

Learning the Concept of Number: a Psycho-Phenomenological Approach (L'apprendimento del concetto di numero: un approccio psico-fenomenologico)

Luca Nicotra*

Abstract

The concept of a cardinal natural number was mathematically defined for the first time by Friedrich Ludwig Gottlob Frege in 1884 as a single act of thought: *"the natural number belonging to the concept F is nothing other than the extension of the concept 'equally numerous' to F ."* The author revisits this definition in modern terms of the "quotient transition" of abstract algebra: *a natural number (cardinal) is a class of equipotent classes*. Furthermore, he shows how the quotient transition constitutes the mathematical modeling of the abstraction process, which can lead to two different types of definitions for abstraction: implicit (concept-class) and explicit (class-concept). The article highlights that Frege's definition of number belongs to this latter type, and cites, in support of its logical and operational validity, Bertrand Russell's objections to Edmund Husserl and Giuseppe Peano's refusal to identify the "abstract" concept of number with a class.

Unlike this definition, characterized, like all mathematics, by complete aseity, the learning of the concept of number arises from experience and is therefore penalized by its limitations and by its unfolding over time, in a prelogical dimension that appears to be fully in tune with Edmund Husserl's phenomenology. The author proposes a plausible psychological-phenomenological interpretation, using Antonio Aliotta's theory of the interference of associations and analogy. Finally, the author shows how by using these psychic processes, integrated with the principle of mathematical induction, it is possible to virtually expand the empirical

*Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU). Ingegnere e divulgatore scientifico. Presidente dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza". Direttore responsabile di «ArteScienza», di «ArteScienza_magazine», del «Bollettino di Filosofia delle Scienze Umane» e del «Periodico di Matematica»; accademico onorario dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati e dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane; luca.nicotra1949@gmail.com.

experience of number to cases that cannot be concretely experienced, allowing us to "acquire" the concept of number without having to experience all the possible real cases in which it is present.¹

Keywords: definition of natural number, definition by classes, learning the natural number, interference of associations, analogy.

Sunto

Il concetto di numero naturale cardinale è stato definito matematicamente per la prima volta da Friedrich Ludwig Gottlob Frege nel 1884 come un unico atto di pensiero: «*il numero naturale che spetta al concetto F non è altro che l'estensione del concetto "ugualmente numeroso" a F* ». L'autore rivisita tale definizione in termini moderni di "passaggio al quoziente" dell'algebra astratta: *un numero naturale (cardinale) è una classe di classi equipotenti*. Inoltre, mostra come il passaggio al quoziente costituisce la modellizzazione matematica del processo di astrazione, che può condurre a due diversi tipi di definizioni per astrazione: implicita (concetto-classe) ed esplicita (classe-concetto). Nell'articolo viene evidenziata l'appartenenza della definizione del numero di Frege a quest'ultimo tipo e sono riportate, a sostegno della sua validità logica e operativa, le obiezioni di Bertrand Russell al rifiuto di Edmund Husserl e Giuseppe Peano di identificare il concetto "astratto" di numero con una classe.

Diversamente da tale definizione, caratterizzata, come tutta la matematica, da una completa aseità, l'apprendimento del concetto di numero nasce dall'esperienza e quindi è penalizzato dai suoi limiti e dal suo svolgersi nel tempo, in una dimensione prelogica che appare in piena sintonia con la fenomenologia di Edmund Husserl. L'autore ne propone una plausibile interpretazione in chiave psicologica-fenomenologica, ricorrendo alla teoria dell'interferenza delle associazioni e dell'analogia di Antonio Aliotta. Infine, l'autore mostra come ricorrendo a tali processi psichici, integrati con il principio di induzione matematica, sia possibile ampliare virtualmente l'esperienza empirica del numero a casi non concretamente esperibili, consentendoci di "acquisire" il concetto di numero senza dovere esperire tutti i possibili casi reali in cui è presente.

Parole chiave: definizione di numero naturale, definizione per classi, apprendimento del numero naturale, interferenza delle associazioni, analogia.²

¹Received on May 6th, 2026. Accepted on August 15th, 2026. Published on September 1th, 2026. doi: 10.23756/sp.v14i2.1754. ISSN 2282-7757; eISSN 2282-7765. ©Luca Nicotra. This paper is published under the CC-BY licence agreement.

²Questo articolo è derivato da un intervento dell'Autore al Convegno "*Genesi e sviluppo della fenomenologia di Husserl - Matematica Fisica Psicologia*" tenutosi il 17 gennaio 2026 al Centro Italiano di Ricerche Fenomenologiche di Roma, organizzato dalla prof.ssa Angela Ales Bello.

1 Introduzione

Quando si parla di "numero", senza null'altro specificare, ci si riferisce in maniera sottintesa a quel tipo che è in testa alla grande famiglia dei numeri: i numeri naturali.³

La genesi del concetto di numero (sia pure nella sua forma più limitata) affonda le radici nella preistoria. La questione se essa sia un prodotto dell'esperienza o se, al contrario, l'esperienza ha semplicemente reso esplicito ciò che era già latente nella mente dell'uomo primitivo, è un affascinante problema filosofico ancora aperto.

Un grande matematico tedesco del secolo XIX, Leopold Kronecker (1823 - 1891), di origine ebraica e convertito alla fede cristiana, sostenne un provocatorio programma scientifico - in contrasto con i matematici del suo tempo e soprattutto con il grande Karl Weierstrass (1815-1897) - che pretendeva di ridurre tutti i risultati delle matematiche sotto la semplice forma di proprietà dei numeri naturali, programma di aritmetizzazione della matematica pura che fu successivamente sviluppato e compiuto da Giuseppe Peano (1858-1932).⁴ Questi mostrò come si possa dedurre la teoria dei numeri naturali da tre idee primitive (zero, numero⁵ e successore) e da cinque assiomi⁶ oltre che da quelli della logica pura. «Iddio creò i numeri interi,⁷ il resto è opera dell'uomo», diceva Kronecker. Numeri interi negativi, frazioni, numeri periodici, numeri irrazionali, reali, immaginari, complessi, algebrici, trascendenti, transfiniti erano per lui inesistenti, pure invenzioni dell'uomo per «cercare di far meglio di Dio». Insomma, con la sua focalizzazione sul concetto di numero naturale come origine di tutta la matematica tradizionale, Kronecker si poneva, sul piano filosofico, come un novello Pitagora dell'Ottocento.

Il concetto di numero è stato considerato a lungo un concetto primitivo, indefinibile, fino alla sua prima definizione da parte di Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925) nel 1884, che però rimase praticamente ignorata per diciassette anni,

³In linea con molti autori (Federigo Enriques, Aldo Ghizzetti, Francesco Severi, Giuseppe Sforza Dragoni, Leonida Tonelli) e con quanto posto in evidenza all'interno di questo articolo, per numeri naturali si intendono qui 1, 2, 3... mentre per numeri interi 0, 1, 2, 3...

⁴In realtà non tutte le branche della matematica sono derivabili dalla teoria dei numeri naturali, come osserva Bertrand Russell (1962, p. 51) rimandando alla parte VI dei suoi *Principi della matematica* (Russell, 1971).

⁵Per Peano quindi il numero era un concetto primitivo, indefinito.

⁶1) Zero è un numero, 2) Il successore di ogni numero è un numero, 3) Non esistono due numeri con lo stesso successore, 4) Zero non è il successore d'alcun numero, 5) Ogni proprietà di cui gode lo zero, e anche il successore di ciascun numero che gode di quella proprietà, appartiene a tutti i numeri (principio dell'induzione matematica).

⁷Kronecker fa riferimento alla serie 1, 2, 3, ... come numeri interi ovvero ai numeri naturali.

fino a quando la riscoprì Bertrand Russell (1872-1970) nel 1901:⁸

La domanda “che cosa è un numero?” è stata posta spesso, ma ha ricevuto una risposta corretta soltanto nei nostri tempi. La risposta fu data da Frege nel 1884, nei suoi *Die Grundlagen der Arithmetik*. Benché questo libro sia assai breve, non difficile e della massima importanza, non attirò quasi l’attenzione, e la definizione di numero che vi è contenuta rimase praticamente ignorata finché venne riscoperta dal sottoscritto nel 1901 (Russell, 1962, p. 29).

Così scriveva Bertrand Russell all’inizio del secondo capitolo della sua *Introduzione alla filosofia matematica*, scritta durante i sei mesi di carcere che dovette scontare nel 1918, a causa di un suo articolo pacifista.

Il concetto di numero naturale cardinale⁹ è stato definito matematicamente da Frege come un unico atto di pensiero: «*il numero naturale che spetta al concetto F non è altro che l’estensione del concetto “ugualmente numeroso” a F*», ovvero in termini moderni di algebra astratta: un numero naturale (cardinale) è una classe di classi equinumerose o simili o equipotenti.

Diversamente, invece, si rivela il suo processo di apprendimento, che nasce dall’esperienza e quindi è penalizzato dai suoi limiti e dal suo svolgersi nel tempo, in una dimensione prelogica che appare in piena sintonia con la fenomenologia di Edmund Husserl (1859-1938) ed è interpretabile, in chiave psicologica, con la teoria dell’interferenza delle associazioni e dell’analogia di Antonio Aliotta (1881–1964).

L’articolo può essere diviso concettualmente in tre parti.

Nella prima parte viene riproposta la definizione originaria di numero data da Frege e analizzata in termini moderni di “passaggio al quoziente” dell’algebra astratta.

Nella seconda parte, invece, viene trattato il processo di apprendimento del concetto di numero naturale nell’uomo, come una raffinatissima astrazione di una proprietà generale da una moltitudine di casi concreti “diversi”, ma “uguali” nel possedere tutti la stessa proprietà.

Tale processo di astrazione, che nel bambino avviene in maniera naturale, è identificato dall’autore con lo stesso processo di astrazione del passaggio al quoziente che è presente nella definizione di numero di Frege. Secondo l’autore esso

⁸È curioso notare che altre importanti definizioni (oggi ben note ai matematici) relative alla logica delle relazioni furono espresse e pubblicate da Frege nella sua opera *Begriffsschrift* del 1879, ma ignorate per ben vent’anni fin quando, ancora una volta, le riscoprì Bertrand Russell. Per esempio le definizioni di proprietà N-ereditaria, R-ereditaria, termine R-antenato, R-posterità e la teoria generale dell’induzione matematica (Russell, 1962, p. 51).

⁹Nel seguito: “numero”.

è realizzato grazie ai processi psichici, opposti e complementari, di interferenza delle associazioni e analogia, già trattati da Aliotta (1930). In tal modo, la definizione fregeana di numero, formalizzata in termini moderni di algebra astratta, non appare semplicemente come una “assunzione matematica” per definire il concetto di numero, bensì la traduzione in termini matematici di un processo reale che avviene naturalmente nell'uomo in una dimensione prelogica, tipica della fenomenologia husserliana.

L'analisi accurata del processo di apprendimento del concetto di numero si rivela in piena sintonia con la fenomenologia di Edmund Husserl (1859-1938) che assegna primaria rilevanza, in ambito gnoseologico, alla dimensione prelogica e all'intuizione eidetica, ovvero alla capacità della coscienza di cogliere direttamente l'essenza (o *eidos*) di un fenomeno, andando oltre l'esperienza sensibile del singolo oggetto. C'è una differenza fra Frege e Husserl, che nella *Philosophie der Arithmetik* (Husserl, 1891) (*Filosofia dell'aritmetica*) sostiene che il numero si fonda sulla operazione psicologica del “legame collettivo” che precede le operazioni logiche. In seguito Husserl supera tale posizione parlando, però di operazioni “prelogiche” che precedono quella che per lui sarà la sorgente della conoscenza, cioè l'intuizione eidetica (Ales Bello, 2025).

Nella terza parte, infine, si rileva che l'esperienza sensoriale da sola può essere la sorgente dell'acquisizione del concetto di numero, così come definito da Frege, soltanto nei casi caratterizzati da piccola numerosità (da 1 a 6 elementi), sostanzialmente in accordo con le risultanze del *Subitizing*. Viene mostrato che nella stragrande maggioranza dei casi, non esperibili per varie ragioni, l'apprendimento è reso possibile ricorrendo ancora agli stessi processi psichici dell'interferenza delle associazioni e dell'analogia, integrati con il principio di induzione matematica. In tal modo è possibile ampliare l'esperienza empirica del numero ai casi di numerosità grande così come a quelli non concretamente attuati, consentendoci di “acquisire” il concetto di numero senza dovere esperire tutti i possibili casi reali in cui è presente.

2 La definizione fregeana di numero in termini di “passaggio al quoziente” dell'algebra astratta

Nel primo sottoparagrafo di questo paragrafo vengono fornite le conoscenze di algebra astratta relative al passaggio al quoziente, che costituisce la modellizzazione matematica esatta del ragionamento formulato da Frege per la sua definizione di numero.

Nel secondo sottoparagrafo viene riportata la definizione originale di numero data da Frege, interpretandone i passaggi con i concetti di algebra astratta attinenti

al passaggio al quoziente.

Nel terzo sottoparagrafo viene riformulata interamente la definizione di numero naturale di Frege in termini moderni di passaggio al quoziente.

Nel quarto sottoparagrafo, infine, vengono riportate le obiezioni mosse da Bertrand Russell alle critiche di Husserl e Peano verso la definizione fregeana di numero come classe di classi equinumerose.

2.1 Partizione di un insieme. Insieme quoziente

Per una trattazione più completa, con vari esempi di definizioni per classi basate sul passaggio al quoziente, rimando a (Nicotra, 2025).

Definizione 2.1. *Dato un insieme A , una partizione F di A è una famiglia di sottoinsiemi propri A_i di A , tale che:*

1. *nessuno dei sottoinsiemi A_i di A è vuoto: $\forall i \Rightarrow A_i \neq \emptyset$;*
2. *due sottoinsiemi diversi qualunque di A sono disgiunti: $(\forall i \neq h, (i, h) \in I) \Rightarrow A_i \cap A_h = \emptyset$;*
3. *A è l'unione di tutti i suoi sottoinsiemi A_i : $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots \cup A_n$*

In termini equivalenti, più espressivi:

Definizione 2.2. *Più sottoinsiemi propri non vuoti $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ di un insieme A costituiscono una partizione F di A se ogni elemento di A appartiene a uno e uno solo di questi sottoinsiemi.*

Di conseguenza, un qualunque elemento a di A individua una sola classe A_i ¹⁰ della partizione F di A (il sottoinsieme A_i di A cui appartiene) e viene perciò chiamato rappresentante della classe A_i , la quale si indica con $[a]$. Le classi A_i si dicono classi di equivalenza della partizione F .

Se a e a' appartengono alla medesima classe A_i della partizione F , si avrà: $[a] = [a'] = A_i$. I due elementi $a, a' \in A$ si dicono equivalenti nella partizione F e si scrive: $a \varepsilon a'$ (il simbolo ε indica una generica relazione di equivalenza).

È evidente, ma è anche facilmente dimostrabile, che ogni elemento di A_i può essere scelto come rappresentante di A_i (Lombardo Radice, 1965, p. 26).¹¹

¹⁰Qui il termine “classe” è usato come sinonimo di insieme, aggregato, collezione. A volte, invece, da altri esso è usato con tale significato soltanto nel caso qui trattato delle classi di equivalenza, mentre al di fuori di tale caso esso è distinto dal termine “insieme”. Per approfondimenti sulle differenze fra “classe” e “insieme” rimando a (Lombardo Radice, 1965, p. 55-59).

¹¹Se $x \in [a] \Rightarrow [x] = [a]$. Essendo per ipotesi $x \in [a]$, allora $a \varepsilon x$. Sia $y \in [x]$ e quindi $x \varepsilon y$. Per la proprietà transitiva di ε è $a \varepsilon y$, cioè $y \in [a]$. Ciò significa $[x] \subseteq [a]$. Da $a \varepsilon x \Rightarrow x \varepsilon a$ cioè $a \in [x]$; donde $[a] \subseteq [x]$, ma essendo $[x] \subseteq [a]$ si conclude $[a] = [x]$.

Pertanto la classe di equivalenza A_i è un sottoinsieme completo di A , nel senso che tutti gli elementi di A_i sono tra loro equivalenti e non esistono elementi equivalenti a elementi di A_i in $A - A_i$, cioè al di fuori di A_i . Dunque possiamo scrivere: $A_i = [a_1] = [a_2] = [a_3] = \dots$

La proprietà che permette di “associare” fra loro gli elementi di un insieme A in modo da formare una partizione F di A si dice relazione di equivalenza, in quanto essa è valida soltanto fra gli elementi di A che appartengono a una medesima classe A_i della partizione F , che sono quindi “equivalenti”, nel duplice senso che sono tutti ugualmente in grado di identificare la stessa classe A_i ¹² e sono “uguali rispetto alla relazione che condividono nella classe cui appartengono”.

Le relazioni di equivalenza generalizzano e precisano il concetto intuitivo di uguaglianza relativa a, uguaglianza rispetto a ..., uguaglianza a meno di ... L'uguaglianza è quindi un caso particolare: una relazione di equivalenza rispetto all'identità.

Poiché dalla relazione di equivalenza fra due elementi dell'insieme A discende la relazione di uguaglianza fra le classi cui appartengono (e viceversa):

$$(a \in a') \iff ([a] = [a'])$$

una relazione di equivalenza gode delle stesse proprietà formali della relazione di uguaglianza:

1. riflessiva: $a \in a$
2. simmetrica: $(a \in a') \Rightarrow (a' \in a)$
3. transitiva: $(a \in a'), (a' \in a'') \Rightarrow (a \in a'')$

Definizione 2.3. *Si conviene di definire relazione di equivalenza ogni relazione che gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.*¹³

Dunque ogni relazione che applicata a un insieme A ne determina una partizione è una relazione di equivalenza. Ovvero a ogni partizione è associata una relazione di equivalenza.

Viceversa si dimostra facilmente che ogni relazione di equivalenza $\in$ fra gli elementi a di un insieme A determina una partizione F di A (Villa, 1963, pp.

¹²Quando si considerano più relazioni di equivalenza si usa la simbologia $[a]_{\in}$ per indicare che l'elemento a individua una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equivalenza $\in$. Si usano anche le espressioni: *classe di equivalenza di a modulo $\in$* o *classe resto modulo $\in$* (Lombardo Radice, 1965, pp. 26, 27).

¹³Si può facilmente dimostrare che le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva sono indipendenti, con esempi di relazioni che soddisfano due di esse ma non la terza (Lombardo Radice, 1965, p. 25).

20, 21). Ovvero ad ogni relazione di equivalenza è associata una partizione. In conclusione: esiste una corrispondenza biunivoca tra le partizioni di un insieme A e le relazioni di equivalenza ϵ definite in A (Lombardo Radice, 1965, p. 27).

Possiamo pertanto così concludere:

Una relazione di equivalenza ϵ associata a un insieme A determina la distribuzione degli elementi di A in classi di equivalenza (sottoinsiemi di A) che costituiscono una partizione F di A .¹⁴ Queste classi si possono interpretare come elementi di un nuovo insieme, detto *insieme quoziente* di A rispetto alla relazione di equivalenza ϵ e si scrive: A/ϵ , dove il numeratore indica l'insieme dato A e il denominatore la relazione di equivalenza ϵ . Da quanto detto è evidente che l'insieme quoziente A/ϵ non è altro che la partizione F di A rispetto alla relazione di equivalenza ϵ .

L'insieme quoziente, creato da una partizione di un insieme A associata a una relazione di equivalenza, è pertanto un caso particolare di insieme delle parti $P(A)$ o ricoprimento di A : i suoi sottoinsiemi sono tutti fra loro disgiunti, ovvero non esistono sovrapposizioni parziali delle parti di A come nel caso generale di ricoprimento di A .

L'operazione che consente di passare dall'insieme A all'insieme quoziente A/ϵ è detta *Passaggio al quoziente* o *Principio di contrazione*.

I diagrammi di Venn rendono in maniera immediata il significato della partizione di un insieme: in figura 1 è rappresentata la partizione F , rispetto a una relazione di equivalenza ϵ , dell'insieme A nei sottoinsiemi A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , che diventano gli elementi di F ovvero dell'insieme quoziente A/ϵ .

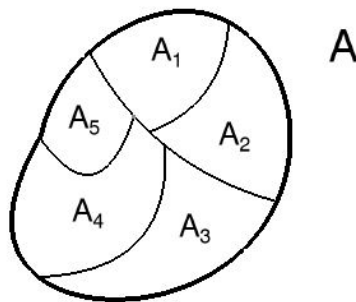


Figura 1: Diagramma di Venn della partizione F di un insieme A .

Il passaggio al quoziente costituisce un modello matematico rigoroso del processo di formazione di concetti astratti a partire da oggetti, ovvero dell'ordinario processo di astrazione, *identificando una proprietà generale in una moltitudine di*

¹⁴La partizione di A non può contenere se stessa in quanto i sottoinsiemi di A che la costituiscono sono per definizione sottoinsiemi propri (cfr. inizio paragrafo).

casi concreti "diversi", ma "uguali" nel possedere tutti quella proprietà: la relazione di equivalenza dell'insieme quoziente. Gli elementi dell'originario insieme universo A possono essere riguardati come oggetti-dati, mentre gli elementi dell'insieme quoziente A/ϵ , costituiti dalle classi di equivalenza, possono essere riguardati come "astrazioni concettuali", classi di oggetti pensate come unico oggetto, in virtù della relazione di equivalenza.

Questo approccio al processo di astrazione è in perfetta sintonia con la riduzione dell'astratto al multi-concreto di Bruno de Finetti (1974). L'astratto, così concepito, non è più una misteriosa proprietà, quasi metafisica, regalmente distaccata dal concreto da cui, pur derivandone, sembra prendere superbamente le distanze, bensì rimane ad esso intimamente legato pur differenziandosene: è l'astratto che condensa in sé una moltitudine di casi concreti, tutti comprendendoli. Senza il riferimento al concreto (o meglio al multi-concreto, ovvero al concreto nelle sue molteplici forme e nelle sue diverse relazioni operative) l'astratto è vuoto di significato.

2.1.1 Casi estremi di partizioni

Per completezza di trattazione del concetto di partizione, è forse utile citare due casi estremi, fra i quali si collocano le partizioni vere e proprie trattate precedentemente, caratterizzate da numero di parti maggiore di 1 e da numero di elementi maggiore di 1 almeno in una delle parti (Frajese, 1968, pp. 335-336).

1° caso - Relazione di identità - La relazione di equivalenza ϵ è la relazione di identità *id*: a ciascun elemento dell'insieme A corrisponde l'elemento stesso. In tal caso i sottoinsiemi di A che costituiscono la partizione $F(A)$ (ovvero gli elementi dell'insieme quoziente A/id) sono formati ciascuno da un solo elemento di A : si dice che si ha la *polverizzazione* dell'insieme A nei suoi elementi.

2° caso - Relazione universale - La relazione di equivalenza ϵ è la relazione universale U : a un qualunque elemento dell'insieme A corrispondono tutti gli elementi di A . In tal caso la partizione di A è costituita da un solo sottoinsieme di A (coincidente con A stesso), che pertanto è un sottoinsieme improprio di A . Questo caso non può verificarsi nelle partizioni vere e proprie testé considerate perché, nella costruzione della partizione $F(A)$, non rispetterebbe la condizione di considerare sottoinsiemi propri di A .

2.2 La definizione originale di numero naturale di Frege

Mostreremo qui come la modellizzazione matematica del processo di astrazione tramite il passaggio al quoziente, pur non essendo nota nei termini moderni

dell'algebra astratta, è stata sostanzialmente utilizzata nel 1884 da Gottlob Frege, per la definizione di numero, nei suoi *Die Grundlagen der Arithmetik (I fondamenti dell'Aritmetica)*. Nove anni più tardi Frege ne diede una versione più completa e precisa nella sua opera *Grundgesetze der Arithmetik* vol. 1 (*Le leggi fondamentali dell'Aritmetica* vol 1) del 1893.

L'insieme universo U considerato da Frege ha come elementi le classi di oggetti che costituiscono i suoi possibili sottoinsiemi U_i .¹⁵

Frege considera la corrispondenza biunivoca o biiezione fra i sottoinsiemi U_i : ad ogni elemento di uno qualunque di essi corrisponde uno e un solo elemento di un altro sottoinsieme e viceversa.

È evidente che la corrispondenza biunivoca fra due insiemi garantisce la medesima pluralità di oggetti: *gli elementi dell'uno sono tanti quanti quelli dell'altro insieme*.¹⁶ Frege stesso usa il termine "equinumerosi", concetto che sottintende sottilmente il concetto di numero, senza però usarlo in quanto non ancora definito.

Due classi fra le quali esiste una corrispondenza biunivoca sono dette *simili* o *equipotenti* o *equinumerose*: la loro corrispondenza biunivoca è detta *relazione di similarità* (o di *equipotenza* o di *equinumerosità*) e si indica con $\sim$.

La similarità $\sim$ fra classi è una relazione di equivalenza, godendo delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Pertanto, applicata all'universo U delle classi di oggetti, consente di ottenere una sua partizione in classi di equivalenza U_i

¹⁵La definizione di Frege ammetteva che si potessero creare classi di classi senza alcuna limitazione, nel senso che non veniva specificata la natura, semplice o complessa, degli elementi della classe. Senza nessuna specificazione in tal senso, la definizione di Frege rischiava di essere invalidata dall'antinomia che Russell scoprì nel 1902 proprio dopo avere riscoperto la definizione di numero di Frege. L'antinomia riguarda l'esistenza della *classe di tutte le classi che non contengono se stesse* (Russell, 1971, cap .X "La Contraddizione" pp. 125-132). Sia C tale classe. 1) Se C è elemento di se stessa, allora deve essere una delle classi che compongono C e quindi non deve essere elemento di se stessa. 2) Se C non è elemento di se stessa, allora per definizione è una delle classi di C e quindi deve essere elemento di se stessa. Siamo quindi di fronte a un'antinomia. La soluzione della contraddizione che si sarebbe presentata nella definizione di numero come classe di classi equipotenti venne data da Russell stesso con la sua "Teoria dei tipi", enunciata nei *Principia Mathematica* e anche nei *Principi della Matematica* (Russell, 1971, Appendice B "La Teoria dei tipi", pp. 559.565) introducendo tre livelli: oggetti semplici (singoli individui), classi (insiemi di individui), classi di classi ((insiemi di insiemi di individui). Per evitare l'antinomia di Russell, basta specificare nella definizione di numero di Frege che si considerano soltanto classi che contengono elementi di livello immediatamente inferiore. Nelle definizioni di numero cardinale normalmente riportate in letteratura, non viene preso in considerazione l'antinomia di Russell, proprio perché secondo la "Teoria dei tipi" essa è risolta per le classi prese in considerazione nella definizione di Frege, mentre invece riguarda piuttosto la logica delle proposizioni (caso tipico: *questa asserzione è falsa*) (Stabler, 1970, p.339).

¹⁶Ce ne convinciamo facilmente immaginando di materializzare la corrispondenza biunivoca fra due insiemi A, B collegando con un filo ogni elemento di A con un elemento di B senza mai utilizzare lo stesso filo: le coppie di elementi a, b collegati risultano tante quanti i fili utilizzati per collegarli.

L'apprendimento del concetto di numero: un approccio psico-fenomenologico

costituite da classi simili. Otteniamo, in tal modo, una classe che contiene classi con un solo elemento, una classe che contiene tutte le coppie, una classe che contiene tutte le terne, una classe che contiene tutti i quartetti, una classe che contiene tutti i quintetti, e così via.

Siamo quindi giunti all'insieme quoziente dell'universo U rispetto alla relazione di similarità fra classi: $U/\sim$.

A questo punto siamo a un bivio: scegliere se definire il numero per astrazione per classi, in maniera implicita o in maniera esplicita.

Chiariamo con un esempio.

In un primo caso *possiamo definire il numero due come quell'ente che gode della proprietà condivisa da tutte le coppie*, indipendentemente dalla natura di esse. In tal caso si ottiene un *concetto-classe*, ovvero un concetto definito implicitamente tramite la proprietà comune agli elementi di una classe, ovvero tramite la relazione di similarità. Otteniamo dunque una *definizione per astrazione implicita per classi*.

In un secondo caso *possiamo definire il numero due identificandolo con la stessa classe di tutte le coppie*. In tal caso si ottiene una *classe-concetto*, perché il concetto si identifica con una classe. Otteniamo dunque una *definizione per astrazione esplicita per classi*.

Dunque il numero 2 è la classe di tutte le coppie, mentre una coppia è soltanto un esempio del numero 2, così come il numero 2 è soltanto un esempio del concetto di numero.

Nei *Grundgesetze der Arithmetik* vol. 1 così si esprime Frege a proposito della definizione di numero (naturale). Dapprima definisce cosa intende per relazione di equinumerosità:

Nelle mie "*Grundlagen der Arithmetik*" l'ho fondata sulla relazione che ho chiamata equinumerosità. Nel paragrafo 72 delle mie "*Grundlagen*" la definisco così: «L'espressione "il concetto F è equinumeroso al concetto G " abbia lo stesso significato dell'espressione "esiste una relazione φ che fa corrispondere uno-a-uno gli oggetti che cadono sotto il concetto F agli oggetti che cadono sotto il concetto G "»

[...] Orbene, che cosa vuol dire che la relazione φ fa corrispondere gli oggetti che cadono sotto il concetto F agli oggetti che cadono sotto il concetto G ? Vuol dire (par. 71 delle *Grundlagen*) che ogni oggetto che cade sotto F sta nella relazione φ con un oggetto che cade sotto G o, più correttamente, che i due enunciati " a cade sotto F " e " a sta nella relazione φ con nessun oggetto che cade sotto G " non pos-

sono valere contemporaneamente per nessun a ¹⁷ (Frege, 1995, pp. 114,115).

Frege chiama semplicemente "concetto" la classe-concetto ed equinumerosità la relazione di similarità fra classi e infine conclude:

... il numero naturale che spetta al concetto F non è altro che l'estensione del concetto "ugualmente numeroso" a F .

Per «estensione del concetto "ugualmente numeroso" a F », Frege intendeva ciò che nell'algebra astratta moderna è la classe delle classi simili o equipotenti o equinumerose. Dunque, la sua definizione originale di numero, in termini moderni di algebra astratta, diventa:

Definizione 2.4. *Un numero naturale (cardinale) è una classe di classi simili o equipotenti o equinumerose.*

L'uso da parte di Frege del termine "estensione" può generare qualche increscioso equivoco, quando riferito ai due diversi modi in cui si può definire un insieme. Forse vale la pena spendere qualche parola di chiarimento.

L'equipotenza (o equinumerosità come la chiama Frege) fra classi utilizzata nella definizione di Frege è una proprietà caratteristica che permette di definire in maniera *intensiva* una classe, in quanto consente di scegliere come suoi elementi tutti e soltanto gli oggetti che godono di essa: le classi simili fra loro. Tale definizione è quindi molto diversa da una definizione *estensiva*, che invece consiste nel costruire un insieme indicando esplicitamente tutti i suoi elementi (per esempio l'insieme $A = \{4, 9, 47, 126\}$ oppure $B = \{Roma, Torino, Catania\}$). La critica di Husserl a Frege basata sulla definizione di numero come estensione appare quindi infondata, se al termine estensione viene riferito questo significato. Se invece il suo significato è quello di "classe", come era nelle intenzioni di Frege, la critica ha un senso ma ha ricevuto una valida smentita da parte di Russell, come riportato in 2.4.

In definitiva, l'identificazione dell'insieme di tutti gli insiemi simili fra loro con il concetto astratto di numero cardinale conferma l'idea di Bruno de Finetti della riduzione dell'astratto al multi concreto:

È futile metafisicheria chiedersi ad esempio 'in che cosa consista' il 'concetto di numero', o 'del numero 2' considerato come 'entità' a sé. Allo stesso modo (salvo un po' d'esagerazione) che le lettere 'd, u, e' non hanno un significato di per sé ma lo assumono usandole per

¹⁷In termini moderni: ad ogni elemento della classe F corrisponde un solo elemento della classe G e viceversa.

formare la parola 'due', così anche il 'due', o 2, non ha neppur esso veramente un significato compiuto così da solo, ma lo ha in quanto è un termine utile per esprimere concetti un po' più concreti, come 2 cani, 2 metri, 2 viaggi; ma anche tali espressioni sono significative solo se ed in quanto possono entrare in proposizioni di cui si sappia operativamente distinguere cosa s'intenda dicendole vere o false (p. es. per concludere se 'questo tavolo è lungo meno di 2 metri' è vera o falsa). Così $2+3=5$ è un modo sintetico e di per sé vuoto di esprimere il fatto che, in condizioni da precisare operativamente come sopra, ciò vale per cani, metri, viaggi (de Finetti, 1966, p.10361).

2.3 La definizione di numero naturale con l'algebra astratta

Possiamo interamente riformulare la definizione di numero naturale (cardinale) di Frege in termini di algebra astratta. Per universo U , come sottinteso sia da Frege sia da Husserl sia da Russell, si intende l'insieme di tutti i possibili "oggetti" materiali e immateriali considerati come individui semplici nella "Teoria dei tipi" di Russell. Georg Cantor (1845-1918) nella sua celebre opera del 1895 *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (Contribuzione a una fondazione della teoria transfinita degli insiemi) così definisce cosa si debba intendere per insieme e suoi elementi:

Per "insieme" intendiamo ogni riunione, M , in un tutto, di determinati e ben distinti oggetti m della nostra intuizione e del nostro pensiero (i quali vengono chiamati gli "elementi" di M) (Meshkowsky, 1963, p. 58).

Ci atteniamo a tale definizione di tipologia di elementi dell'universo U considerato, aggiungendo le precisazioni poste nella nota di inizio 2.2, per superare l'antinomia di Russell.

Due insiemi A, B non vuoti si dicono equipotenti o simili o equinumerosi se fra essi esiste una corrispondenza biunivoca: $f : A \longleftrightarrow B$. Denotando con $\sim$ la relazione di equipotenza (o similarità o equinumerosità), per indicare che A e B sono simili si scrive: $A \sim B$.

Poiché gli elementi di A possono essere posti in corrispondenza biunivoca con se stessi si ha: $A \sim A$ (proprietà riflessiva).

Una corrispondenza biunivoca f è dotata di reciproca f^{-1} , pertanto possiamo scrivere: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (proprietà simmetrica).

Infine il prodotto operatorio g o f di due corrispondenze biunivoche g, f è ancora una corrispondenza biunivoca e quindi: $(A \sim B, B \sim C) \Rightarrow A \sim C$ (proprietà transitiva).

Dunque la relazione di equipotenza fra insiemi è una relazione di equivalenza, godendo delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva. Allora, applicando la relazione di equipotenza agli insiemi o classi $A, B, C, D, E, \dots$ di un certo ambiente o universo U , si ottiene una partizione di U in classi di equivalenza, ciascuna delle quali è costituita da tutte le classi equipotenti a una data classe di U . Ciascuna di queste classi di equivalenza è un numero naturale (cardinale).

Possiamo dunque concludere:

Definizione 2.5. *Un numero naturale (cardinale) è una classe di equivalenza dell'insieme quoziente $U / \sim$ creato dalla relazione di equipotenza $\sim$ fra le classi dell'universo U .*

Oppure più semplicemente:

Definizione 2.6. *Un numero naturale (cardinale) è una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equipotenza fra le classi dell'universo U .*

Più sinteticamente ancora:

Definizione 2.7. *Un numero naturale (cardinale) è la classe di tutte le classi fra loro equipotenti.*

Dunque: una classe di U individua un numero che è il numero della classe. Questa definizione può sembrare circolare, ma non lo è, perché per numero di una classe, da quanto detto, si intende la classe di tutte le classi ad essa equipotenti. Per esempio, il numero di una coppia è la classe di tutte le classi ad essa equipotenti, ovvero il numero 2 è la classe di tutte le coppie. Una singola coppia è un esempio o rappresentante del numero 2, ma non è un esempio di numero; un esempio di numero è il numero 2 ovvero la classe di tutte le coppie.

L'insieme quoziente $U / \sim$ è l'insieme di tutti i numeri naturali (cardinali).

Rispetto ad altre definizioni per classi, nel caso del numero naturale (cardinale), gli elementi di ciascuna classe di equivalenza sono essi stessi già delle classi e non singoli individui.

2.4 Critica di Russell delle obiezioni di Husserl e Peano alla definizione fregeana di numero

Husserl non accettava la definizione di numero data da Frege nel 1884 (Ales Bello, 2025, pp. 27 e seg.), per lo stesso motivo di Giuseppe Peano (1858-1932): il rifiuto di identificare il concetto “astratto” di numero con un insieme o classe, ovvero rifiutava l'idea di una “estensione”, per usare lo stesso termine di Frege.

Bertrand Russell, che aveva pienamente condiviso la definizione fregeana di numero dopo la sua riscoperta nel 1901, rispose con la sua consueta acutezza di

logico alle obiezioni di Peano, ignorando però Husserl (Russell, 1971, [1903] p. 197).¹⁸ Ciò è strano, in quanto Russell, pur divergendo da Husserl nella sua concezione di una filosofia analitica, stimava il filosofo tedesco. Probabilmente, Russell riteneva superfluo citare Husserl, in quanto lo considerava già sconfitto dalla dura polemica che Frege stesso aveva ingaggiato contro di lui. Nel 1894, nella celebre recensione della *Philosophie der Arithmetik* di Husserl, Frege stroncò la sua impostazione psicologista. Pertanto, quando Russell, nell'Appendice A dei *Principi della matematica*, analizza i *Grundgesetze der Arithmetik* di Frege, prende in considerazione soltanto l'impostazione logistica, riguardo la definizione di numero, che condivideva pienamente con Frege e che era uscita vincitrice da quel confronto con Husserl. Qualche cenno di stima di Russell verso Husserl sembra ci sia stato dopo la pubblicazione dell'opera *Logische Untersuchungen* (*Ricerche Logiche*) apparsa nel 1900-1901 in due volumi, con la quale Husserl si era allontanato dall'impostazione psicologista, per affermare la sua nuova impostazione fenomenologica. Russell scrisse a Husserl il 19 aprile 1920 per comunicargli di avere portato con sé una copia delle *Ricerche Logiche*, per leggerle durante il suo periodo di detenzione nel carcere di Brixton (nel 1918) e di avere l'intenzione di recensire l'opera per la rivista *Mind*. Nel 1928 Russell, nel quinto capitolo, "Philosophy in the Twentieth Century", dei suoi *Sceptical Essays*, elogiò le *Ricerche Logiche* per l'impatto nel panorama filosofico dell'epoca, in particolare nel quadro della rivolta contro l'idealismo tedesco, citando Husserl assieme a Frege e Meinong come figura chiave per l'oggettività della logica:

But with the year 1900 a revolt against German idealism began, not from a pragmatist point of view, but from a severely technical standpoint. In Germany, apart from the admirable works of Frege (which begin in 1879, but were not read until recent years), Husserl's *Logische Untersuchungen*, a monumental work published in 1900, soon began to exert a great effect. Meinong's *Ueber Annahmen* (1902) and *Gegenstandstheorie und Psychologie* (1904) were influential in the same direction (Russell, 1928, p.69).

Non vi è tuttavia alcuna prova testuale che Russell si sia mai occupato a fondo della fenomenologia husserliana (Wishon, Linsky, 2015, Cap. 8).

Bertrand Russell, invece, cita Giuseppe Peano, da lui considerato «il grande maestro dell'arte del ragionamento formale fra gli uomini dei nostri giorni», rispondendo con grande rispetto alle sue obiezioni contro l'identificazione del numero con una classe:

¹⁸Il nome di Husserl non compare né nel testo principale dei *Principi della matematica*, né nei capitoli XI e XIII dedicati alla definizione fregeana di numero, né nell'Appendice A: "Teorie aritmetiche e logiche di Frege".

Così il Peano (Formulario 1901, par. 32) osserva che “non possiamo identificare il numero di (una classe) a con la classe di classi in questione (cioè la classe delle classi simili ad a), questi oggetti avendo proprietà diverse”. [...] È probabile che gli sia parso evidente in modo immediato che un numero non è una classe di classi. È tuttavia possibile dire qualcosa per mitigare l'impressione paradossale che desta questo approccio. In primo luogo le parole come coppia o terna denotano chiaramente una classe di classi. Pertanto ciò che dobbiamo dire è che ‘due uomini’ significa ‘prodotto logico di una classe di uomini e di una coppia’ e ‘ci sono due uomini’ significa ‘c’è una classe di uomini che è anche una coppia’. In secondo luogo, quando ricordiamo che un concetto-classe non è esso stesso un insieme, ma una proprietà con la quale è possibile definire un insieme, noi vediamo che, se definiamo il numero come il concetto-classe, non la classe, un numero si definisce effettivamente come una proprietà comune di una serie di classi simili e di nient'altro. [...] Esiste tuttavia una difficoltà filosofica sia in questo modo di vedere che generalmente nella connessione tra classi e predicati. Può darsi che esistano molti predicati comuni ad un certo insieme di oggetti e non ad altri; in questo caso questi predicati sono tutti considerati simili dalla Logica Simbolica, ed ognuno di essi si dice uguale ad ogni altro. [...] Il punto è che quel che si definisce è la medesima cosa sia che si usi il predicato “simile ad u ” sia “simile a v ”, purché u sia simile a v . Questo mostra che ciò che viene definito non è il concetto-classe o il predicato definente, ma la classe stessa i cui termini sono le varie classi simili a u o a v . Sono queste classi, perciò, e non i predicati del tipo “simile ad u ”, che devono essere presi come membri costitutivi. Dunque, per riassumere: matematicamente un numero non è null'altro che una classe di classi simili; questa definizione permette di dedurre tutte le proprietà normali dei numeri, sia finiti che infiniti, ed è la sola (per quel che io ne sappia) possibile che si possa formulare nei termini dei concetti fondamentali della logica generale. (Russell, 1971, pp. 195-6).

La sostituzione, accettata dalla matematica, di una proprietà comune a più classi (che sia però una relazione di equivalenza) con l'insieme di tali classi stesse generando così una classe-concetto, può generare un certo scetticismo e sembrare paradossale. Bertrand Russell così conclude le sue osservazioni sul rifiuto di Peano di considerare un numero una classe di classi simili:

Ogni volta che la matematica deriva una proprietà comune da una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva, tutti gli scopi matematici

della proprietà supposta vengono pienamente raggiunti sostituendo ad essa la classe dei termini che hanno la relazione data con un dato termine; e questo è precisamente il caso presentato dai numeri cardinali. Per il futuro, pertanto, mi atterrò alla suesposta definizione, essendo questa, ad un tempo, precisa e adeguata a tutti gli usi matematici. (Russell, 1971, p.197).

La questione, però, è stata analizzata e affrontata da Russell in termini più generali rispetto al caso specifico della definizione del numero, ovvero per qualunque definizione per classi. A tale scopo, come già osservato precedentemente, il passaggio al quoziente può essere utilizzato per ottenere definizioni per astrazione di due tipi, ma entrambe per classi: implicite ed esplicite.

Nelle *definizioni implicite per classi* l'ente viene definito come quell'ente "astratto" che gode della proprietà comune agli elementi di una classe di equivalenza (relazione di equivalenza). In tal caso esso viene definito come *concetto-classe* (Russell, 1971, pp. 195-6).

Nelle *definizioni esplicite per classi*, invece, l'ente viene definito come una classe di equivalenza, insieme di elementi accomunati da una medesima proprietà: la relazione di equivalenza. In tal caso viene definito come *classe-concetto*.

Le definizioni implicite però, come è noto, non precisano la natura dell'ente che definiscono e, secondo alcuni autori, quelle implicite per astrazione che fanno uso di una relazione di equivalenza ϵ non ne assicurano nemmeno l'unicità, in quanto ϵ caratterizza non soltanto la proprietà o funzione $\Phi(x)$ che si vuol definire ma anche ogni altra funzione di questa $f[\Phi(x)]$.¹⁹

Quest'ultima critica è stata posta da molti eminenti matematici e logici, soprattutto da Bertrand Russell e Alfred North Whitehead (1861-1947), fautori della sostituzione delle definizioni implicite per classi (da loro indicate semplicemente "per astrazione"²⁰) con definizioni esplicite per classi. La risposta di Russell alle obiezioni di Peano e Husserl va ancora oltre quella già citata, dimostrando che la definizione per astrazione implicita, cara ad entrambi, non solo può essere sostituita dal punto di vista matematico da quella per astrazione esplicita per classi,

¹⁹Per esempio, la relazione di equivalenza $\Phi(a, b) = \Phi(a', b') \iff ab' = a'b \quad (bb' \neq 0)$ che dovrebbe definire il concetto di frazione per astrazione non lo definisce in quanto la medesima relazione vale per la radice ennesima di un numero frazionario $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Così anche la relazione di congruenza fra segmenti che dovrebbe caratterizzare la lunghezza del segmento caratterizza anche l'area del quadrato e il volume dello stesso segmento. Tuttavia, come osserva Giulio Platone, essendo noto l'insieme G al quale viene applicata la relazione di equivalenza R è chiaro che questa (e quindi la proprietà o predicato che R esprime) si debba intendere valida soltanto per gli elementi dell'insieme G (Platone, 1969, p. 175).

²⁰Nel presente lavoro, invece, da quanto esposto, risulta chiaro che entrambi i tipi di definizione per classi (implicite ed esplicite) sono definizioni per astrazione, in quanto generate dal passaggio al quoziente, che matematizza il processo di astrazione.

ma è in realtà logicamente non valida. Dice Russell a proposito della definizione implicita per astrazione di numero cardinale (Russell, 1971, p.194):

Questa definizione per astrazione, e generalmente il processo impiegato in tali definizioni, soffre di un difetto formale assolutamente fatale: non dimostra che è solo un oggetto a soddisfare alla definizione. Pertanto invece di ottenere una proprietà comune di classi simili, che è il numero delle classi in questione, noi otteniamo una classe di tali proprietà, senza possibilità alcuna di sapere quanti termini questa classe contiene. Per rendere ancora più chiaro questo punto, esaminiamo che cosa significa, nel caso presente, una proprietà comune. Ciò che si intende dire è che ogni classe ha con una certa entità, il suo numero, una relazione che non ha con alcun'altra, ma che tutte le classi simili (e non altre entità) hanno con lo stesso numero. Esiste cioè una relazione multi-uno che ogni classe ha con il proprio numero e con nient'altro. Quindi, nella misura in cui si ammette la definizione per astrazione, qualsiasi serie di entità, con ognuna delle quali qualche classe ha una certa relazione multi-uno, e con una e solo una delle quali una classe data ha questa relazione, e che sono tali che tutte le classi simili ad una classe data hanno questa relazione con l'unica e medesima entità della serie, ci si presenta come la serie dei numeri, ed ogni entità di questa serie è il numero di una certa classe. Se allora esistono molte di queste serie di entità - ed è facile dimostrare che ne esiste un numero infinito - ogni classe avrà molti numeri, e la definizione avrà totalmente fallito il suo compito di definire il numero di una classe. Questo ragionamento è del tutto generale, e mostra come la definizione per astrazione non è mai un processo logicamente valido.

La definizione fregeana di numero, come classe di classi simili, può essere considerata il primo esempio di definizioni per classi applicate ad enti matematici. In (Nicotra, 2025) sono riportate le definizioni per classi di direzione, lunghezza, ampiezza, estensione, vettore, già presenti nella letteratura scientifica. La temperatura, in fisica, è considerata una delle grandezze fondamentali. Utilizzando il passaggio al quoziente e il Principio Zero della Termodinamica ne ho fornito una originale definizione matematica come *classe di equivalenza rispetto alla relazione di equilibrio termico fra gli stati termodinamici di uno stesso sistema o di sistemi diversi*. In termini equivalenti ma più concisi: *una temperatura è una classe di stati termodinamici in equilibrio termico* (Nicotra, 2020).

La definizione fregeana di numero, pertanto, assume oltre che un valore storico anche un valore euristico, indicando la via per formalizzare il processo di

astrazione, tramite il passaggio al quoziente, per qualunque altra definizione per classi.

3 L'apprendimento del concetto di numero

La matematica vive nella completa aseità: il tempo non figura in nessuna definizione matematica. Enti e proprietà matematiche sono tutti attuali, non sono soggetti a nessun divenire: una volta introdotti e scoperti sono *ab aeterno* e *ad aeternum*, incorruttibili. Il numero due, per la matematica, è la classe di tutte e soltanto le coppie e null'altro è necessario aggiungere o precisare perché esso abbia esistenza matematica.

Diversa è invece la prospettiva di chi debba apprendere e "accettare" dentro di sé, cioè interiorizzare, il concetto di numero, operazione che nasce dall'esperienza e quindi è penalizzata dai suoi limiti e dal suo svolgersi inevitabilmente nel tempo.

La definizione di numero come classe di classi equipotenti è una etichetta: il punto di arrivo di un'analisi del concetto di numero, che in realtà già abbiamo interiorizzato fin dalla prima infanzia e consolidato grazie alla nostra crescita culturale. In maniera paradossale si può dire che possiamo definire rigorosamente il numero in maniera logica, perché in realtà già sappiamo cos'è. La definizione di Frege, pur nella sua iniziale "stranezza", dovuta all'identificazione di un concetto astratto con una classe, è accettabile ai nostri occhi perché si presenta come una formalizzazione sul piano logico che si accorda con il concetto di numero che abbiamo acquisito fin dall'infanzia.

I meccanismi psichici dell'interferenza delle associazioni e dell'analogia tratti dall'Aliotta (1930) mi sono parsi idonei a spiegare, in maniera plausibile, il processo di apprendimento del concetto di numero da parte dell'uomo, non soltanto nei casi di piccoli numeri ma anche in quelli di numeri di qualsivoglia grandezza in cui, per motivi che saranno esposti, viene meno il supporto dell'esperienza sensoriale. L'aspetto più sorprendente dell'analisi psicologica che ne deriva è la sua piena aderenza al processo di astrazione modellizzato con il passaggio al quoziente, che conduce alla definizione matematica di numero di Frege come classe di classi equipotenti. Per cui tale definizione sembra connotarsi come la traduzione in termini matematici del processo naturale di formazione del concetto di numero, nell'uomo.

L'apprendimento del concetto di numero si sviluppa in una dimensione prelogica,²¹ con caratteristiche che Aliotta aveva definito psicologiche e che anche Husserl aveva inteso come psicologiche nella *Filosofia dell'aritmetica*, ma che considererà gnoseologiche quando elaborerà definitivamente il suo metodo feno-

²¹Rispetto alla dimensione logica della sua definizione e del suo uso.

menologico. Esso non deve essere confuso con la fase di carattere esclusivamente sensoriale che la precede, che costituisce il primo contatto "naturale" con il concetto di numero, da parte sia dell'uomo sia di varie specie animali.

3.1 *Number Sense*: il primo contatto con il concetto di numero

Il primo contatto "naturale" con il concetto di numero è stato denominato con il termine molto espressivo *Number Sense*, per la prima volta, dal matematico russo Tobias Dantzig (1884-1956),²² nella sua opera del 1930 *Number: the language of science (A critical survey written for the cultured non-mathematician)* e si manifesta nella forma primitiva di percezione sensoriale del cambiamento di "quantità" di un insieme di oggetti o di viventi, allorché una o più unità di essi viene aggiunta o sottratta dall'insieme. È bene sottolineare che il *Number Sense*, o la sua traduzione italiana "percezione del numero", si riferisce alla pluralità o numerosità di un insieme, in quanto concetto concreto esperibile, e non al concetto astratto di numero, che costituisce la fase finale del suo apprendimento.

Il *Number Sense* riguarda sia l'uomo, già dai primi mesi di vita, sia molte specie animali.

Sono ormai considerati "storici" i casi riportati in letteratura da Dantzig nella sua opera testé citata (Dantzig, 1930) e dal matematico, etnologo e storico della matematica franco-marocchino Georges Ifrah (1947-2019) nella sua monumentale opera *Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention* (Ifrah, 1989 [1985]).

In tempi successivi, l'iniziale *Number Sense* di Dantzig ha aperto la strada a un fiorente filone di ricerca da parte di psicologi e neurofisiologi, che ha portato a identificare due fondamentali sistemi cognitivi che consentono a umani e animali di stimare a colpo d'occhio (*Subitizing*)²³ quantità numeriche senza ricorrere al conteggio: l'*Object Tracking System* (OTS) e l'*Approximate Number System* (ANS).

Oggi esiste una notevole mole di studi sul *Number Sense*, sia di carattere sperimentale sia di carattere linguistico (Blazek, 1998; Carruba, 1979; Chan, 2013; Cerri, 2013; Crevatin, 1995; Gonda, 1953; Hurford, 1987). La conclusione generale che si trae nella maggior parte dei casi da questi studi, non sempre però condotti con il necessario rigore scientifico, conferma l'innatismo o immanenza, frutto di un complesso e lungo processo evolutivo, del concetto di numero intero positivo, che giustifica per esso l'attributo "naturale".

²²Allievo di Henri Poincaré (1854-1912).

²³Il termine deriva dal latino *subitus* (arrivato improvvisamente) ed è stato coniato nel 1949 da Kaufman, Lord, Reese e Volkmann. La derivazione latina esprime efficacemente il significato di qualcosa che arriva senza coinvolgere un'attività razionale, logica.

Le ricerche attuali mostrano che con l'OTS è possibile stimare, in maniera rapida e accurata, la numerosità di piccoli insiemi fino a un massimo di 4 (Pylyshyn e Storm, 1988; Revkin et al., 2008) o anche 6 elementi (Mandler, Shebo, 1982), basandosi sull'attenzione visiva e sul tracciamento individuale degli oggetti. Semplificando, si può dire che l'OTS opera in forma "digitale", trattando ogni elemento come un'entità singola e spazialmente separata ed è indifferente al rapporto fra le quantità numeriche degli insiemi di oggetti coinvolti.

L'ANS, invece, utilizza un meccanismo di stima delle quantità di tipo "analogico", influenzato da variabili continue come l'estensione e la densità, è lento e impreciso, in quanto la discriminazione delle quantità è sensibile al rapporto (1:2, 1:3, 1:4, 2:3) con cui sono presenti, seguendo la legge psicofisica del fisiologo tedesco Ernst Heinrich Weber (1795-1878), fondatore della psicologia sperimentale (Meck, Church, 1983).²⁴ Pertanto l'ANS è tanto meno preciso quanto minore è il rapporto fra le quantità da riconoscere. Per esempio, è più preciso nel distinguere a colpo d'occhio 80 oggetti da 40 (rapporto 2:1) rispetto a 90 oggetti da 50 (rapporto 9:5, <2:1), anche se la differenza in entrambi i casi è 40 oggetti. Non è ancora chiaro se tali sistemi operino in modo indipendente, sinergico o antagonistico (Cutini et al. 2014; vanMarle et al., 2018).

Secondo ricerche di psicologia comparata, il *Number Sense*, comune a diverse specie animali, come primati, roditori, pesci, uccelli e insetti, è spiegabile con l'ipotesi di meccanismi numerici condivisi nei processi evolutivi di tali specie (Agrillo, Bisazza, 2017; Brannon, Roitman, 2003; Cantlon, 2012; Liang et al, 2024; Pahl et al., 2013). Secondo alcuni, tali meccanismi hanno origini molto antiche, risalenti a un antenato comune (Agrillo e Bisazza, 2017). Poiché le strutture cerebrali implicate sono diverse tra specie molto distanti, ma funzionalmente simili, più accreditata, invece, è l'ipotesi alternativa sostenuta da Nieder (2021) che tali meccanismi numerici abbiano antenati distinti: il *Number Sense* si sarebbe sviluppato in modo indipendente lungo linee evolutive diverse, come risultato di pressioni ambientali simili, però secondo un processo di evoluzione convergente.

Mi limito a citare i classici esempi di Dantzig e Ifrah e alcuni più recenti studi sviluppati soprattutto in ambito accademico da psicologi (Gastaldello, 2022-2023; Adriano, 2010-2011; Bertolin, 2025-2026; Cerri, 2013; Galmarini, 2022-2023), che sostanzialmente confermano gli esempi "storici" di Dantzig e Ifrah, fornendo certamente maggiori dettagli e indicando possibili interpretazioni neurofisiologiche del comportamento istintivo dell'infante umano e degli animali nel loro primo contatto con il concetto di numero.

Secondo i più recenti studi, le aree del cervello coinvolte nell'OTS sono il

²⁴Formulata nel 1860: l'entità dell'incremento di uno stimolo R necessario perché la sua variazione ΔR venga percepita da un soggetto è, per ciascun senso (vista, udito, tatto ecc.), proporzionale allo stimolo iniziale: $\Delta R = K \cdot R$

Lobo Parietale Superiore e Posteriore, la Giunzione Temporo-Parietale (TPJ) e la Corteccia Occipito-Temporale Ventrale, svolgendo complessivamente una funzione di attenzione visiva-spaziale e di memoria di lavoro (Odic, Starr, 2018; Vuokko, Niemivirta, Helenius, 2013); quelle coinvolte nell'ANS sono il Solco Intraparietale (IPS), che è l'area principale e fondamentale per l'ANS, la Corteccia Prefrontale (PFC), le Aree Visive Extrastriate (Corteccia Occipitale) (Lorenzi, Kobylkov, Vallortigara, 2025).

In bibliografia sono riportati, oltre quelli già citati, vari lavori accademici sul *Subitizing* nell'uomo e negli animali, nei quali è possibile approfondire l'argomento (Vallortigara et al, 2010; Adriano, 2010-2011; Andriolo, 2022-2023; Burr, Ross, 2008; Carey, 1998; Coolen et al. 2022; Cowan, 2000; Gelman, Gallistel, 1978 e 1992; Hurford, 1987; Mandler, Shebo, 1982; Odic, Starr, 2018; Revkin et al., 2008; Tracuzzi, 2024-2025; Vuokko et al. 2013; Xua, Spelke, 2000).

3.1.1 La percezione sensoriale della numerosità negli animali

A proposito del *Number Sense* negli animali, ritengo sia doveroso sottolineare che si può parlare di abilità dell'animale di percepire la disuguaglianza numerica tra due o più gruppi di elementi, senza la necessità di conoscere esattamente il loro valore assoluto (Davis, Pérusse, 1988). In altri termini l'animale percepisce non il numero di un singolo gruppo di oggetti ma la differenza numerica fra gruppi diversi. A mio avviso sarebbe più esatto distinguere fra percezione della numerosità e percezione della quantità, spesso superficialmente identificata con la numerosità.

Nel caso della percezione della numerosità, la percezione della disuguaglianza numerica tra due o più gruppi di elementi è precisa e dovuta a meccanismi di *Object Tracking System*, mentre nel caso della percezione della quantità, è approssimata, dovuta a meccanismi di *Approximate Number System* e può essere ingannevole in quanto, in alcuni casi, la numerosità può essere identificata con la quantità in senso fisico e non numerico, basandosi sull'assunto errato che un numero maggiore di oggetti occupa uno spazio maggiore. Assunzione corretta soltanto nel caso di oggetti aventi individualmente la medesima estensione spaziale. Consideriamo, invece, il caso di due insiemi A , B costituiti rispettivamente da 10 e 5 oggetti, essendo però le dimensioni dei 5 oggetti di B molto maggiori di quelle dei 10 oggetti di A , al punto che l'estensione spaziale di B risulti maggiore di quella di A . È evidente che un meccanismo psico-sensoriale sensibile alla quantità in senso fisico, sfruttando criteri analogici in grado di stimare l'estensione spaziale, piuttosto che criteri digitali in grado di distinguere l'individualità degli oggetti, condurrebbe ad affermare che è più numeroso il gruppo di oggetti B .

Dagli studi fino ad oggi compiuti, sembra potersi affermare che la percezione del numero (come accennato precedentemente fino a 3, in alcuni casi forse fino a

4 e a 6) è limitata ad alcune specie animali, come insetti e uccelli,²⁵ come discusso più avanti (3.1.3).

La percezione della numerosità-quantità, invece, riguarda un numero più vasto di specie animali, soprattutto quelle con una organizzazione sociale che favorisce l'emergere delle abilità numeriche sotto la spinta del vantaggio procurato, nella caccia, dall'evitare un conflitto contro un gruppo più numeroso e quindi più temibile (Byrne, 1995; Andriolo, 2022-2023, pp. 10-15).

Dantzig (1930) e Ifrah (1989) riportano vari esempi delle facoltà da parte di uccelli e insetti di percepire i primi numeri naturali, nel senso "relativo" prima specificato, ovvero come differenze numeriche fra gruppi di oggetti.

Nella letteratura scientifica sono disponibili numerose ricerche sulla presenza del *Number Sense* in molte specie animali, sulle quali non mi soffermo perché, pur di grande interesse, esulano troppo dalle tematiche del presente articolo (Agrillo, Bisazza, 2017; Bertolin, 2025-2026; Brannon, Roitman, 2003; Liang et al. 2024; Meck, Church, 1983; Pahl et al., 2013).

Il primo a compiere studi sperimentali sulle capacità numeriche degli uccelli è stato, nel 1941, lo zoologo tedesco e pioniere dell'etologia Otto Koehler (1889-1974). In particolare Koehler dimostrò sperimentalmente che i cardellini riescono a distinguere fra loro alcuni dei primi numeri naturali: 1 da 3, 2 da 3, 2 da 4, 3 da 4, 3 da 6, ma confondono quasi sempre 4 con 5, 5 con 7, 6 con 8, 6 con 10 (Koehler, 1941). A tali conclusioni, Koehler giunse col metodo dell'esca del cibo. Addestrò i cardellini a sollevare i coperchi di scatole contenenti cibo basandosi unicamente sul numero di punti disegnati sul coperchio. Per evitare che gli uccelli usassero scorciatoie visive di tipo analogico (estensione e forma geometrica dell'area occupata dai punti), Koehler cambiava continuamente la grandezza, la densità e la disposizione dei punti a ogni tentativo. I cardellini associavano istintivamente la quantità dei punti, disegnati sui coperchi delle scatole, alla quantità di cibo in esse contenuta. Successivamente, lo psicologo statunitense di origine italiana Nicholas Pastore (1916-1998) riprese molti esperimenti di Koehler, confermandone i risultati (Pastore, 1961a e 1961b). Molti esperimenti hanno dimostrato la percezione dei numeri naturali da 1 fino a 4 in usignoli, gazze e corvi (Koehler, 1943 e 1949; Ifrah 1989, p. 18).

Fra gli esempi riportati da Dantzig (1930, pp. 1-4), è particolarmente intrigante quello del corvo²⁶ che sfugge per ben quattro volte agli stratagemmi ideati da

²⁵Gli studi sperimentali sui cani conducono a interpretazioni diverse: la possibilità di distinguere 1 da 2 e 2 da 3 oppure semplicemente la capacità di distinguere quantità diverse basandosi su meccanismi analogici propri dell'ANS (Andriolo, 2022-2023 p. 12-13).

²⁶Quanto possa essere vero questo episodio narrato da Dantzig, ma ripreso anche da Ifrah, non è dato sapere. L'episodio è il seguente: «Un castellano aveva deciso di uccidere un corvo che aveva nidificato nella torre di scorta del castello: più volte egli aveva tentato di sorprendere l'uccello, ma bastava che si avvicinasse perché il corvo abbandonasse il nido, si appollaiasse su

un castellano per ucciderlo, in quanto oltre a dimostrare la capacità dei corvi di percepire il numero fino a 4, avvalora l'affermazione di Dantzig che le prove sperimentali sulla percezione del numero sono cariche di difficoltà, essendo difficile escludere del tutto il ricorso, sia pure inconscio, al conteggio.

Quanto poco attendibile sia questa storiella risulta immediatamente dall'osservazione: il signorotto non poteva tentare di uccidere il corvo sull'albero con un fucile, anziché aspettarlo all'interno della torre? Forse è stata inventata per mettere in guardia contro conclusioni affrettate e stimolare analisi più approfondite di casi analoghi, in cui si crede di individuare capacità proto numeriche da parte di animali.

Un'analisi più accurata da me condotta altrove (Nicotra, 2013, pp. 20-22) sembra dimostrare non semplicemente capacità del corvo di percezione del numero fino a 4 ma anche capacità più complesse. A rigor di logica, si può parlare soltanto di "percezione" del numero se il corvo potesse vedere tutto assieme il gruppo di uomini all'interno della torre e così avvertire sensorialmente i suoi cambiamenti quando uno, due, tre uomini escono, venendo così sottratti dall'insieme. In realtà il corvo vede prima entrare un gruppo e poi uscirne uno diverso. Il fatto che si accorge che il gruppo uscito è un cambiamento del gruppo entrato può essere spiegato soltanto con l'intervento di facoltà immaginative, di riconoscimento "facciale", di conteggio e di eseguire sottrazioni, sia pure limitate. Il corvo, infatti, può soltanto immaginare che il gruppo che ha visto entrare sia lo stesso di quello che si trova all'interno della torre, perché in realtà non può vedere l'interno della torre, e quindi già in questa fase compie un'operazione logica di identità fra i due gruppi, che non è frutto di meccanismi sensoriali. Inoltre, la consapevolezza del corvo che il gruppo uscito è una variazione di quello entrato non è spiegabile soltanto come percezione del cambiamento della numerosità ma implica anche un riconoscimento dell'individualità dei membri del gruppo. Il gruppo uscito potrebbe essere un altro gruppo totalmente diverso da quello entrato. L'accorgersi che il gruppo uscito non è altro che lo stesso gruppo entrato privato di alcuni suoi membri implica, anzitutto, capacità immaginative, che non sarebbero necessarie se la variazione del numero di elementi del gruppo avvenisse "dinamicamente sotto gli occhi" dell'animale, e la capacità di riconoscere gli uomini del gruppo. Inoltre richiede la capacità di eseguire una operazione di sottrazione, che può essere di due

un albero vicino, donde tornava non appena l'uomo aveva lasciato la torre. Il castellano ricorse a uno stratagemma: fece entrare due suoi amici nella torre; dopo pochi minuti uno si allontanò, mentre l'altro rimase. Ma il corvo non cadendo nella trappola, attese che anche il secondo se ne andasse per riprendere il suo posto. La volta seguente entrarono tre uomini, due dei quali poi se ne allontanarono; ma il terzo ebbe un bell'aspettare l'occasione di catturare il corvo, che si mostrò più paziente di lui. Le volte successive l'esperimento fu ripreso con quattro uomini, ma sempre invano. Finalmente, lo stratagemma riuscì con cinque persone, poiché l'uccello non era in grado di distinguere più di quattro esseri umani o quattro oggetti». (Ifrah, 1989, pp. 18-19).

tipi: fra insiemi o fra numeri. Nel primo caso il corvo può sottrarre il gruppo uscito da quello entrato soltanto facendo ricorso ancora una volta all'immaginazione, in quanto non li vede "simultaneamente". Nel secondo caso, invece, il corvo deve avere la capacità di contare ²⁷ fino a tre e di saper eseguire una sottrazione non più fra insiemi ma fra numeri, il che implica addirittura l'avere il concetto astratto di numero e non più di pluralità: sottrarre, per esempio, i tre uomini uscenti dai quattro entrati significa contare, a partire da 4, tre unità nel verso decrescente dei numeri interi (1, 2, 3, 4...) pervenendo così al numero uno.

Soltanto così, con l'una o l'altra soluzione proposta, il corvo può sapere che un uomo rimane all'interno della torre.

3.1.2 Quell'ambiguo intreccio fra conteggio e numero

Se la definizione logica di Frege del numero ignora il contare, è tuttavia innegabile che quest'ultimo è psicologicamente intimamente connesso con il concetto di numero, sia nel suo processo di apprendimento sia nel riconoscimento di un particolare numero, come giustamente osserva Dantzig (1930, p. 4):

In every practical case where civilized man is called upon to discern number, he is consciously or unconsciously aiding his direct number sense with such artifices as symmetric pattern reading, mental grouping or counting. Counting especially has become such an integral part of our mental equipment that psychological tests on our number perception are fraught with great difficulties.

E ancora più esplicitamente un po' oltre (p. 6):

It is counting that consolidated the concrete and therefore heterogeneous notion of plurality, so characteristic of primitive man, into the homogeneous abstract number concept, which made mathematics possible.

Dunque lo stesso Dantzig ammette che la percezione sensoriale del numero (*Number Sense*) possa essere contaminata dal conteggio, ma tale contaminazione è contraddittoria: come è possibile avere una percezione del numero con l'aiuto del conteggio, se questo presuppone avere già l'idea di numero? In un certo senso ci si trova nello stesso stato imbarazzante di decidere se esiste prima la gallina o l'uovo.

²⁷Nell'edizione originale inglese è significativo che Dantzig (1930) così concluda: «*Here the crow lost count*» (A questo punto il corvo perse il conteggio) contraddicendo quanto poco prima da lui stesso detto proprio all'inizio del libro: «*Counting, so far as we know, is an attribute exclusively human*».

Secondo le più recenti ricerche sul *Subitizing* (Pylyshyn e Storm, 1988; Revkin et al., 2008) l'uomo, senza contare, può percepire i numeri con un unico sguardo fino a 4, essendo in grado di distinguere con la vista fino a 4 elementi di un insieme. Dantzig e Ifrah riportano interessanti argomentazioni a favore di tale tesi, attingendo a studi di carattere linguistico.²⁸ Io credo che oggi questo limite possa essere esteso fino a 6, come sostenuto anche in (Mandler, Shebo, 1982), e forse fino a 8 e anche oltre variando con le facoltà visive, diverse da individuo a individuo, e con l'abitudine consolidata nel tempo al riconoscimento sensoriale dei numeri.²⁹ Se, per esempio, abbiamo davanti agli occhi una classe di 4 elementi (oggetti o esseri viventi), riusciamo visivamente a distinguerli spazialmente e ad associare a tale classe la parola "quattro" o il "numerale-cifra 4", identificandone quindi il suo numero (4) senza dovere contare. Ugualmente riconosciamo ad occhio se un'altra classe ha la stessa pluralità, concludendo che anche ad essa spettano stesso nome e numerale, ovvero capiamo che siamo in presenza di due esempi del numero 4. Supponiamo che tale capacità si estenda fino a 8, concludendo che nel riconoscimento di numeri da 1 a 8 il contare risulta estraneo.

Ma per classi di numero superiore a otto cosa succede? Se per esempio fossimo in presenza di un aggregato di 23 elementi, non saremmo certamente in grado di capire che il numero di tale aggregato è 23 semplicemente osservandolo nella sua interezza. Ugualmente nel confrontarlo con un altro aggregato, non saremmo in grado di decidere con un sol colpo d'occhio se i due aggregati sono simili o no, ovvero se il numero del secondo aggregato è anch'esso 23 o è diverso. Senza ricorrere al conteggio, infatti, l'unico modo per verificare se due insiemi sono simili sarebbe collegare materialmente uno contro uno gli elementi dei due insiemi, per esempio con dei fili, materializzando, così, la definizione di biiezione. Ovviamente ciò non è possibile per diversi motivi. Nel caso di due insiemi, per esempio, costituiti l'uno da mele e l'altro da città, quale collegamento "fisico" potrebbe essere realizzato fra gli elementi dei due insiemi? L'unico modo per capire se due

²⁸«...in Oceania parecchie tribù hanno l'abitudine di declinare le forme grammaticali al singolare, al duale, al triale, al quattriale e al plurale. Tra quelle genti, la capacità di individuazione dei nomi comuni è limitata a quattro. Infatti, fino a quattro i nomi degli esseri e degli oggetti nelle loro lingue sono chiaramente espressi e dotati ognuno di una propria caratteristica, ma oltre sia i nomi che i numeri sono privi di declinazione e di personalità, rivestendo il carattere vago e imprecisato della pluralità materiale. [...] Altro esempio: in latino, i nomi dei quattro primi numeri (*unus, duo, tres, quattuor*) erano i soli a venir declinati, mentre a partire dal quinto i nomi di numero non avevano più né declinazione né genere. [...] I primi quattro mesi dell'anno romano primitivo (quello detto di Romolo) erano i soli ad avere nomi propri (*Martius, Aprilis, Maius, Junius*), poiché a partire dal quinto i nomi dei mesi erano solo numeri d'ordine: *Quintilis, Sextilis, September, October, November, December*» (G. Ifrah, 1989, pp. 19, 20). L'anno primitivo romano comprendeva soltanto 10 mesi ed era costituito da 304 giorni.

²⁹Personalmente, in numerosi esperimenti, ho constatato la mia capacità di percezione diretta visiva di insiemi di lettere o piccoli oggetti fino a 8 elementi.

classi sono simili e stabilire qual è il loro comune numero è contarne gli elementi, almeno se il suo numero è superiore al limite percepibile sensorialmente, di cui già detto. Conteremmo prima gli elementi di un insieme e poi quelli dell'altro: se il conteggio dà come risultato lo stesso numero naturale (per es. 23) concludiamo non soltanto che i due insiemi sono simili - e che quindi hanno lo stesso numero - ma sappiamo anche qual è tale numero (23). In tal modo non facciamo altro che applicare inconsciamente la proprietà transitiva della biiezione: se con il conteggio verifichiamo che esiste una corrispondenza biunivoca o biiettiva fra il primo insieme e l'insieme dei primi 23 numeri naturali e lo stesso accade per il secondo insieme, per la proprietà transitiva concludiamo che la stessa biiezione esiste fra i due insiemi, e dunque possiamo dire con certezza che essi sono simili. Il ricorso al conteggio è una conseguenza dell'essere la definizione di numero di Frege una definizione soltanto logica e non operativa: in essa manca il criterio "operativo", per verificare l'esistenza di una biiezione fra due classi. In definitiva, invece, il contare gli elementi di un insieme permette sia di riconoscere gli insiemi simili ad esso sia il suo numero.

Un'analisi più approfondita della capacità di percezione sensoriale del numero può far sorgere qualche dubbio sull'esclusione del conteggio, anche in alcuni casi di bassa numerosità (inferiore a 4).

Una personale ipotesi, che mi sembra plausibile in quanto avvalorata dal comportamento dei bambini che ho potuto direttamente osservare in vari casi, è che inizialmente l'unico concetto di numero posseduto sia quello dell'unità. Probabilmente, i bambini nel loro primissimo stadio iniziale capiscono soltanto il numero uno perché è identificato con l'individualità di un singolo oggetto, di cui riescono sensorialmente a definire i confini. Per far capire, successivamente, a un bambino che un insieme ha 2 o 3 o 4 elementi, in realtà gli si indicano in successione tali elementi pronunciando corrispondentemente i nomi uno, due, tre, quattro: l'ultimo nome pronunciato diventa nella mente del bambino il nome dell'insieme, esprimendone la cardinalità.³⁰ In realtà quindi si insegna al bambino a contare a partire dal concetto di unità che possiede già (quello che si insegna al bambino non è il concetto di unità, ma soltanto il suo nome: uno). Per fargli capire che il nome "quattro" non è legato ai particolari elementi dell'insieme, si ripete la stessa procedura con altri 4 oggetti diversi. Ripetendo la stessa esperienza più volte, il bambino comincia a imparare a contare, che per lui però ha il significato molto pratico di "aggiungere" ogni volta una unità pronunciando un nome diverso che memorizza nella sua mente. Dopo diverse esperienze, è probabile che l'immagine di un insieme di 4 elementi, con la percezione distinta delle loro individualità, rimanga nella sua memoria associata al nome quattro, indipendentemente dalla

³⁰Questa tecnica è stata applicata personalmente a mio figlio infante.

natura di quegli oggetti.³¹ Quando, quindi, gli si presenta alla vista un insieme di quattro elementi, sia pure diversi da quelli finora esperiti, per analogia associa il nome quattro anche al nuovo insieme. In altri termini, è vero che a colpo d'occhio il bambino "riconosce" in una classe di 4 oggetti il numero 4, ma soltanto per analogia con la prima esperienza (memorizzata nel suo cervello) che lo ha portato a identificare il numero 4 della classe "contando" i suoi elementi. In tal modo, i concetti primitivi (e innati) sarebbero quelli di unità e successore, mentre quello di numero sarebbe un concetto derivato.

Il legame ambiguo, dal punto di vista psicologico, fra il conteggio e il concetto di numero si ripresenta paradossalmente quando i genitori insegnano ai bambini a contare, pur essendo un concetto logicamente più complesso, senza riuscire a insegnare loro il concetto di numero.

Ma il paradosso si risolve riflettendo che ciò che è logicamente complesso può essere più facile da comprendere (e quindi insegnare) di ciò che è semplice. Russell diceva che le cose più difficili da comprendere in matematica sono quelle che stanno all'inizio e verso la fine, così come le cose difficili da vedere sono quelle molto piccole e molto grandi, per le quali è necessario ricorrere a strumenti opportuni: il microscopio e il telescopio.

Il contare, pur essendo un'operazione logicamente complessa, si presta ad essere facilmente appreso, in quanto consiste in una iterazione di azioni materiali (nominare i numeri naturali in sequenza, oppure aprire in successione le dita delle mani, ecc.) facilmente memorizzabili in sequenze che vengono poi riprodotte meccanicamente in stato di semioscienza. Infatti, la stragrande maggioranza delle persone conta correttamente senza tuttavia sapere cosa significa contare, cioè senza avere coscienza che consiste nel porre in corrispondenza biunivoca gli oggetti da contare con la serie dei numeri naturali 1,2,3...

La matematica, per il suo formalismo, purtroppo si presta spesso ad essere correttamente impiegata senza tuttavia possedere chiaramente il significato dei simboli utilizzati e delle stesse operazioni che su di essi vengono compiute "meccanicamente" come un robot. Una persona di media cultura può risolvere una equazione di primo grado, senza sapere il perché dei semplici passaggi che compie per risolverla.

3.1.3 Immanenza del concetto di numero. Uno, due ... molti

Sia nel bambino dai suoi primissimi anni sia in alcuni popoli nativi del nostro Pianeta, che ancora vivono in uno stato quasi primordiale,³² è riscontrabile, sia pure limitatamente a *uno* e *due*, l'acquisizione "naturale" del concetto di numero,

³¹Il bambino inconsciamente applica l'interferenza delle associazioni (vedi oltre).

³²Per es. gli zulu e i pigmei nell'Africa, gli aranda e i kamilarai in Australia, gli arborigeni delle isole Murray, i botocudos in Brasile.

concetto più raffinato, in quanto più astratto, di quello di numerosità o pluralità con il quale spesso superficialmente viene confuso, ma dal quale invece differisce nettamente, pur derivandone.³³ Una coppia di oggetti è un esempio di pluralità o numerosità in quanto è un esempio del numero due, ma non è un esempio di numero, mentre il numero due lo è. «*It must have required many ages to discover that a brace of pheasants and a couple of days were both instances of the number two*», dice Bertrand Russell (Dantzig, 1930, p. 6).

Sia nei bambini tra i dodici e i diciotto mesi sia, come dimostrato da studi antropologici, in numerose popolazioni indigene africane, sudamericane e australiane, il possesso del concetto di numero sembra essere limitato a *uno*, *due* e *tre*. Quest'ultimo, però, in realtà viene generalmente identificato con il concetto di *molti* (Ifrah, 1989, p.18). Probabilmente collegato a questa primigenia abitudine di identificare il concetto di molti con il numero tre, è il fatto curioso che il bambino, in generale, quando impara a contare, dopo il due salta il tre e prosegue con quattro (Fischer, 1992).

Tobias Dantzig osserva che molto probabilmente le stesse popolazioni europee in epoca preistorica si trovavano nelle stesse condizioni di non riuscire a percepire il concetto di numero oltre l'uno e il due. I raggruppamenti di oggetti di numero superiore o uguale a tre venivano concettualizzati nell'unico concetto del *tre-molti*. A riprova di questa tesi, Dantzig fa notare che sia in latino sia in inglese la parola che denota il concetto di tre volte ha anche il significato di molti: *ter* (latino), *thrice* (inglese). Inoltre, le parole con le quali in latino e in francese si indica il numero tre hanno la stessa radice della parola utilizzata per molti: *tres* (tre) e *trans* (oltre) in latino, *trois* (tre) e *très* (molti) in francese (Dantzig, 1930, p. 5).

Tali osservazioni sono state riprese e ampliate da Georges Ifrah (1989). Il termine *esh* degli antichi sumeri significava sia tre sia molti. I termini inglesi *three* (tre), *throng* (una folla) e *through* (al di là) hanno anch'essi la stessa radice. L'antico sassone *thria* (tre) (dal quale sono derivati l'inglese *three*, gli antichi termini germanici *dri*, *drio*, *driu* e l'attuale tedesco *drei*) hanno la stessa radice del francone (l'antica lingua dei franchi) *throp* (ammasso), del francese *trop* (troppo), dell'italiano *troppo* e dell'antico termine medioevale *troppus* (gregge, schiera), del francese *troupe* (truppa) e *troupeau* (gregge), dello spagnolo *tropa* (truppa) dell'italiano *truppa*, dell'inglese *troop* (truppa) e del tedesco *truppe* (truppa). Conclude Ifrah (1989, p.17):

³³L'evoluzione, nella storia del genere umano, del concetto di numero, da percezione prima puramente sensoriale ad acquisizione del concetto di pluralità fino alla sua concettualizzazione astratta, si ritrova nello sviluppo evolutivo del bambino, confermando l'idea, generalmente condivisa, che nello sviluppo delle facoltà mentali del bambino sono rintracciabili le tappe dell'evoluzione dell'intelligenza umana.

Fin dalla notte dei tempi, il numero tre è stato in tal modo sinonimo di pluralità, di moltitudine, di ammasso, di "al di là", costituendo di conseguenza una sorta di limite impossibile sia da concepire sia da precisare, il che significa come, nell'animo umano, l'invenzione dei numeri abbia segnato una prima battuta d'arresto a due.

Sperimentalmente, nei bambini dai tre ai dodici mesi e in alcune specie di insetti e uccelli, è stata rilevata la percezione del numero di un insieme di oggetti limitata al numero tre.³⁴ Per esempio in (Dantzig, 1930, pp. 1 e 2) è riportato il risultato di un esperimento condotto sugli uccelli:

If a nest contains four eggs one can safely be taken, but when two are removed the bird generally deserts. In some unaccountable way the bird can distinguish two from three.

In (Feigenson, Carey, 2005) invece sono riportati i risultati di tre esperimenti condotti su bambini di 10-12 mesi, confermando il limite numerico del tre dell'OTS.

3.2 L'acquisizione del concetto di numero nel bambino: un'applicazione inconscia del passaggio al quoziente

Il concetto di pluralità precede quello di numero in senso astratto. I bambini, entro il primo anno di vita, cominciano a uscire dalla fase di indefinita percezione sensoriale del numero ed entrano in una fase più cosciente e razionale quando colgono il concetto di pluralità: per loro esistono due matite, due giocattoli, ecc. ma non ancora il numero due, ovvero acquisiscono nella loro coscienza diversi esempi concreti del numero due.

Lo stesso stato evolutivo nell'apprendimento del concetto di numero si può trovare nella storia del genere umano, come è dimostrato dal fatto che molte lingue di popoli primitivi hanno parole diverse per i singoli numeri ma non hanno una parola per il "concetto di numero" (Dantzig, 1930, p. 6):

There are primitive languages which have words for every color of the rainbow but have no word for color; there are others which have all number words but no word for number. The same is true of other conceptions.

A conferma che il concetto di numero è immanente, i bambini riescono a formarsi "spontaneamente" il concetto di numero naturale, mentre invece devono

³⁴Non è stata invece rilevata, nei cavalli e in altri animali domestici. Per i cani si è già detto in una nota di 3.1.1

faticare non poco per acquisire “successivamente”, a scuola, i concetti di tutti gli altri tipi di numeri che la matematica definisce: interi positivi e negativi, frazioni, numeri reali, numeri periodici, numeri irrazionali, trascendenti, ecc. avvalorando il pensiero di Kronecker: «Iddio creò i numeri interi, il resto è opera dell'uomo».

Si insegna loro a contare e quindi a ottenere la somma di due numeri naturali (operazione immediatamente riconducibile al contare) ma non si insegna “cos'è” il numero due o cinque, nel senso che non si definisce il numero due o cinque, anche perché nessun genitore saprebbe farlo. Ma anche se così fosse, dubito che un bambino riuscirebbe a comprendere la definizione logica di numero data da Frege.

È poi noto che “il contare” è cosa ben diversa dal concetto di numero, perché è porre in corrispondenza biunivoca gli elementi di un insieme con i numeri della serie naturale ed è, quindi, un'operazione mentale che presuppone il concetto di numero naturale e l'avere già ben presenti davanti a noi, nella nostra immaginazione, “schierati” nel loro ordine crescente i numeri naturali. Infatti, quando contiamo gli elementi di un insieme, associamo mentalmente ogni suo elemento (indicandolo) a un numero della serie naturale (dicendone il nome), iniziando da 1 e procedendo con i successivi fino ad esaurire tutti gli elementi dell'insieme. Dal punto di vista logico le differenze sono nette e diverse: il numero è un *concetto* mentre contare è un'operazione, oltretutto tutt'altro che semplice, presupponendo e utilizzando i concetti di numero, di corrispondenza biunivoca, di ordinamento e di successore. Infine, il concetto di ordine, presente nel contare, è invece assente nella definizione logica di numero.

Allora, come fanno i bambini a formarsi il concetto di numero?³⁵ Se un bambino fosse privato di tutti i sensi, quasi sicuramente non vi riuscirebbe, per il motivo che non potrebbe percepire in maniera “distinta” gli oggetti materiali dai quali poter trarre il concetto di numero.³⁶ Il bambino si forma il concetto del numero due ponendogli davanti agli occhi, o facendogli toccare, varie coppie di oggetti “distinti e di diversa natura”. E qui veramente sembra manifestarsi la mano di Dio: pur in tutte le “molteplici diversità della natura” di tali oggetti e nel “diverso ordine” in cui di volta in volta gli capita di percepirli con uno qualunque dei sensi, riconosce “spontaneamente” un carattere comune a tutte le coppie di oggetti, che esprime, prima, con il nome che sente pronunciare ogni volta che le circostanze

³⁵Ovviamente, si tratta di un apprendimento inconscio o semi-inconscio e non di una chiara comprensione razionale della definizione di numero quale quella di Frege, già ostica per un adulto “acculturato”.

³⁶Di parere diverso è Federigo Enriques: «Fino a che punto è necessario operare sopra oggetti e gruppi di oggetti materialmente dati? [...] Un uomo, dotato di sufficiente forza di astrazione, il quale sia cieco-sordo-muto e paralizzato, potrebbe pensare degli oggetti (anche senza immaginarli in modo preciso), e operare con associazioni e astrazioni puramente ideali sopra classi di oggetti pensati» (Enriques, 1912, p. 376). Ma esistono esperienze di tal tipo che lo provino?

presentano alla sua attenzione una coppia di oggetti (*due* in italiano, *two* in inglese, *dos* in spagnolo, *deux* in francese, ecc.) e, poi, anche con un simbolo scritto (il numerale 2). Dunque il bambino compie "spontaneamente" una raffinatissima operazione di astrazione di una proprietà generale da una moltitudine di casi concreti "diversi", ma "uguali" nel possedere tutti la stessa proprietà,³⁷ di cui non ha una netta comprensione ma che intuisce, acquisendo il concetto del numero due senza più legarlo a questa o quella coppia di oggetti, pur avendolo generato dalla loro osservazione empirica. Questo processo di "astrazione dell'uguale dal diverso", che avviene nel bambino in maniera naturale,³⁸ non è altro che lo stesso processo di astrazione che abbiamo illustrato precedentemente con il passaggio al quoziente. Ma se tale processo avviene spontaneamente nel bambino, che certamente non conosce l'algebra astratta, vuol dire che esso è frutto di processi psichici e non logici, in particolare di quelli che costituiscono l'immaginazione creatrice.³⁹

3.3 I processi psico-fenomenologici nell'apprendimento del concetto di numero. Il ruolo dell'immaginazione creatrice

Cos'è l'immaginazione? Per il filosofo palermitano Antonio Aliotta essa può essere riproduttiva (memoria) e creatrice (fantasia), passiva la prima, attiva la seconda.

L'immaginazione riproduttiva (o memoria) è quel processo mentale che ripropone gli elementi dell'esperienza passata negli stessi aggregati e nel medesimo ordine di successione o di coesistenza.

L'immaginazione creatrice (o fantasia), invece, utilizzando la memoria riaggrega diversamente tutti, o in parte, quegli elementi, mutandone anche l'ordine, per modo che si presentano alla nostra mente nuovi gruppi. Ciò che è nuovo è l'ordine e l'aggregazione degli elementi, non questi che non possono essere creati dal nulla (*ex nihilo nihil*). Affinché si formino nella nostra mente i nuovi prodotti dell'immaginazione creatrice è necessario, prima di tutto, che i blocchi della memoria che contengono gli elementi esperiti nel passato si disgreghino, per consentire la costruzione di nuovi blocchi.⁴⁰

³⁷ È la "relazione di equivalenza" di cui precedentemente si è trattato: la similarità fra classi.

³⁸ In questo senso, mi sembra più appropriato il termine "numeri naturali" alla serie 1, 2, 3,... piuttosto che alla serie 0, 1, 2, 3... in quanto l'idea dello zero come numero non è affatto naturale (ovvero spontanea), come lo dimostra il fatto che soltanto nel secolo VII l'umanità è pervenuta ad acquisire lo zero come numero. Fu Brahmagupta, matematico indiano del VII secolo, il primo a definire lo zero (chiamato *shunya*) non solo come segnaposto vuoto, ma come numero, nel suo trattato *Brahmasphutasiddhanta* (628 d.C.).

³⁹ Qualunque processo di astrazione coinvolge necessariamente l'immaginazione.

⁴⁰ «Ogni atto di creazione è, prima di tutto, un atto di distruzione», diceva Pablo Picasso. Non

Quali sono i processi psicologici che consentono il disgregarsi dei ricordi delle esperienze passate? La psicologia ne ha individuati molti, ma quello di nostro interesse per l'argomento trattato è senz'altro *l'interferenza delle associazioni, consistente nel fatto che uno stesso elemento si trova associato ad altri elementi in gruppi diversi e per tale ragione si può prenderne coscienza come entità a se stante*:

Se noi avessimo sentito solo il freddo toccando la neve, e li avessimo sempre percepiti insieme, freddo e neve nella nostra coscienza si unirebbero in un'associazione indissolubile (Aliotta, 1930, p. 10).

Possiamo, invece, avere l'idea di freddo svincolata dall'idea di neve perché nelle nostre esperienze e nei nostri ricordi la sensazione di freddo si trova associata ad altri oggetti diversi. Questo salto della mente dalle molteplici specificità del concreto (in cui il freddo si manifesta) all'essenza del fenomeno (l'idea del freddo) non è altro che l'intuizione eidetica della fenomenologia di Husserl.

Gli elementi o immagini delle nostre esperienze passate, così disgregati, sono poi riaggregati dalla nostra immaginazione creatrice in nuovi gruppi, con vari meccanismi, di cui il più vigoroso è la *somiglianza*, che, quando è debole, chiamiamo *analogia* ed è uno dei motivi creatori più diffusi e potenti dell'immaginazione scientifica. Molte scoperte scientifiche si sono presentate come certezze psicologiche alla mente degli scienziati proprio per analogia, che spesso diventa "simmetria", soddisfacendo esigenze di gusto estetico simili a quelle che erroneamente si ritengono esclusive dell'artista.

3.3.1 Immaginazione creatrice e intuizione eidetica nella formazione del concetto di numero

È dunque l'immaginazione creatrice, con l'interferenza delle associazioni e l'analogia, che consente prima di disgregare e poi di riaggregare nella nostra mente i ricordi delle particolari coppie esperite nel passato, rendendo così possibile l'immaginazione di nuove coppie non ancora esperite. Come nel caso della neve e del freddo, se alla mia mente si presentasse sempre e soltanto l'immagine di "una" coppia di mele, l'idea del numero due coinciderebbe con "quella coppia di

necessariamente tutte le esperienze del passato, raccolte nei nostri blocchi di memoria, sono riutilizzate per costruire nuovi aggregati, perché «il dissolversi del ricordo favorisce l'invenzione fantastica» (Aliotta, 1930, p. 9) Per creare qualcosa di nuovo occorre ricordare, ma non tutto; per evolversi occorre in parte dimenticare. Le diadi memoria-dimenticanza e distruzione-costruzione, che sono alla radice della creatività, sono nella coscienza di molti creativi. Lo scrittore Jorge Luis Borges affermava: «Il lavoro creativo è sospeso tra la memoria e l'oblio», e lo scrittore Andrej Longo: «Devi riuscire a vedere e a rubare ciò che hai visto. Il vero atto creativo è una specie di furto con destrezza».

mele”. Invece, si presentano alla mia mente anche coppie di altre mele e coppie di piccioni, d'alberi, di quaderni e così via, per cui riesco a *dissociare* la pluralità⁴¹ delle particolari coppie esperite sia dalla molteplicità delle coppie (una, due, tre...coppie) sia dalla natura degli oggetti delle coppie. In altri termini, poiché nei miei ricordi la corrispondenza biunivoca fra coppie interessa oggetti di tipo diverso, per interferenza delle associazioni, essa si “separa” dalla loro specificità e per analogia mi predispone a considerare possibile quella stessa corrispondenza biunivoca fra nuovi tipi di oggetti non ancora realizzati o esperiti. L'interferenza delle associazioni (*dissociazione psichica*) e l'analogia (*sintesi psichica*) sono dunque i due processi psichici opposti e complementari che permettono di ampliare l'esperienza empirica a casi non concretamente attuati, consentendomi di formarmi il concetto di due senza dovere esperire tutte le possibili coppie.

Questa analisi, che definisco psicologica, in realtà coincide con quella che Husserl definisce gnoseologica nella sua indagine fenomenologica in cui analizza il "fenomeno numero". Essa coincide sostanzialmente con l'intuizione eidetica della fenomenologia di Husserl. Partendo dalle limitate esperienze sensoriali delle coppie di oggetti che è possibile esperire, la mente dell'uomo si libera dal legame con i singoli casi concreti, per cogliere l'essenza generale del "fenomeno numero due", quando immagina di variare mentalmente l'oggetto (mela, libro, città, ecc.) e si accorge che rimane la presenza di una comune proprietà: la corrispondenza biunivoca fra le coppie, identificata con il concetto di equinumerosità. Questa stessa analisi, valida per ogni altra classe di "oggetti" (terzetti, quartetti, ecc.), la possiamo considerare psicologica per Aliotta e fenomenologica per Husserl.

4 L'esperienza sensoriale non è sufficiente

L'esperienza sensoriale non è sufficiente per poter acquisire il concetto di numero nella maggior parte dei casi, per vari motivi.

Sorgono alcune domande: per esempio, nel caso del numero “due” l'esperienza empirica può esaurire tutti i possibili casi di coppie e veramente è necessaria per formarmi il concetto di un qualunque altro numero naturale, per esempio “un milione”? La risposta è ovviamente no per entrambe le domande: posso avere il concetto di due senza avere esperito tutte le possibili coppie di oggetti diversi (operazione peraltro impossibile per varie ragioni) e posso avere il concetto di “un milione” senza avere esperito un milione di oggetti materiali in “maniera distinta” e ora di un genere, ora di un altro, come vorrebbe il processo di astrazione dianzi illustrato.

⁴¹ Ancora non si può parlare di numero, poiché l'idea di numero è il risultato proprio di tale dissociazione e della successiva sintesi psichica.

L'apprendimento del concetto di numero: un approccio psico-fenomenologico

Allora, come posso arrivare al concetto di numero astratto “due” in un caso e a quello di “un milione” nell’altro?

Per i matematici, come già detto, la questione non esiste, in quanto per l’esistenza nel mondo matematico del numero cardinale è sufficiente la sua definizione “attuale” data da Frege: classe di classi simili.

La questione, invece, ha senso per l’apprendimento, che pone in campo la psicologia ma anche la fenomenologia di Husserl, che si allontana dalla psicologia dopo la *Philosophie der Arithmetik*, e analizza gli atti della psiche sotto il profilo gnoseologico. L’apprendimento non si nutre di “definizioni logiche” ma degli atti della nostra psiche, che ci fanno acquisire i concetti, che “poi” potranno formalizzarsi dal punto di vista logico, come acutamente osservava Bruno de Finetti (1966, p. 10362):

...anche se di per sé la matematica è semplicemente logica, essa non esiste per noi e per gli studenti se non in funzione dei processi in minima parte logici e ben più psicologici in cui ne consiste l’apprendimento, l’apprezzamento, l’interesse, l’assimilazione, od invece la repulsione o l’indifferenza.

La definizione di numero di Frege, a ben vedere, perché venga “appresa” non presuppone soltanto l’esperienza empirica ma anche l’immaginazione. In realtà, nella “mia coscienza”, la definizione di numero come insieme di classi simili non è attuale ma “potenziale”: per quanto numerose possano essere le mie esperienze, non riuscirò mai a collezionare “nei miei ricordi e nella mia coscienza” tutte le coppie di oggetti attualmente esistenti e, anche se per assurdo ciò fosse possibile, rimarrebbero pur sempre fuori tutte quelle coppie di oggetti non ancora realizzati materialmente. Dunque, perché possa concepire il numero due come la classe di “tutte” (e soltanto) le coppie, devo lasciare nella mia coscienza la porta aperta per accogliere altre possibili coppie ancora non esperite e nessuno mi può dire quando questo processo d’accoglienza avrà termine. E cosa mi autorizza e predispone a queste future accoglienze se non l’immaginazione creatrice, con i suoi meccanismi di dissociazione psichica e di successiva costituzione di nuove sintesi, processi psichici opposti e complementari che permettono di ampliare virtualmente l’esperienza empirica a casi non concretamente attuati o fisicamente non esperibili, consentendomi di formarmi il concetto di due senza dovere esperire tutte le possibili coppie.

A questo punto è possibile tentare di dare una risposta al secondo quesito: come posso avere l’idea di “un milione” senza dover esperire nessun aggregato di un milione di oggetti? In questo caso occorre un altro principio in aggiunta all’interferenza delle associazioni e all’analogia: il principio di induzione matematica (il quinto degli assiomi di Peano). Secondo tale principio *ogni proprietà dello 0, come anche del successore di ogni numero che abbia quella proprietà, è di tutti i*

numeri, ovvero, in altri termini più espressivi, come osserva Russell: «quel che si può dire di un termine e del suo prossimo vale per il primo e l'ultimo».

Se nell'ambito degli aggregati realmente esperibili "mi convinco" che la definizione di numero, per esempio, vale per una coppia e anche per una terna, quindi per una quaterna e così via fin quando arrivo al caso limite da me esperibile, mi convinco non altro che della validità del principio di induzione matematica per la definizione di numero. Ancora una volta l'immaginazione creatrice, con l'interferenza delle associazioni e l'analogia, finisce con il farmi accettare senza alcun dubbio psicologico l'idea del numero "un milione", perché inconsciamente ho verificato che quella definizione generale di numero si è ripetuta valida ad ogni passaggio da un aggregato a un altro "successivo", contenente una unità in più rispetto al precedente. È dunque l'immaginazione «organica, disciplinata, coerente, concreta, costruttiva» che, come diceva Bruno de Finetti, ci consente di avere una visione panoramica di «tutte le soluzioni possibili e delle circostanze per cui differiscono e da cui sono determinate»⁴²

5 Conclusioni

La definizione di numero cardinale data da Gottlob Frege nel 1884, «*il numero naturale che spetta al concetto F non è altro che l'estensione del concetto "ugualmente numeroso" a F* », può essere rivisitata in termini più rigorosi di "passaggio al quoziente" dell'algebra astratta: un numero naturale (cardinale) è una classe di classi equinumerose (o simili o equipotenti). Essa è concepita come un unico atto di pensiero, caratterizzato da una completa aseità, come tutte le asserzioni della matematica.

Diversa è invece la prospettiva di chi debba apprendere e "accettare" dentro di sé, cioè interiorizzare, il concetto di numero, operazione che nasce dall'esperienza e quindi è penalizzata dai suoi limiti e dal suo svolgersi inevitabilmente nel tempo. Nell'articolo l'autore interpreta il processo di apprendimento del concetto di numero naturale, nell'uomo, come una raffinatissima astrazione di una proprietà generale da una moltitudine di casi concreti "diversi", ma "uguali" nel possedere tutti la stessa proprietà, operando un salto della mente dal concreto all'essenza del fenomeno "numero", tipico dell'intuizione eidetica di Husserl. Tale processo di astrazione, che nell'uomo avviene in maniera naturale fin dall'infanzia, è identificato dall'autore con lo stesso processo di astrazione del passaggio al quoziente che è presente nella definizione di numero di Frege ed è realizzato grazie ai processi psichici, opposti e complementari, di interferenza delle associazioni e

⁴²Lettera di Bruno de Finetti a Gino de Finetti del 14 gennaio 1940. Inedito di proprietà di Fulvia de Finetti. In Fulvia de Finetti, Luca Nicotra, *Bruno de Finetti, un matematico scomodo*, Belforte, Livorno, 2008, p. 141.

L'apprendimento del concetto di numero: un approccio psico-fenomenologico

analogia, già trattati da Antonio Aliotta nel 1930. In tal modo, la definizione fregeana di numero, formalizzata in termini moderni di algebra astratta, non appare semplicemente come una “assunzione matematica” per definire il concetto di numero, bensì la traduzione in termini matematici di un processo reale che avviene naturalmente nell'uomo in una dimensione prelogica, tipica della fenomenologia husserliana.

La formazione del concetto di numero trae origine dall'esperienza ma deve essere supportata anche e soprattutto dai processi psichici dell'interferenza delle associazioni e dell'analogia integrati con il principio di induzione matematica. Soltanto in tal modo è possibile ampliare virtualmente l'esperienza empirica del numero ai casi di numerosità comunque grande, consentendoci di “acquisire” il concetto di numero nella stragrande maggioranza dei casi in cui l'esperienza empirica diretta non è possibile.

Senza l'esperienza del concreto, dunque non sarebbe possibile conquistare l'alta vetta del concetto di numero, base per gran parte della matematica. Ciò ci indurrebbe a concludere che dall'esperienza è nato il concetto di numero. Ma è proprio così? O forse non è l'esperienza soltanto lo strumento che ci aiuta a prendere coscienza di un concetto innato e latente in noi? Si ripresenta per il numero lo stesso interrogativo che vale per tutta la matematica: il concetto di numero e tutta la matematica sono una libera creazione del nostro pensiero o, invece, hanno un'esistenza oggettiva e sono quindi, come diceva Galilei, il linguaggio della Natura?

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto (*Il Saggiatore*).

Nessuno finora ha potuto dare una risposta certa e definitiva. Ma se la matematica fosse soltanto un prodotto del nostro pensiero, come si spiega il ruolo maieutico dell'esperienza? Può veramente la Natura aiutare a partorire nell'uomo ciò che invece già non è in essa allo stato latente? In tal caso non ci resta che unirici allo stupore espresso da Albert Einstein:

La matematica non smetterà mai di stupirmi: un prodotto della libera immaginazione umana che corrisponde esattamente alla realtà.

Bibliografia

ADRIANO Andrea (2010-2011). *La cognizione numerica pre-verbale: ruolo dei fattori contestuali nell'attivazione del subitizing nei piccoli numeri*. Tesi di laurea magistrale in Psicologia Clinica, a.a. 2010-2011. Università degli Studi di Padova.

AGRILLO C., BISAZZA A. (2017). "Understanding the origin of Number Sense: A review of fish studies". In «*Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*», 373(1740), 20160511, DOI:10.1098/rstb.2016.0511.

ALES BELLO Angela (2025). *Husserl e le scienze*. Collana "Il filo della conoscenza". Bologna: Inriga edizioni.

ALIOTTA Antonio (1930). *Il problema estetico e didattico dell'arte*. Napoli: Francesco Perrella.

ANDRIOLO Federica (2022-2023). *La discriminazione di quantità nel cane domestico (Canis familiaris): il ruolo delle esperienze precedenti in un compito di scelta spontanea*. Tesi di Laurea Magistrale in Neuroscienze e Riabilitazione Neuropsicologica, a.a. 2022-2023. Università degli Studi di Padova.

BAITI Paolo, FREDDI Lorenzo (2005). *Corso integrato di Matematica per le scienze naturali ed applicate*. Materiale integrativo. Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Udine ([baitilfreddi]@dimi.uniud.it).

BARSOTTI Iacopo (1968). *Appunti di Algebra*. Bologna: Zanichelli.

BERTOLIN Chiara (2025-2026). *Meccanismi percettivi nell'elaborazione numerica non simbolica: uno studio sui numeri primi nei pulcini di pollo domestico*. Tesi di laurea magistrale in Psicologia Cognitiva Applicata, a.a. 2025-2026. Università degli Studi di Padova.

BLAŽEK, V. (1998). "Indo-European eight". In «*Historische Sprachforschung*», 111, 2, pp. 209-224.

BYRNE R. (1995). *The Thinking Ape: Evolutionary Origins of Intelligence*. Oxford University Press.

BRANNON Elizabeth M., ROITMAN Jamie D. (2003). "Nonverbal representations of time and number in animals and human infants". In W. H. Meck (Ed.), *Functional and neural mechanisms of interval timing* (pp. 143–182). CRC Press/Routledge/Taylor & Francis Group, DOI:10.1201/9780203009574.ch6.

BURR David, ROSS John (2008). "A Visual Sense of Number". In «*Current Biology*», 18, 425–428, March 25, 2008, DOI:10.1016/j.cub.2008.02.052.

CANTLON J. F. (2012). "Math, monkeys, and the developing brain". In «*Proceedings of the National Academy of Sciences*», 109 (Supplement 1), 10725–10732, DOI:10.1073/pnas.1201893109.

CANTOR Georg (1895). "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" (*Contribuzione a una fondazione della teoria transfinita degli insiemi*). Articolo Primo. In «*Mathematische Annalen*» Bd. XLVI.

CANTOR Georg (1897). "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" (*Contribuzione a una fondazione della teoria transfinita degli insiemi*). Articolo Secondo. In «*Mathematische Annalen*».

CAREY S. (1998). "Knowledge of Number: Its Evolution and Ontogeny". In «*Science*», 282, pp. 641-642.

CARRUBA O. (1979). "Sui numerali da '1' a '5' in anatolico e indoeuropeo". In Brogyanyi, B. (1979, ed.), *Studies in diachronic, synchronic, and typological linguistics. Festschrift for Oswald Szemerényi*. Vol. 1, Amsterdam: Benjamins, pp. 191-203.

CHAN Eugene (2013). *Numeral Systems of the World's Languages*, lingweb.eva.mpg.de/channumerals/.

CERRI Adriano (2013). *Riflessi linguistici del subitizing*. Dipartimento di Filologia, Letteratura e Linguistica. Università degli Studi di Pisa. In: «*Studi e Saggi Linguistici*» LI (1) 2013, pp. 53-81 .
<https://www.studiesagginguistici.it/ssl/article/view/101>.

CONANT Levi L. (1896). *The number Concept: Its Origin and Development*. New York: Mac-millan & C., <http://www.gutenberg.org/ebooks/16449>.

CORBETT G.G. (2000). *Number*. Cambridge: Cambridge University Press.

COOLEN Ilse E. J. I., RIGGS Kevin J., BUGLER Myfanwy, CASTRONOVO Julie (2022). "The approximate number system and mathematics achievement: it's complicated. A thorough investigation of different ANS measures and executive functions in mathematics achievement in children". In «*Journal of Cognitive Psychology*», DOI: 10.1080/20445911.2022.2044338.

COWAN N. (2000). "The Magical number 4 in Short-term Memory: A Reconsideration of Mental Storage Capacity". In «*Behavioral and Brain Sciences*», 24, 1, pp. 87-114.

CUTINI Simone, SCATTURIN Pietro, MORO Sara Basso, Zorzi Marco (2014). "Are the neural correlates of subitizing and estimation dissociable? An fNIRS investigation". In «*NeuroImage*», 15 January 2014.

CREVATIN F. (1995). "Numeri tra lingua, cognizione e cultura". In «*AIΩN*», 17, pp. 107-120.

DANTZIG Tobias (1930). *Number: the language of science (A critical survey written for the cultured non-mathematician)*. PLUME. Penguin Group. USA.

DE FINETTI Bruno (1966). "Sull'insegnamento della matematica". In «*Homo Faber*», anno XVII, n. 164.

DE FINETTI Bruno (1974). "Interventi al Convegno della C.I.I.M, Viareggio 24-26 ottobre 1974". In «*Notiziario del Bollettino della Unione Matematica Italiana*», dicembre 1974.

DE FINETTI Fulvia, NICOTRA Luca (2008). *Bruno de Finetti, un matematico scomodo*. Livorno: Belforte.

- DEHAENE S. (1997). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics*. New York: Oxford University Press.
- DAVIS H., PÉRUSSE R. (1988). “Numerical competence in animals: Definitional issues, current evidence, and a new research agenda”. In «*Behavioral and Brain Sciences*», 11(4), 561–579. DOI:10.1017/S0140525X00053437.
- ENRIQUES Federigo (1912). “I numeri reali”. In *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, vol. I, Bologna: Zanichelli.
- FEIGENSON L., CAREY S., HAUSER M. (2002). “The representations underlying infants’ choice of more: Object files versus analog magnitudes”. In «*Psychological Science*», 13(2), 150–156. DOI:10.1111/1467-9280.00427.
- FEIGENSON L., DEHAENE S., SPELKE E. (2004). “Core systems of number”. In: «*Trends in Cognitive Sciences*», 8(7), 307–314. DOI:10.1016/j.tics.2004.05.002.
- FEIGENSON L., CAREY S. (2005). “On the limits of infants’ quantification of small object arrays”. In «*Cognition*», 97(3), 295–313. DOI:10.1016/j.cognition.2004.09.010.
- FISCHER J.-P. (1992). “Subitizing: The Discontinuity After Three”. In Bideaud, J., Meljac, C. e Fischer, J. P. (1992, eds.), *Pathways to Number: Children’s Developing Numerical Abilities*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum, pp. 191–208.
- FRAJESE Attilio (1968). *Introduzione elementare alla matematica moderna*. Firenze: Le Monnier.
- FREGE Gottlob (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik (I fondamenti dell’Aritmetica)*. Breslau: Verlag von Wilhelm Koebner.
- FREGE Gottlob (1995, [1893]). *Le leggi fondamentali dell’Aritmetica*, a cura di Carlo Cellucci. Roma: Edizioni Teknos, 1995; Orig. *Grundgesetze der Arithmetik*. Jena: Verlag von Hermann Pohle’, 1893.
- IFRAH Georges (1989, [1985]). *Storia universale dei numeri*. Milano: Mondadori, 1989; Orig. *Les chiffres ou l’histoire d’une grande invention*. Parigi: Robert Laffont, 1985.
- GALILEI Galileo (1623). *Il Saggiatore*.
- GALMARINI Chiara (2022-2023). *Quale associazione esiste fra l’aritmetica e altre abilità numeriche precoci nei toddlers? Uno studio*. Tesi di laurea magistrale in Psicologia dello Sviluppo e dell’Educazione, a.a. 2022-2023. Università degli Studi di Padova.
- GASTALDELLO Gloria (2022-2023). *Il ruolo del Number Sense nello sviluppo della comprensione del numero: un’analisi qualitativa*. Tesi di laurea magistrale in Neuroscienze e Riabilitazione Neuropsicologica, a.a. 2022-2023. Università degli Studi di Padova, <https://thesis.unipd.it/handle/20.500.12608/48194>.
- GELMAN R e GALLISTEL C.R. (1978). *The Child’s understanding of number*. Cambridge: Harvard University Press.

GELMAN R e GALLISTEL C.R. (1992). "Preverbal and verbal counting and computation". In «*Cognition*», 44, pp. 43-74.

GONDA J. (1953). *Reflections on the numerals "one" and "two" in Ancient Indo-European Languages*. Utrecht: N.V. Oosthoek's Uitgevers – Mij, .

HURFORD J.R. (1987). *Language and Number: The Emergence of a Cognitive System*. Oxford: Basil Blackwell.

HUSSERL Edmund (2001, [1891]). *Filosofia dell'aritmetica* (trad. it di G. Leghissa). Milano: Bompiani, 2001; Orig. *Philosophie der Arithmetik*, Halle-Saale.C. E..M. Pfeffer (Robert Stricker), 1891.

LIANG T., PENG R.C., RONG K. L., LI J. X., KE Y., YUNG W. H. (2024). "Disparate processing of numerosity and associated continuous magnitudes in rats". In «*Science Advances*», 10(8). DOI:10.1126/sciadv.adj2566.

LOMBARDO RADICE Lucio (1965). *Istituzioni di algebra astratta*. Milano: Feltrinelli.

LORENZI Elena, KOBYLKOV Dmitry, VALLORTIGARA Giorgio (2025). "Is there an innate sense of number in the brain?". In «*Cerebral Cortex*», 2025, 35, bhaf004. DOI:10.1093/cercor/bhaf004

LUCANGELI Daniela, ZORZI Marco, CABRELE Silvia (2005). "Lo sviluppo della rappresentazione dei numeri". In «*Età Evolutiva*» 6-10-2005. Università degli Studi di Padova, https://ccnl.psy.unipd.it/publications/publications_folder/lo-sviluppo-della-rappresentazione-dei-numeri.

KOEHLER Otto (1941). "Vom Erlernen unbenannter Anzahlen bei Vögeln" (Sull'apprendimento di quantità senza nome negli uccelli). In «*Naturwissenschaften*» 29, 201–218 (1941). DOI:10.1007/BF01481755.

KOEHLER Otto (1943). "Zähl-Versuche an einem Kolkraben und Vergleichsversuche an Menschen". In «*Zeitschrift für Tierpsychologie*», 5: 575-712. DOI:10.1111/j.1439-0310.1943.tb00665.x.

KOEHLER Otto (1949). "Vorsprachliches Denken und Zählen der Vögel" (Il pensiero pre-linguistico e il conteggio degli uccelli). In Erwin Stresemann, *Ornithologie als biologische Wissenschaft (L'ornitologia come scienza biologica)*. Heidelberg: Winter Universitätsverlag.

MANDLER G., SHEBO B.J. (1982). "Subitizing: An analysis of its component processes". In «*Journal of Experimental Psychology*», 111: 1-22.

MECK W.H., CHURCH R.M. (1983). "A mode control model of counting and timing processes". In «*Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes*», 9: 320-334.

MESCHKOWSKI Herbert (1964, [1960]). *Mutamenti nel pensiero matematico*. Torino: Boringhieri. Ed. Orig. *Wandlungen des mathematischen Denkens*, Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1960.

NICOTRA Luca (2013). "L'interferenza delle associazioni e il concetto di numero". In «*Il Contributo*», 2013, N. 1-2.

NICOTRA Luca (2020). "Definizione per classi della temperatura". In «*Periodico di Matematica*» Anno 35, serie IV, Vol. II(1), pp.25-52, https://www.afsu.it/wp-content/uploads/2020/11/2-L.Nicotra-Periodico-di-Matematica-IV-Vol.-II-1_25-52.pdf.

NICOTRA Luca (2025). "Il passaggio al quoziente e le definizioni per classi". In: «*Periodico di Matematica*», Anno 40, Serie.IV, Vol. VII (3), pp. 7-34. DOI:10.53159/PdM(IV).v7n3.160.

NIEDER A. (2021). "The evolutionary history of brains for numbers". In «*Trends in Cognitive Sciences*», 25(7), 608-621, DOI:10.1016/j.tics.2021.03.012.

ODIC Darko, STARR Ariel (2018). "An Introduction to the Approximate Number System". In «*Child Development Perspectives*», Volume 12, Issue 4, December 2018, Pages 223–229, DOI:10.1111/cdep.12288.

PASTORE Nicholas (1961a). "Number discrimination in the goldfinch". In «*Journal of Comparative and Physiological Psychology*», 54(4), 459–464.

PASTORE Nicholas (1961b). "Number Sense and 'Counting' Ability in the Canary". In «*Zeitschrift Für Tierpsychologie*», 18(5), 561–573. DOI:10.1111/j.1439-0310.1961.tb00242.x.

PIAZZA M. (2010). "Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations". In «*Trends in Cognitive Sciences*», 14(12), 542-551. DOI:10.1016/j.tics.2010.09.008

PYLYSHYN Z., STORM R.W. (1988). "Tracking multiple independent targets: Evidence for a parallel tracking mechanism". In «*Spatial Vision*», 3: 179-197.

PAHL M., SI A., ZHANG S. (2013). "Numerical cognition in bees and other insects". In «*Frontiers in Psychology*», 4, Art162. DOI:10.3389/fpsyg.2013.00162.

PLATONE Giulio (1969). "La definizione nel contesto linguistico e scientifico". I parte in «*Archimede*» Anno XXI, n. 3, pp. 113-128; II parte in «*Archimede*» Anno XXI, n. 4-5, pp. 172-183.

PLATONE Giulio (1970). "La definizione nel contesto linguistico e scientifico". III parte in «*Archimede*» Anno XXII, n. 3-4, pp. 121-138.

REVKIN S.K., PIAZZA M., IZARD V., COHEN L., DEHAENE S. (2008). "Does subitizing reflect numerical estimation?". In «*Psychological Science*», 19: 607-614.

RUSSELL Bertrand (1928). *Sceptical Essays*. Woking: Unwin Brothers Ltd.

RUSSELL Bertrand (1962, [1919]). *Introduzione alla filosofia matematica*. Milano: Longanesi, 1962; Orig. *Introduction to mathematical philosophy*. London: George Allen & Unwin, Ltd., 1919.

RUSSELL Bertrand (1971, [1903]). *I principi della matematica*. Roma: Newton Compton, 1971; Orig. *The Principles of Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1903.

STABLER Edward (1970). *Il pensiero matematico*. Torino: Boringhieri.

TRACUZZI Paola (2024-2025). *Discriminazione numerica in infanti tra 5 e 8 mesi: uno studio sperimentale*. Tesi di Laurea Magistrale in Psicologia dello Sviluppo e dell'Educazione, a.a. 2024-2025. Università degli Studi di Padova.

VALLORTIGARA G., REGOLIN L., CHIANDETTI C., RUGANI R. (2010). "Rudiments of mind: Insights through the chick model on number and space cognition in animals". In «*Comparative Cognition & Behavior Reviews*», 5, 78–99. DOI:10.3819/ccbr.2010.50004.

VANMARLE K., CHU F.W., MOU Y., SEOK J.H., ROUDER J., GEARY D.C. (2018). "Attaching meaning to the number words: contributions of the object tracking and approximate number systems". In «*Developmental Science*», vol. 21: e12495. DOI:10.1111/desc.12495.

VUOKKO Elli, NIEMIVIRTA Markku, HELENIUS Päivi (2013). "Cortical activation patterns during subitizing and counting". In «*Brain Research*», Volume 1497, 25 February 2013, Pages 40-52, DOI:10.1016/j.brainres.2012.12.019.

WHITEHEAD Alfred North, RUSSELL Bertrand (1910-1913). *Principia Mathematica*, Vol 1 (1910), Vol. 2 (1912), Vol. 3 (1913). Cambridge: Cambridge University Press, 1910-1913.

WISHON Donovan, LINSKY Bernard (eds.) (2015). *Acquaintance, Knowledge, and Logic: New Essays on Bertrand Russell's The Problems of Philosophy*, CSLI Publications, 2015. Rev. by Consuelo Preti, The College of New Jersey 2016.02.22. Notre Dame Philosophical Reviews, Department of Philosophy, 100 Malloy Hall Notre Dame. <https://ndpr.nd.edu/reviews/acquaintance-knowledge-and-logic-new-essays-on-bertrand-russells-the-problems-of-philosophy/>.

WYNN Karen (1992). "Children's Acquisition of the Number Words and the Counting System". In «*Cognitive Psychology*» 24, 220-251.

XUA Fei, SPELKE Elizabeth S. (2000). "Large number discrimination in 6-month-old infants". In «*Cognition*» 74 (2000), www.elsevier.com/locate/cognit.