

UN NUOVO ALGORITMO PER LA SOLUZIONE SIMBOLICA E NUMERICA DI UN' AMPIA CLASSE DI MODELLI FISICI

Marco FACCIO, Giuseppe FERRI

SOMMARIO.

Viene presentato un nuovo metodo che consente la risoluzione di un'ampia classe di modelli fisici attraverso la rapida e diretta determinazione delle grandezze caratteristiche di un particolare tipo di circuito elettrico, la rete a scala, a cui tali modelli vengono ricondotti. L'algoritmo viene illustrato per mezzo di concreti esempi simbolici e numerici.

INTRODUZIONE.

Lo studio del comportamento di alcuni modelli fisici connessi con la propagazione di un segnale in mezzi di varia natura puo' essere ricondotto a quello di un opportuno modello equivalente che si identifica con un particolare circuito elettrico chiamato " rete a scala " .

Alcuni esempi di tali modelli fisici sono: smorzatori meccanici, filtri elettrici, reti neuronali analogiche, amplificatori HF di tipo distribuito, linee elettriche di trasmissione dell'informazione, interconnessioni elettriche nei circuiti integrati, e cosi' via.

Nel presente lavoro viene mostrata, attraverso l'uso di alcuni significativi esempi, l'applicazione di un nuovo metodo per la soluzione di tali modelli. Esso consente la scrittura diretta delle grandezze che caratterizzano univocamente la rete a scala evitando il tradizionale ed oneroso utilizzo dei procedimenti di calcolo basati sui noti teoremi circuitali.

L'algoritmo proposto consente inoltre di ottenere le

espressioni delle grandezze sia dal punto di vista simbolico che numerico e di trattare in modo univoco reti di qualsiasi lunghezza (anche con un infinito numero di celle).

Tale metodo, sviluppato presso il Dipartimento di Ingegneria Elettrica dell'Universita' dell'Aquila, permette di esprimere le caratteristiche elettriche della rete per mezzo di un parametro (chiamato fattore di cella) caratterizzante completamente la singola cella e dei coefficienti di due nuovi triangoli numerici, chiamati DFF e DFFz, all'uopo costruiti [1]. Questi ultimi presentano anche interessanti proprieta' matematiche e stretti legami con i numeri di Fibonacci.

A conclusione vengono illustrate le espressioni di alcune grandezze elettriche sia nel caso di rete di lunghezza finita che semi-infinita con alcune applicazioni numeriche.

1. SMORZATORE MECCANICO.

A titolo di esempio si consideri un ricorrente problema legato a misure di spostamenti micro e nanometrici, quali ad esempio misure interferometriche o di correnti di tunnel. Per effettuare un tale tipo di misura e' necessario che i supporti della catena di misura siano immuni da vibrazioni in un ampio campo di frequenze connesso con la misura. E' necessario quindi ottenere opportuni smorzatori che filtrino le inevitabili vibrazioni ambientali di almeno 3 ordini di grandezza (circa 60 dB) in un ampio intorno del range di frequenza di misura. Tali smorzatori possono essere realizzati attraverso la sovrapposizione di piu' stadi ciascuno dei quali copre tutta la banda con una discreta attenuazione.

Il sistema risultante e' presentato in fig.1 :

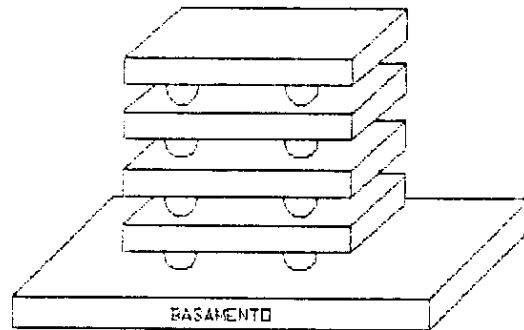


fig.1

Il modello matematico del sistema meccanico e' espresso dall'equazione del moto armonico smorzato (con attrito) :

$$m x'' + b x' + K x = 0 \quad (1.1)$$

Attraverso l'equivalenza meccanico-elettrica (tab.1) si ottiene il corrispondente modello circuitale di fig.2 :

molla	(1/K)	<=>	capacita' C
massa	m	<=>	induttanza L
attrito (cost.smorzam.)	b	<=>	resistenza R
spostamento	x	<=>	carica Q
velocita'	v	<=>	corrente I

tab. 1

Lo studio della risposta in frequenza del sistema presuppone la determinazione della funzione di trasferimento. Tale determinazione risultera' certamente piu' agevole in ambito elettrico che in quello meccanico, ma, comunque, essa

risulta alquanto articolata, dato il numero di stadi ed il tipo di accoppiamento tra di loro.

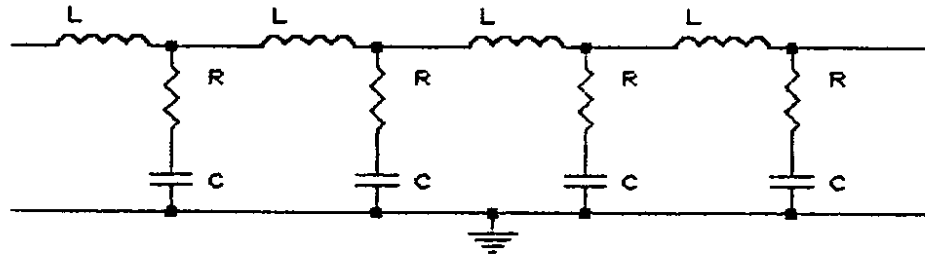


fig. 2

2. RETE NEURONALE ANALOGICA.

Un esempio significativo di elaborazione dell'informazione in modo distribuito con una rete neurale analogica può essere quello che sottende ad un tipo di "visione artificiale" realizzato per mezzo della "retina siliconica". [2]

In fig. 3 è mostrato un disegno approssimato della sezione verticale di una retina di primati. Si possono riconoscere alcuni blocchi funzionali strategici quali: sensore luminoso (fotorecettore R), alcuni elementi di collegamento orizzontali (H) e le celle gangliari (G) per la trasmissione ai livelli gerarchici superiori.

Una proposta di implementazione su silicio con tecnologia VLSI è mostrata in fig. 4 dove lo strato di celle orizzontali (H) è rappresentato dalla rete resistiva

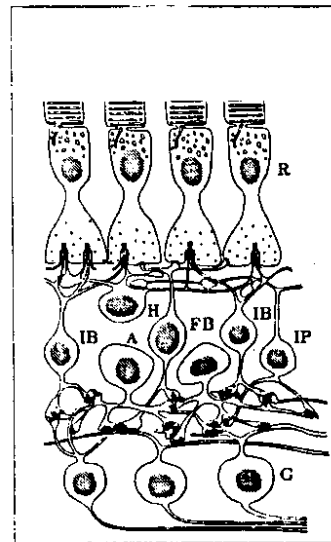


fig. 3

con collegamento a celle di tipo esagonale e dove ogni nodo svolge la parte attiva di sensing dell'evento luminoso.

In fig.5 e' mostrato lo schema a blocchi del nodo attivo.

In esso possono riconoscersi un fototransistor (P), realizzato come in fig. 6a, ed alcuni elementi di elaborazione del segnale. Il blocco 1 rappresenta un inseguitore-integratore (capace di non caricare elettricamente la rete resistiva e di eseguire medie temporali), mentre il blocco 2 (fig.6b) rappresenta un amplificatore a transconduttanza il quale fornisce il corrispondente segnale in corrente che, elaborato dagli strati successivi, permettera' la ricostruzione dell'immagine.

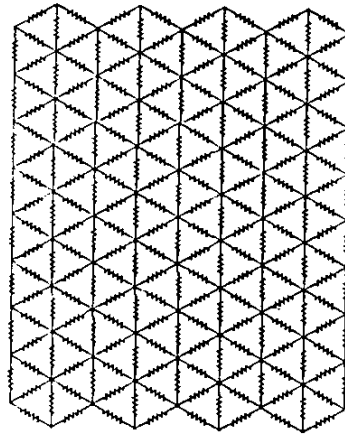


fig. 4

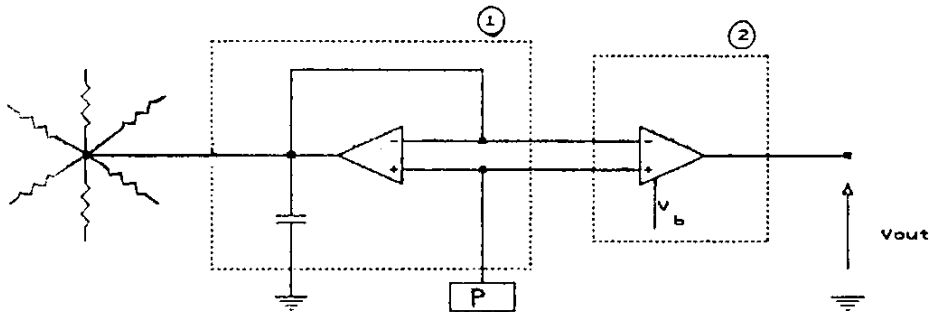
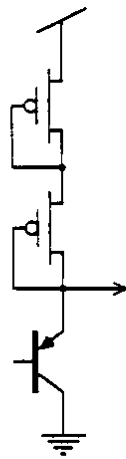
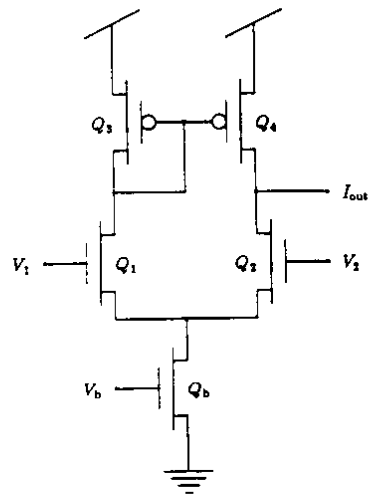


fig.5



a)



b)

fig. 6

Nelle reti neuronali di tipo analogico le elaborazioni vengono distribuite nell'architettura del sistema (organizzata in strati gerarchici) e realizzate attraverso opportune soluzioni circuitali peculiari di ogni strato.

Tra le prime elaborazioni da svolgere, particolarmente significative sono le funzioni di media globale, di media locale e di *smoothing* della consistente massa di segnali disponibili ai fotorecettori.

La media globale su una data area viene ottenuta collegando tra loro le uscite degli inseguitori dei fotorecettori dell'area considerata.

La disposizione circuitale di principio e' mostrata in fig. 7.

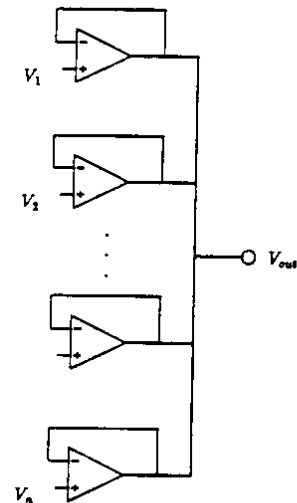


fig. 7

Considerando che ogni amplificatore lavori in zona lineare, l'uscita sara'

$$V_{out} = \frac{\sum_{i=1}^n G_i V_i}{\sum_{i=1}^n G_i} \quad (2.1)$$

La transconduttanza G rappresenta il peso nella media e puo' essere regolato opportunamente dall'esterno per mezzo della V_b di fig.6b. La media locale (ossia il contributo degli $n-1$ nodi sul nodo n -esimo) viene ottenuta attraverso i collegamenti resistivi delle celle orizzontali a struttura esagonale (fig.4).

Data l'articolazione della rete orizzontale, l'impulso luminoso presente ad un nodo interessera' tutti gli altri nodi della rete e, considerata la configurazione elettrica di ogni nodo (fig. 5), l'impulso si propagera' in una rete a scala di tipo resistivo (fig. 8) dove R e' la resistenza di collegamento internodo e G e' la conduttanza verso massa presente ad ogni nodo, coincidente con la transconduttanza dell'amplificatore.

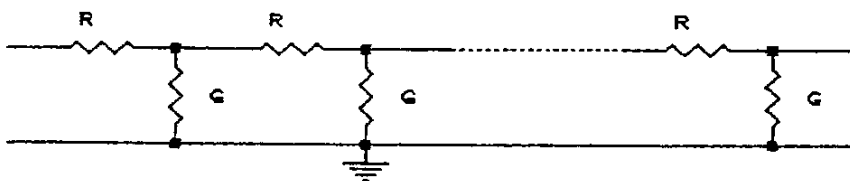


fig. 8

Dato l'elevato numero di nodi e la geometria chiusa della rete di interconnessione, la conseguente rete a scala

risulterà essere una rete discreta di lunghezza semi-infinita.

La propagazione del segnale su tale rete realizza il fenomeno di media locale e, contemporaneamente, quello dello *smoothing* in quanto il segnale si attenuerà lungo la rete con una legge quasi esponenziale.

La determinazione dei potenziali ai nodi e delle correnti nei rami in tale struttura presenta alcune difficoltà dovute alla lunghezza della rete e, di solito, ci si accontenta di soluzioni approssimate, valide sotto restrittive ipotesi di lavoro che impongono vincoli non sempre accettabili sui valori di R e di G . [2]

3. RETE A SCALA.

Le reti a scala (fig. 9) sono reti elettriche formate dalla ripetizione di una cella base costituita da un'impedenza in serie ed una in parallelo.

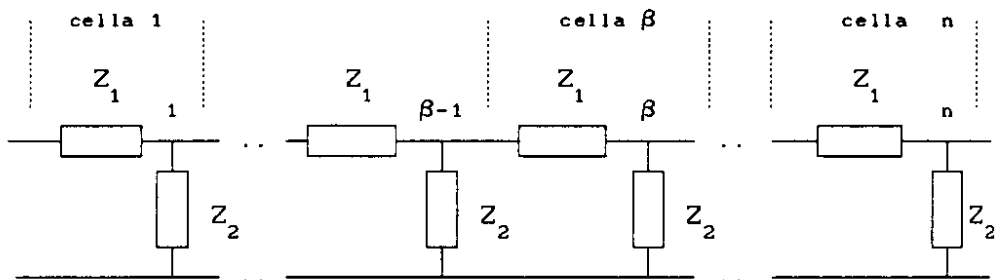


fig.9

In letteratura esistono diversi metodi "ad hoc" che consentono di calcolare le principali caratteristiche elettriche di una rete a scala (funzione di trasferimento, potenziale ai nodi, corrente nei rami, impedenza di ingresso e di uscita, modello equivalente di Thevenin, rapporto

segnale-rumore, matrici di quadripolo e di scattering,...), quali quelli basati sull'applicazione di noti teoremi circuitali, sulla risoluzione di equazioni alle differenze finite o sul metodo della matrice di quadripolo.

Tali metodi tuttavia utilizzano strutture ricorsive che ne limitano la capacita' di elaborazione simbolica o, dal punto di vista numerico, presentano alti tempi di risposta. Inoltre, con tali procedure, risulta pressoché impossibile generalizzare le espressioni al caso di rete semi-infinita.

Una nuova ed esaustiva caratterizzazione di tale rete [1] consente la scrittura diretta di tali grandezze, noti gli elementi che formano la cella elementare ed il numero delle celle in cascata, attraverso la definizione del fattore di cella $K(s)$ (dove s e' la variabile di Laplace) e l'applicazione di due nuovi triangoli numerici, chiamati DFF e DFFz.

Il metodo proposto consente di riportare ad un'unica trattazione la soluzione di tutte le possibili reti con struttura a scala, sia in base al tipo di elemento elettrico che costituisce la cella elementare (il quale puo' essere anche l'impedenza equivalente di una struttura piu' complessa) che in base alla struttura circuitale della cella stessa (ad L, a T, a Π). Inoltre esso fornisce la soluzione cercata sia dal punto di vista simbolico che numerico.

Le espressioni simboliche vengono ottenute con la scrittura immediata dei polinomi caratteristici in $K(s)$ attraverso i coefficienti estratti da DFF e/o DFFz, mentre alla soluzione numerica si accede direttamente, nel caso di reti RR, LL e CC (dove K e' un numero reale), oppure attraverso il valore assunto, per ogni frequenza di interesse, dal modulo delle stesse caratteristiche elettriche.

Con il metodo proposto i tempi di calcolo per l'elaborazione numerica risultano drasticamente ridotti in quanto i parametri della rete vengono espressi in funzione di due sequenze numeriche di cui sono fornite le espressioni in forma ricorsiva e chiusa.

Quest'ultima consente l'estensione dell'analisi al caso di rete semi-infinita. Se K vale 1, infine, tali sequenze diventano numeri di Fibonacci.

3.1. ILLUSTRAZIONE DEL METODO.

Considerata la rete di fig.9 ed individuata la cella elementare di fig.10, si definisce il fattore di cella $K(s)$ come :

$$K(s) = \frac{Z_1(s)}{Z_2(s)}$$

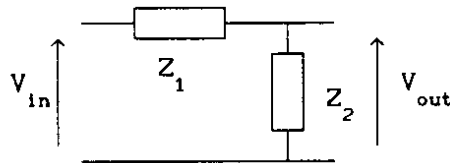


fig.10

Si considerino i seguenti due triangoli numerici :

i \ j	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	3	1		
3	1	6	5	1	
4	1	10	15	7	1
..				

triangolo DFF

i \ j	0	1	2	3	4
0	0				
1	1	0			
2	2	1	0		
3	3	4	1	0	
4	4	10	6	1	0
..				

triangolo DFFz

le cui regole di generazione sono le seguenti :

- triangolo DFF

$$b(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{per } j = 0 \\ 0 & \text{per } j > i \\ b(i-1,j) + \sum_{k=j-1}^{i-1} b(k,j-1) & \text{per } j \leq i, j \neq 1 \end{cases} \quad (3.1)$$

dove $b(i,j)$ rappresenta il termine generico.

- triangolo DFFz

$$c(i,j) = \begin{cases} i & \text{per } j = 0 \\ 0 & \text{per } j \geq i \\ c(i-1,j) + \sum_{k=j-1}^{i-1} c(k,j-1) & \text{per } j < i, j \neq 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

con $c(i,j)$ termine generico di DFFz.

Si osserva che la somma delle righe del triangolo DFF coincide con la sequenza dei numeri di Fibonacci di indice dispari [3] mentre quella del triangolo DFFz e' uguale alla sequenza dei numeri di Fibonacci di ordine pari [4].

E' possibile dimostrare [1] come tutte le caratteristiche elettriche di una rete a scala formata da n celle elementari accoppiate direttamente possano essere scritte applicando i triangoli DFF e DFFz ed il fattore di cella $K(s)$.

Nel seguito si riportano le espressioni simboliche di alcune di esse, rimandando al lavoro [1] per quelle delle altre caratteristiche.

- Potenziale al generico nodo β :

$$V_{\beta} = \frac{\sum_{j=0}^{\alpha} b_j K^j(s)}{\sum_{i=0}^n b_i K^i(s)} V_{in} \quad (3.3)$$

dove : $0 \leq \beta \leq n$; $\alpha = n - \beta$,

b_j = coefficienti della riga α del triangolo DFF,

b_i = coefficienti della riga n del triangolo DFF.

- Corrente nei rami :

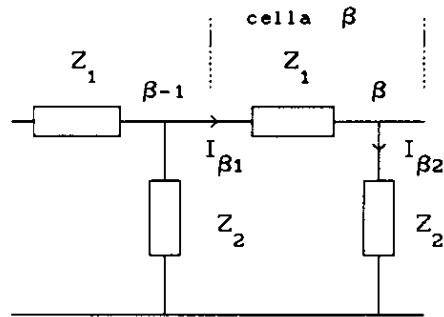


fig. 11

- Corrente che scorre nel ramo serie della cella β :

$$I_{\beta 1} = \frac{1}{Z_1} \frac{\sum_{j=0}^{\alpha+1} c_j K^{j+1}(s)}{\sum_{i=1}^n b_i K^i(s)} V_{in} \quad (3.4)$$

dove : c_j = coefficienti della riga $\alpha+1$ del triangolo DFFz,

b_i = coefficienti della riga n del triangolo DFF.

- Corrente che scorre nel ramo parallelo della cella β :

$$I_{\beta 2} = \frac{1}{Z_2} \frac{\sum_{j=0}^{\alpha} b_j K^j(s)}{\sum_{i=1}^n b_i K^i(s)} V_{in} \quad (3.5)$$

dove : b_j = coefficienti della riga α del triangolo DFF,

b_i = coefficienti della riga n del triangolo DFF.

- Impedenza di ingresso :

$$Z_{in} = Z_1 \frac{\sum_{i=0}^n b_i K^i(s)}{\sum_{i=0}^n c_i K^{i+1}(s)} = Z_2 \frac{\sum_{i=0}^n b_i K^i(s)}{\sum_{i=0}^n c_i K^i(s)} \quad (3.6)$$

dove : b_i = coefficienti della riga n del triangolo DFF,
 c_i = coefficienti della riga n del triangolo DFFz.

- Impedenza di uscita :

$$Z_o = Z_1 \frac{\sum_{j=0}^{n-1} b_j K^j(s)}{\sum_{i=0}^n c_i K^{i+1}(s)} = Z_2 \frac{\sum_{j=0}^{n-1} b_j K^j(s)}{\sum_{i=0}^n c_i K^i(s)} \quad (3.7)$$

dove : b_j = coefficienti della riga $n-1$ del triangolo DFF,
 c_i = coefficienti della riga n del triangolo DFFz.

3.2. SOLUZIONE NUMERICA.

La soluzione numerica si ottiene dalle espressioni generali qualificando K come reale. Nel caso di rete formata da elementi dello stesso tipo, K e' un reale e quindi la soluzione e' immediata, mentre se K e' un numero complesso, ne viene considerato il modulo per ogni frequenza di lavoro.

I tempi di calcolo risultanti sono estremamente bassi in quanto tali caratteristiche possono essere immediatamente scritte in termini di opportune sequenze numeriche.

Tali sequenze vengono generate sia in forma ricorsiva, dai triangoli DFF e DFFz, che in forma chiusa, tramite una formula di Binet generalizzata, secondo quanto di seguito esposto.

Sia $\left\{ S_i(\kappa) \right\}$ la sequenza generata dalla somma della

i-esima riga del triangolo DFF sommando i coefficienti con peso K^i .

La forma ricorsiva del generico termine $S_i(k)$ appartenente a tale sequenza e' :

$$S_i(k) = (2 + K) S_{i-1}(k) - S_{i-2}(k) \quad (i \geq 2) \quad (3.8)$$

con le condizioni iniziali :

$$S_0(k) = 1 ; S_1(k) = 1 + K .$$

La forma chiusa e' la seguente :

$$S_i(k) = \frac{(K + D) A^i - (K - D) B^i}{2D} \quad (3.9)$$

$$\text{dove : } D = \sqrt{(K + 2)^2 - 4} ;$$

$$A = \frac{(K + 2) + D}{2} ; B = \frac{(K + 2) - D}{2} ; A = 1 / B .$$

Sia inoltre $\{ T_i(k) \}$ la sequenza generata dalla somma della i-esima riga del triangolo DFFz sommando i coefficienti con peso K^i .

La forma ricorsiva per il generico termine $T_i(k)$ appartenente a tale sequenza e' :

$$T_i(k) = (2 + K) T_{i-1}(k) - T_{i-2}(k) \quad (3.10)$$

$$\text{con } i \geq 2 \text{ e dove } T_0(k) = 0 ; T_1(k) = 1 .$$

La forma chiusa per $T_i(k)$ vale :

$$T_i(k) = \frac{A^i - B^i}{D} .$$

Con tali formule, le espressioni delle caratteristiche elettriche della rete a scala diventano :

- Tensione nodo β :

$$V_{\beta} = \frac{\sum_{j=0}^{\alpha} b_j K^j}{\sum_{i=0}^n b_i K^i} V_{in} = \frac{S_{\alpha}(\kappa)}{S_n(\kappa)} V_{in} \quad (3.11)$$

$$V_{\beta} = \frac{(K + D) A^{n-\beta} - (K - D) B^{n-\beta}}{(K + D) A^n - (K - D) B^n} V_{in} \quad (3.12)$$

- Corrente ramo serie (cella β) :

$$\begin{aligned} I_{\beta 1} &= \frac{1}{Z_1} \frac{\sum_{j=0}^{\alpha+1} c_j K^{j+1}}{\sum_{i=0}^n b_i K^i} V_{in} = \frac{1}{Z_1} \frac{S_{\alpha+1}(\kappa) - S_{\alpha}(\kappa)}{S_n(\kappa)} V_{in} = \\ &= \frac{1}{Z_2} \frac{T_{\alpha+1}(\kappa)}{S_n(\kappa)} V_{in} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$I_{\beta 1} = \frac{1}{Z_2} \frac{2 (A^{n-\beta+1} - B^{n-\beta+1})}{(K + D) A^n - (K - D) B^n} V_{in} \quad (3.14)$$

- Corrente ramo parallelo (cella β) :

$$I_{\beta 2} = \frac{1}{Z_2} \frac{\sum_{j=0}^{\alpha} b_j K^j}{\sum_{i=0}^n b_i K^i} V_{in} = \frac{1}{Z_2} \frac{S_{\alpha}(\kappa)}{S_n(\kappa)} V_{in} \quad (3.15)$$

$$I_{\beta 2} = \frac{1}{Z_2} \frac{(K + D) A^{n-\beta} - (K - D) B^{n-\beta}}{(K + D) A^n - (K - D) B^n} V_{in} \quad (3.16)$$

Formule analoghe possono essere scritte per l'impedenza di ingresso e per quella di uscita.

Nel caso in cui $K = 1$ ($Z_1 = Z_2 = Z$), le sequenze $\{ S_1(1) \}$, $\{ T_1(1) \}$ diventano numeri di Fibonacci.

Infatti, $\{ S_1(1) \}$ coincide con la sottosequenza dei numeri di Fibonacci di indice dispari, mentre $\{ T_1(1) \}$ e' uguale a quella dei numeri di Fibonacci di indice pari. Cioe':

$$S_1(1) = F_{2l+1} ; \quad T_1(1) = F_{2l} \quad (3.17)$$

Le espressioni precedenti diventano :

$$\text{- Potenziale al nodo } \beta : \quad V_{\beta} = V_{in} \frac{F_{2(n-\beta)+1}}{F_{2n+1}} \quad (3.18)$$

$$\text{- Corrente serie (cella } \beta) : \quad I_{\beta 1} = \frac{1}{Z} \frac{F_{2(n-\beta)+1}}{F_{2n+1}} V_{in} \quad (3.19)$$

$$\text{- Corrente parallelo (cella } \beta) : \quad I_{\beta 2} = \frac{1}{Z} \frac{F_{2(n-\beta)+1}}{F_{2n+1}} V_{in} \quad (3.20)$$

$$\text{- Impedenza di ingresso :} \quad Z_{in} = Z \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} \quad (3.21)$$

- Impedenza di uscita :
$$Z_o = Z \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} \quad (3.22)$$

Nel caso di rete semi-infinita (cioè' con infinito numero di celle), le precedenti espressioni si semplificano in virtù' del fatto che esse non dipendono dal numero delle celle ma solo dal fattore K. Si ha quindi :

- Potenziale al nodo β :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} V_{\beta} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(K + D) A^n A^{-\beta} - (K - D) B^n B^{-\beta}}{(K + D) A^n - (K - D) B^n} V_{in} = \\ &= A^{-\beta} V_{in} \end{aligned}$$

cioe' :

$$V_{\beta} = V_{in} \left(1 + \frac{K}{2} + \frac{K}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{K}} \right)^{-\beta} = \psi^{-\beta} V_{in} \quad (3.23)$$

- Corrente serie (cella β):

$$I_{\beta 1} = V_{in} \frac{1}{Z_1} \left(\psi^{-\beta+1} - \psi^{-\beta} \right) \quad (3.24)$$

- Corrente parallelo (cella β):

$$I_{\beta 2} = V_{in} \frac{1}{Z_2} \psi^{-\beta} \quad (3.25)$$

- Impedenza di ingresso:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} Z_{in} &= Z_2 \frac{(K + D)}{2} = Z_2 \left(A - 1 \right) \\ Z_{in} &= Z_2 \left(\frac{K}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{K^2 + 4K} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

poiche' $B^n \rightarrow 0$ dal momento che $B < 1$.

4. ESEMPI.

A conclusione vengono mostrati, a titolo di esempio del metodo presentato, le soluzioni dei problemi posti nei paragrafi 1 e 2 e che si sintetizzano nelle figure 2 e 8.

Per quanto concerne la rete di fig.2, lo smorzamento e' rappresentato dalla funzione di trasferimento del circuito, che puo' essere ricavata dalla (3.3) per $n = 4$:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + 10 K + 15 K^2 + 7 K^3 + K^4} \quad (4.1)$$

essendo

$$K = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{sL}{R + 1/sC} = \frac{s^2 LC}{1 + sCR} \quad (4.2)$$

I valori desunti sperimentalmente per gli elementi di fig.2 sono : $R = 10 \Omega$, $L = 60 \text{ H}$, $C = 1 \text{ mF}$. Essi garantiscono un'attenuazione minima per $f > 1.6 \text{ Hz}$ di 70 dB.

Relativamente alla rete di fig. 8, si ha $K = RG$. La distribuzione dei potenziali ai nodi e' espressa, per n finito, dalla (3.3), mentre nel caso semi-infinito, direttamente ed in modo non approssimato, dalla (3.22).

Nel caso di rete con n finito (es. $n = 4$) e $K=1$ ($R=1/G$), si ha la notevole relazione (3.18) basata sui numeri di Fibonacci. La distribuzione dei potenziali ai nodi sara' :

nodo	0	1	2	3	4
V_B/V_{in}	$\frac{F_9}{F_9} = 1$	$\frac{F_7}{F_9} = \frac{13}{34}$	$\frac{F_5}{F_9} = \frac{5}{34}$	$\frac{F_3}{F_9} = \frac{2}{34}$	$\frac{F_1}{F_9} = \frac{1}{34}$

Nel caso di rete semi-infinita, l'espressione della distribuzione del potenziale ai nodi e' data da:

$$V_{\beta} = V_{in} \left(1 + \frac{R G}{2} + \frac{R G}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{R G}} \right)^{-\beta} \quad (4.3)$$

e per $K=1$ si ha:

$$V_{\beta} = V_{in} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^{-\beta} = V_{in} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{-2\beta} \quad (4.4)$$

dove l'ultimo termine tra parentesi coincide con l'espressione del numero di Fibonacci data dalla formula di Binet per n che tende all'infinito.

RINGRAZIAMENTI.

Gli autori desiderano ringraziare il Dr. Piero Filipponi della Fondazione Bordoni, per le chiarificatrici discussioni sulla teoria dei numeri di Fibonacci e la loro storia, ed il Prof. Mauro Cerasoli per gli approfondimenti di analisi combinatoria.

Un particolare e grato ringraziamento va al Prof. Arnaldo D'Amico per il costante ed insostituibile sprone ad approfondire ogni argomento e per il sostegno continuo ed illuminato nell'articolazione dell'attivita' di ricerca.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. D'AMICO, M. FACCIO, G. FERRI , " *Ladder networks characterization and Fibonacci numbers* " , Il Nuovo Cimento, vol. 12 D, pp. 1165-1173, Agosto 1990.

- [2] M.A.C. MAHER, S.P. DEWEERTH, M.A. MAHOWALD, C.A. MEAD, " *Implementing neural architectures using analog VLSI circuits* " , IEEE Trans. on Circuits & Systems, Vol.36 N.5, Maggio 1989.

- [3] G. FERRI, M. FACCIO, A. D'AMICO , " *A new numerical triangle showing links with Fibonacci numbers* " , Accettato per la pubblicazione su The Fibonacci Quarterly.

- [4] G. FERRI, M. FACCIO, A. D'AMICO , " *The DFFz triangle and its links with Fibonacci numbers* " , Accettato per la pubblicazione su The Fibonacci Quarterly.

Marco FACCIO, Giuseppe FERRI
Dipartimento di Ingegneria Elettrica
Universita' degli Studi di L'Aquila
67040 - Poggio di Roio - L'AQUILA