppio dell'angolo ε individuato dalla sezione normale del diedro $\alpha\ \hat{t}\ \beta$ e tale che $\varepsilon \leq \frac{\pi}{2}$.

Notiamo che, nel caso in cui i due piani sono perpendicolari tra di loro, il prodotto è una simmetria assiale avente per asse la retta di intersezione dei due piani.

Teorema 3

Il prodotto di quattro simmetrie planari quando non è una traslazione o una rotazione, allora risulta essere una rototraslazione.

Dim.: siano $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quattro piani e s_α, s_β, s_γ e s_δ le simmetrie planari rispetto a tali piani. Se consideriamo il prodotto di queste quattro simmetrie planari $s_\delta \circ s_\gamma \circ s_\beta \circ s_\alpha$ si verificano i seguenti casi:

1) se i primi due piani di simmetria sono paralleli, e così come anche gli altri due, si ha:
$$s_\delta \circ s_\gamma \circ s_\beta \circ s_\alpha = (s_\delta \circ s_\gamma) \circ (s_\beta \circ s_\alpha) = t_2 \circ t_1$$
è una traslazione, essendo il prodotto di due traslazioni di moduli rispettivamente *a* e *b* ancora una traslazione avente per modulo la somma dei moduli *a+b;*
2) se i primi due piani di simmetria sono incidenti, e così anche gli altri due, si ha:
$$s_\delta \circ s_\gamma \circ s_\beta \circ s_\alpha = (s_\delta \circ s_\gamma) \circ (s_\beta \circ s_\alpha) = r_2 \circ r_1$$
come si è visto il prodotto di due rotazioni con gli assi incidenti è una rotazione; se gli assi sono paralleli si ha una traslazione o una rotazione a seconda che gli angoli hanno una somma $\equiv 0$ (mod. 2π), oppure no; se gli assi sono sghembi si ha una rototraslazione;

3) se i primi due piani di simmetria sono incidenti e gli altri due paralleli, si ha:
$$s_\delta \circ s_\gamma \circ s_\beta \circ s_\alpha = (s_\delta \circ s_\gamma) \circ (s_\beta \circ s_\alpha) = r \circ t$$
è una rototraslazione essendo il prodotto di una rotazione intorno ad una retta *r* per una traslazione;

4) se i primi due piani di simmetria sono paralleli e gli altri due incidenti, si ha:
$$s_\delta \circ s_\gamma \circ s_\beta \circ s_\alpha = (s_\delta \circ s_\gamma) \circ (s_\beta \circ s_\alpha) = t \circ r$$
è una rototraslazione essendo il prodotto di una traslazione per una rotazione di asse una retta *r*. *c.v.d.*

Teorema 4

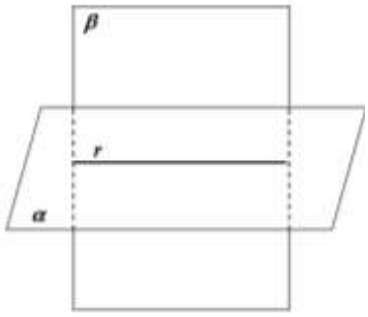
Il prodotto di una simmetria planare per una simmetria assiale avente l'asse appartenente al piano della simmetria planare è la simmetria planare rispetto al piano per l'asse della simmetria assiale perpendicolare al piano della simmetria planare.

*Dim.: s*ia α il piano della simmetria planare ed r l'asse della simmetria assiale, appartenente al piano α; indichiamo con s_α la simmetria planare rispetto al piano α ed s_r la simmetria assiale di asse la retta r .

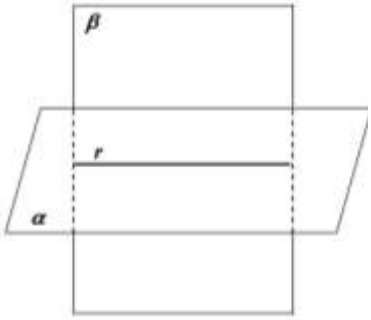
Abbiamo visto che una simmetria assiale di asse una retta r è il prodotto di due simmetrie planari in cui i piani di simmetria sono perpendicolari tra loro ed avente per intersezione r; possiamo considerare uno di questi piani coincidenti con α, e sia β il piano perpendicolare ad α; si ha:

$$s_r \circ s_\alpha = (s_\beta \circ s_\alpha) \circ s_\alpha = s_\beta \circ (s_\alpha \circ s_\alpha) = s_\beta \circ s_\alpha^2 = s_\beta \circ I = s_\beta$$

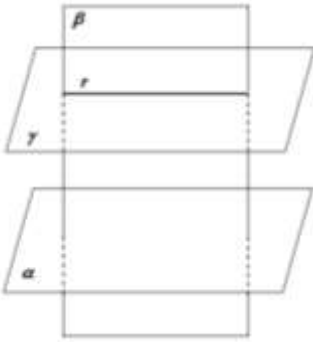
dove s_β è la simmetria planare rispetto al piano β perpendicolare al piano α. *c.v.d.*



(Figura 30)



(Figura 31)



(Figura 32)

Teorema 4'

Il prodotto di una simmetria planare per una rotazione avente l'asse appartenente al piano della simmetria planare è la simmetria planare rispetto al piano per l'asse della rotazione perpendicolare al piano della simmetria planare.

Dim.: sia α il piano della simmetria planare ed r l'asse della rotazione, appartenente al piano α; indichiamo con s_α la simmetria planare rispetto al piano α ed ρ_φ la rotazione di asse la retta r **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**.

Abbiamo visto che una rotazione di asse una retta r è il prodotto di due simmetrie planari con i piani di simmetria incidenti nella retta r e tali che l'angolo diedro che essi formano ha le sezioni normali di ampiezza uguale alla metà dell'ampiezza di rotazione;

possiamo considerare uno di questi piani coincidenti con α, e sia β il piano che forma con α un angolo di ampiezza $\frac{\varphi}{2}$ uguale alla metà dell'ampiezza di rotazione; si ha:

$$\rho_\varphi \circ s_\alpha = (s_\beta \circ s_\alpha) \circ s_\alpha = s_\beta \circ (s_\alpha \circ s_\alpha) = s_\beta \circ s_\alpha^2 = s_\beta \circ I = s_\beta$$

dove s_β è la simmetria planare rispetto al piano β perpendicolare al piano α. *c.v.d.*

Teorema 5

Il prodotto di una simmetria planare per una simmetria assiale avente l'asse parallelo al piano della simmetria planare è una antitraslazione.

Dim.: sia α il piano della simmetria planare ed r l'asse della simmetria assiale, parallelo al piano α; indichiamo con s_α la simmetria planare rispetto al piano α ed s_r la simmetria assiale di asse la retta r .

Abbiamo visto che una simmetria assiale di asse una retta r è il prodotto di due simmetrie planari con piani β e γ perpendicolari tra loro ed aventi intersezione r; possiamo considerare uno di questi piani ad es. β perpendicolare ad α, e l'altro piano γ parallelo ad α; si ha:

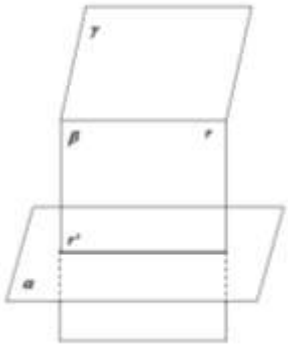
$$s_r \circ s_\alpha = (s_r \circ s_\beta) \circ s_\alpha = (s_\beta \circ s_\gamma) \circ s_\alpha = s_\beta \circ (s_\gamma \circ s_\alpha) = s_\beta \circ t_\alpha$$

Il prodotto $s_\beta \circ t_\alpha$ è una antitraslazione, in quanto prodotto di una simmetria planare rispetto al piano β con una traslazione avente la direzione parallela al piano β. *c.v.d.*

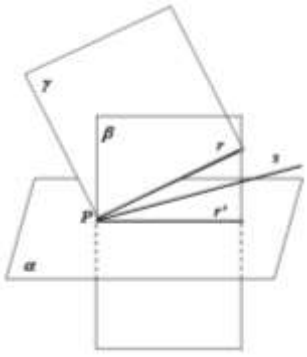
Teorema 5'

Il prodotto di una simmetria planare per una rotazione avente l'asse parallelo al piano della simmetria planare è una antitraslazione.

Dim.: sia α il piano della simmetria planare ed r l'asse della rotazione, parallelo al piano α; indichiamo con s_α la simmetria planare rispetto al piano α ed ρ_φ la rotazione di asse la retta r



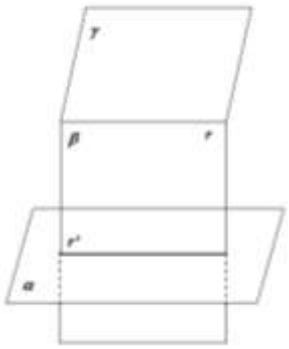
(Figura 33)



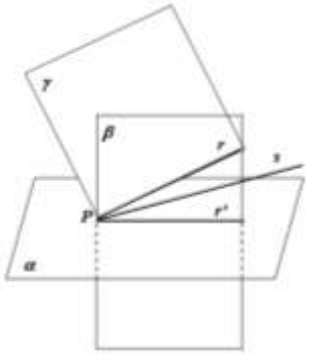
(Figura 34)

.

Abbiamo visto che una rotazione di asse una retta r è il prodotto di due simmetrie planari con piani β e γ incidenti nella retta r e tali che l'angolo diedro che essi formano ha le sezioni normali di ampiezza uguale alla metà dell'ampiezza di rotazione; possiamo considerare uno di questi piani β perpendicolare ad α, e sia r' la retta di intersezione di α e β.



(Figura 33)



(Figura 34)

Indicata con $s_{r'}$ la simmetria assiale di asse la retta r', si ha:

$$\rho_{\varphi} \circ s_{\alpha} = (s_r \circ s_{\beta}) \circ s_{\alpha} = s_{\gamma} \circ (s_{\beta} \circ s_{\alpha}) = s_{\gamma} \circ s_{r'}$$

Facendo ruotare i piani α e β intorno alla retta r' si ottengono i piani β' parallelo a γ ed α' perpendicolare a γ, in modo tale che risulta β' perpendicolare ad α'.

Allora la simmetria $s_{r'}$ si può decomporre nel prodotto $s_{\alpha'} \circ s_{\beta'}$; pertanto si ha:

$$\rho_{\varphi} \circ s_{\alpha} = s_{\gamma} \circ s_{r'} = s_{\gamma} \circ (s_{\alpha'} \circ s_{\beta'}) \circ s_{\alpha} = s_{\gamma} \circ (s_{\beta'} \circ s_{\alpha'}) = (s_{\gamma} \circ s_{\beta}) \circ s_{\alpha'} = t_{\alpha} \circ s_{\alpha'}$$

Il prodotto $t_{\alpha} \circ s_{\alpha'}$ è una antitraslazione, in quanto prodotto di una simmetria planare rispetto al piano α' con una traslazione avente la direzione parallela al piano α'. *c.v.d.*

Teorema 6:

Il prodotto di una simmetria planare per una simmetria assiale avente l'asse incidente il piano della simmetria planare è una antirotazione.

Dim.: sia α il piano della simmetria planare ed r l'asse della simmetria assiale incidente il piano α in P; indichiamo con s_{α} la simmetria planare rispetto al piano α ed s_r la simmetria assiale di asse la retta r .

Abbiamo visto che una simmetria assiale di asse una retta r è il prodotto di due simmetrie planari con piani β e γ perpendicolari tra loro ed aventi per

intersezione la retta r; possiamo considerare uno di questi piani β perpendicolare ad α, e sia r' la retta di intersezione di α e β.

Indicata con $s_{r'}$ la simmetria assiale di asse la retta r', si ha:

$$s_r \circ s_\alpha = (s_\gamma \circ s_\beta) \circ s_\alpha = s_\gamma \circ (s_\beta \circ s_\alpha) = s_\gamma \circ (s_\alpha \circ s_\beta) = s_\gamma \circ s_{r'}$$

Facendo ruotare i piani α e β intorno alla retta r', detta s la retta per P perpendicolare al piano γ, risulterà che il piano α ruotando intorno alla retta r', passerà per s, quando diventerà $\alpha' = r' s$. Allora α' è perpendicolare a γ; ma anche il piano β ruota intorno alla retta r', restando β' perpendicolare ad α', dove β' è la nuova posizione.

Allora la simmetria $s_{r'}$ si può decomporre nel prodotto $s_{\alpha'} \circ s_{\beta'}$; pertanto si ha:

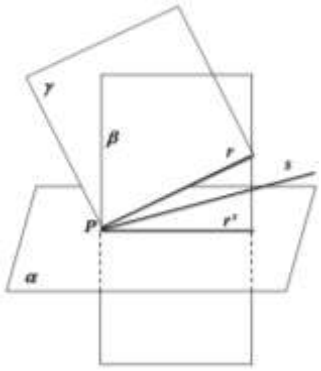
$$s_r \circ s_\alpha = s_\gamma \circ s_{r'} = s_\gamma \circ (s_{\alpha'} \circ s_{\beta'}) = s_\gamma \circ (s_{\beta'} \circ s_{\alpha'}) = (s_\gamma \circ s_{\beta'}) \circ s_{\alpha'} = \rho_\varphi \circ s_{\alpha'}$$

Il prodotto $\rho_\varphi \circ s_{\alpha'}$ è una antirotazione, in quanto prodotto di una simmetria planare per una rotazione intorno ad una retta perpendicolare al piano della simmetria planare.

c.v.d.

Teorema 6'

Il prodotto di una simmetria planare per una rotazione avente l'asse incidente il piano della simmetria planare è una antirotazione.



(Figura 35)

Dim.: sia α il piano della simmetria planare ed r l'asse della rotazione incidente il piano α in P; indichiamo con s_α la simmetria planare rispetto al piano α e ρ_φ la rotazione di asse la retta r .

Abbiamo visto che una rotazione di asse una retta r è il prodotto di due simmetrie planari con piani β e γ incidenti nella retta r e tali che l'angolo diedro che essi formano ha le sezioni normali di ampiezza uguale alla metà dell'am ìpiezza di rotazione; possiamo considerare uno di questi piani β perpendicolare ad α, e sia r' la retta di intersezione di α e β.

Indicata con $s_{r'}$ la simmetria assiale di asse la retta r', si ha:

$$\rho_\varphi \circ s_\alpha = (s_\gamma \circ s_\beta) \circ s_\alpha = s_\gamma \circ (s_\beta \circ s_\alpha) = s_\gamma \circ (s_\alpha \circ s_\beta) = s_\gamma \circ s_{r'}$$

Facendo ruotare i piani α e β intorno alla retta *r'*, detta *s* la retta per *P* perpendicolare al piano γ, risulterà che il piano α ruotando intorno alla retta *r'*, passerà per *s*, quando diventerà $\alpha' = r' s$. Allora α' è perpendicolare a γ; ma anche il piano β ruota intorno alla retta *r'*, restando β' perpendicolare ad α', dove β' è la nuova posizione.

Allora la simmetria $s_{r'}$ si può decomporre nel prodotto $s_{\alpha'} \circ s_{\beta'}$; pertanto si ha:

$$\rho_\varphi \circ s_\alpha = s_\gamma \circ s_{r'} = s_\gamma \circ (s_{\alpha'} \circ s_{\beta'}) = s_\gamma \circ (s_{\beta'} \circ s_{\alpha'}) = (s_\gamma \circ s_{\beta'}) \circ s_{\alpha'} = \rho_\varphi \circ s_{\alpha'}$$

Il prodotto $\rho_\varphi \circ s_{\alpha'}$ è una antirotazione, in quanto prodotto di una simmetria planare per una rotazione intorno ad una retta perpendicolare al piano della simmetria planare.

c.v.d.

Teorema 7

Il prodotto di tre simmetrie planari, se non è una antitraslazione oppure una antirotazione, è una simmetria planare.

Dim.: siano α, β, γ tre piani e s_α, s_β e s_γ le simmetrie planari rispetto a tali piani. Considerando il prodotto di queste tre simmetrie planari $s_\alpha \circ s_\beta \circ s_\gamma$ si verificano i seguenti casi:

1) Se i tre piani sono paralleli, allora dal prodotto si ottiene una simmetria planare.
2) Se i tre piani passano per una stessa retta, allora dal prodotto si ottiene una simmetria planare.
3) Se due dei tre piani si intersecano in una retta parallela al terzo piano, allora dal prodotto si ottiene una antitraslazione.
4) Se due dei tre piani si intersecano in una retta incidente il terzo piano, allora dal prodotto si ottiene una antirotazione.

c.v.d.

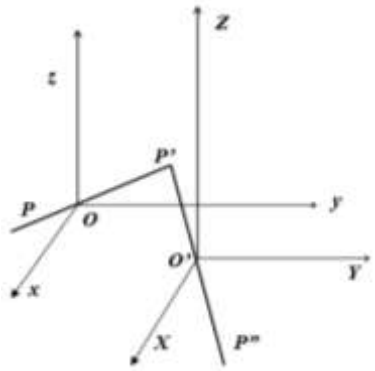
Vediamo ora altre composizioni di isometrie inverse.

Teorema 8:

Il prodotto di due simmetrie centrali è una traslazione che ha per modulo il vettore $\overrightarrow{OO'}$ *, dove O ed O' sono i due centri di simmetria.*

Dim.: Di tale proprietà si fornisce una giustificazione analitica.

Sia s_o la simmetria di centro *O* che porta il punto *P (x, y, z)* nel punto *P' (x', y', z')* **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**.



(Figura 36)

Se *Oxyz* è un riferimento cartesiano con origine in *O* e se *(h, k, l)* sono le coordinate del punto *O'* in tale riferimento, consideriamo il cambiamento di riferimento che porta *Oxyz* in *O'XYZ*, dove *X, Y, Z,* sono le parallele per *O'* agli assi *x, y, z,* le cui equazioni sono:

$$\begin{cases} X = x - h \\ Y = y - k \\ Z = z - l \end{cases} \qquad \begin{cases} x = X + h \\ y = Y + k \\ z = Z + l \end{cases} \tag{1}$$

Le equazioni della simmetria s_o che porta *P (x, y, z)* in *P'(x', y', z')* sono:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \\ z' = -z \end{cases}$$

Pertanto, il punto *P'* avrà nel nuovo riferimento di origine *O'* le seguenti coordinate:

$$\begin{cases} X = -x' - h \\ Y = -y' - k \\ Z = -z' - l \end{cases}$$

Di conseguenza, la simmetria assiale s_o, rispetto ad *O'* che porta *P' (X, Y, Z)* nel punto *P'' (X', Y', Z')* ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = -X \\ y' = -Y \\ z' = -Z \end{cases}$$

da cui, se *(x", y", z")* sono le coordinate di *P"* nel riferimento *Oxyz*, si ha:

$$\begin{cases} x" = X' + h \\ y" = Y' + k \\ z" = Z' + l \end{cases}$$

Combinando queste ultime due equazioni risulta:

$$\begin{cases} x" = -X + h \\ y" = -Y + k \\ z" = -Z + l \end{cases}$$

Pertanto, tenuto conto delle equazioni (1) si ottengono le equazioni:

$$\begin{cases} x" = x + 2h \\ y" = y + 2k \\ z" = z + 2l \end{cases}$$

che individuano la traslazione che ha per modulo il vettore *(2h, 2k, 2l).*

3 Conclusioni

L'Universo geometrico è tridimensionale, per cui le Trasformazioni che avvengono in esso sono generate nello spazio. La rappresentazione nel piano serve principalmente ad evidenziarne le caratteristiche.

La base dei metodi di rappresentazione è la Prospettiva (dal latino *perspectiva optica*) che è universalmente considerata anche il fondamento teorico dell'Arte pittorica (Casolaro, Paladino, 2012). La rappresentazione dei dettagli tecnici della figura avviene con i metodi della *Geometria descrittiva* (Loria, 1921). E' compito, invece, della *Geometria proiettiva* la rappresentazione mediante le *trasformazioni* che essa subisce con le operazioni di *proiezione* e *sezione* (Casolaro, 2003). In bibliografia abbiamo anche citato (Casolaro, Eugeni, 1996) un lavoro che evidenzia le interrelazioni, anche di carattere metrico, del fusionismo tra geometria piana e geometria dello spazio con particolare riferimento alle Trasformazioni che conservano la norma.

Riteniamo allora, che per un'analisi corretta dei fenomeni fisici che si manifestano nell'universo, sia essenziale la conoscenza delle reali Trasformazioni che in esso avvengono.

Purtroppo, anche nell'insegnamento ci si limita al solo studio delle Trasformazioni nel piano, sicuramente significativo e interessante anche dal punto di vista didattico, ma pensiamo che per una formazione completa non si può ignorare la conoscenza delle tematiche affrontate in questo lavoro.

Bibliografia

Casolaro, F. and Eugeni, F. (1996). "Trasformazioni geometriche che conservano la norma nelle algebra reali doppie". Ratio Matematica n. 1, 1996.

Casolaro, F. and Cirillo, L. (1996). "Le Trasformazioni omologiche. Atti Convegno Nazionale Mathesis". I fondamenti della matematica per la sua didattica. Verona, novembre 1996.

Casolaro, F. (2002). "Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo". Atti del Congresso Nazionale Mathesis "La Matematica fra tradizione e innovazione: un confronto europeo". Bergamo 2002.

Casolaro, F. (2003). "Le trasformazioni omologiche nella Storia, nell'Arte, nella Didattica". Atti del Convegno Internazionale "Matematica e Arte: un sorprendente binomio". Vasto, 10-12 aprile 2003, 129-148.

Casolaro, F. and Pisano, R. (2011). "An Historical Inquiry on Geometry in Relativity: Reflections on Early Relationship Geometry-Physics (Part One)". History Research, Vol. 1, Number 1, December 2011.

Casolaro, F. and Prosperi, R. (2011). "La Matematica per la Scuola Secondaria di secondo grado: un contributo per il docente di Matematica". Atti della "Scuola estiva Mathesis" 26-30 luglio 2011. Terni: Editore 2C Contact.

Casolaro, F. and Paladino L. (2012). "Evolution of the geometry through the Arts". 11th International Conference APLIMAT 2012 in the Faculty of Mechanical Engineering - Slovak University of Tecnology in Bratislava, febbraio 2012.

Casolaro, F. (2014). "L'evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola?". "Science&Philosophy Journal of Epistemology", Volume 2, Numero 1, 2014.

Cundari, C. (1992). "Disegno e Matematica per una didattica finalizzata alle nuove tecnologie". Progetto del M.P.I. e del Dipartimento di Progettazione e

Rilievo dell'Università "La Sapienza" di Roma, 11-15 dicembre 1990; 6-10 maggio 1991; 8-12 dicembre 1991.

Loria, G. (1921). Storia della Geometria Descrittiva dalle Origini sino ai giorni nostri. Milano: Ulrico Hoepli.

Morelli, A. (1989). Geometria per il biennio delle scuole medie superiori. Napoli: Edizione Loffredo.