

Volume 4

Numero 1 2021

MONDO MATEMATICO E DINTORNI

**Rivista per i Docenti
del Primo Ciclo
di Istruzione**



Direttori Editoriali
Luciana Delli Rocili
Antonio Maturo

APAV





Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo

ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola

ISSN 2612 - 2596 [on line]

ISSN 2612 - 1719 [testo stampato]

Volume 4 (2021)

Numero 1

MONDO MATEMATICO E DINTORNI

Rivista per i Docenti del Primo Ciclo di Istruzione

Direttori Editoriali

Luciana Delli Rocili

Antonio Maturo

Direttore Responsabile

Bruna Di Domenico

Manager di redazione

Fabio Manuppella

Copertina

Fabrizio Di Nicola

Consulenti Scientifico/Editoriali

Franco Blezza

Diana Cipressi

Franco Eugeni

Renata Santarossa

Ezio Sciarra

Comitato Scientifico/Editoriale

Ferdinando Casolaro, Angela Chiefari, Bruno Iannamorelli, Cristina Ispas, Mario Innocenzo Mandrone, Domenico Marconi, Sarka Mayerova, Rosalia Pedone, Franca Rossetti, Anna Vaccarella, Annamaria Viceconte, Thomas Vougiouklis, Agostino Zappacosta.



**Accademia
Piceno - Aprutina
dei Velati in Teramo**

COPYRIGHT © 2018 Accademia Piceno Aprutina dei Velati in Teramo.
All rights reserved

Editore: Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo (APAV)
Via del Concilio n.24, Pescara, Italy

Periodicità: semestrale

Siti web: www.apav.it; www.eiris.it

Email: matematicaedintorni@libero.it

ISSN: 2612 - 1719 (testo stampato)

ISSN: 2612 - 2596 (online)

Autorizzazione del Tribunale di Pescara del 9/4/2019

N. 741/2019 V.G.

N. 03/2019 Reg. Stampa

Stampato a Pescara nel mese di febbraio 2022

La Rivista è pubblicata sotto la Licenza Creative Commons Attribuzione 3.0
Italia



**Accademia
Piceno - Aprutina
dei Velati in Teramo**

ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola
(Decreto del 24/07/2009 e Direttiva 170/2016)

Ricordo del prof. Alberto Trotta

a cura di Ferdinando Casolaro

Il 20 settembre scorso (2021) ci ha lasciato il prof. Alberto Trotta, mio amico fraterno con cui ho condiviso tante attività e lavori scientifici a due nomi.

Alberto era amico di tutti, con la sua gentilezza e nobiltà d'animo, disponibile in ogni momento, curava la nostra rivista "Periodico di Matematica" in qualità di Segretario dell'Accademia di Filosofia e Scienze Umane (AFSU).

Docente di Matematica e Fisica nelle Scuole secondarie di secondo grado dall'inizio degli anni 'Ottanta' e Cultore nei corsi universitari di discipline Matematiche e Fisiche, è autore di numerose pubblicazioni scientifiche.

Nel 2002 aveva fondato la sezione Mathesis di Anzio-Nettuno di cui è stato Presidente storico in quanto rieletto all'unanimità in ogni mandato triennale.

Nell'ambito della sua attività Mathesis è stato l'organizzatore di un importante Congresso nazionale nel 2004, precisamente nel periodo in cui si verificarono significative trasformazioni nei corsi universitari. Con i professori Giordano Bruno e Paolo Allievi ha curato gli atti con la pubblicazione di un volume di 570 pagine, che contiene contributi di circa sessanta docenti sia di Scuola che di Università, dirigenti scolastici e ispettori tecnici.

Da sempre sensibile alle esigenze dei giovani, ha dedicato gran parte del suo percorso professionale alla Didattica.

In collaborazione con il sottoscritto e con il prof. Franco Eugeni, di cui si sentiva allievo prediletto, ha prodotto volumi che assemblavano i principali risultati di ricerca didattica di tanti docenti con i quali teneva continui contatti.

Negli ultimi anni i suoi interessi di studio erano principalmente rivolti ai risultati della Fisica moderna con le interrelazioni tra Fisica e Matematica, senza mai trascurare gli aspetti di divulgazione didattica.

Sicuro di interpretare il pensiero di tutti coloro che si sono pregiati della sua conoscenza e del suo insegnamento, rivolgo un affettuoso abbraccio a Giuditta, fedele compagna di vita da oltre quaranta anni, che lo ha sempre sostenuto anche nella sua attività di ricercatore.

Ciao Alberto.

Ferdinando Casolaro

Costruzioni di figure geometriche

Enzo Barone

enzo.barone@libero.it

Sunto

Guardando sul Web si possono trovare molti video su come si costruisce una figura geometrica, ma stranamente, di solito non si spiega il motivo per cui si opera in quel modo. Lo scopo di questa breve nota è quello di dare qualche esempio su come colmare tale lacuna.

Parole Chiave Costruzioni fondamentali. Costruzione di poligoni regolari. Circonferenza circoscritta.

1. Figure del piano

Una prima distinzione va fatta fra figure regolari, cioè con lati uguali (*equilateri*) o con angoli uguali (*equiangoli*) e figure non aventi alcuna regolarità. Inoltre è anche interessante il problema se tali figure possono essere inscritte o circoscritte ad un cerchio. Tutti i problemi che seguiranno si dovranno poter risolvere solo con l'ausilio di riga e compasso, dove la riga non deve essere necessariamente suddivisa in unità di misura.

In [3] si può trovare questo interessante esercizio:

Considera le seguenti quattro proposizioni, che non sono necessariamente vere.

- 1) Se un poligono inscritto in un cerchio è equilatero, è anche equiangolo.
 - 2) Se un poligono inscritto in un cerchio è equiangolo, è anche equilatero.
 - 3) Se un poligono circoscritto a un cerchio è equilatero, è anche equiangolo.
 - 4) Se un poligono circoscritto a un cerchio è equiangolo, è anche equilatero.
- (A) Dire quali delle quattro proposizioni sono vere e quali sono false, dando una prova in ogni caso.
- (B) Se ci limitiamo a considerare quadrilateri, quali delle quattro proposizioni sono vere e quali sono false? E se consideriamo solo pentagoni?

L'esercizio è interessante perché mette l'accento sulla differenza fra poligoni equilateri e poligoni equiangoli e fra poligoni inscritti e circoscritti ad un cerchio.

Le proposizioni 1) e 4) sono vere, mentre 2) e 3) sono false. Per la (B), relativamente ai quadrilateri 2) e 3) sono false (il rettangolo ed il rombo sono controesempi della 2) e della 3) rispettivamente), mentre per i pentagoni sono vere.

2. Costruzioni fondamentali

Iniziamo con alcune costruzioni che useremo nel seguito.

1) *Dividere un segmento in n parti uguali.*

Dato il segmento AB, si conduca una semiretta da A, non opposta ad AB e si riportino su essa, a partire da A, n segmenti uguali, servendosi di un compasso. Siano $P_1, P_2, \dots, P_n$ gli estremi di tali segmenti. Si congiunga P_n con B e si conducano dagli altri punti le parallele alla retta $B P_n$, usando riga e squadra. I punti di intersezione con AB sono gli estremi degli n segmenti cercati.

La giustificazione di tale costruzione è da ricercarsi nel seguente teorema.

Se un fascio di parallele si taglia con due trasversali, segmenti uguali sull'una hanno corrispondenti segmenti uguali sull'altra.

Evidentemente questo metodo si può usare, in particolare, per dividere a metà un segmento, ma ricordiamo che un altro metodo è il seguente, che non usa la squadretta e serve per trovare l'asse di un segmento.

2) *Trovare l'asse di un dato segmento.*

Dato il segmento AB, si tracciano due archi con centro in A ed in B e raggi uguali e maggiori della metà della distanza d (A, B) di A da B. Se P e Q sono le intersezioni di tali archi, la congiungente PQ, divide AB in due parti ed è l'asse di AB.

Infatti l'asse è il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e da B.

Osserviamo che questo metodo ci permette anche di trovare la perpendicolare ad AB.

3) *Trovare la bisettrice di un angolo.*

Dato l'angolo $\angle AOB$ non piatto, con un arco di centro O e raggio r si tagliano i suoi lati in C e D e con centro in tali punti e raggio r si descrivono altri due archi che si intersecheranno in un punto O' . La retta OO' è la bisettrice cercata, in quanto è la diagonale del rombo $OCO'D$ e si ritiene precedentemente dimostrato che le diagonali di un rombo sono le bisettrici dei suoi angoli.

Osserviamo che iterando il procedimento si può dividere un angolo in 2^n parti uguali, ma in generale non lo si può dividere in n parti uguali, come si dirà nel seguito.

3. Poligoni regolari: generalità.

Costruzioni di figure geometriche

Premettiamo che in generale il problema di dividere una circonferenza in n parti uguali o equivalentemente inscrivere in una circonferenza un poligono regolare di n lati, con il solo ausilio di riga e compasso non è risolubile (vedi [1] cap. IX n.179).

Gauss ha provato che si può dividere una circonferenza in un numero primo p di parti uguali solo se p è del tipo $p = 2^a + 1$ con a intero.

Quindi per esempio per $p = 2, 3, 5, 17, 257, \dots$

Ovviamente una volta divisa la circonferenza in n parti uguali, la si potrà dividere anche in $2n, 4n, 8n, \dots$ parti uguali, dividendo a metà gli angoli al centro.

4) Costruzione di un poligono regolare.

Il metodo più generale che conosco per disegnare un poligono regolare di n lati è il seguente:

- 1) Si traccia una circonferenza di raggio r ed un suo diametro, individuando due punti A e B sulla circonferenza (vedi figura 1)
- 2) Si divide AB in n parti uguali, che denoteremo con i numeri da 1 ad n .
- 3) Con centro in A e raggio AB si traccia una circonferenza ed altrettanto si fa con B e siano R ed S le intersezioni delle due circonferenze.
- 4) Conguiamo R con i numeri dispari (pari), se n è dispari (pari) ed altrettanto facciamo con S . Troveremo dei punti di intersezione con la circonferenza e tali punti sono i vertici del poligono cercato, che sarà inscritto nella circonferenza iniziale (figura 2).

8 Poligono con n lati (in n parti uguali)

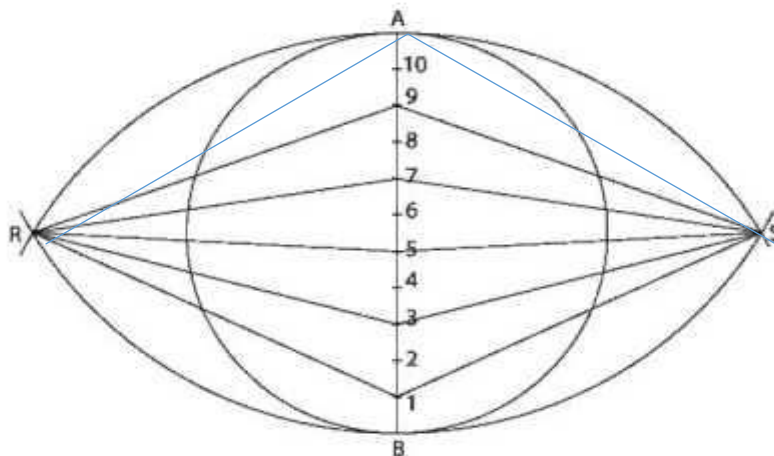


Figura 1

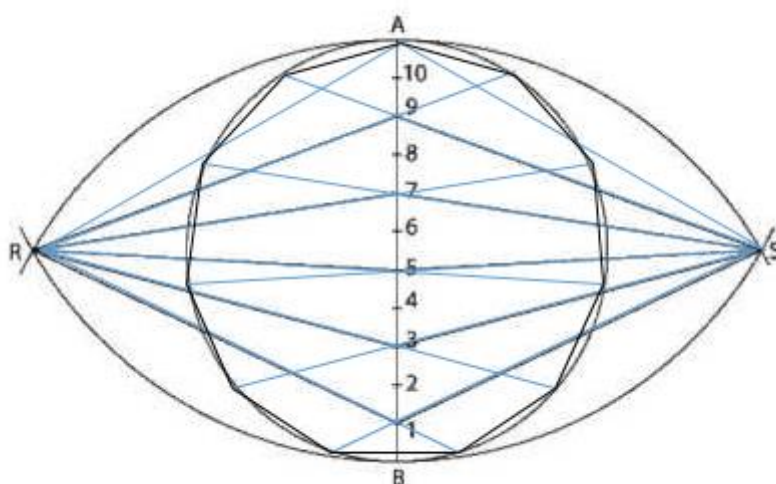


Figura 2

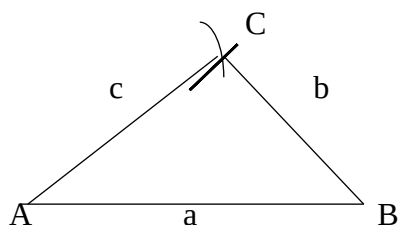
Questo è il procedimento; ma è giusto chiederci “quali sono le basi teoriche su cui è fondato?”. Ora dimostrare che effettivamente i lati del poligono costruito o gli archi relativi sono uguali, non è affatto facile. Invitiamo i lettori a cimentarsi in tal senso.

Per la costruzione dei principali poligoni regolari conviene seguire un'altra strada, molto più facile.

4. Triangolo

Problema 1. Dati tre segmenti a , b e c , disegnare un triangolo avente i lati uguali a tali segmenti.

Una prima riflessione ci fa capire che il problema non è sempre risolvibile: occorrono delle restrizioni sulle lunghezze dei segmenti. Infatti nell'ipotesi che sia $a > b \geq c$, tracciato il segmento a di estremi A e B , se con un compasso tracciamo un arco con centro in A e raggio c ed un arco con centro B e raggio b , avremo trovato il vertice C del triangolo se e solo se i due archi si intersecano. Ciò avverrà solo se $b + c > a$.



Costruzioni di figure geometriche

Problema 2. *Costruire una circonferenza circoscritta ad un dato triangolo.*

Siccome per tre punti A, B e C (quali sono i vertici del triangolo) passa una ed una sola circonferenza, si tratta di trovare il centro O di tale circonferenza. A tale scopo si tracciano gli assi dei lati AB e BC. La loro intersezione darà il centro cercato.

Per trovare l'asse di un segmento AB, basta tracciare due archi con centro in A e in B e raggio $r >$ della metà della lunghezza di AB.

Problema 3. *Costruire la circonferenza inscritta in un triangolo ABC.*

La bisettrice di un angolo ha la proprietà di equidistanza dai lati dell'angolo, quindi basterà tracciare le bisettrici di due angoli del triangolo, per avere come intersezione, il centro O della circonferenza inscritta nel triangolo. Condotta poi la perpendicolare da O ad uno dei lati di ABC, si otterrà la lunghezza del raggio.

Problema 4. *Data una circonferenza dividerla in tre parti uguali, ovvero trovare un triangolo equilatero in essa inscritto.*

Scelto a piacere un punto A sulla circonferenza, lo si congiunge con il centro O e si trova come intersezione sulla circonferenza il punto A' (opposto di A). Si tracciano due archi con centro A' e raggio $r=OA$ e si trovano B e C come intersezioni con la circonferenza. Essendo i due triangoli OA'B e OA'C equilateri di lato r, l'angolo al centro BOC è di 120° e l'angolo alla circonferenza BAC è di 60° e quindi il triangolo BAC è il triangolo cercato.

5. Esagono

Problema 1. *Costruire un esagono regolare di lato assegnato l o equivalentemente dividere una circonferenza di raggio l in 6 parti uguali.*

Disegniamo prima il segmento AB di lunghezza l e poi costruiamo un triangolo equilatero AOB tracciando due archi con centro in A e poi in B, con raggio l; la loro intersezione darà O. Se ora si disegna la circonferenza di centro O e raggio l, si potranno trovare facilmente gli altri vertici dell'esagono, con l'aiuto di un compasso di raggio l, partendo da A o da B. Infatti un esagono regolare è formato da 6 triangoli equilateri di lato l.

Un modo alternativo per la costruzione dell'esagono regolare è quello di tracciare la circonferenza di raggio l, fissare un punto A qualsiasi sulla circonferenza, trovare A' l'opposto di A, congiungendo A con il centro O ed infine, facendo centro in A e poi in A' con raggio OA si trovano gli altri 4 vertici come intersezione con la circonferenza.

6. Quadrato

Data una circonferenza e costruiti due diametri perpendicolari, la circonferenza risulta divisa in quattro parti ed i punti di intersezione dei diametri con la circonferenza sono i vertici del quadrato in essa inscritto. Se r è il raggio della circonferenza, il lato del quadrato è ovviamente $\sqrt{2}r$.

7. Ottagono

Dalla costruzione precedente, basterà trovare 4 punti intermedi sui 4 archi uguali che dividono la circonferenza o equivalentemente costruire l'asse di uno dei lati AB del quadrato e l'intersezione E dell'asse con la circonferenza darà il vertice dell'ottagono intermedio tra A e B. AE è il lato dell'ottagono e con un compasso si potranno trovare gli altri estremi.

8. Pentagono

La costruzione del pentagono regolare è sicuramente la più impegnativa. Intanto il pentagono regolare è equilatero ed equiangolo. Congiungendo i vertici A B C D E col centro O della circonferenza circoscritta al pentagono si ottengono 5 triangoli isosceli i cui lati diversi dalla base, sono uguali al raggio r . Gli angoli opposti alle basi dei triangoli sono tutti uguali ad $\alpha = 2\pi/5 = 72^\circ$, quindi gli angoli alle basi dei triangoli sono uguali a $\beta = 3\pi/10 = 54^\circ$.

L'angolo α è l'angolo al centro che sottende ciascuno dei lati del pentagono, quindi gli angoli alla circonferenza che sottendono gli archi (ed i lati del pentagono) hanno ampiezza uguale alla metà dell'angolo al centro

$$\gamma = \alpha/2 = \pi/5 = 36^\circ.$$

L'angolo interno del pentagono è quindi

$$\Delta = 2\beta = 3\gamma = 6/10 \pi = 108^\circ.$$

Costruzioni di figure geometriche

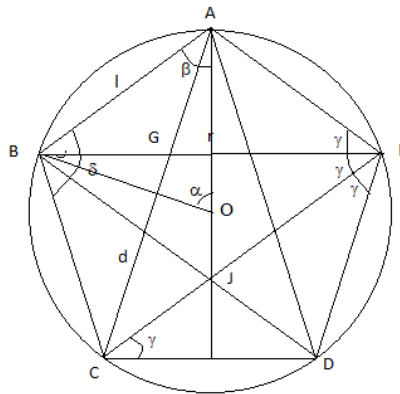


Figura 3

Per ciò che riguarda le **diagonali**, osserviamo che ognuna è parallela al lato opposto. Inoltre i due triangoli isosceli BAE e CJD sono simili, in quanto i lati sono tra loro paralleli. Si ha dunque la proporzione

$$(1) \quad CJ : CD = AB : BE.$$

Consideriamo ora la diagonale AC che interseca BE in G. Stante il parallelismo tra diagonali e lati, si nota che l'angolo $\widehat{BAG} = \gamma$, quindi i due triangoli AGB e CJD sono uguali. Questo porta che la (1) equivale a

$$(2) \quad BG : GE = GE : (BG + GE)$$

Ovvero, posto $l = AB = GE$ e $d = AC = BE$, si ha

$$(3) \quad d - l : l = l : d.$$

In altri termini il rapporto tra d ed l è il *rapporto aureo* e quindi

$$(4) \quad l = d \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cong 0,6180\dots d$$

Oppure

$$(5) \quad d \cong 1,6180\dots l$$

L'insieme delle diagonali definisce un pentagono ed una stella a cinque punte.

Tornando al problema della costruzione del pentagono, in letteratura ci sono varie versioni, che si basano sulle proprietà che abbiamo viste. La versione dovuta ad Euclide, parte dalla considerazione che due diagonali ed un lato (come base) formano un triangolo aureo; infatti nel triangolo BEC, l'angolo in E è di 36° , mentre gli angoli in B e C sono di 72° . Pertanto si parte dalla diagonale BE e si divide tale segmento con un punto K, in modo tale che BK sia medio proporzionale tra BK e KE.

- a) Si costruisce il quadrato BEGF di lato BE
- b) Si divide a metà BF, mediante il punto H

- c) Sul prolungamento di BF, si determina, sopra B il punto J in modo tale che sia $HJ = HE$ (col compasso)
- d) Su BE si determina K in modo tale che sia $BJ = BK$.

9. Altri poligoni regolari

La costruzione di un *esadecagono regolare* ovvero la divisione della circonferenza in sedici parti uguali si effettua disegnando i diametri paralleli ai lati dell'ottagono, in tal modo gli angoli al centro verranno bisecati e si otterranno i 16 vertici dell'esadecagono.

Si può tranquillamente continuare bisecando gli archi in tutte le costruzioni precedenti.

10. Una costruzione di geometria solida

Un insegnante mi ha sottoposto il seguente problema: *un parallelepipedo ha le sei facce che sono rombi con un angolo di 60° . Esprimere in funzione dello spigolo a l'area della superficie totale e il volume.*

A parte la soluzione del problema, soprattutto mi chiedeva: *come è fatto un tale parallelepipedo? Come si costruisce?*

Riporto la soluzione del problema e la riflessione *sull'importanza del disegno nella geometria.*

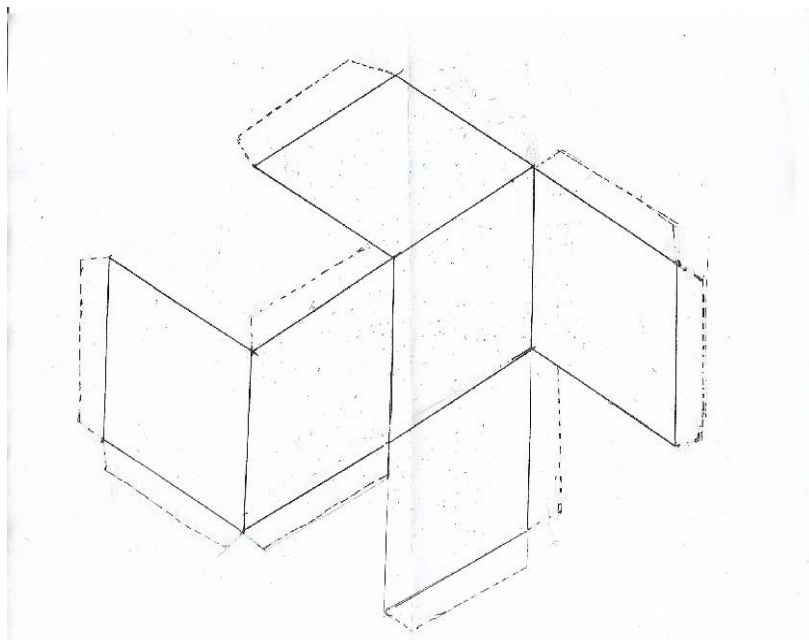


Figura 4

Costruzioni di figure geometriche

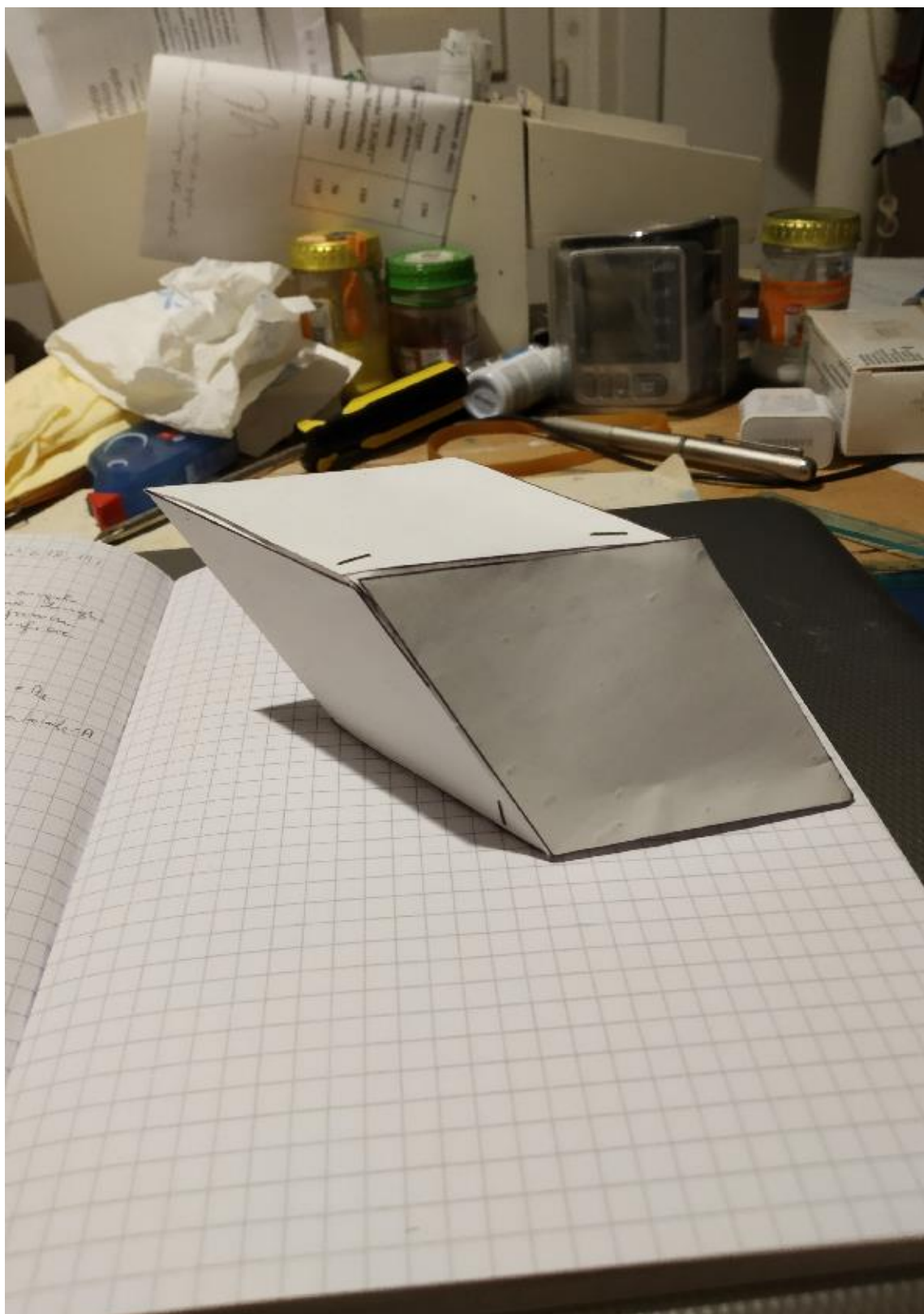


Figura 5

11. Conclusioni

Il disegno è un validissimo aiuto in geometria, ma poiché il punto e la retta non hanno “spessore”, non ci si può limitare alla soddisfazione “visiva” della costruzione, ma occorre il supporto teorico della dimostrazione o del richiamo delle proprietà che la giustificano. Utilizzando poi il supporto numerico, sia in geometria euclidea, che in geometria analitica, le cose non migliorano, in quanto i calcoli sono sempre approssimati, ogni qual volta si incontrano numeri irrazionali o razionali periodici.

Bibliografia

- [1] Giulio Bisconcini . *Geometria Elementare*, A. Signorelli, Roma 1956.
- [2] L. Santoboni. *Trigonometria Piana*, G. B. Petrini, Torino 1965
- [3] G. Polya, J. Kipatrick. *The Stanford Mathematics Problem Book*, Dover Publications, New York, 2017.

Sul *Problema del Merciaio* di H. E. Dudeney

Luigi Togliani

Accademia Nazionale Virgiliana, Mantova, Italy;
luigi.togliani@gmail.com

Sunto

In questo articolo prendo in esame il *problema del merciaio* di H. E. Dudeney e alcune relative applicazioni di Geometria metrica, con qualche considerazione di carattere didattico.

Parole chiave: dissezione di un poligono; dissezione incernierata; Dudeney; problema del merciaio.

1. Premessa

Il 17 maggio 1905 Henry Ernest Dudeney (1857-1930) presentò alla Royal Society, a Burlington House, il suo problema del merciaio (*The Haberdasher's Puzzle*); e il mese seguente propose lo stesso quesito alla Royal Institution in forma più generale. Il problema fu inserito in *The Canterbury Puzzles*, il libro che lo stesso Dudeney scrisse e pubblicò nel 1907: un'interessante e fortunata raccolta di problemi e rompicapo matematici, più volte ristampata, che riprendeva l'ambientazione della celebre opera di G. Chaucer, *The Canterbury Tales* (1387-1400). Nel commentare la soluzione data nel libro al problema del merciaio, Dudeney rammenta che il suo *puzzle* fu proposto come sfida ai lettori del *Daily Mail* nella prima settimana di febbraio del 1905, ma nessuno dei tentativi di soluzione inviati alla redazione di quel giornale riuscì a risolvere il problema.¹ Ma già nell'aprile del 1902 Dudeney aveva pubblicato il quesito sul *Weekly Dispatch*.²

¹ Dudeney, *The Canterbury Puzzles*, p. 142-143.

² La notizia è riportata negli articoli [1] e [6] citati in bibliografia.

2. Il Puzzle di Haberdasher

Dudeney mette il quesito in bocca ad un merciaio che, esibendo un pezzo di stoffa triangolare regolare, chiede ai presenti se c'è qualcuno in grado di tagliare la stoffa in linea retta e, nel caso, di mostrargli in quale modo si possa tagliare la pezza in quattro diverse parti che possano essere rimesse insieme per formare un quadrato, senza voltare alcuna parte.³



Figura 1. The Haberdasher's Puzzle (*The Canterbury Puzzles*, p. 25).

La dissezione⁴ del triangolo equilatero di Dudeney è riprodotta in figura 2 con l'uso di Geogebra.

³ Dudeney, *The Canterbury Puzzles*, p. 24-25.

⁴ Dissezionare un poligono significa suddividerlo in un numero finito di poligoni che possono essere diversamente ricomposti in modo da formare un nuovo poligono equiscomposto e quindi equivalente a quello di partenza.

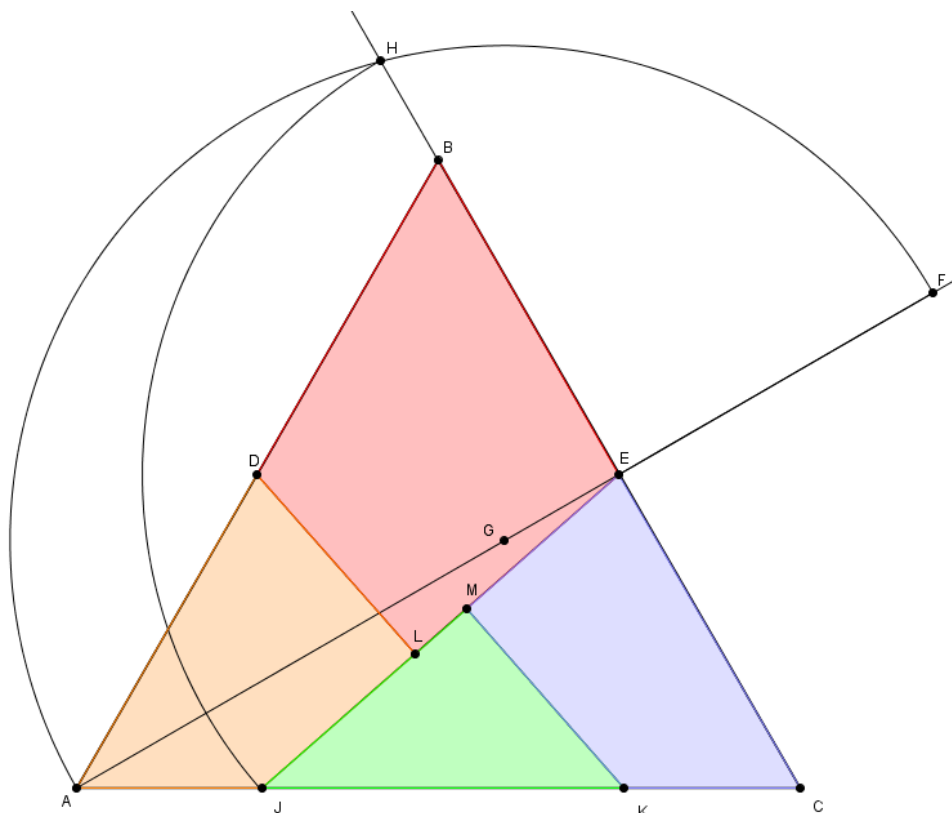


Figura 2. Dissezione del triangolo equilatero.

Il triangolo equilatero ABC viene dissezionato in tre quadrilateri e in un triangolo che, messi insieme, potranno formare un quadrato. Per giungere a determinare questi quattro poligoni, seguiamo nella sostanza la costruzione con riga e compasso data da Dudeney: detti D ed E i punti medi rispettivamente di AB e BC , si prolunga la mediana AE di un segmento EF congruente a BE . Detto G il punto medio di AF , si traccia la semicirconfenza di centro G , posta nel semipiano di bordo AF e contenente B . Detto H il punto in cui tale semicirconfenza incontra il prolungamento di CB , si traccia l'arco HJ di circonferenza di centro E e raggio EH , ove J si trova sul lato AC . Si determina su AC il punto K tale che JK sia congruente a AD . Si congiunge E con J e si considerano le proiezioni ortogonali L e M , rispettivamente di D e di K su EJ . I quadrilateri $BDLE$, $AJLD$, $CEMK$ e il triangolo JKM sono i quattro poligoni che formeranno il quadrato equivalente al triangolo ABC . Infatti: si ruota $AJLD$ di 180° attorno a D in $BJ'L'D$; si ruota $CEMK$ di 180° attorno ad E in $BEM'K'$; si trasla JKM di vettore $\overrightarrow{JJ'}$ in $J'M''K'$; il quadrato $L'LM'M''$ è equivalente al triangolo equilatero ABC (figura 3).

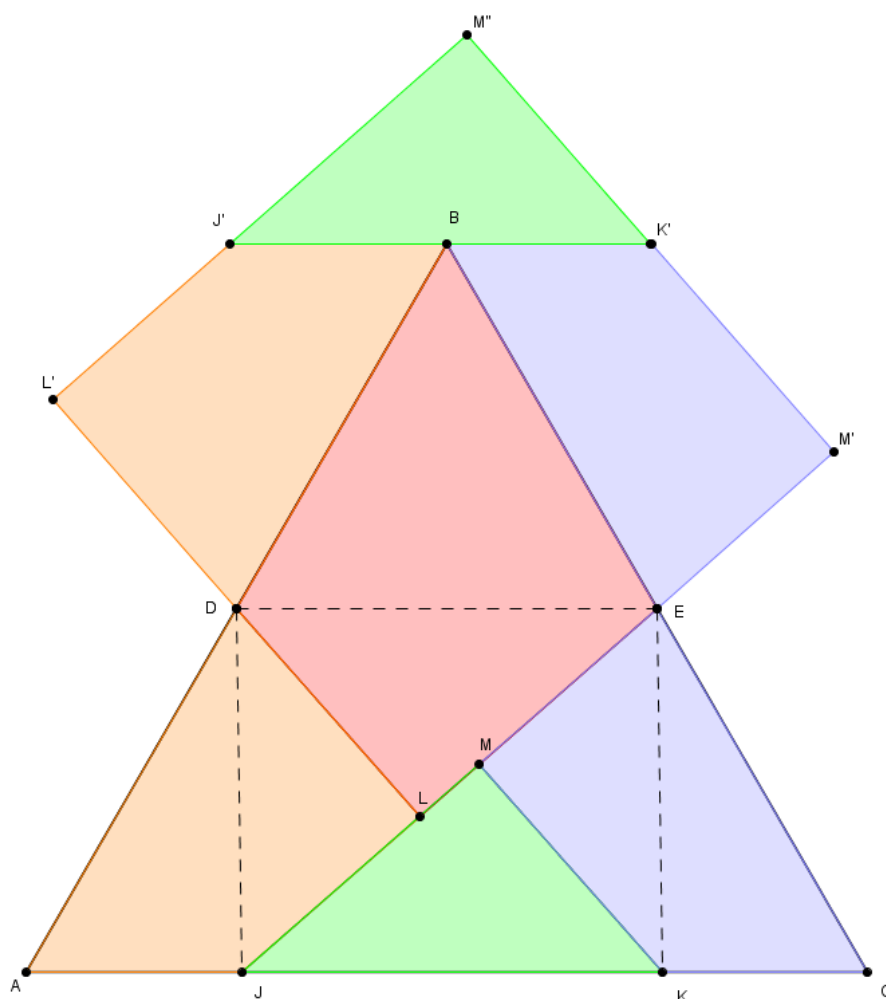


Figura 3. Costruzione del quadrato equivalente al triangolo equilatero.

La dissezione del triangolo equilatero e la sua ricomposizione nel quadrato possono essere illustrate con una sequenza di figure che rappresentano l'articolazione a snodo con tre cerniere come indicato in figura 4. Si forma così una sorta di catena, di cui esistono modellini fisici realizzati in legno o in plastica. Lo stesso Dudeney utilizzò un suo modello in mogano con cerniere di ottone nella presentazione alla Royal Society nel 1905.⁵



⁵ Si veda anche: M. Gardner, *Enigmi e giochi matematici*, p. 171-173.

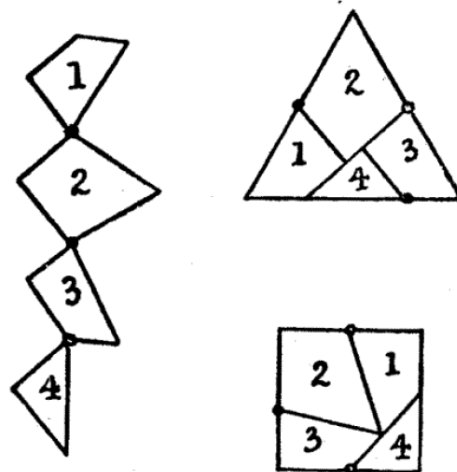


Figura 4. Trasformazione di Dudeney del triangolo equilatero nel quadrato.
La seconda illustrazione è tratta da una edizione di *The Canterbury Puzzles*.

Ma la trasformazione proposta da Dudeney in *The Canterbury Puzzles* a p. 143 è leggermente diversa e non usa le cerniere (figura 5): si trasla $AJLD$ di vettore $\overline{AC}$; di JKM viene considerato il simmetrico rispetto a K ; di $BDLE$ viene costruito il simmetrico rispetto ad E .

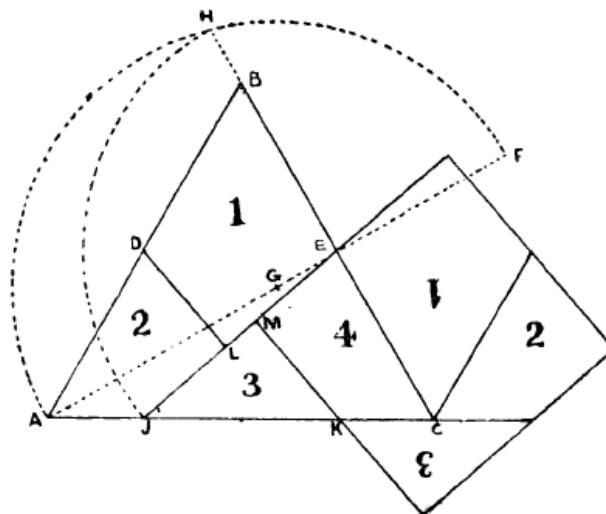


Figura 5. Soluzione originale di Dudeney (*The Canterbury Puzzles*, p. 143).

3. Relazioni tra gli elementi del puzzle

Il problema del merciaio può essere studiato anche da un punto di vista metrico, cercando relazioni tra lati, angoli e poligoni ottenuti nelle costruzioni precedenti (figg. 2, 3, 5). Pongo: $AD = DB = BE = CE = JK = 2a$.

Seguono, per le note relazioni del triangolo equilatero e per come è fatta la costruzione geometrica:

$$AE = 2a\sqrt{3}, \quad AF = 2a(1 + \sqrt{3}), \quad AG = GF = GH = a(1 + \sqrt{3})$$

$$GE = AE - AG = a(-1 + \sqrt{3}).$$

All'interno del triangolo rettangolo EHG risulta, per il teorema di Pitagora:

$$EH = \sqrt{GH^2 - GE^2} = 2a\sqrt[4]{3} = EJ.$$

Osservo inoltre, per noti teoremi di geometria euclidea, che: il triangolo BDE è equilatero; DE è parallelo e congruente a JK e quindi il quadrilatero $JKED$ è un parallelogrammo; il triangolo rettangolo DEL è congruente al triangolo rettangolo JKM e quindi $LE = MJ$, $DL = KM$. Nel triangolo JEK l'altezza h relativa alla base JK è metà di quella del triangolo ABC ; quindi: $h = a\sqrt{3}$, mentre l'area del triangolo JEK è:

$$A(JEK) = \frac{1}{2} \cdot JK \cdot h = a^2\sqrt{3}.$$

Con l'uso della formula inversa dell'area ricaviamo:

$$MK = \frac{2 \cdot A(JEK)}{EJ} = a\sqrt[4]{3} = DL.$$

Da cui, nel triangolo JMK , risulta: $MJ = \sqrt{JK^2 - MK^2} = a\sqrt{4 - \sqrt{3}} = LE$.

Inoltre: $EJ = MJ + LE - ML = 2 \cdot LE - ML$;

da cui: $ML = 2 \cdot LE - EJ = 2a(\sqrt{4 - \sqrt{3}} - \sqrt[4]{3})$;

$$ME = LJ = LE - ML = a(2\sqrt[4]{3} - \sqrt{4 - \sqrt{3}}).$$

Pertanto il lato l del quadrato equivalente al triangolo ABC può essere ottenuto, per esempio, in uno dei seguenti modi:

a) $l = 2 \cdot DL = 2a\sqrt[4]{3}$

b) $l = 2 \cdot ME + ML = 2a\sqrt[4]{3}$

c) $l = \sqrt{A(ABC)} = 2a\sqrt[4]{3}$

Partendo dalle relazioni sopra ricavate non è difficile calcolare le aree dei quattro poligoni in cui il triangolo ABC resta dissezionato. Per esempio, l'area di JMK è data

$$\text{da: } A(JMK) = \frac{MJ \cdot MK}{2} = \frac{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{3}}}{2} a^2.$$

4. Alcune osservazioni

La costruzione riportata in fig. 3 può trarre in inganno. Il quadrilatero $JKED$ è un parallelogrammo, tuttavia $JKED$ non è un rettangolo, contrariamente a quanto può sembrare. Per provare questo asserto poniamo:

$$\alpha = \angle DEL = \angle KJM, \quad \beta = \angle LDE = \angle MKJ, \quad \gamma = \angle DJL = \angle KEM.$$

Risulta:

$$\sin \alpha = \frac{DL}{DE} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}; \quad \sin \beta = \cos \alpha = \frac{\sqrt{4-\sqrt{3}}}{2}; \quad \tan \gamma = \frac{DL}{JL} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt[4]{3}-\sqrt{4-\sqrt{3}}}$$

$$\alpha \cong 41,15^\circ; \quad \beta \cong 48,85^\circ; \quad \gamma \cong 49,45^\circ$$

Ne segue che:

$$\angle DJA = 180^\circ - \alpha - \gamma \cong 89,40^\circ; \quad \angle EKC = \alpha + \gamma \cong 90,60^\circ.$$

Da ciò deriva $JKED$ non è un rettangolo e che i quadrilateri $AJLD$ e $CKME$ non sono congruenti, né equivalenti. Quindi il triangolo di partenza ABC resta dissezionato nei quattro poligoni $AJLD$, $BELD$, JMK e $CKME$ tutti diversi tra loro (né equivalenti, né congruenti, né simili).

5. Conclusioni

Il problema del merciaio rappresenta un bell'esercizio di geometria euclidea, con interessanti applicazioni o approfondimenti di carattere metrico. Il quesito è stato più volte ripreso e ampiamente citato in vari articoli sulle dissezioni dei poligoni⁶ e ha suscitato interesse anche nel campo della robotica.⁷

La costruzione presentata da Dudeney è tutt'altro che intuitiva e non stupisce che nessuno dei lettori del *Daily Mail* fosse riuscito a trovarla o a trovarne un'altra equivalente. E anche di fronte alla soluzione ci si può ingannare, ritenendo che il quadrilatero $JKED$ sia un rettangolo. Da notare che, se così fosse, la dissezione del triangolo ABC sarebbe enormemente facilitata.⁸

Sul piano didattico *the Haberdasher's Puzzle* potrebbe essere proposto a studenti motivati di scuola secondaria di secondo grado, che abbiano completato un corso di geometria piana, magari dotati di qualche conoscenza di trigonometria; il quesito rappresenta un'occasione stimolante di apprendimento che può suscitare l'interesse dell'alunno. Per lo studente le conoscenze e le competenze di geometria richieste non sono poche: occorre possedere familiarità con le proprietà dei triangoli e dei parallelogrammi, con i concetti di congruenza e di equivalenza; bisogna saper applicare

⁶ Si vedano, ad esempio, i lavori [1], [2], [5] citati in bibliografia.

⁷ Si veda l'articolo [6] in bibliografia.

⁸ In rete si trovano pseudo-soluzioni del problema del merciaio che partono dall'assunto – errato – che $JKED$ sia un rettangolo.

alcune tra le basilari nozioni di geometria metrica (calcolo di aree, uso del teorema di Pitagora, proprietà del triangolo equilatero, elementi di trigonometria, ...).

Ma viene spontanea una domanda: la geometria ha ancora uno spazio adeguato nel nostro insegnamento?

Bibliografia

- [1] Abbott, T. A.; Abel, Z.; Charlton, D.; Demaine, E.; Demaine, M. L.; Kominers, S. D. *Hinged Dissections Exist*. Discrete Comput. Geom. 47 (150-186). 2012.
- [2] Akiyama, J.; Nakamura, G. *Dudeney Dissection of Polygons*. Berlin Heidelberg. Springer-Verlag (14-29). 2000.
- [3] Dudeney, H. E. *The Canterbury Puzzles*. New York. E. P. Dutton and Company. 1908.
- [4] Gardner, M. *Enigmi e giochi matematici*. Milano: BUR. 1998.
- [5] Frederickson, G. N. *Hugo Hadwiger's influence on geometric dissections with special properties*. Swiss Mathematical Society. Elemente der Mathematik 65 (154-164). 2010.
- [6] Tan, T.; Rojas, N.; Mohan, R. E.; Kee, V.; Sosa, R. *Nested Reconfigurable Robots: Theory, Design, and Realization*. International Journal of Advanced Robotic Systems (1-12). 2015.

Verso la scuola 3.0: esperienza di due docenti in Istituti di 1° e di 2° Livello

Mariella Crotti¹

Giovanni Luca D'Aniello²

¹Docente di Matematica e Fisica, in pensione
email crottimariella2@gmail.com

²Docente di Elettronica, presso l'Istituto Tecnico Industriale "Cartesio" di Cinisello Balsamo (MI)
email daniello.giovaniluca@gmail.com

Sunto

Gli autori, partendo dalla loro pluriennale esperienza didattica, presentano i cambiamenti avvenuti in ambito scolastico in seguito alla pandemia. Si illustrano diversi modelli di didattica, sia per l'insegnamento agli adolescenti sia agli adulti, in corsi diurni, serali, anche di tipo sperimentale.

Parole Chiave: La scuola prima, durante e dopo la pandemia. Modelli di DAD (Didattica a Distanza) e DDI (Didattica Digitale Integrata). Istruzione per gli adulti. Nuovi modelli didattici.

1. Introduzione

Il 31 dicembre 2019 viene segnalato un **nuovo ceppo di Coronavirus** a Wuhan, in Cina. Nella prima metà del mese di febbraio 2020, l'International Committee on Taxonomy of Viruses (ICTV) ha così assegnato al nuovo coronavirus il nome definitivo: "**Sindrome respiratoria acuta grave coronavirus 2**" (**SARS-CoV-2**).

Il Coronavirus, responsabile della SARS-CoV-2 è in grado di sviluppare la Patologia da Coronavirus del 2019, cosiddetta CoronaVirus Disease 2019 o COVID-19. Il COVID-19 ha provocato inizialmente un' epidemia e successivamente una pandemia, tanto che ci troviamo ancora in un periodo di emergenza sanitaria. La pandemia e l'isolamento sociale che ne è scaturito, per limitare il più possibile i contatti fisici e quindi il contagio, ci hanno costretti a riadattare e riorganizzare la nostra vita a 360°, dal punto di vista psicologico, sociale e professionale.

2. La scuola prima della pandemia da COVID-19

Anche la scuola, di fronte a questo evento improvviso e inaspettato, di conseguenza ha subito un trauma: i docenti in particolare hanno dovuto fronteggiare la complessità del periodo ed intraprendere in tempi rapidi quelle azioni necessarie per proseguire l'attività didattica ed educativa, in corso di anno scolastico 2019-2020.

La scuola ha subito una brusca accelerazione di quel processo di cambiamento sociale e didattico, che era già in atto da diversi anni.

E' noto che la didattica tradizionale, costituita principalmente da lezioni frontali e da metodi valutativi, improntati sulla conoscenza, spesso mnemonica, dei contenuti trasmessi dall'insegnante, è fallimentare: i risultati di apprendimento degli studenti non sono certo ottimali (basti guardare la comparazione dei risultati dei test PISA, Programme for International Student Assessment, promosso dall' OCSE, Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico, dall'inglese OECD, Organization for Economic Co-operation and Development a livello internazionale). Gli allievi fanno fatica a stare attenti e concentrati, mostrano intolleranza, irrequietezza, non sono motivati; segnali che esprimono la non accettazione di ciò che viene loro proposto. E ciò costituisce motivo di frustrazione e senso di impotenza nei docenti, che assistono ad una risposta, da parte degli studenti, che non corrisponde a quella voluta, desiderata, anzi ben lontana dai risultati che invece, in un'altra epoca, erano stati così efficienti ed efficaci.

Negli anni '80, la Prof.ssa Mariella Crotti, docente di Matematica e Fisica, ha insegnato ai corsi sperimentali per adulti, volti al conseguimento della licenza media, presso più Istituti scolastici della provincia di Bergamo. Già in quegli anni la didattica, pur essendo costituita da lezioni, svolte unicamente in presenza dei docenti e non certo a distanza, poiché non si disponeva degli strumenti digitali che si utilizzano oggi, prevedeva la modalità di insegnamento in "cooperative learning", in apprendimento collaborativo. Il docente introduceva un nuovo argomento, secondo un approccio trasmissivo, allo scopo di far inquadrare "la situazione problematica" agli studenti. Era importante che, in questa fase, ci fosse una visualizzazione di quanto veniva presentato e, allo scopo, veniva utilizzata una lavagna luminosa, per proiettare i lucidi, preparati dal docente. L'insegnante poi suddivideva il macro-argomento proposto alla classe, relativo ad un compito, diremmo oggi in situazione reale, in alcuni sotto-problemi, data la sua complessità. La classe veniva così suddivisa in piccoli gruppi, composti da quattro o cinque unità, secondo dei criteri di eterogeneità, di genere, di conoscenze e di esperienze lavorative pregresse, possedute dai corsisti. Ciascun gruppo poi aveva il compito di rispondere ai quesiti posti dal docente, utilizzando del materiale specifico che gli era stato fornito (letture tratte da quotidiani, riviste, testi scolastici, ecc.). L'attività veniva svolta in classe durante le ore di lezione e ciascun gruppo veniva così coinvolto in proprie riflessioni. Il docente aveva il ruolo di coordinatore e facilitatore.

Verso la scuola 3.0: esperienza di due docenti in Istituti di 1° e di 2° Livello

Ogni singolo gruppo concludeva la sua attività producendo un documento di sintesi, che veniva poi condiviso con tutta la classe, attraverso l'esposizione orale. Gli studenti venivano così educati a gestire le criticità e a far emergere gli aspetti positivi della loro attività appena svolta, ciò che diremmo oggi a sviluppare e potenziare le competenze trasversali e di cittadinanza.

La didattica collaborativa si basa sulla teoria del socio-costruttivismo, secondo la quale la conoscenza è il prodotto di una costruzione attiva del soggetto. Essa punta al miglioramento dei processi di apprendimento e di socializzazione, attraverso la mediazione del gruppo, i cui componenti agiscono in modo positivo e interdipendente così che il successo di uno corrisponda al successo di tutto il gruppo. La scuola in questo modo diventa un mezzo di promozione umana e sociale.

Il docente, in questa metodologia didattica, assume il ruolo di tutor: favorisce l'interazione tra gli studenti, ne stimola la discussione, ne facilita l'apprendimento, sollecitandoli attraverso domande, verifiche e punta sulla mediazione sociale. Gli allievi, si aiutano reciprocamente, si correggono e si autovalutano e diventano così corresponsabili del loro apprendimento. L'insegnante ha il ruolo di facilitatore e organizzatore delle attività.

3. L'istruzione per gli adulti

I corsi serali forniscono un titolo GIURIDICAMENTE EQUIVALENTE ai corsi diurni, offrono istruzione e formazione professionale, sono organizzati con orari flessibili e si adattano alle esigenze e necessità di ciascuno studente, offrendo un percorso personalizzato.

Gli obiettivi sono gli stessi del corso diurno, con riferimento alla Direttiva n° 4 del 16/01/2012 in applicazione dell'articolo 8 comma 3 del Decreto del Presidente della Repubblica del 15/03/2010, n° 88, redatto dal M.I.U.R..

I corsi serali hanno lo scopo inoltre di fronteggiare l'analfabetismo di ritorno, oltre che di contrastare la dispersione scolastica. A tale scopo è stata utilizzata, fin dagli anni '80, **la didattica breve**, volta alla ricerca dei saperi essenziali.

La didattica breve fu introdotta dal Prof. Filippo Ciampolini, Ordinario di Elettrotecnica nella Facoltà di Ingegneria, presso l'Università di Bologna, alla fine degli anni 70, come metodologia specifica di insegnamento.

Tale metodologia affiancava la didattica tradizionale, nel rispetto del rigore scientifico e dei contenuti delle varie discipline, aggiungendo la drastica riduzione del tempo necessario al loro insegnamento e al loro apprendimento. La didattica breve si propone infatti di individuare gli aspetti concettualmente irrinunciabili, sfrondandoli dagli aspetti

secondari, in modo da produrre un apprendimento completo della struttura concettuale di una disciplina, in un tempo considerevolmente inferiore rispetto a quello usuale.

Da anni, inoltre, i pedagogisti insistono su una **didattica laboratoriale e digitale**, focalizzata sul processo di apprendimento, oltre che sul prodotto finale.

Il prof. Giovanni D'Aniello, a questo riguardo, ha impostato, da diversi anni, la sua didattica **al corso serale presso l'I.T.I. "E. Fermi" di Desio (MB)**, sull'utilizzo delle risorse laboratoriali, a disposizione della scuola, per consentire agli studenti l'acquisizione e il potenziamento delle competenze inerenti l'indirizzo di specializzazione.

Una didattica per progetti, volta alla realizzazione di prodotti, di prototipi (figura 1).



Figura 1: esempio di prototipo “gasogeno a biomassa” realizzato da uno studente del corso Elettronica ed Elettrotecnica.

L'attività didattica, anche prima dell'emergenza sanitaria, è stata spesso svolta in e-learning, in modalità prevalentemente asincrona, grazie alle tecnologie multimediali. Del resto il corso serale, da tempo, prevede di utilizzare le ore curricolari (fino ad un massimo del 20% del totale), in Didattica a Distanza (DAD): il docente prepara il materiale, in formato testo, audio e video; lo inserisce in determinate piattaforme, in modo che possa essere visionato, in momenti diversi, dagli studenti.

Verso la scuola 3.0: esperienza di due docenti in Istituti di 1° e di 2° Livello

La didattica laboratoriale costituisce una certa importanza per lo sviluppo e il potenziamento delle competenze. Le competenze non si acquisiscono solo con modalità didattiche trasmissive, ma occorrono tecniche **partecipative**. Il laboratorio didattico si fonda su un lavoro personale oppure organizzato in piccoli gruppi, su un determinato compito di progetto. L'apprendimento avviene in modo attivo: lo studente impara facendo, dà un senso a ciò che sta realizzando, applica le sue conoscenze e abilità in contesti reali.

Risale al 1918 l'introduzione della **didattica per progetti**, ad opera di **William Heard Kilpatrick** (1871-1965), pedagogista statunitense: egli propose di inquadrare tutto il lavoro scolastico secondo un **percorso progettuale**.

Nella didattica per progetti lo studente ha la possibilità di realizzare un prodotto finale: vengono così coinvolte le sue competenze disciplinari e trasversali, in particolare quelle sociali e sviluppa la sua abilità ad orientarsi nel mondo reale, extra-scolastico.

Lavorare per progetti significa **pianificare, progettare e coordinare le risorse disponibili**, allo scopo di realizzare un obiettivo predefinito, secondo determinate specifiche.

4. La scuola 2.0

La **scuola 2.0** e quindi la **classe 2.0** può essere definita come un **ambiente ibrido**, in cui il lavoro in presenza con le tecnologie e il lavoro in rete a distanza, sincrono o asincrono, si alternano e si fondono in un unico processo di apprendimento-insegnamento.

Si pone l'attenzione, in questa fase, alle forme di comunicazione del docente verso i propri studenti. Non viene più riconosciuta come fondamentale la comunicazione **verbale**, ma assumono sempre più importanza le forme: **para-verbale e non verbale**.

La modalità para-verbale riguarda: l'altezza, il ritmo, il volume e il tono del linguaggio, l'accento e la qualità della voce; quella **non verbale**, si riferisce ad aspetti non contenutistici della comunicazione e riguarda: la postura, la gestualità, la cinesica (mimica facciale ed espressioni del volto, lo sguardo), la prossemica (comportamento spaziale) e l'aspetto esteriore.

5. La scuola in piena pandemia da COVID-19

La scuola è stata improvvisamente e inaspettatamente costretta a dare una risposta immediata alla nuova situazione di emergenza sanitaria, che si è venuta a creare con la pandemia. E' stato quindi necessario sviluppare e potenziare la cosiddetta **DAD, didattica on line, a distanza**. Il raggio di azione si è così ridotto spazialmente (figura

2): lo studente si ritrova, da solo, davanti al computer, in posizione statica, limitato nei suoi movimenti per diverso tempo e impossibilitato a interagire fisicamente con i compagni.



Figura 2: Didattica a Distanza (DAD).

L'avvento della **pandemia** è stato **travolgente**: a tempo di record la didattica è proseguita a distanza, anche se non in assenza di problemi, in modalità asincrona e sincrona, con lezioni ed esercitazioni virtuali, seguite dalle relative valutazioni, in modalità scritta e orale.

La DAD ha certamente consentito di portare avanti l'attività didattica, di mantenere un contatto psicologicamente importante tra docente e studenti, ma ha manifestato i suoi limiti. Uno di questi è la **“DIGITALDIVIDE” (divario digitale)**: si è venuta a creare una sorta di discrepanza tra chi ha accesso alle **tecnologie dell'informazione e della comunicazione (TIC)** e chi ne è stato escluso. Infatti non tutti gli studenti hanno avuto a disposizione gli strumenti software e hardware necessari per collegarsi in rete e fruire delle risorse multimediali, per motivi anche ambientali, legati agli spazi disponibili in famiglia.

Ci troviamo, in questo momento, in un contesto pandemico in evoluzione, non ancora risolto e ciò comporta un continuo adeguamento della didattica all'emergenza sanitaria

Verso la scuola 3.0: esperienza di due docenti in Istituti di 1° e di 2° Livello

in atto. Si sta attuando la **didattica digitale integrata (DDI)**, costituita da lezioni in presenza e a distanza: la classe è divisa in due gruppi, alcuni studenti seguono le lezioni curricolari da casa, altri si trovano a scuola in presenza e il docente organizza le lezioni sfruttando sia la modalità sincrona, sia quella asincrona.

L'emergenza sanitaria ha imposto un cambiamento delle metodologie didattiche, messe in atto da parte del docente, per rendere l'apprendimento attivo e collaborativo negli studenti. Nella DDI è infatti richiesto che il docente non solo abbia competenze legate alla **disciplina** che sta insegnando, ma anche indirizzate a questioni **organizzative e metodologiche**, in modo da gestire l'insegnamento in termini di pianificazione e definizione degli obiettivi da raggiungere. E non solo!

La DAD in particolare ha imposto una revisione della didattica, per cui è stato necessario rimodulare sia **l'ambiente educativo** che la **relazione educativa**, in quanto non è stato più possibile semplicemente riproporre le lezioni, come avveniva prima.

L'ambiente educativo in DAD deve essere legato **all'approccio costruttivista**, per un apprendimento attivo e collaborativo. Lo studente cioè è messo in condizioni di agire ed interagire.

Lo spazio fisico, nella DAD, dall'aula diventa digitale ed assume un significato più ampio. E le competenze diventano anche digitali: il saper utilizzare le tecnologie dell'informatica e della comunicazione (TIC).

Il docente non è più solo un trasmettitore di conoscenze, acquisite dallo studente in modo passivo, ma assume un ruolo di facilitatore, di colui che invia gli input "giusti" in modo tale che lo studente costruisca la propria conoscenza, sviluppi le proprie abilità e acquisisca competenze, disciplinari e trasversali.

Per costruire un'efficiente relazione educativa con gli studenti il docente deve saper rapportarsi con il loro mondo. Una relazione educativa costruita con l'empatia, perché, senza di essa, come sostengono i pedagogisti, non si ha un vero e proprio apprendimento. E' importante che lo studente si senta capito ed accettato dal docente, altrimenti metterà in atto, verso il docente stesso, delle resistenze, dei timori che potrebbero impedire il suo processo di apprendimento.

6. La scuola 3.0

Non abbiamo ancora finito di capire se la scuola italiana si sia adeguata alla **scuola 2.0**, caratterizzata dal nuovo processo di digitalizzazione, che già si parla di **scuola 3.0**, con riferimento ad una nuova tipologia di didattica, ampiamente diffusa all'estero, in particolare negli Stati Uniti.

Nel nuovo modello di scuola si parla di **classe 3.0**, caratterizzata dalla tecnica di insegnamento a “**classi capovolte**” (**flipped classrooms**), in cui risulta di primaria importanza l'utilizzo delle nuove tecnologie e dei nuovi mezzi di comunicazione (figura 3): l'insegnante sceglie gli argomenti da affrontare, carica materiali didattici di tipo diverso, costituiti da testi scritti, podcast, video tutorial e, in genere, materiale disponibile su Internet.

Gli studenti, a casa, studiano gli argomenti assegnati, individualmente o in gruppo, con le proprie tempistiche. In questo modo iniziano il loro apprendimento attivo e preparano le domande da porre in classe.

La classe diventa così un luogo di confronto e di dibattito. Il docente non è più colui che spiega gli argomenti dall'inizio alla fine, ma aiuta a rielaborare i contenuti, motivando gli studenti. La **motivazione** diventa in questo modo la chiave dell'apprendimento: lo studente può affrontare, con i propri tempi, gli argomenti e sa che in questo modo sta svolgendo un lavoro utile anche per gli altri.



Figura 3: la scuola 3.0.

Gli strumenti che si usano in classe possono essere: pc, tablet e smartphone per risolvere problemi e sperimentare quello che si è imparato.

L'**aula**, l'unità spaziale intorno alla quale si è finora costruita la scuola, viene ripensata: attraverso l'evoluzione dei suoi spazi, fisici e digitali, dovrà fornire nuova centralità a insegnanti e studenti; **dovrà favorire la collaborazione, la ricerca, la riflessione, la**

costruzione e la condivisione della conoscenza. Deve diventare un'aula connessa e aperta al mondo. **Un'aula 3.0 appunto!**

Gli aspetti fondamentali sono:

- La cura del linguaggio multimediale a supporto della lezione: testi scritti, immagini, video, audio.
- Il rafforzamento della comunicazione verbale, utilizzando ed enfatizzando le parole chiave.
- L'attivazione di nuove forme di coinvolgimento. La lezione deve essere ancora più interattiva costruendo, per esempio, dei **Digital Assets**, cioè **oggetti digitali arricchibili e riutilizzabili, quindi personalizzabili ed attivi.**

7. Il modello “Flipped Classroom”

La scuola 3.0 si fonda sul modello “**flipped classroom**”, consistente in una **inversione** delle modalità di insegnamento tradizionale: mentre nella lezione tradizionale lo studente acquisisce le informazioni a scuola e a casa avviene l'appropriazione di ciò che ha appreso; nella lezione flipped è a casa che lo studente acquisisce le informazioni ed è a scuola che esso sviluppa l'apprendimento, alla presenza del docente. Il docente in questo caso ha un ruolo di **guida**, incoraggia gli studenti alla ricerca, alla collaborazione e alla condivisione dei contenuti.

Questa metodologia presuppone l'utilizzo di diversi strumenti digitali e multimediali:

- il docente prepara il materiale didattico, in formato video, testo, ecc. e lo inserisce in apposite piattaforme on line;
- poi agli alunni viene assegnato un compito da svolgere a casa;
- gli studenti si collegano nello spazio virtuale per visionare il materiale e acquisire le relative informazioni;
- rientrati a scuola, il docente fornisce i dovuti chiarimenti, esegue esercitazioni ed altre attività funzionali (compiti, problem solving, analisi di casi specifici, attività di approfondimento), portando gli allievi ad una migliore comprensione dell'argomento;
- gli alunni riferiscono quanto appreso, attraverso delle prove somministrate dal docente, on line e in presenza; in questo modo si testa il loro livello raggiunto e si dà loro la possibilità di imparare dai propri errori.

Nel modello flipped classroom (figura 4):

- gli studenti diventano **responsabili e organizzatori del proprio apprendimento** ;

- i docenti assumono il ruolo di **tutor**, di **organizzatori**, **animatori** e **osservatori** del processo di apprendimento dei loro allievi;
- la tecnologia assume un ruolo importante, in quanto consente agli studenti di accedere ai materiali didattici da casa e permette ai docenti di gestire l'attività e di monitorare l'apprendimento dei loro allievi;
- le ore di lezione sono dedicate principalmente alla discussione, alla condivisione e all'approfondimento delle conoscenze acquisite a casa.

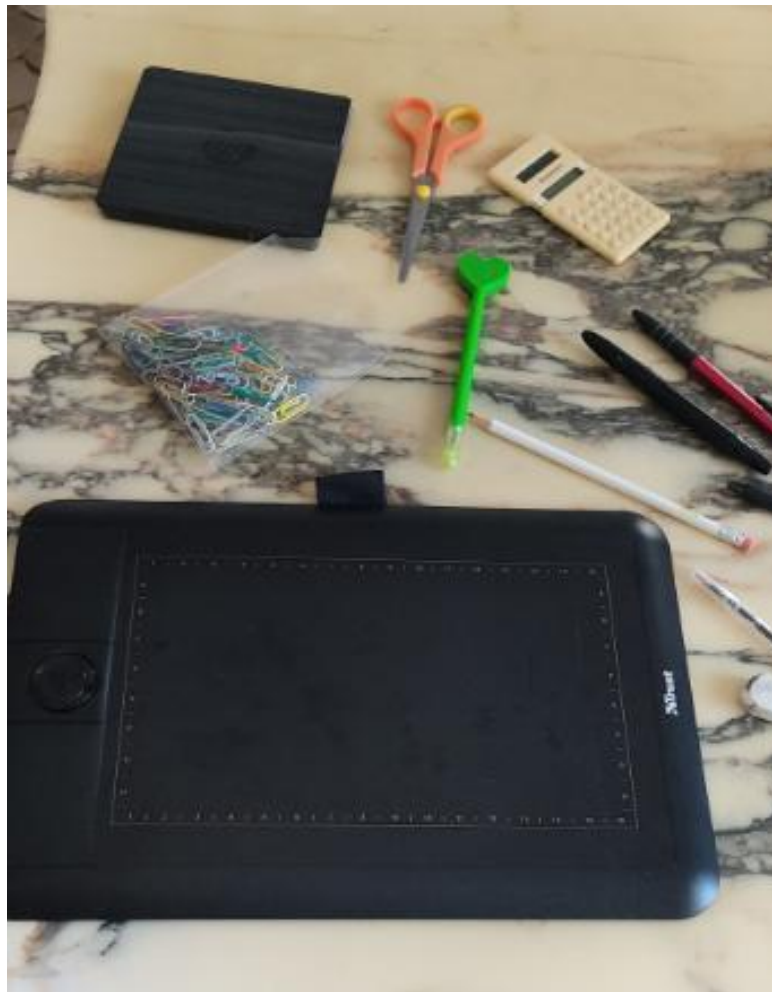


Figura 4: esempio di utilizzo di materiali nella scuola 3.0.

Il prof. D'Aniello Giovanni ritiene che un modello di questo tipo sia difficilmente applicabile al corso serale, frequentato da studenti adulti lavoratori, proprio per il tempo limitato di cui essi in generale dispongono, durante la giornata, sia per motivi di lavoro, sia per impegni familiari.

Si potrebbe però adottare una **soluzione ibrida, tra didattica a progetti e flipped classroom**:

Verso la scuola 3.0: esperienza di due docenti in Istituti di 1° e di 2° Livello

- assegnazione di compiti specifici agli studenti, realizzati rispettando i loro tempi;
- svolgimento delle ore curricolari, in classe e in laboratorio, per fornire chiarimenti, approfondimenti, condivisione dei contenuti e consolidamento delle conoscenze e abilità acquisite.

Gli obiettivi cruciali del corso serale rimangono quelli di **contrastare la dispersione scolastica**, di **reinserire gli adulti nel circuito professionale** (per chi ha perso o lasciato il lavoro) e di **sviluppare e potenziare le competenze degli studenti**, per consentire crescita e miglioramento del proprio ruolo e responsabilità in ambito lavorativo.

8. Conclusione

La pandemia da Covid 19 ha evidenziato i cambiamenti già in atto da anni nella didattica.

L'insegnamento non consiste più semplicemente nel riprodurre ciò che i nostri insegnanti ci hanno trasmesso a suo tempo.

L'evoluzione tecnologica, sempre più rapida, obbliga noi docenti ad un continuo aggiornamento allo scopo di adeguare la didattica.

Come illustrato nell'articolo, i corsi sperimentali, anche per gli adulti, hanno avuto lo scopo di superare la dispersione scolastica permettendo di applicare diverse metodologie.

Non esiste, secondo noi, una sola didattica "vincente", ma è il docente che deve scegliere la metodologia che ritiene migliore per il contesto in cui si trova ad operare. Non si può far riferimento ad un solo metodo e ciò comporta una conoscenza approfondita da parte dell'insegnante di tipo socio-psico-pedagogico, oltre che disciplinare.

Riferimenti bibliografici

- Gallo L. e Pepe I., 2020, “Manuale delle metodologie e tecnologie didattiche”, Edizioni Simone, Napoli
- Mecacci L., 2001, “Manuale di psicologia generale”, Giunti Editore, Firenze
- Calamari E., 2008, “A scuola con gli adolescenti”, Editore Felici, Pisa
- De Beni R., Moè A., 2000, “Motivazione e apprendimento”, Editore Il Mulino, Bologna

Matematica e realtà: un approccio creativo per sapersi orientare in situazioni e contesti di vita reale¹

Angela Chieffari¹, Mario Innocenzo Mandrone²

¹ Convitto Nazionale “P. Giannone” - Benevento- e-mail: angelachieffari@gmail.com

² V. Presidente Federazione Nazionale “Mathesis Sannio-Irpinia “ Benevento e- mail: almavit@libero.it

Sunto

L'avvento della società globale dell'informazione e della conoscenza porta ad un cambiamento sostanziale dell'organizzazione sociale dei saperi e modifica la struttura della produzione dei beni materiali e immateriali. L'attuale contesto, caratterizzato da incertezza, velocità e complessità, richiede, dunque, maggiore flessibilità e maggiori competenze per affrontare il cambiamento. E' quindi indispensabile la costruzione di nuovi modelli culturali che favoriscano l'interazione tra la didattica e le nuove tecnologie. Il docente deve quindi diventare costruttore di ambienti di apprendimento progettati per consentire percorsi attivi e consapevoli: un luogo in cui gli studenti possano essere protagonisti nel processo di costruzione della conoscenza. Tenendo presente quanto detto, in questo lavoro presenteremo alcuni approcci metodologici particolarmente efficaci nell'insegnamento della matematica nella scuola primaria quali il problem solving, il cooperative learning la matematica ricreativa, il gioco. Il problem solving è una metodologia che rimanda ad attività in cui prevale il saper ragionare, il fare ipotesi ed operare scelte, avvalendosi di una adeguata gestione delle informazioni più che dell'applicazione sterile di procedimenti meccanici volti alla risoluzione di semplici problemi. La matematica ricreativa, invece, attraverso la presentazione di giochi, enigmi e situazioni insolite e curiose, è la modalità di lavoro che meglio incoraggia la ricerca e la progettualità, coinvolge gli alunni nel pensare, realizzare, valutare attività vissute in modo condiviso e partecipato, favorisce lo sviluppo ed il potenziamento di capacità logiche e critiche.

Parole chiave: Competenze-chiave, Problem solving, matematica ricreativa, cooperative learning, computational thinking (pensiero computazionale) e coding, didattica per problemi, attività laboratoriale, ricerca/azione.

¹ Come espressione della mente umana la matematica riflette la volontà attiva, la ragione contemplativa e il desiderio di perfezione estetica. I suoi elementi fondamentali sono la logica e l'intuizione, l'analisi e la costruzione, la generalità e l'individualità. Tradizioni diverse potranno mettere in evidenza aspetti diversi, ma è soltanto la reazione di queste forze antitetiche e la lotta per la loro sintesi che costituiscono la vita, l'utilità e il valore supremo della scienza matematica. (R. Courant- H. Robbins, Che cos'è la matematica" Universale Bollati Boringhieri).

1. Introduzione ²

La società nella quale viviamo è in continua trasformazione. Le nuove scoperte e la tecnologia hanno cambiato le nostre abitudini e influenzato il mondo del lavoro, la scuola, il tempo libero, la politica e i rapporti sociali. Al cittadino di oggi sono richieste nuove competenze per poter affrontare la complessità e adattarsi ai futuri cambiamenti. Per effetto della nuova civiltà tecnologica, oggi, è quanto mai sentita l'esigenza di una scuola nuova rinnovata nella didattica, nei metodi, nei contenuti, nell'organizzazione. Ciò a partire dalla padronanza della lingua italiana, dalle capacità di argomentare e di risolvere problemi, dall'incontro con il nostro patrimonio storico, artistico e ambientale, dalle sempre più indispensabili competenze digitali. Il sistema scolastico italiano assume come orizzonte di riferimento verso cui tendere, il quadro delle competenze-chiave per l'apprendimento permanente definite dal Parlamento europeo e dal Consiglio dell'Unione europea. Sono state individuate otto competenze-chiave (22/05/2018) che rappresentano la cornice e lo sfondo per tutti i saperi. Esse sono:

1. Competenza alfabetica funzionale
2. Competenza multi-linguistica
3. Competenza matematica e competenza in scienze, tecnologie e ingegneria
4. Competenza digitale
5. Competenza personale, sociale e capacità di imparare ad imparare
6. Competenza in materia di cittadinanza
7. Competenza imprenditoriale

Sono chiamate appunto “competenze-chiave” perché sono delle “meta-competenze”, cioè delineano strumenti culturali, metodologici, relazionali che permettono alle persone di partecipare e incidere sulla realtà. Elementi quali il pensiero critico, la risoluzione di problemi, il lavoro di squadra, le abilità comunicative e negoziali, le abilità analitiche, la creatività e le abilità interculturali sottendono a tutte le competenze chiave.

Il concetto di competenza si coniuga con un modello di insegnamento/apprendimento che mette in gioco il ruolo dei processi di elaborazione personale delle conoscenze, attraverso problemi che suscitino forte interesse da parte dell'allievo e per la cui risoluzione i contenuti disciplinari, considerati in forma integrata, devono costituire risorse fondamentali. Nell'insegnamento per competenze bisogna sostenere lo sviluppo dei processi cognitivi, cioè lo sviluppo delle capacità logiche e metodologiche trasversali che vanno attivate all'interno dei campi di esperienza e delle discipline. Dunque il «fare scuola» oggi significa mettere in relazione la complessità di modi radicalmente nuovi di apprendimento con un'opera quotidiana di guida, attenta al metodo, ai nuovi media e alla ricerca multi-dimensionale. In tale scenario, alla scuola spettano alcune finalità specifiche:

² “Trascurare la matematica è un'offesa al sapere, poiché chi la ignora non può conoscere le altre scienze o le cose del mondo”. (R. Bacon).

Matematica e realtà: un approccio creativo per sapersi orientare...

1. offrire agli studenti occasioni di apprendimento dei saperi e dei linguaggi culturali di base;
2. far sì che gli studenti acquisiscano gli strumenti di pensiero necessari per apprendere e selezionare le informazioni;
3. promuovere negli studenti la capacità di elaborare metodi e strategie per elaborare itinerari personali;
4. favorire l'autonomia di pensiero degli studenti, orientando la propria didattica alla costruzione di saperi a partire da concreti bisogni formativi.

Nell'insegnamento per competenze risulta essere di fondamentale importanza:

1. la centralità dell'alunno e del processo di apprendimento;
2. l'assunzione di responsabilità educativa del docente/educatore;
3. la flessibilità didattica: metodo induttivo, peer-tutoring, laboratorialità, approccio collaborativo; apprendimento sociale in contesto significativo;
4. la valorizzazione dell'esperienza;
5. l'attenzione ai processi metodologici e strategici e alla dimensione relazionale;
6. l'acquisizione di una modalità riflessiva per rappresentare l'esperienza, attribuirle significato, acquisire metacognizione;
7. l'attenzione agli aspetti affettivo-emotivi dell'apprendimento;
8. l'attribuzione di autonomia e responsabilità all'allievo attraverso i compiti significativi.

Approcci metodologici particolarmente efficaci nell'insegnamento della matematica nella scuola primaria risultano essere il problem solving, il cooperative learning, la matematica ricreativa, il gioco, volti ad incoraggiare la ricerca e la progettualità al fine di favorire lo sviluppo e il potenziamento di capacità logiche e critiche e scoraggiare l'applicazione sterile di procedimenti meccanici tesi alla soluzione di semplici problemi. Dunque la matematica va intesa non solo come chiave per lo sviluppo tecnologico quanto anche, se non soprattutto, come strumento di conoscenza critica e culturale. E fuor di dubbio che uno degli obiettivi fondamentali dell'insegnamento della matematica sia proprio quello di sviluppare nei giovani lo spirito critico, la fantasia, la creatività che sono le componenti tipiche e fondamentali della matematica. Ma, se le applicazioni della matematica a campi quali l'arte, la fisica, l'astronomia ne mettono in evidenza l'efficacia, le "disfatte" ne mettono in evidenza l'essenza. Basta solo un accenno alle geometrie non euclidee, alle crisi della logica e della teoria degli insiemi a far capire che la matematica non è un insieme di verità, bensì un sistema (il più possibile) coerente che, affiancato all'intuizione, permette di indagare razionalmente in vasti campi del sapere. L'esistenza di tre geometrie nelle quali la stessa figura gode di proprietà diverse viene a scuotere la convinzione che le relazioni matematiche siano verità immutabili atte ad illuminare l'uomo nella ricerca del vero. Si riconosce così che in matematica non esistono verità a sé stanti, ma solo conseguenze logiche di determinate premesse. L'abbandono della concezione pitagorica e platonica per la quale la matematica è

considerata come scienza eminentemente metafisica, atta a guidare l'uomo nella scoperta dell'autentica natura della realtà, non ha certo sminuito l'importanza di questa scienza, anzi l'ha esaltata ponendola come premessa di ogni altra speculazione scientifica dandole quel carattere comune a tutte le scienze che, come dice Poincaré, sono continue approssimazioni alla realtà. All'ammirata e statica contemplazione per le grandi teorie matematiche è oggi subentrato un atteggiamento dinamico e critico.

Lo stesso Leopardi, nello Zibaldone, dopo aver espresso il desiderio di una maggiore conoscenza e padronanza della matematica, manifesta il rammarico di non aver avuto bravi maestri in grado di far apprendere una disciplina così severa (la matematica). Ciò si evince dallo Zibaldone in cui così si esprime: "La pratica delle matematiche, del loro modo di procedere e di giungere alle conseguenze, del loro linguaggio aiuta infinitamente le facoltà intellettive e ragionatrici dell'uomo, compendia le operazioni del suo intelletto, lo rende più pronto a concepire, più veloce e spedito nell'arrivare alla conclusione dei suoi pensieri e dell'intero suo discorso; insomma, per una parte assuefà, per l'altra facilita all'uomo l'uso della ragione". A proposito della matematica il Padoa Schioppa, già nel 1908, scriveva: "Nessun altro studio richiede meditazione più profonda, nessun altro meglio induce ad essere cauti nell'affermare, semplici ed ordinati nell'argomentare, precisi e chiari nel dire". Sebbene il rapporto fra la scienza dei numeri e la creazione artistica non appare evidente, gli intrecci e le convergenze fra queste due sfere della cultura sono stati, nel corso dei secoli, profondi e fecondi. Molti poeti ed artisti, in epoche diverse, hanno subito il fascino della matematica, delle sue idee e dalle sue tecniche e dalle sue forme hanno tratto ispirazione per le loro opere e i loro linguaggi. La matematica è, quindi, un corpo di conoscenze; esso non contiene verità, ma rappresenta lo spirito e l'essenza della razionalità. E quando il discente avrà abbandonato lo studio della matematica e si sarà dedicato ad altre attività, il grande patrimonio che gli avrà conferito lo studio di questa disciplina è proprio riposto nell'attitudine ad organizzare processi logici (anche se nuovi) e coordinare secondo questi il suo pensiero. Lo stesso Nelson Mandela, inaugurando il Congresso Panafricano di Matematica, incitava le giovani generazioni a impadronirsi di quanta più matematica possibile per non perdere l'occasione storica di uscire dal proprio sottosviluppo utilizzando gli strumenti della "new economy" nella quale le conoscenze degli individui contano molto di più dei capitali.

2. Le competenze matematiche – indicazioni metodologiche³

La competenza matematica è la capacità di sviluppare e applicare il pensiero e la comprensione matematica per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Essa comporta, quindi, la capacità di usare modelli matematici, di pensiero e

³ "Nessuna umana investigazione si può dimandare vera scienza, se essa non passa per le matematiche dimostrazioni". (Leonardo da Vinci)

Matematica e realtà: un approccio creativo per sapersi orientare...

presentazione (formule, modelli, costrutti, grafici, diagrammi....) e la disponibilità a farlo. La matematica, quindi, fornisce strumenti per indagare e spiegare molti fenomeni del mondo che ci circonda, favorendo un approccio razionale ai problemi che la realtà pone e fornendo, quindi, un contributo importante alla costruzione di una cittadinanza consapevole. Essa, pertanto “contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri.” “Di estrema importanza è lo sviluppo di un’adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell’uomo.” (Indicazioni Nazionali per il curriculum della scuola dell’infanzia del primo ciclo di istruzione). Quali “fattori imprescindibili” per sviluppare competenze e apprendimenti stabili e “con valore per la cittadinanza” sono indicati:

1. l’integrazione delle discipline;
2. la cooperazione e l’apprendimento sociale;
3. la laboratorialità ;
4. l’adozione di un curriculum di istituto verticale.

Bisogna pertanto promuovere:

1. apprendimenti significativi;
2. uso flessibile degli spazi come luoghi attrezzati che facilitino approcci operativi alla conoscenza;
3. interventi adeguati nei riguardi delle diversità;
4. l’esplorazione e la scoperta”;
5. l’apprendimento collaborativo”;
6. la “consapevolezza del proprio modo di apprendere” (metacognizione: “imparare ad apprendere”);
7. didattica di tipo “laboratoriale”.

Fin dalla scuola dell’infanzia, nella scuola primaria e nella scuola secondaria di primo grado l’attività didattica è orientata alla qualità dell’apprendimento di ciascun alunno e non ad una sequenza lineare, e necessariamente incompleta, di contenuti disciplinari. I docenti, in stretta collaborazione, promuovono attività significative nelle quali gli strumenti e i metodi caratteristici delle discipline si confrontano e si intrecciano tra loro, evitando trattazioni di argomenti distanti dall’esperienza e frammentati in nozioni da memorizzare. Un ruolo strategico essenziale svolge l’acquisizione di efficaci competenze comunicative nella lingua italiana che non è responsabilità del solo insegnante di italiano ma è compito condiviso da tutti gli insegnanti, ciascuno per la propria area o disciplina, al fine di curare in ogni campo una precisa espressione scritta e orale. Se ci fermassimo a riflettere sulle cose che facciamo tutti i giorni e sui nostri comportamenti ci renderemmo conto di quanta matematica e quante conoscenze scientifiche stanno alla base di numerose nostre azioni e del modo "scientifico" con cui,

fin da bambini, dobbiamo entrare in relazione con la realtà. Imparare a pensare in modo scientifico e matematico significa coltivare specifiche abilità che saranno molto importanti nella nostra vita futura come la curiosità, l'intuizione, il pensiero logico e spaziale, l'astrazione, il rigore nella ricerca delle cause di un fatto e nella spiegazione delle sue conseguenze. Nella vita di tutti i giorni la matematica ci aiuta a:

1. Ragionare in modo più analitico e rigoroso;
2. Sviluppare un'attitudine alla valutazione critica e una capacità ad elaborare decisioni sulla base di elementi verificati;
3. Acquisire la capacità di affrontare una qualsiasi situazione problematica riflettendo sulle cause, individuando le informazioni che ci servono, valutando costi e benefici delle diverse soluzioni e scegliendo la strategia più adeguata.

Ecco perché, dal punto di vista didattico, occorre:

1. “lavorare su situazioni problematiche prese in prestito dalla realtà, dove il reale non è inteso solo fonte di ispirazione dei problemi, ma come punto di partenza per un percorso che coinvolga gli allievi e permetta loro di usare conoscenze attinte dal proprio ambiente...”
2. “proporre lavori stimolanti affinché l’elaborazione mentale richiesta agli allievi per affrontare un problema prosegua fuori dal tempo e dallo spazio scolastici ...”
3. “Favorire l’esplorazione e la scoperta, al fine di promuovere il gusto per la ricerca di nuove conoscenze.

In questa prospettiva, la problematizzazione svolge una funzione insostituibile: sollecita gli alunni a individuare problemi, a sollevare domande, a mettere in discussione le conoscenze già elaborate, a trovare appropriate piste d’indagine, a cercare soluzioni originali.” Fondamentale si rivela a tale scopo la didattica cooperativa. L’apprendimento cooperativo, che rappresenta niente altro che l’evoluzione scientifica e pedagogica del classico lavoro di gruppo, permette:

- una reale cooperazione attraverso una l’interdipendenza positiva (nessuno studente può svolgere il compito da solo; il compito può essere svolto se tutti forniscono il loro contributo)
- una responsabilità individuale da parte di tutti i componenti attraverso attività diversificate. In questo modo sarà evidente all’insegnante quantità e qualità del contributo di ciascuno.
- un clima piacevole e accogliente attraverso attività ripetute nel tempo su singole abilità sociali (l’accoglienza, l’empatia, l’aiuto reciproco, la responsabilità e la gestione delle divergenze...)
- l’apprendimento di competenze sociali.

Un ruolo fondamentale riveste in questo contesto anche la cosiddetta matematica ricreativa. In prima approssimazione potremmo dire che la matematica ricreativa è un’attività ludica, il cui scopo è divertire colui che la pratica o al quale essa è proposta. Consiste nel risolvere quelli che vengono comunemente detti “giochi matematici” o

“puzzles” o “rompicapo” o “enigmi”. Per la loro soluzione talora sono necessarie nozioni matematiche ma sempre di tipo elementare, spesso solo ragionamenti logici. Un problema per essere considerato un gioco matematico deve rappresentare una sfida intellettuale significativa sotto l’aspetto matematico accessibile a tutti. L’enunciato, possibilmente, deve essere intrigante e sorprendente. La soluzione stessa deve stupire, divertire e distrarre. Pertanto, la matematica ricreativa è un’attività intellettuale che richiede ragionamento, necessita di conoscenze matematiche specifiche, ma lascia spazio all’intuizione e all’immaginazione, coinvolge la dimensione affettiva, emozionale e soprattutto diverte. Nel gioco vengono esercitate, padroneggiate, consolidate molte abilità; quando gioca un bambino mette in atto strategie, inventa regole, attribuisce punteggi, si concentra, analizza, intuisce, deduce, utilizza cioè il pensiero logico e il ragionamento. In questo modo si diverte e mantiene in forma la mente. La sfida per i docenti di ogni ordine e grado è dunque quella di provare a creare uno spazio didattico che assuma la forma di un laboratorio di giochi, non sporadico, ma pienamente inserito nel percorso di apprendimento dell’alunno. Il gioco matematico rappresenta il mezzo più adeguato per sviluppare il pensiero astratto. Esso rappresenta un contesto privilegiato per favorire lo sviluppo progressivo di competenze cognitive e socio-emozionali, indispensabili anche per il successo scolastico. Garantisce il coinvolgimento, l’entusiasmo, la motivazione, la competitività e il rispetto verso le regole. Nel gioco il bambino può effettuare osservazioni, formulare domande e possibili soluzioni, pianificare il controllo delle ipotesi, la raccolta dei fatti e l’interpretazione dei dati emersi. Al termine dell’attività ludica si può avviare, inoltre, una discussione collettiva sugli esiti dell’esperienza realizzata, la formulazione di spiegazioni alternative e la messa in relazione dei risultati. Attraverso uno scambio continuo di domande e risposte si mantiene vivo l’interesse e si offre l’opportunità di maturare nuove consapevolezze, riflettere e provare insieme a rispondere e trovare la soluzione a numerosi quesiti posti dalle situazioni reali, dai compagni o dalle insegnanti. Il percorso didattico da seguire deve naturalmente partire dall’esplorazione della realtà che ci circonda. Le osservazioni, le conversazioni, le discussioni, le attività di rielaborazione grafica, pittorica e manipolativa sono essenziali per riflettere e rielaborare la realtà in termini matematici. Il bambino, attraverso un percorso di conoscenza e scoperta, impara a organizzare le proprie esperienze attraverso azioni consapevoli; sperimentando, impara a confrontare, a ordinare, a compiere stime approssimative, a formulare ipotesi, a verificarle con strumentazioni adeguate, a interpretare e a intervenire consapevolmente sul mondo, a verbalizzare. Nell’attuale momento storico, pertanto, l’insegnamento e l’apprendimento della matematica trova, più che mai, la sua ragion d’essere nel contributo che può dare alla formazione del pensiero e nell’acquisizione di un modo di pensare matematico, improntato allo sviluppo di interessi, di abilità logiche, intuitive, creative, alla chiarezza di idee, al rigore e alla precisione espositiva. La matematica diventa, pertanto, occasione per osservare, ragionare, scoprire ed entusiasinarsi, mettersi alla prova, domandare e dialogare, sbagliare ed imparare dagli errori, affrontare problemi e trovare strategie diverse per risolverli. In questo modo si

stimolerà lo “sguardo matematico” che esplora i fatti, sviluppando logica e immaginazione, in un continuo intreccio con tutti i campi di esperienza. Diverse ricerche, anche datate, hanno dimostrato che i bambini anche in età prescolare dispongono già di una qualche competenza nell'eseguire in concreto operazioni aritmetiche richieste dalla soluzione di problemi orali. (Pontecorvo, Pontecorvo, 1986; Agli, Martini, 1995).

4. L'immagine della matematica- muoversi tra i numeri⁴

Spesso accade che molte persone, del resto intelligenti e colte, dichiarino apertamente, a volte senza rammarico e addirittura con una specie di vanto di “.... non aver mai capito la matematica”. Non considerano come una lacuna nelle proprie conoscenze l'aver cacciato nell'oblio più profondo il concetto di logaritmo, anche se, per esempio, parlano quotidianamente di tassi, di percentuali, di elasticità dei prezzi e così via. Cercare le cause di un siffatto atteggiamento è abbastanza arduo. Una delle possibili cause è da ricercarsi, in parte, nella tradizione idealistica della nostra cultura che adotta volentieri lo schema crociano, secondo il quale le scienze particolari sono dei coacervi di “pseudoconcetti”. In questo ordine di idee si potrebbe dire che spesso chi dichiara di non sapere nulla di matematica spesso “fa” della matematica molto meglio di quanto egli stesso non creda. Quante volte, per esempio, accade di leggere dei ragionamenti giuridici che sono tipicamente matematici, perché seguono tutte le regole del ragionamento matematico: schematizzazione, formulazione astratta, deduzione rigorosa in base a regole fisse. Si potrebbe dire, forse in modo paradossalmente esagerato, che la persona colta, che non deve utilizzare direttamente la matematica nella sua vita professionale, può anche conoscere pochissimo di matematica, ma tale persona deve sapere che il metodo matematico non è solo un insieme di strumenti, ma una mentalità che è il fondamento di ogni mentalità scientifica, perché abita da sempre nel cuore dell'uomo, come sete di sapere certo. Tutto ciò porta a porci delle domande sulla didattica della matematica. Il problema, ovviamente, non è di facile soluzione per varie ragioni, non ultima una ripugnanza generica alla difficoltà di astrazione e la svogliatezza che assale molti nel seguire un ragionamento rigoroso, anche quando è condotto nel linguaggio comune. Noi riteniamo, pertanto, che una persona colta può anche ignorare la matematica nei suoi sviluppi tecnici, ma non può dimenticare che la matematizzazione è una strada che ogni scienza percorre perché conduce alla chiarezza, alla semplicità, al rigore della deduzione. La matematica ha, quindi, non solo una sua intrinseca valenza didattica, ma possiede anche una profonda valenza formativa in quanto induce alla: 1) riflessione critica 2) acquisizione di metodo; 3) analisi per la

⁴ “La matematica alberga nel cuore dell'uomo perché essa traduce quel bisogno di chiarezza, di certezza, di rigore e di coerenza che è tipico di ogni uomo che voglia conoscere” (G. Melzi-Perché la matematica).

ricerca di soluzioni a problemi; 4) sintesi e semplificazione delle conclusioni; 5) limpidezza di linguaggio; 6) facoltà di astrazione; 7) deduzione logica. L'importanza dell'insegnamento della matematica si deve misurare, quindi, non solo su quello che dà nell'immediato agli allievi perché possano muoversi bene nell'insieme delle attività e delle conoscenze umane, ma anche, come ogni vero insegnamento, sugli strumenti che fornisce ai bambini e ai ragazzi di oggi perché possano affrontare, nel corso della loro vita, i grandi problemi dell'umanità del futuro, di cui oggi possiamo solo intuire le difficoltà. Lo stesso Platone più volte nelle sue opere ha posto l'accento sulla funzione pedagogica generale della matematica. Così, ad esempio, egli scrive nel settimo libro de "La Repubblica", a proposito dell'aritmetica: "E che? Non hai tu già osservato come quelli, che per natura sono atti a calcolare, si mostrano naturalmente acuti, in tutte, sto per dire le discipline, mentre i torpidi d'ingegno, quando siano educati ed allenati a questo studio, se anche non se ne giovano in altro, tutti divengono sempre, per lo meno, più acuti d'ingegno che non fossero prima?"

Ora, se la matematica, con la filosofia greca, è nata come ricerca della verità, e quindi come strumento di interpretazione univoca della realtà, oggi non la si può più intendere nello stesso modo: non esiste una matematica, ma più matematiche, che si fondano su ipotesi differenti, a volte contrapposte, e ciascuna sviluppa una propria teoria, senza alcuna pretesa che essa sia in assoluto vera, né l'unica possibile. Difatti, la realtà si può osservare da punti vista differenti e con differenti strumenti interpretativi, ciascuno dei quali è vero in relazione alle ipotesi accettate. La matematica si configura pertanto come insieme di sistemi ipotetico-deduttivi: da un sistema di ipotesi, o assiomi, si deducono le possibili implicazioni, o teoremi. Tutto ciò che si richiede è che la teoria non sia contraddittoria, e cioè che dalle ipotesi poste a fondamento della teoria stessa non si possa dimostrare contemporaneamente un teorema e la sua negazione. (Coerenza del sistema). La Matematica è stata sempre considerata uno strumento fondamentale per capire il mondo che ci circonda; rappresenta una disciplina dinamica, in continuo divenire con tanti problemi non ancora risolti. Tre sono i filoni che oggi si studiano con interesse:

- 1) Lo studio della genesi dei concetti matematici.
- 2) La riflessione sulla Matematica così come si è sviluppata (riflessione sul presente basandosi sul passato).
- 3) I problemi fondazionali, cioè la giustificazione delle teorie matematiche.

Una delle acquisizioni recenti, ma fondamentali, che nasce dallo studio (epistemologico) della Critica dei Principi è il riconoscimento della perdita della certezza della Matematica (nel *sensu comune*) a livello dei fondamenti e della ricerca di una ridefinizione del senso di tale certezza, che anziché indebolirne la forza culturale sembra averne moltiplicato le potenzialità. I tre programmi classici che cercavano di affrontare, secondo punti di vista differenti, la questione della ricerca di fondamenti sicuri ossia Logicismo, Formalismo ed Intuizionismo hanno sostanzialmente fallito il loro scopo, mentre si fa avanti con forza la richiesta di automazione computazionale

anche nella ricerca e nella dimostrazione in matematica contro le tradizionali nozioni di *verità* e di *certezza*. Quest'ultima pone l'esigenza dell'accettazione della fallibilità della matematica con evidenti ricadute sia sulla ricerca sia sull'insegnamento. Nel periodo fra la fine del secolo scorso e l'inizio del nostro, come abbiamo accennato, vi è stata una profonda trasformazione nella Matematica (diciamo per fissare un riferimento, *prima* e *dopo* Hilbert). Oggi in Matematica convivono tutti questi approcci: astratto, formale, costruttivo. Dobbiamo quindi conoscere gli obiettivi, le finalità e i limiti di ognuno di questi approcci per fornire una visione globale della Matematica. Possiamo perciò affermare che l'apprendimento non dipende solo dalla disciplina e dalla metodologia d'insegnamento, ma anche da altri fenomeni legati ai problemi di comunicazione e di ambiente (sociologico ed antropologico). La didattica della matematica pone, oggi, domande diverse e la ricerca in didattica della Matematica tenta di rispondere a queste domande:

- 1) Come rendere più efficace l'insegnamento?
- 2) Come apprendono gli allievi?
- 3) Quali sono gli strumenti metodologici per adattare l'insegnamento alle capacità individuali? Alla classe?
- 4) Come valutare la scelta della metodologia?
- 5) Che cosa valutare?

Abbiamo subito una rivoluzione culturale che ha sconvolto le certezze dei nostri padri, oggi abbiamo la certezza della perdita delle certezze e relativamente alla matematica oggi noi parliamo di Matematiche, di Logiche, ..., e il processo educativo risente di questa varietà di modi di esistere e di coesistere di diversi linguaggi. La questione è complessa, diversi sono i fattori sociali che interagiscono con il sistema educativo e a volte sono conflittuali. I contenuti dell'Insegnamento sono il prodotto dello stato attuale delle conoscenze scientifiche e l'insieme delle conoscenze socialmente riconosciute. Il sapere trasmesso dall'insegnante è qualcosa che non può essere identificato né con il primo (Sapere = La cultura) né con il secondo (Sapere organizzato). Le concezioni che l'alunno ha costruito anche fuori dell'ambito educativo rappresentano un altro sapere (Sapere sociale) suscettibile di entrare in contraddizione con quello sviluppato dall'Insegnante (Sapere insegnato). Quello che è certo è che l'educazione matematica contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti: di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo e quindi di verifica o smentita. Essa tende a sviluppare, in modo specifico, concetti, metodi e atteggiamenti utili a produrre le capacità di ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà e a formare le abilità necessarie per interpretarla criticamente e per intervenire consapevolmente su di essa.

5. L'attività' ...per problemi - la tecnica del problem solving⁵

In Italia nel corso degli anni si è creato un netto divario tra il sapere umanistico e quello scientifico, da sempre considerati come contrapposti e separati. Molti studenti ritengono in generale la matematica, e tutte le discipline ad essa connessa, come una delle materie tradizionalmente più ostiche; una materia incomprensibile, accessibile solo a persone particolarmente dotate di capacità logiche. Numerosi studi, condotti nel campo della Ricerca & Sviluppo su soggetti in età neo-natale, hanno messo in evidenza, invece, una naturale attitudine del cervello umano di conoscenza della realtà che li circonda attraverso un approccio matematico. Ciò che deve essere messo in discussione, partendo da queste premesse, è allora l'impianto metodologico e didattico che sottende ai processi di insegnamento-apprendimento delle discipline scientifiche. È di estrema importanza, quindi, che il docente, di qualunque ordine e grado di scuola, utilizzi strategie mirate ad un approccio motivante alla propria disciplina al fine di consentire la maturazione del desiderio di scoperta e di conoscenza. Una strategia didattica che va sicuramente utilizzata e valorizzata, come suggeriscono le indicazioni ministeriali riguardanti l'asse culturale matematico, è quella del Problem Solving. Nel linguaggio comune il termine "problema" viene adoperato spesso in luogo di parole come "difficoltà", "ostacolo", "dubbio", "tormento", ecc. Per Duncker (1973) il problema sorge quando un essere umano ha una meta e non sa come raggiungerla. Per Polya (1979) "Avere un problema significa: cercare coscientemente un'azione appropriata per ottenere uno scopo chiaramente concepito ma non immediatamente ottenibile". Ma, cosa significa risolvere un problema? Per il matematico ungherese G. Polya "risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. L'attività di risoluzione di problemi è di fondamentale importanza nella didattica della matematica. Dunque "il problem solving è un atteggiamento mentale o un'attività del pensiero che un individuo mette in atto per raggiungere una condizione desiderata partendo da una condizione data. Più propriamente esso è l'insieme di tutti i metodi e le tecniche di soluzione dei problemi e delle relative strategie da mettere in atto per la loro trattazione. La tecnica del problem solving è caratterizzata dalle seguenti fasi: 1) analisi quantitativa e qualitativa del problema; 2) soluzione del problema posto; 3) applicazione della soluzione individuata; 4) estensione della soluzione per individuare percorsi alternativi che conducono ugualmente alla soluzione del problema; 5) processo di controllo. Gli aspetti fondamentali del processo dei problem solving nelle varie fasi indicate precedentemente sono:

1. Visione d'insieme tra le parti del fenomeno indagato per coglierne le interdipendenze;
2. Predisposizione di un metodo di analisi;

⁵la mente non ha bisogno, come un vaso, di essere riempita, ma, come legna da ardere, ha bisogno solo di una scintilla che la accenda, che vi infonda l'impulso alla ricerca e il desiderio della verità. (Plutarco, Moralia, De audiendo)

3. Impiego e determinazione della metodologia di analisi;
4. Raccolta di informazioni finalizzate alla suddetta metodologia;
5. Sintesi delle informazioni;
6. Confronto tra possibili scenari di soluzione impiegando anche tecniche creative ed intuitive;
7. Sperimentazione e valutazione dei risultati.

In letteratura esistono diverse tecniche e modalità di risoluzione di un problema, attualmente impiegate nelle imprese di eccellenza. Tra le più interessanti e utilizzate sono: la tecnica sintetizzata nell'acronimo F.A.R.E. (focalizzare, analizzare, risolvere, eseguire); il metodo Lasswell, usata fin dagli anni trenta nel giornalismo, che schematizza i passi necessari per affrontare la soluzione di un problema; la tecnica di brainstorming (letteralmente tempesta cerebrale, semanticamente tempesta di idee), ideata tra gli anni 30 e 40 da un dirigente pubblicitario Alex Osborn, atta a far emergere idee volte alla risoluzione di un problema". L'importanza e l'efficacia dell'insegnamento per problemi è già stato sottolineato nelle parole di illustri Maestri: nel 1912, Guido Castelnuovo, al III Convegno della Mathesis, affermava che lo studente "non comprenderà l'interesse di una teoria finché non ne avrà vista qualche pratica conseguenza"; per Bruno de Finetti – in *Matematica Logico-Intuitiva* - la questione rilevante "è non tanto quella di far apprendere la matematica, quanto quella di farla comprendere come qualcosa di vivo nel regno del pensiero". Emma Castelnuovo – nella sua esposizione "Verso un insegnamento della matematica che produce cultura scientifica" - sostiene che per insegnare a saper vedere con gli occhi fisici e con quelli della mente "bisogna insegnare a fare le cose: a osservare, a sperimentare, a ragionare, a intuire." Infine, secondo l'idea di Polya, autore di eccellenti opere sull'insegnamento per problemi - la via efficace per "formare" è "nel fare", per cui "il risolvere i problemi è un'arte pratica, come il nuotare o lo sciare o il suonare un piano: potete impararlo solo con l'imitazione e la pratica". Risolvere i problemi è una questione di abilità vera e propria e qualunque abilità può essere acquisita con l'imitazione e l'esercizio; si impara a risolvere i problemi soprattutto ... risolvendoli. Il problem solving si configura, pertanto, come un potente strumento didattico capace di trasformare gli studenti da annoiati ripetitori passivi di definizioni, teoremi e meccanici esecutori di algoritmi, in menti attive capaci di padroneggiare in modo flessibile e creativo gli strumenti matematici. Esso tende alla ricerca di una risposta da dare ad un problema che non è necessariamente di tipo numerico (problemi di determinazione); si può, infatti, cercare un oggetto geometrico (problemi di costruzione) o la dimostrazione di una certa proprietà (problemi di dimostrazione), oppure, semplicemente, risolvere problemi complessi che la vita reale ci pone. Gli approcci alla risoluzione di un problema possono essere di vario tipo (intuitivo, sistematico, algoritmico, parziale per tentativi, per esclusione, ecc.); un alunno può manifestare una propensione per alcune tipologie di approccio piuttosto che per altre e, in relazione alla specificità del problema, un approccio può rivelarsi più idoneo e fruttuoso di un altro. Questa visione multi-approccio a giochi e problemi si contrappone alla vecchia logica dell'algoritmo

predefinito, del “come si fa”, e favorisce l’attivazione di facoltà e di inclinazioni diverse e complementari tra loro: intuito, comprensione degli schemi, progettualità, analiticità, tendenza ad algoritmizzare, ecc. A tal proposito il “Cooperative learning” si rivela di fondamentale importanza nell’ambito dell’apprendimento. La didattica collaborativa si rifà alla teoria del socio-costruttivismo secondo la quale la conoscenza è il prodotto di una costruzione attiva del soggetto ed è ancorata al contesto in cui si svolge attraverso particolari forme di collaborazione e negoziazione sociale. Nella didattica collaborativa il docente assume il ruolo di tutor nel senso che deve favorire l’interazione tra gli studenti, stimolare la discussione, facilitare l’apprendimento ricorrendo a continue sollecitazioni. Caratteristiche positive del lavoro cooperativo sono lo sviluppo di un legame concreto tra gli studenti che, lavorando in gruppo, attivano processi di reciproco apprendimento, lo stimolo alla responsabilizzazione, lo sviluppo delle “abilità sociali”. Il gruppo lavora efficacemente se i suoi membri sono disponibili a comunicare le proprie opinioni, a condividere le decisioni, gestire i conflitti. Numerose ricerche hanno dimostrato che con il “cooperative learning” si recuperano allievi problematici, poco motivati allo studio e con problemi affettivi, si facilita l’integrazione di allievi disadattati per handicap o etnie diverse, si valorizzano gli allievi bravi (gifted student), si sviluppano competenze sociali del senso civico, del rispetto dell’altro, si favorisce lo sviluppo di un cittadino democratico (competenze di cittadinanza). In particolare, partendo già dalla scuola primaria, è possibile avvicinare i bambini alla precisione, al rigore, alla sistematicità della matematica anche attraverso la fantasia e la creatività presenti nelle favole, nella letteratura per ragazzi e nelle grandi opere letterarie. Dalla narrazione si può passare alla scoperta di numeri, figure, giochi, regole e curiosità. L’approccio metodologico è sempre quello del problem solving, della scoperta e della ricerca di concetti chiave che suscitano il desiderio di “capire” e cercare spiegazioni, magari divertendosi a sperimentare. Le osservazioni, le conversazioni, le discussioni, le attività di rielaborazione grafica, pittorica e manipolativa sono essenziali per riflettere e rielaborare la realtà in termini matematici. Il bambino, attraverso un percorso di conoscenza e scoperta, impara ad organizzare le proprie esperienze attraverso azioni consapevoli; sperimentando impara a confrontare, a ordinare, a compiere stime approssimative, a formulare ipotesi, a verificarle con strumentazioni adeguate, quindi a interpretare e a intervenire consapevolmente nel suo mondo.

6. La didattica della matematica nella scuola primaria⁶

⁶ “Un matematico, come un pittore o un poeta, apre dei sentieri. Se i suoi durano più dei loro, è perché sono fatti con le idee”. (Godfrey Harold Hardy, 1877-1947)

Andreas Schleicher, statistico di origine tedesca e ricercatore nel campo dell'educazione, capo divisione e coordinatore del programma OCSE per la valutazione internazionale degli studenti (PISA), riconosce che in campo matematico:

1. “students need to Know how and why we study mathematics (epistemic belief),
2. be able to think like a mathematician (epistemic understanding)
3. and grasp the practises associated with mathematics (methodological Knowledge);

ma omette, a questo riguardo, quel fattore fondamentale, che è “ the passion of Know” (epistemic love). Pertanto, qualunque proposta o progetto culturale deve essere in grado alimentare competenze critiche, capacità di affrontare i problemi ed esaltare il ruolo delle dimensioni operative. E’ indispensabile porre in essere ed attivare non solo un ambiente di apprendimento che stimoli motivazioni, curiosità e partecipazione, ma un ambiente che offra anche solidi alfabeti e codici per rappresentare il mondo, comprenderlo, comunicarlo. Proprio per questo occorre una interpretazione evoluta dei modelli di apprendimento, del valore “gnoseologico” (formativo) delle discipline di studio (cioè del loro effettivo promuovere processi cognitivi), delle necessarie coerenze sul piano metodologico, ove una didattica laboratoriale, operativa, di stile cooperativo si fa nettamente preferire a didattiche unilaterali, povere e trasmissive. La scuola primaria prepara le basi cognitive, sociali, affettive e relazionali necessarie per una partecipazione consapevole alla vita culturale e sociale dell’individuo. I fondamenti essenziali a cui essa provvede sono:

1. L’acquisizione dei tipi di linguaggio;
2. La padronanza dei concetti;
3. La maturazione delle capacità di ricerca essenziali per conoscere il mondo umano, naturale e artificiale.

Molto utile nei processi di apprendimento risulta la collaborazione tra informatica, didattica e multimedialità. Difatti la multimedialità favorisce la sintesi e obbliga a riorganizzare ambienti, modi e metodi di insegnamento e apprendimento. Attraverso le tecnologie multimediali l’alunno è protagonista dei processi di apprendimento e formazione perché è coinvolto nella progettazione e motivato nell’attività di ricerca. Peraltro, tenendo presente che le finalità della scuola sono finalità essenzialmente formative, l’azione educativa e didattica deve mirare soprattutto alla formazione di competenze in termini di conoscenze, capacità e di atteggiamenti. In tale prospettiva occorre quindi privilegiare una didattica formativa, una didattica che miri, non solo alla trasmissione dei saperi, ma anche e soprattutto ai processi della loro riscoperta, ricostruzione, reinvenzione attraverso i quali si realizza sia l’acquisizione delle conoscenze sia la formazione delle capacità e degli atteggiamenti. A tal fine oggi si privilegia il problem-solving ed il cooperative learning anche per facilitare il recupero dell’interesse e dell’attenzione nei confronti degli allievi meno motivati e più svantaggiati. L’impegno dei ragazzi nella progettazione e nella costruzione fisica di modelli favorisce la stretta connessione fra l’aspetto teorico e quello applicativo e

Matematica e realtà: un approccio creativo per sapersi orientare...

facilita l'inventiva, la creatività, il desiderio di ricerca, il confronto. A tal proposito di fondamentale importanza nell'ambito dell'apprendimento si rivela il Cooperative Learning. Nella didattica collaborativa il docente assume il ruolo di tutor nel senso che deve favorire l'interazione fra gli studenti, stimolare la discussione, facilitare l'apprendimento ricorrendo a continue sollecitazioni e lavorando in gruppo. Caratteristiche positive del lavoro cooperativo sono:

1. Lo sviluppo di un legame concreto tra gli studenti che, lavorando in gruppo, attivano processi di reciproco apprendimento;
2. Lo stimolo alla responsabilizzazione;
3. Lo sviluppo delle "abilità sociali".

Il gruppo lavora efficacemente se i suoi membri possiedono certe capacità:

1. Saper ascoltare;
2. Essere disponibili a condividere le decisioni;
3. Comunicare le proprie opinioni;
4. Gestire i conflitti;
5. Sperimentare, confrontare, ordinare, compiere stime approssimative,
6. formulare ipotesi e verificarle;
7. Interpretare ed intervenire con azioni consapevoli

Nella scuola primaria e nella scuola secondaria di primo grado (ex scuola media) conoscenze ed abilità non vanno imposte agli allievi in modo formale ma attraverso esperienze didattiche significative nelle quali ogni alunno possa essere motivato all'apprendimento e coinvolto attivamente.

È fondamentale in questo contesto sollecitare gli alunni a giustificare le loro affermazioni al fine di abituarli a:

1. Individuare, descrivendole, regolarità presenti in semplici contesti concreti;
2. Esprimere semplici congetture verificandole in casi particolari

Tutto ciò al fine di favorire il sorgere e lo svilupparsi delle seguenti competenze:

1. Individuare il problema da risolvere dichiarando esplicitamente l'obiettivo da raggiungere;
2. Rappresentare una stessa situazione problematica con diverse modalità (verbale, iconica, simbolica);
3. Individuare il contesto più favorevole per la risoluzione della situazione problematica affrontata;
4. Valutare la compatibilità delle soluzioni trovate con i dati forniti dal problema in esame;
5. Esporre con chiarezza il procedimento risolutivo.

Il tutto mirato alla formazione delle abilità generali di risoluzione di problemi. Il presupposto sul quale basare la realizzazione dell'intervento didattico è che, per essere efficace, l'apprendimento delle nozioni matematiche di base deve essere fondato e costruito partendo da situazioni problematiche concrete poiché solo problematizzando la realtà è possibile costruire in modo intelligente le nozioni basilari della matematica e, nello stesso tempo, affinare le strategie di pensiero che vengono poste in atto. Già nelle Indicazioni dei Programmi didattici del 1985, inoltre, si sottolineava l'importanza di procedere in modo costruttivo e significativo, fornendo agli alunni una adeguata base manipolatoria e rappresentativa. E' appena il caso di evidenziare l'esigenza che l'allievo si distacchi, ad un certo punto, dalla manipolazione dei materiali stessi per arrivare ad utilizzare soltanto le relative rappresentazioni mentali nell'esecuzione ed interpretazione dei compiti assegnati. I percorsi da seguire, soprattutto nell'ambito delle prime classi della scuola primaria, devono quindi partire dalla manipolazione per arrivare alla formalizzazione in modo da permettere lo sviluppo di processi cognitivi di astrazione e generalizzazione.

Il lavoro di ricerca si fonda sul fatto che le finalità specifiche della matematica vanno perseguite attraverso lo sviluppo di concetti, metodi e atteggiamenti utili a produrre la capacità di ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà in un'ottica finalizzata a fornire strumenti di interpretazione critica che permetta, di conseguenza, interventi consapevoli e mirati. Le modalità progettuali del percorso di insegnamento-apprendimento ipotizzato perseguono l'obiettivo finale di mettere l'allievo in relazione con il proprio vissuto senza però cadere nella trappola del senso comune. Tali modalità ben si inseriscono nella metodologia della ricerca-azione-riflessione che diventa efficace solo se sottoposta ad un continuo feedback. Il metodo della ricerca-azione ha come peculiarità quella di coinvolgere tutti gli attori del percorso formativo. L'attività si sviluppa con momenti di apprendimento collaborativo e con sistematica osservazione e monitoraggio di tutto ciò che avviene. Si genera così un clima dove l'emulazione e anche la competizione con se stessi e con gli altri può produrre capacità nuove che generano autostima e piacere a riprovare e, quindi, ad accrescere il livello di apprendimento. Siamo convinti che il metodo della ricerca-azione si integra naturalmente sia in situazioni di eccellenza sia in contesti formativi caratterizzati dalla presenza di alunni con difficoltà scolastiche. La Ricerca-Azione, pertanto, è:

1. Un metodo che aiuta a gestire situazioni problematiche in quanto costringe tutti a mettere in azione tutto il repertorio di conoscenze e strumenti utili per affrontarle;
2. Uno strumento per ideare e praticare strategie didattiche diversificate e far fronte a situazioni problematiche di varia natura;
3. Uno stimolo a saper accettare il rischio e affrontare situazioni incerte.

Inoltre, l'utilizzo di nuove tecnologie e nuovi strumenti informatici consente la creazione di situazioni di apprendimento che sviluppino le abilità caratterizzanti i processi propri dell'indagine scientifica inducendo una metodologia di indagine e di

scoperta guidata preliminarmente dal docente e successivamente sollecitata dagli alunni stessi ma privilegiando, in ogni caso, un approccio di tipo “costruttivista”. E’ opportuno, a tal proposito, realizzare schede di lavoro riguardanti gli insiemi e le operazioni logiche fra cui l’appartenenza ad un insieme, l’individuazione delle proprietà di un elemento o l’individuazione di tutti gli elementi che possiedono un particolare attributo e progettare schede sul confronto di quantità e sui concetti di equipotenza ed ordinamento, sui primi elementi di statistica, quali la frequenza, la moda o norma, la costruzione di ideogrammi e istogrammi. Alcune attività sono preliminari e servono sia per accertare il livello iniziale di padronanza dei concetti trattati, sia per stimolare un approccio problematico all’argomento stesso e alla successiva serie di esercizi e attività correlate. Infine la presentazione sotto forma di giochi multimediali degli argomenti affrontati può costituire una buona opportunità di verifica dell’acquisizione e del grado di padronanza delle abilità che si vanno sviluppando nel bambino, una coinvolgente occasione di stimolo dell’interesse e della motivazione, una forte propensione per l’alunno a sperimentare e a mettere in atto il massimo impegno per l’attivazione e il completamento di un percorso.

L’apprendimento è un processo che comporta una modificazione relativamente stabile nel modo di pensare, sentire, agire dello studente. Quando si parla di condizioni dell’apprendimento è bene distinguere quelle interne al soggetto da quelle relative all’ambiente in cui il processo deve svilupparsi. Alcune condizioni interne al soggetto sono, ad esempio, il suo grado di maturazione, le sue potenzialità cognitive, affettive e motorie, il grado di percezione dei propri bisogni, cioè tutto ciò che lo mette in grado di:

- 1) Fare esperienza;
- 2) Saper inquadrare con chiarezza situazioni e problemi;
- 3) Isolare i punti di difficoltà e trovare valide forme rappresentative;
- 4) Individuare una configurazione che risulti più rispondente alle necessità emerse;
- 5) Tradurre la soluzione prefigurata nella realtà concreta da cui si era partiti
- 6) Riutilizzare l’esperienza in situazioni che riconosce in qualche modo analoghe alle precedenti.

Oggi è necessario saper usare concetti, principi e procedimenti matematici adeguati a leggere, interpretare, prevedere la realtà sia naturale che sociale e tecnologica per poter così valutare, decidere ed agire in modo coerente e produttivo. L’insegnante, pertanto, deve saper opportunamente creare le condizioni perché l’interesse e la curiosità del bambino rimangano sempre vivi anche facendo ricorso alla novità, all’irreale, all’imprevedibile. Presupponendo di dover affrontare problemi sia di contenuto matematico sia di carattere generale, ritengo fondamentale, dal punto di vista metodologico, il ricorso alle strategie proprie della metodologia della ricerca. Nell’insegnamento tradizionale della matematica il problema era sempre presentato in maniera uniforme e secondo procedure molto rigide:

- a) doveva avere una e una sola soluzione;

- b) i dati del problema dovevano essere solo quelli necessari e sufficienti per poter giungere al risultato;
- c) la domanda doveva condurre in modo ineluttabile ad un tipo di risposta predeterminato;
- d) la risposta, a sua volta, non solo era l'unica possibile, ma era anche considerata inevitabilmente esatta.

Già i programmi del 1985, in realtà, portano ad una rivoluzione in questo settore. Esse invitano l'insegnante a tener conto nel proprio insegnamento di tutta una serie di possibilità problematiche che sono nuove e diverse rispetto al modo tradizionale di considerare il problema. Nella scuola il bambino deve essere messo di fronte a situazioni più complesse, quali:

- a) problemi impossibili, stimolando l'alunno a cercare i motivi per cui non è possibile ottenere una risposta;
- b) problemi che offrono la possibilità di risposte diverse, ma tutte ugualmente accettabili;
- c) problemi con risposte che richiedono una approssimazione (ad es. calcolare la lunghezza esatta dell'aula o del banco);
- d) problemi con dati carenti (i dati mancanti possono essere integrati dagli alunni stessi con opportune ricerche. Per risolvere i problemi di questa categoria gli alunni devono saper individuare quali sono i dati mancanti, come e dove trovarli);
- e) problemi con dati sovrabbondanti;
- f) problemi con dati contraddittori.

Lo studio della soluzione dei problemi è un ampio capitolo della psicologia sperimentale. Il merito di aver inizialmente valorizzato questo tema spetta ai gestaltisti i quali hanno ravvisato nella soluzione di un problema il tipico atto di intelligenza. A segnare una data importante in questo campo di studio furono le ricerche di Kohler (1921). Successivamente, l'opera del matematico ungherese George Polya (1945) si può considerare determinante per tutte le ricerche successive sul problem solving. Oltre Polya anche altri autori hanno dato il loro contributo proponendo un certo numero di modelli e descrizioni di processi che vengono attivati per ottenere la soluzione di un problema. Tra questi ricordiamo Mialaret (1969) che, sfruttando tutti i metodi della psico- pedagogia, individua alcune grandi categorie di comportamento sui modi di procedere degli alunni durante la soluzione dei problemi e Bransford e Stein (1984) che individuano, in tale attività, cinque componenti:

1. Identificazione: individuare una situazione problematica;
2. Definizione: precisare e descrivere, nel modo più accurato possibile, tale situazione;
3. Esplorazione: esplora possibili soluzioni alternative utilizzando il metodo top-down o bottom-up;
4. Azione: agisce sviluppando le ipotesi fatte;

5. Osservazione: valutare i risultati ottenuti per stabilire se sono coerenti con i dati del problema.

In questo modo, l'alunno, riflettendo su quello che fa, impara a lavorare in modo critico, a confrontarsi con i compagni e l'eventuale errore contribuisce a sviluppare capacità di inferenza, a riformulare ipotesi errate, a costruire nuova conoscenza da condividere con altri. (Riflessione e consapevolezza). La dimensione sociale della conoscenza, nell'imparare dagli altri e con gli altri, valorizza, inoltre, i processi di apprendimento e la condivisione dei saperi. (Apprendimento collaborativo).

6. Considerazioni finali. Dimensioni culturali e formative della matematica⁷

Nella società attuale, ricca di profondi cambiamenti che investono tutte le sfere del tessuto sociale la formazione matematica risulta essere di fondamentale importanza poiché contribuisce alla formazione del pensiero nei suoi vari aspetti (di intuizione, di immaginazione, di progettazione, di ipotesi e deduzione, di controllo...). Inoltre essa tende a sviluppare, in maniera particolare, concetti, metodi e atteggiamenti utili a produrre le capacità di ordinare, quantificare e misurare fatti e fenomeni della realtà e a formare le abilità necessarie per interpretarla e per intervenire consapevolmente su di essa. Siamo convinti che la matematica abbia un suo posto insostituibile in questa formazione, perché educa all'analisi critica dei concetti, alla astrazione, alla deduzione rigorosa ed anche all'umiltà intellettuale. Bisogna contrastare l'idea che "la matematica sia solo un sistema di risultati derivanti da definizioni e postulati, che deve essere coerente, ma altrimenti dipendente solo dalla volontà del matematico". A tal proposito basta semplicemente ricordare che la struttura della scienza moderna, così come è nata dalla rivoluzione galileiana, ha nella matematica una sua colonna portante, non soltanto perché la matematica offre alle altre scienze degli strumenti sempre più potenti, ma soprattutto perché il metodo della matematica ci si presenta come una specie di struttura ideale della conoscenza scientifica. Come è ben noto, il pensiero e l'opera di Galileo hanno portato in primo piano la matematica come chiave di lettura della realtà fisica: questo atteggiamento è chiaramente proclamato da Galileo nel celebre passo de "Il saggiatore": "La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo) , ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi

⁷ "Un'idea geniale risolve spesso un grande problema, ma nella risoluzione di tutti i problemi interviene un pizzico di genialità. Può trattarsi di un problema modesto, ma se esso stuzzica la nostra curiosità ed eccita le nostre facoltà mentali e soprattutto se si riesce a risolvere da soli, si scoprirà l'ansia della ricerca e la gioia della scoperta. Simili esperienze, fatte a tempo opportuno possono lasciare un'impronta nell'animo ..." (Polya G., Come risolvere i problemi di matematica. Logica ed euristica nel metodo matematico. Feltrinelli, Milano, 1967). Tratto dalla prefazione alla prima edizione

vanamente per un oscuro laberinto “. Ci pare chiaro che queste affermazioni non possono essere prese alla lettera, sia per quanto riguarda i caratteri (oggi la matematica offre ben altre possibilità) che per quanto riguarda l'applicazione indiscriminata ad ogni scienza della natura. Resta, però, abbastanza chiaro che la matematica ha ispirato ed ispira ancora oggi un'impostazione metodologica che ci pare caratteristica della scienza, intesa in quel senso moderno che ha le sue radici nel pensiero di Aristotele e il suo primo modello (oggi adeguato a nuove esigenze) negli Elementi di Euclide.

Questa impostazione metodologica, come è noto, è passata da un livello per così dire ingenuo a un livello rigoroso, che è stato chiamato dapprima ipotetico- deduttivo e poi assiomatico, indicando con questa espressione l'atteggiamento scientifico che conduce a chiarire con precisione i punti di partenza di ogni teoria, ad indicare chiaramente il significato dei termini che si impiegano, a dedurre rigorosamente. Il passaggio dal livello ingenuo al livello rigoroso costituisce sicuramente una delle più affascinanti avventure del pensiero umano. Da una parte è ancora vero che “ Il trattato euclideo si presenta in una struttura il cui rigore è ammirevole, e ha formato in certo modo anche l'esempio, il paradigma dell'esposizione scientifica rigorosa per quasi duemila anni, ma, d'altra parte è altrettanto vero che la matematica è così cambiata da consentire a Bertrand Russell di scrivere nel 1901 che “ è quella scienza , in cui non si sa di che cosa si parla, e in cui non si sa se quello che si dice è vero” (“Recent Work on the Principles of Mathematics” in International Monthly, Luglio 1901. Pag. 84) . E' ovvio che, in considerazioni di questo tipo, si intrecciano i due settori della matematica, che vanno riguardati in certo modo come complementari: da un lato la scoperta matematica- con la passione, la fantasia, l'intuizione, la doti che confinano con le doti dell'artista, che essa richiede- e dall'altra la sistemazione teorica- con le riflessioni e la valutazioni critiche.

Per concludere queste brevi note riportiamo il brano: “L'elogio della matematica, elogio alla matematica”, tratto dal discorso pronunciato da Alessandro Padoa in Pinerolo il 28 marzo 1908. Tale brano testimonia la passione del Padoa per lo studio e la ricerca matematica. Naturalmente certi spunti possono oggi sembrare un po' antiquati e forse retorici (ad esempio, dove si afferma che nella matematica “rifugge lo splendore del vero”). Riteniamo, comunque, che le considerazioni del Padoa conservino una loro coerenza e si prestino, quanto meno, a far da base per un interessante dibattito.

“Mentre affermo che nessuna scienza mi sembra più utile, più bella e più facile della matematica, quei pazzi (che la disprezzano) forse commentano argutamente questi tre aggettivi così: Utile? E quale professore non ritiene utile più di ogni altra la dottrina che insegna? Bella? Bello è quel che piace e, se la matematica piace a lei, non piace a noi. Facile? Questo poi rasenta la canzonatura. No, no, io non scherzo. E poiché nulla più del dogmatismo è ripugnante a chi abbia la mente esercitata alle indagini scientifiche, io non voglio imporre a quei tali la mia opinione: desidero soltanto aiutarli a formarsene una conforme alla mia. Ho detto che la matematica è più facile di ogni altra scienza. Ed invero: quale altra scienza si occupa di verità più elementari, poiché essa non ne presuppone alcun'altra. Mentre ogni altra presuppone la matematica? In quale altra

scienza le argomentazioni sono altrettanto convincenti ed esaurienti? Quale altra scienza conduce a risultati sicuri e più agevolmente controllabili? E' appunto la facilità e l'immediatezza della verifica che, dando autorità critica decisiva anche ai più ignari, rende impossibile ogni frode. Invero, mentre un matematico ciarlatano può essere messo con le spalle al muro da uno anche non molto esperto, soltanto un dotto può riuscire a confondere, se pur vi riesce, un presuntuoso che si vanti competente in questioni politiche od economiche, filosofiche od artistiche; tanto è vero che, quando due discutono di argomenti siffatti, quasi sempre accade di udir sostenere risolutamente dagli avversari opinioni, nonché diverse, contraddicentisi, senza che alcuno riesca a provare luminosamente la verità della propria; tanto è vero che, mentre il tempo fece giustizia di psicologi e moralisti, filosofi e giureconsulti ch'ebbero grandissima e immeritata fama, la storia non registra, ch'io sappia, un solo esempio di matematico il cui nome già glorioso sia divenuto oscuro nel volgere dei secoli. Quando affermo che la matematica è più facile di ogni altra scienza, io non ignoro e non dimentico quant'essa riesca difficile ai più (troppi si incaricano di provarmelo quotidianamente!): gli è che, a dirla francamente, io dubito se costoro, benché siano i più, siano atti a formarsi una sola cultura in qualsiasi altro ramo dello scibile. Ho detto che la matematica è più bella d'ogni altra scienza; ed invero in quale altra meglio rifulge lo splendore del vero? Ho detto che la matematica è più utile d'ogni altra scienza; ed invero quale altra fornisce cognizioni tanto universali nel tempo e nello spazio, aiuto altrettanto valido alle scienze fisiche e alle arti costruttive? Ma la matematica è universalmente utile, oltre e forse più che per la verità che essa fa conoscere, per i metodi di ricerca che essa adopera ed adoperando insegna. Nessun altro studio richiede meditazione più pacata: nessun altro meglio induce ad essere cauti nell'affermare, semplici ed ordinati nell'argomentare, precisi e chiari nel dire; e queste semplicissime qualità sono sì rare che possono bastare da sole ad elevare, chi ne è dotato, molto al di sopra della maggioranza degli uomini. Perciò io esorto a studiare matematica pur chi si accinge a divenire avvocato o economista, filosofo o letterato: perché io spero e credo non gli sia inutile per saper bene ragionare e facilmente esporre".

Alessandro Padoa (1868-1937) fu uno degli esponenti della scuola italiana di logica matematica che si sviluppò intorno a Giuseppe Peano fra la fine dell'800 e l'inizio del '900. I notevoli risultati da lui raggiunti gli procurarono una certa notorietà all'estero, tanto da venire spesso invitato a tenere seminari e conferenze presso università straniere. Tuttavia, in Italia gli fu preclusa, per vari motivi, la carriera universitaria; fu così insegnante nelle Scuole secondarie di diverse città. Solo negli ultimi anni della sua vita ottenne riconoscimenti prestigiosi anche in Italia: fra l'altro, nel 1932 conseguì, primo in Italia, la libera docenza in logica matematica.

Bibliografia

B.De Finetti Il saper vedere in matematica, Loescher, 1967

G.Polya , Come risolvere i problemi di matematica, Feltrinelli, Milano, 1983

G.Polya , La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi, Feltrinelli, Milano (nuova edizione UTET Università di Torino, 2016)

E.Stabler , Il pensiero matematico, Universale scientifica Boringhieri, Torino, 1990

K. Devlin , Dove va la matematica, Bollati Boringhieri, Torino, 2000

Eugeni F., La matematica discreta attraverso i problemi, pp. 84-102, in “Cento Anni di Matematica”, Atti del Convegno “Mathesis Centenario 1895-1995”, Palombi Editori, Roma, 1996.

Gagnè R., Le condizioni dell'apprendimento, A. Armando, Roma, 1973.

Kleinmuntz B., Problem solving. Ricerche, modelli, teoria, A. Armando, Roma, 1976.

Mialeret G., L'apprendimento della matematica. Saggio di psicopedagogia, Roma, Armando, 1969.

Pellerey M. , Apprendere a pensare matematicamente: Resnick L.B. & Ford, W.W., Psicologia della matematica e apprendimento scolastico, Sei, Torino, 1991

Popper K., Logica della scoperta scientifica, Einaudi editore, 1970

Evoluzione scientifica: Matematica, Arte e Geometria a cavallo del Medioevo¹

Ivano Casolaro

Docente presso il Liceo "Manzoni" - Latina

Email ivano.casolaro@unina.it

Sunto Si presenta un lavoro che è nato da un'esperienza con studenti di una quinta classe del liceo scientifico "Scuole Pie napoletane" nell'anno scolastico 2008/2009. Dopo averla sperimentata anche negli anni successivi con esiti positivi, descrivo i vari passi su cui si basa il percorso.

Parole Chiave Arte e Geometria, Matematica nel Medio Evo, Origini della Geometria.

1. Introduzione

Sulla base degli studi della pedagogia moderna e di recenti risultati in campo di *evoluzione della didattica* abbiamo ritenuto interessante tracciare un percorso di carattere *storico-evolutivo* nell'ambito della disciplina di nostra pertinenza, la matematica, con particolare riferimento alla geometria, con l'obiettivo di evidenziare quei delicati passaggi storici determinanti per lo sviluppo della didattica della matematica e, grazie ai quali, oggi si sta cercando di elaborare percorsi formativi alternativi, in funzione anche dei radicali cambiamenti in ambito di rapporti interpersonali e dello sviluppo di nuove tecnologie (Cundari C. 1991).

Abbiamo messo al centro del lavoro il periodo storico che prende il nome di *Medioevo* in quanto riteniamo tale epoca una tappa fondamentale nell'evoluzione scientifica che ha inciso profondamente nella costruzione dei percorsi formativi e di cui, ancor oggi, la didattica moderna ne risente.

Partendo quindi da una breve ricostruzione dell'evoluzione storica della matematica e della geometria a cavallo della nascita di Cristo, ci siamo soffermati sullo "*stallo*" del progresso in campo scientifico avvenuto in epoca romana (rimarcando come ciò coincidesse col fatto che i romani prediligevano il diritto alle discipline scientifiche) e sulla rinascita culturale esplosa dopo la caduta dell'impero; ovvero, proprio *a cavallo del Medioevo*. (Kline M. 1991)

¹ Lavoro svolto con la collaborazione degli studenti Pirro Marianna, Piscopo Mariangela, Caparco Valeria della classe III Scientifico dell'Istituto "Scuole Pie Napoletane"

Da qui, ripercorrendo le tappe più importanti che hanno condotto allo sviluppo della matematica moderna, in particolare, dopo il tentativo di “assiomatizzare” la geometria da parte di *Euclide* (ancora oggi di fondamentale importanza nell’apprendimento della geometria elementare), proponiamo una panoramica sui problemi e le questioni che hanno rappresentato un “rompicapo” per gli studiosi che si sono succeduti nel tempo (come la *quadratura del cerchio*, la *trisezione dell’angolo*, l’*incommensurabilità tra la diagonale e il lato del quadrato* decisiva per la scoperta dei numeri irrazionali, i *rapporti di proporzionalità “magici”* di Vitruvio affrontati ancora dal *Fibonacci*, fino ai richiami di matematica contenuti nella *Divina Commedia* di *Dante Alighieri*). (D’Amore B. 2011).

I risultati dei matematici del Medio Evo hanno rappresentato un’ipotetica chiave di volta nell’approccio e nell’evoluzione anche della didattica moderna per cui vogliamo rimarcare come negli ultimi anni vi sia stata un’accelerazione drastica verso percorsi formativi radicalmente fuori dai canoni che hanno imperato fino al secolo scorso (Casolaro I. Rotunno A. 2018).

2. Vita e aneddoti sul Medio Evo

Di Euclide sappiamo ben poco. Gli venne attribuito l’epiteto di *stoixeiwthV*, compositore degli *Elementi*. Una delle testimonianze più importanti su Euclide è quella di Proclo, neoplatonico vissuto nel V secolo dopo Cristo. Proclo scrive che Euclide è più giovane dei discepoli di Platone, e più vecchio di Archimede (che menziona nelle sue opere gli *Elementi* di Euclide). Da qui Proclo deduce che Euclide visse ai tempi del re Tolomeo I e siccome Platone morì nel 347 a.C. e Archimede visse tra il 287 e il 212, è molto probabile che Euclide scrisse gli *Elementi* intorno al 300 a.C. Euclide visse ad Alessandria d’Egitto (da non confondere con Euclide di Megara che visse un secolo prima e che era un filosofo). (Kline M. 1991).

La denominazione Euclide di Alessandria è contenuta in un brano di Pappo in cui si dice che Apollonio passò lungo tempo insieme ai discepoli di Euclide ad Alessandria. Sul carattere di Euclide abbiamo un brano tratto dall’opera di Pappo nel quale si elogia Euclide per la sua modesta riservatezza, tanto da non dimenticare l’opera dei predecessori. Infatti Euclide compose gli *Elementi* raccogliendo molti teoremi di Eudosso di Teeteto. Inoltre Euclide era platonico, al punto di porre come scopo finale dei suoi *Elementi* la costruzione dei poliedri regolari (le figure cosmiche del Timeo).

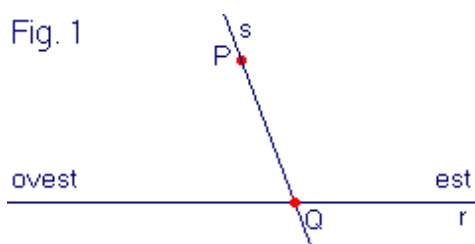
Alcuni aneddoti, riferiti da Proclo, ci danno la possibilità di comprendere il carattere di Euclide. Nel primo, ci è detto che il re Tolomeo chiese a Euclide se non ci fosse un mezzo più breve degli *Elementi* per imparare la geometria, e che Euclide gli rispose che non esistono vie regie in geometria.

Nel secondo aneddoto si narra che un discepolo, dopo aver imparato alcuni dei primi teoremi, chiese ad Euclide: *Maestro, quale utile ricaverò imparando queste cose?*

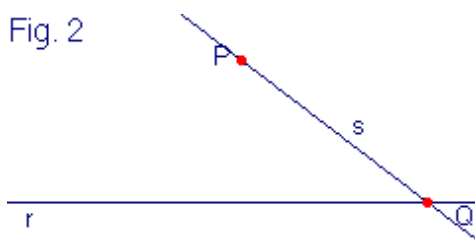
Ed Euclide chiamò un servo e gli diede ordine di dare qualche moneta al malcapitato, visto che voleva trarre guadagno da ciò che studiava, e di mandarlo via. Dal primo aneddoto si deduce l'estremo rigore di Euclide, tanto da non fare concessioni didattiche, neanche al re. Il secondo aneddoto allude al carattere strettamente teorico degli Elementi; ad esempio, Euclide dimostra la proporzionalità tra i cerchi e i quadrati dei diametri, ma non accenna ad una determinazione del relativo rapporto costante, che è legato al famoso numero π . Valori approssimati di detto rapporto verranno forniti più tardi da Archimede, il massimo ingegnere dell'antichità, che non disdegna le applicazioni pratiche.

3. I postulati delle parallele

In figura 1 la retta r è fissa mentre la retta s può ruotare in senso antiorario attorno al punto P . Indichiamo con Q il punto in cui r ed s si incontrano.

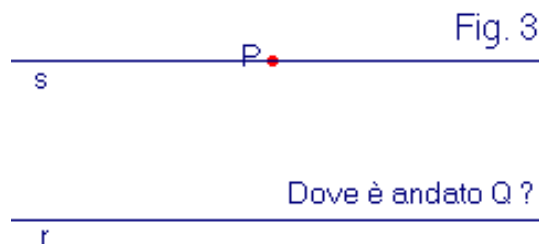


Man mano che s ruota si vede che il punto Q si allontana verso est sulla retta r (fig. 2).

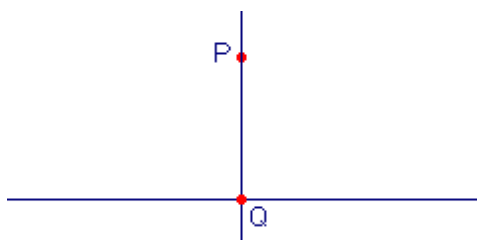


Il punto Q si muove con continuità su r : piccole rotazioni di s determinano piccoli spostamenti di Q (e viceversa). Q assume via via tutte le posizioni possibili su r , "passa" per tutti i punti di r (Casolaro F., Rotondo P. 2018).

Il punto Q dunque si allontana sempre più sulla retta r . Si intuisce però che esiste una (e una sola) situazione in cui sembra proprio che le due rette non si intersechino e quindi Q non esista. In questa situazione le due rette si dicono parallele (fig. 3).



Continuando a ruotare s , ci accorgiamo che il punto Q ricompare su r , questa volta però Q è a ovest.



Eccoci arrivati a un punto cruciale. Nella geometria euclidea si assume, assecondando l'intuizione, che per un punto P non appartenente alla retta r passi una e una sola retta s parallela a r (tale cioè che r e s non si incontrino). Tale assunzione non è altro che il quinto postulato di Euclide.

Qui di seguito sono elencati i postulati su cui Euclide (300 avanti Cristo) fondò, negli *Elementi*, il castello della sua geometria (Casolaro I., Miglionico M. C. 2009).

- (P1) Da ogni punto a ogni altro punto è possibile condurre una linea retta; Euclide non postula esplicitamente che per due punti passi un'unica retta, ma assume tacitamente che sia così.
- (P2) Un segmento di linea retta può essere indefinitamente prolungato in linea retta;
- (P3) Attorno ad un centro scelto a piacere è possibile tracciare una circonferenza con raggio scelto a piacere;
- (P4) Tutti gli angoli retti sono uguali;

Euclide ha già dato la definizione di angolo retto: se una retta r innalzata da un'altra retta s forma con essa angoli adiacenti uguali fra loro, ciascuno dei due angoli è retto. Il postulato P4 è necessario per garantire che gli angoli ottenuti con un'altra costruzione di questo tipo, relativa alle rette r' e s' , sono uguali ai precedenti. Il postulato P4 dimostra una notevole raffinatezza logica da parte di Euclide e afferma in sostanza che il piano è uniforme (nel senso che la costruzione predetta fornisce sempre gli stessi angoli, in qualsiasi parte del piano venga eseguita).

- (P5) In un piano, per un punto fuori di una retta si può condurre una e una sola parallela a una retta data (due rette si diranno, con Euclide, parallele, quando non si incontrano).

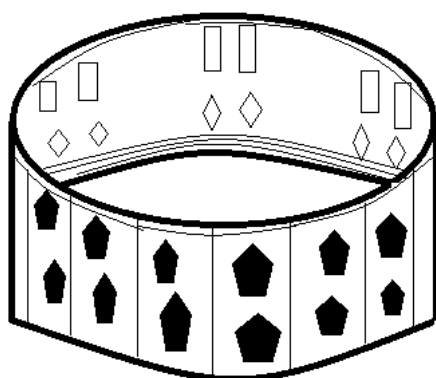
In realtà Euclide formulò il quinto postulato in una forma diversa da quella qui riportata ma ad essa del tutto equivalente.

4. Osservazioni di carattere storico

Fino al 1 secolo d.C. l'interesse dell'uomo verso le scienze aveva condotto a risultati che, ancora oggi, sono alla base dello studio della matematica e della geometria.

La geometria euclidea, ad esempio, è ancora nel XXI secolo uno strumento insostituibile per l'approccio alle scienze fisico-matematiche (Casolaro F., 2014)

Successivamente (dopo eccezionali risultati di uomini come Talete, Pitagora, Vitruvio, ...) la storia della matematica subisce un brusco freno a causa del cosiddetto "*oscurantismo culturale*" del periodo romano.



È noto come i romani dessero priorità ad altre discipline, prima tra tutte il diritto.

La matematica, ridotta "all'arte del saper contare", fu al più adoperata in ambito commerciale.

Solo dopo la caduta dell'impero, oramai alla fine del V° secolo d.C., riesplodono spinte evolutive per le scienze matematiche parallelamente ad un generale "rinascimento culturale".

È questo il periodo storico che prende il nome di MEDIOEVO.

5. Origini della geometria piana e solida

Nel 1936 degli archeologi Francesi trovarono a SUSA, 300 Km ad est di Babilonia, delle tavolette, databili intorno al 1800 – 1600 A.C. che contenevano i primi studi sui poligoni regolari e le prime conoscenze sui solidi semi – regolari.

Né i Babilonesi né gli Egiziani svilupparono una teoria matematica o scientifica su questi solidi ma si limitarono ad usarli come pesi e misure e altro...



I Babilonesi, gli Egiziani, i Fenici, gli Etruschi e Celti diedero ai “cristalli di pirite” (la cui forma è una buona approssimazione del cubo o dell’ottaedro) un significato mistico e religioso, simbolismo che venne adottato da Pitagora di Samo (540 – 520 A.C.) quando fondò la sua Scuola in Italia.

Bibliografia

Cundari Cesare (1991), “Disegno e Matematica per una didattica finalizzata alle nuove tecnologie”, Atti del Progetto del M.P.I. del Dipartimento di Progettazione e Rilievo dell’Università “La Sapienza” di Roma (11-15 dicembre 1990; 6-10 maggio 1991; 8-12 dicembre 1991).

Kline Morris, (1991) *Storia del Pensiero Matematico*. Edizione italiana a cura di Alberto Conte Dall’antichità al Settecento Dal Settecento a oggi Einaudi 1991

D’Amore Bruno (2011) *La matematica nell’opera di Dante Alighieri. Spunti biografici a scopo didattico*. Appunti a cura dell’autore.

Casolaro Ivano, Rotunno Alessandra (2018). “*L’insegnamento della Geometria Proiettiva nelle Scuole Secondarie di Primo e Secondo grado*”. Atti del Convegno APAV-MATHESIS “Attività degli insegnamenti dei Grandi Maestri della Matematica nel XX secolo”, Rimini 18-20 aprile 2018. Quaderni APAV n. 1 - 2018, pp. 83-93.

Casolaro Ivano, Miglionico M. Cristina (2009). “*Dal piano euclideo al piano proiettivo: rappresentazioni grafiche di primo e secondo grado*”. Rivista di “Epistemologia Didattica”, vol. IV (2009), n. 7-8/2009, pagine 227-240.

Casolaro Ferdinando (2014), “*L’evoluzione della geometria negli ultimi 150 anni ha modificato la nostra cultura. Lo sa la Scuola?*», Science&Philosophy, Vol. 1, (1), 2014, pp. 39-48

F. Casolaro, P. Rotondo, “*La Geometria nelle Indicazioni per la Scuola dell’obbligo, con particolare riferimento alle Trasformazioni Geometriche*” - Quaderni dell’APAV n. 3 - 2018, pp. 47-58.

Indice

Ricordo del prof. Alberto Trotta a cura di <i>Ferdinando Casolaro</i>	Pag 3
Costruzioni di figure geometriche <i>Enzo Barone</i>	Pag 5
Sul <i>Problema del Merciaio</i> di H. E. Dudeney <i>Luigi Togliani</i>	Pag 15
Verso la scuola 3.0: esperienza di due docenti in Istituti di 1° e di 2° Livello <i>Mariella Crotti, Giovanni Luca D'Aniello</i>	Pag 23
Matematica e realtà: un approccio creativo per sapersi orientare in situazioni e contesti di vita reale <i>Angela Chiefari, Mario Innocenzo Mandrone</i>	Pag 35
Evoluzione scientifica: Matematica, Arte e Geometria a cavallo del Medioevo <i>Ivano Casolaro</i>	Pag 57

Istruzioni per gli autori

Chi desidera inviare un articolo per la Rivista Mondo Matematico e Dintorni deve seguire i seguenti criteri per il formato:

- (1) L'articolo deve essere in word, carattere Times New Roman, 12 p; il titolo dell'articolo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 18 p.
- (2) I margini sono di 3 cm sotto, sopra, a destra e a sinistra. L'interlinea è multipla 1,15 p
- (3) L'articolo deve essere diviso in paragrafi numerati, di cui il primo è una introduzione e l'ultimo una conclusione. I paragrafi vanno separati da due interlinee. Il titolo di ogni paragrafo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 14 p.
- (4) Ogni articolo deve avere una lunghezza minima di 6 pagine e non deve superare, di regola, le 14 pagine.
- (5) Dopo l'ultimo paragrafo va inserita la bibliografia. Almeno 4 fra libri e articoli nel formato cognome, nome (anno), titolo dell'articolo, titolo del libro o rivista, editore, città.
- (6) La bibliografia non va numerata. I riferimenti bibliografici nel testo devono avere la forma (cognome dell'autore, anno).
- (7) Non mettere note bibliografiche a piè di pagina. Tutta la bibliografia va messa alla fine.
- (8) I disegni vanno fatti con programmi di elaborazione grafica (non in Word!) e salvati in jpg o in png.
- (9) L'articolo deve essere inviato in formato doc o docx ed in formato pdf per il controllo dell'impaginazione e deve avere un numero pari di pagine.

Tutti gli articoli ricevuti saranno esaminati da due revisori che invieranno il loro parere sulla pubblicazione ed eventuali proposte di correzioni ai direttori editoriali.

Gli articoli possono essere inviati ad uno dei seguenti indirizzi email:

antomato75@gmail.com lucianadr@live.it matematicadintorni@libero.it



Finito di Stampare nel mese di Maggio 2022