Volume 3 Numero 1-2 2020

MONDO MATEMATICO E DINTORNI

Rivista per i Docenti del Primo Ciclo di Istruzione

Direttori Editoriali
Luciana Delli Rocili
Antonio Maturo

APAV

Accademia
Piceno - Aprutina
dei Velati in Teramo
ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola

ISSN 2612 - 2596 [on line] ISSN 2612 - 1719 [testo stampato]

Volume 3 (2020) **Numero 1-2**

MONDO MATEMATICO E DINTORNI

Rivista per i Docenti del Primo Ciclo di Istruzione

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo

Editore: Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo (APAV)
Via del Concilio n.24, Pescara, Italy

Periodicità: semestrale

Siti web: www.apav.it; www.eiris.it

Email: matematiticaedintorni@libero.it

ISSN: 2612 - 1719 (testo stampato)
ISSN: 2612 - 2596 (online)

Autorizzazione del Tribunale di Pescara del 9/4/20l9
N. 741/2019 V.G.
N. 03/2019 Reg. Stampa

Stampato a Pescara nel mese di febbraio 2021

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo
ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola
(Decreto del 24/07/2009 e Direttiva 170/2016)

Prefazione

Questo numero della rivista “Mondo Matematico e Dintorni” è dedicato alla memoria di Giuseppe Manuppella, il nostro collega e soprattutto amico che ha fortemente voluto la rivista come strumento di ausilio per il lavoro dei docenti del Primo Ciclo di Istruzione.

L’idea della rivista è maturata dopo la seconda *Scuola estiva di formazione per i docenti del I Ciclo di Istruzione*, dal titolo “*Insegnare Matematica: Didattica, Inclusione e Cooperazione*”, tenuta a Pizzoferrato (Ch) dal 22 al 25 luglio 2018, in cui i docenti, esperti formatori di varie regioni, soprattutto Abruzzo e Campania, hanno dato il loro contributo.
I testi delle relazioni presentate sono stati pubblicati dall’Accademia Piceno Aprutina dei Velati in Teramo (Apav) nel terzo volume della serie “*Quaderni dell’Apav*”.
Importante è stata anche l’esperienza maturata nel Convegno Nazionale dal tema “*L’attualità degli insegnamenti dei grandi maestri della Mathesis nella seconda metà del secolo XX. Nuove prospettive nella didattica e nei fondamenti della Matematica*”, tenuto a Rimini dal 20 al 22 aprile 2018, organizzato da 15 sezioni Mathesis, i cui risultati sono stati pubblicati nel primo volume della collana “*Quaderni dell’Apav*”. In questo convegno è stata messa in evidenza l’importanza di una maggiore attività della Mathesis per la formazione dei docenti del primo ciclo.
L’impegno di Giuseppe Manuppella per la Mathesis e per l’Apav è durato più di un trentennio. Nel 1987 abbiamo fondato insieme la Mathesis di Pescara. Per quanto riguarda l’Apav, le prime notizie su un’Accademia dei Velati risalgono al lontano 1598. Essa fu fondata dal gesuita Sertorio Caputo ed ha operato per circa 300 anni come Accademia Arcadica.

L'appellativo di "*Velati*" fu unanimemente accettato come indicativo della ricerca in collaborazione. Emerse infatti l'intenzione che il lavoro dell'intera equipe, del comitato dei fondatori ed organizzatori dei convegni si sarebbe svolto in gruppo ed in armonia e che sarebbe stato prediletto il lavoro comunitario in luogo di quello del singolo che si dichiarava **"***velato***"** nei confronti degli interessi culturali generali del gruppo.
L'attuale Accademia Piceno – Aprutina dei Velati in Teramo rinasce nel 1988 su iniziativa di un gruppo di professori universitari, con presidente Franco Eugeni, con lo scopo di promuovere ricerche multidisciplinari in collaborazione tra i soci. Giuseppe Manuppella, come docente di Informatica presso l'università di Teramo, è stato uno dei principali collaboratori del presidente. L'Accademia Piceno Aprutina dei Velati in Teramo è *Ente Accreditato dal MIUR* per la formazione del personale scolastico con Decreto del 24/07/2009.
Dal 2012 al 2019 ci sono state tante iniziative congiunte di Apav, Mathesis Pescara, Mathesis Napoli e altre Mathesis, ora nella Federazione, con il determinante contributo di Peppe Manuppella.
Dal 2016, fino al momento della sua scomparsa nel 2020, la presidenza dell'Apav è passata a Giuseppe Manuppella che ha ottenuto la conferma dell'accreditamento, in base alla *Direttiva 170 del 2016*, per tutte le attività formative riservate al personale della Scuola. In tale veste, Giuseppe Manuppella ha diretto l'organizzazione di vari corsi di formazione per i docenti delle *scuole di ogni ordine e grado*, sia in presenza sia online.
Di rilievo anche l'attività editoriale dell'Apav. Sin dalla fondazione è stata pubblicata la rivista Ratio Mathematica; la rivista Science&Philosophy ha iniziato le sue pubblicazioni nel 2013. Le due riviste hanno subito avuto ampi riconoscimenti scientifici in ambito internazionale, ma Giuseppe voleva anche una rivista più orientata al mondo della scuola del primo ciclo, rigorosamente in italiano, con argomenti e metodologie trattati in maniera lineare e immediatamente fruibili per la didattica. Così è nata "Mondo Matematico e Dintorni" nel 2018. Nel 2020, venuto meno Giuseppe, abbiamo vissuto un anno travagliato, anche a causa dell'epidemia.
Con questo volume, in onore di Giuseppe, riprendiamo le pubblicazioni con un numero unico per il 2020.
Ringraziamo Rosalia Pedone e Anna Vaccarella per il paziente e competente lavoro di correzione delle bozze.

Luciana Delli Rocili e Antonio Maturo

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 3, No 1-2 (2020), 5-12

Il disegno nelle Scuole Medie, dal supporto cartaceo al supporto digitale

Pierpaolo Palka[1] Eula Grilli[2]

[1]Università G. D'Annunzio, Viale Pindaro 42, 65127 Pescara
e-mail: ppalka@unich.it
[2] Sit Rilievi Ambiente, L.re G. Matteotti 3, 65121 Pescara
e-mail: eula.grilli@libero.it

Sunto

Non possiamo negare che si sta andando verso una scuola non più basata su apprendimenti nozionistici secondo logiche classiche di trasmissione del sapere. Oggi interessa la competenza che l'alunno deve acquisire nelle varie materie e nel corso degli anni scolastici. La scuola senza carta ci pare il futuro. Niente più libri cartacei si commenta già. I ragazzi, dell'età adolescenziale, prediligono la praticità delle tecnologie e questa è la realtà. Oggi dentro gli zaini ci sono Tablet, Ipad, Smartphone, mezzi capaci di entusiasmare, attirare, coinvolgere l'alunno attraverso un processo di apprendimento dinamico. Con questa premessa il nostro pensiero si rivolge a quelle conoscenze informatiche che i ragazzi possono utilizzare attraverso strumenti tecnologici raggiungendo migliori risultati all'interno dei programmi scolastici, per essere più vicini al loro mondo sempre superconnesso. Si è pensato alla possibilità di trasferire le loro conoscenze tradizionali di matematica e geometria in elaborati finali attraverso il Disegno Digitalizzato, facendo conoscere gli algoritmi che ne sono alla base. Gli alunni delle Scuole Medie, per la particolare fascia di età, ci sembrano idonei per il nostro progetto di ricerca. Imparare a realizzare la pianta di casa propria o studiare come si costruisce un solido, rispettandone geometria e formule, puo' risultare divertente oltre che di qualificata formazione. Si spiegherà la differenza di base tra la manualità del disegno geometrico e quello assistito, si metterà in risalto cosa c'è dietro una linea, un arco o un solido, rimanendo una ricchezza comunicativa consentendo la rapida e precisa visione di un progetto. In questo articolo alcuni degli argomenti salienti saranno esposti in modo discorsivo, facendone emergere solo l'importanza. E' evidente che nella fase di esercitazione gli stessi concetti saranno approfonditi insieme ai relativi algoritmi.

Parole Chiave: Principi di Geometria Proiettiva. Coordinate. Entità Grafica. Algoritmi. Digitalizzazione. Cad.

1. L’evoluzione tecnologica della rappresentazione grafica

Quando disegnano comunichiamo le caratteristiche dell’oggetto che abbiamo in mente attraverso un processo di astrazione dalla realtà al disegno che per essere compreso da chi lo legge presuppone la conoscenza e l’uso di un linguaggio determinato da regole precise e riconosciute.
Tutti sanno cos’è un supporto cartaceo e quali sono le regole e le modalità con cui possiamo rappresentare elementi grafici, ma non tutti sanno cos’è un supporto digitale e quali sono le regole e le modalità d’uso per disegnare su di esso.
L’evoluzione tecnologica, approdata all’invenzione del PC che in questi ultimi anni ha compiuto passi da gigante, specialmente sul piano della potenza e velocità esecutiva, ha proposto un nuovo tipo di supporto, il monitor, su cui eseguire anche le rappresentazioni architettoniche. Il video, componente dell’arredo PC, comunque, è, di per sé, un supporto bidimensionale digitale e, per tale caratteristica, può sembrare simile al supporto cartaceo. Entrambi i supporti, però, non sono equiparabili tra loro proprio per quanto concerne le modalità d’uso, cioè il modo di disegnare su di essi, si deduce che le teorie di base dei due sistemi sono diversi.

a) Disegnare su supporto cartaceo.

Non è male ricordare che per disegnare su un supporto cartaceo ci si avvale della tradizionale matita, o di una penna, di un compasso, di una riga, di una squadra, di una gomma, o, in maniera più complessa, di un tecnigrafo che permette la riproduzione di un disegno con uno spostamento più razionale sul piano (Fig.1).

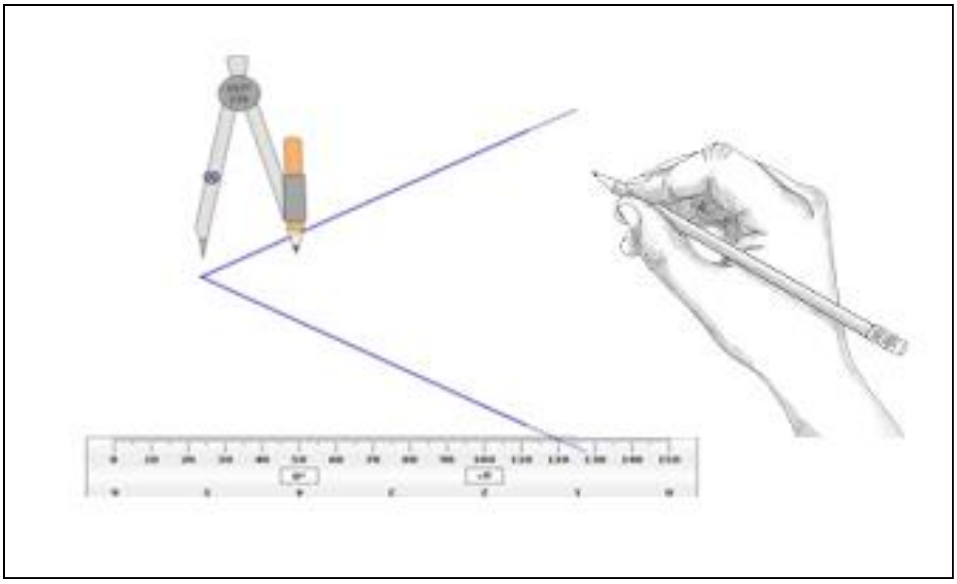


Fig.1

b) Disegnare su supporto digitale.

Gli strumenti tradizionali usati nel cartaceo vengono sostituiti nel PC dal Mouse, dalla Penna Ottica o dalla Tavola Grafica (Fig.2).

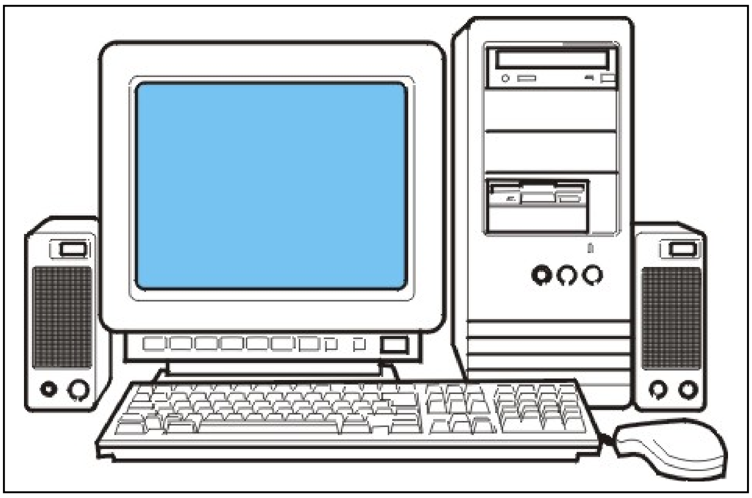


Fig. 2

All'immediatezza della produzione del disegno su un supporto cartaceo viene da pensare che anche sul supporto digitale si possa avere lo stesso risultato in modo immediato. Non è così, poiché fra i due supporti esiste una incompatibilità d'uso di grande rilevanza allorquando si vuole impropriamente disegnare sul video come se si lavorasse sulla carta.

Il disegno su supporto cartaceo utilizza la teoria della geometria proiettiva classica mongiana. Il disegno su supporto digitale si avvale del piano euclideo ampliato con l'uso di matrici in coordinate omogenee e di vettori bi e tridimensionali, aventi cioè due o tre coordinate e due o tre componenti vettoriali.

E' noto, che l'uso del PC richiede l'ausilio di un programma specifico relativo alle varie discipline. Nel nostro caso occorrerà un programma di disegno automatico.

Per la conoscenza delle funzioni di un Software riteniamo importante che uno studente prenda familiarità su come vengono usate le grandezze all'interno di un Software, così da poter meglio applicare le funzioni che vengono messe a disposizione. Il disegno automatizzato, oggi è indispensabile al progettista, per aumentarne competitività e produttività, ottimizzando i tempi di creazione e gestione del progetto. Altrettanto importante, soprattutto oggi, che i nostri studenti possano conoscere i mezzi per la realizzazione di tali Software, ovvero i noti linguaggi di programmazione.

Poniamo la nostra attenzione sulla differenza di due sistemi di disegno esistenti sul mercato: Paint e i Cad (*computer-aided drafting*).

Paint è un programma di grafica semplice, fornito assieme a tutte le versioni di Windows, il sistema operativo commercializzato da Microsoft. Questo programma

permette di aprire e modificare immagini con formato BMP, bitmap (a 24 bit, 256 colori, 16 colori, e monocromatiche), JPEG, GIF, PNG e TIFF.
I **Cad** sono programmi di disegno tecnico assistito, trovano la loro massima utilizzazione come supporto alla produzione di disegni bi-tridimensionali in ambito ingegneristico, architettonico, meccanico, elettrotecnico.
L'uso di un Cad non è immediato come l'uso di Paint, infatti quest'ultimo viene fornito gratuitamente dalla Microsoft, mentre un qualsiasi Cad in commercio ha un costo. Per questo abbiamo pensato di realizzarne uno proprietario che fosse in grado, non solo, di personalizzare e semplificare alcune funzioni per il nostro progetto, ma che avesse al suo interno algoritmi studiati e realizzati in collaborazione con i nostri professionisti, per meglio comprendere il funzionamento dello strumento Cad e insegnare agli alunni di non essere solo fruitori passivi come accade abitualmente.
Per questa nostra esigenza è stato necessario, prima, approfondire lo studio dei CAD, che possono essere classificati secondo differenti criteri in ambienti 2D e 3D, cercando di comprendere meglio le funzioni di disegno e di gestione delle entità in termini di algoritmi.
In trent'anni di ricerca il prof. Palka dell'Università G. D'Annunzio Chieti Pescara è riuscito a realizzare una piattaforma grafica proprietaria con algoritmi studiati e realizzati in Pascal senza librerie di terze parti.
Gli algoritmi studiati sono stati raccolti nel tempo, così da realizzare un Software di proprietà. Tale Software, nel tempo è stato arricchito di molte funzioni migliorative, monitorate passo passo da esperti Professionisti ai quali è stato dato gratuitamente il Software. In questo modo è nato RilArch (Rilievo Architettura).

2. Risultati delle nostre tavole rotonde

Negli anni abbiamo organizzato tavole rotonde per risolvere i concreti problemi dei professionisti ai quali avevamo affidato gratuitamente il Software. I vari momenti di monitoraggio sono stati annotati su schede tecniche per una consultazione collettiva.
E' stato stabilito che lo scopo principale di tale Piattaforma fosse quello di disporre di uno "spazio" operativo ove, in particolare, inserire algoritmi, studiati e riscritti da zero, finalizzati al disegno automatico, senza avvalersi di librerie di terze parti.
Un Software che possegga gli strumenti necessari a compiere azioni nel campo della Computer-Grafica, che possa essere implementato di volta in volta con algoritmi studiati e realizzati da noi stessi. In generale sono azioni che permettono interventi di disegno, cancellazione, recupero, duplicazione, spostamento, ecc. azioni comuni, oltre ai programmi di disegno automatic. Azioni dei Software adibiti a funzioni differenti come programmi di scrittura, programmi database per archiviazione dati. Lo stesso sistema operativo possiede comandi comuni come: cancella, ripristina, salva col nome, copia, cattura, etc. per compiere delle azioni.

Le evoluzioni in questo campo specifico sono state notevoli ed il nostro sforzo è stato quello di cercare di conoscere questo argomento in modo più approfondito con i suoi aspetti teorici e pratico-operativi che sono alla base della realizzazione dei Software.
Se analizziamo un qualsiasi programma scolastico curriculare di informatica, da sviluppare nel corso di un quinquennio delle scuole superiori, scopriamo che i testi adottati a supporto delle varie lezioni tenute dai docenti sono fatti bene e che i percorsi curriculari oltre ad essere dedicati alla conoscenza della multimedialità in genere o a programmi di video scrittura sono ricchi di informazioni relative proprio ai linguaggi di programmazione e in particolare al linguaggio Pascal nato proprio per scopi didattici.
Tali testi, però, approfondiscono solo l'argomento inerente la scrittura di procedure o funzioni con introduzioni di variabili anche di tipo complesso, permettendo la realizzazione di singoli algoritmi completi, quali elementi base, per la manipolazione di dati generici.
Viene trascurato, però, il contesto generale entro cui inserire tali algoritmi. Si ha una visione limitata del problema soffermandosi sul funzionamento dei singoli algoritmi senza preoccuparsi di come essi interagiscono tra loro all'interno di un programma ovvero di un Software perfettamente funzionante.
Desideriamo mostrare quanto sia importante e difficile legare tra loro i vari algoritmi basati sulla geometria e sulla matematica, per dar luogo ad una Piattaforma Grafica proprietaria così da avere una visione completa del problema.
Ed è proprio in questo nuovo ambito che si scopre quanto sia carente la nostra preparazione scolastica, rispetto ad altri paesi in cui vengono realizzati la maggior parte dei Software che usiamo ogni giorno sia di videoscrittura che di disegno automatico.
E' noto che la patria dei PC è l'America e che sia suo appannaggio la realizzazione di sistemi operativi come Windows che hanno invaso il mondo, ma riteniamo che sia possibile confrontarsi con loro nell'ambito della realizzazione di Software che possano girare all'interno di tali Sistemi Operativi.
Con una Piattaforma Grafica Proprietaria è possibile, inoltre, sperimentare e verificare se i nuovi algoritmi studiati ed inseriti al suo interno possano risolvere problematiche più vicine alle nostre esigenze. Questo ci permette di non dover ricorrere a Software realizzati da altri.
Lo studente imparerà a riconoscere le forme geometriche e architettoniche, partendo dagli enti fondamentali quali il punto, la retta e il piano, e le relazioni che sussistono fra essi. Studierà la simmetria, la modularità, la proporzionalità, le variazioni di scala, la rotazione dell'immagine.
Tali conoscenze permetteranno allo studente di realizzare forme complesse di figure e solidi e di controllarne la loro posizione nel piano e nello spazio.
Non è questa la sede per mostrare tutte le fasi per la realizzazione di RilArch, desideriamo mostrare il risultato finale e le funzionalità introdotte al fine di permettere allo studente una conoscenza più approfondita dello strumento di disegno automatico.

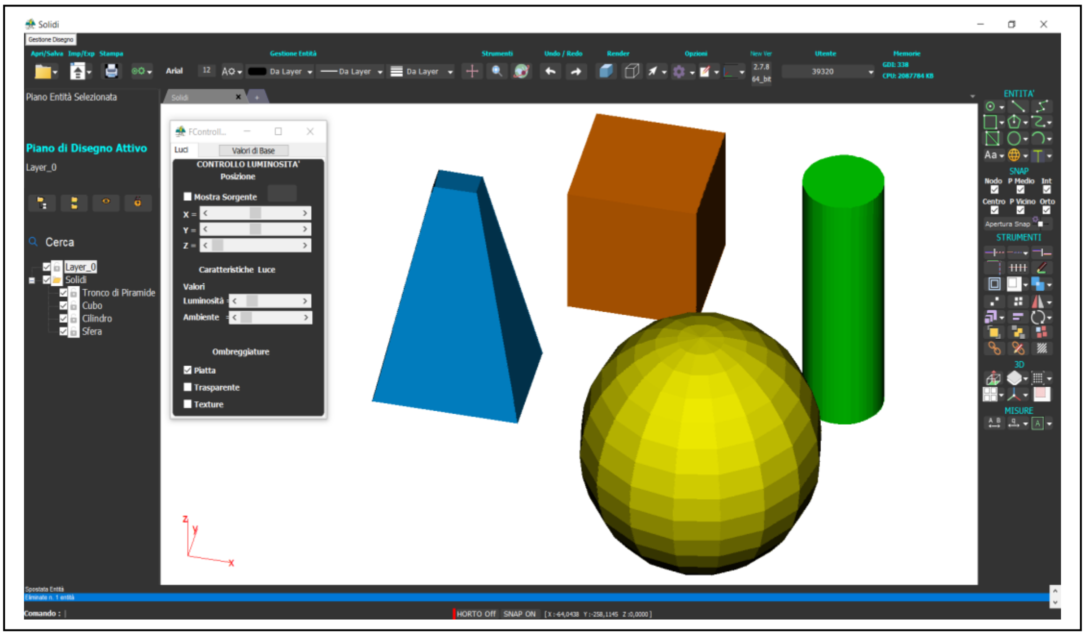


Fig.3

Si cercherà di illustrare gli algoritmi più significativi che rappresentano il cuore del programma, come la caratterizzazione delle entità, la loro rappresentazione sul supporto digitale e la rigenerazione.

Ogni entità, nel disegno su supporto cartaceo, viene contraddistinta dal relativo nome come “segmento rettilineo”, “cerchio”, “arco” ed altri. Nel disegno automatico ciascuna entità è caratterizzata da un indice univoco ben preciso che nel relativo algoritmo la contraddistingue una dall’altra, ad esempio ad un segmento rettilineo viene assegnato un indice “0”, ad una circonferenza indice “1”, ad un arco indice “2”, e così via.

Osserviamo, ora, che quando si disegna su un supporto cartaceo non dobbiamo preoccuparci di rigenerare di volta in volta il disegno perché esso rimane fissato sul cartaceo.

Non è la stessa cosa sul supporto digitale, infatti una volta disegnata una entità essa necessita di una continua rigenerazione sul monitor come le immagini in tv, altrimenti sparirebbe.

Per ottenere ciò si realizza un algoritmo basato su un loop che esegue ripetutamente il disegno delle entità disegnate fino a quel momento. Per questi motivi il disegno su supporto digitale può essere diviso in due fasi:

- **una fase di disegno** che viene accompagnata da equazioni matematiche come nel caso della retta, dell’arco o della circonferenza o della sfera, distinte tra loro dall’indice univoco;
- **una fase di rigenerazione** in cui ciascuna entità viene discretizzata in una serie di elementi infinitesimi di segmenti rettilinei, come il caso di poligoni. Tramite l’indice univoco verrà ricostruita. Sul supporto digitale la rappresentazione

discretizzata andrà a interagire con una delle funzioni più importanti ovvero lo “zoom” o ingrandimento.

Sul supporto cartaceo si decide la scala di rappresentazione, s’individua lo spazio necessario per la rappresentazione a quella scala e si ottiene un disegno definitivo rapportato a quella scala, se desidero vedere i particolari non è possibile, occorre disegnarli a parte.

Nel disegno digitale la rappresentazione viene fatta di solito in scala 1:1 e grazie all’ingrandimento dinamico zoom è possibile visualizzare i particolari sullo stesso disegno.

3. Conclusione

Di fronte ad un Software ci fermiamo solo all’uso e apprezzamento della gradevolezza della sua interfaccia, nonché la facilità d’uso, tralasciando l’aspetto scientifico derivante dalla traduzione dei concetti matematici e geometrici in termini di algoritmi spesso complessi di cui conosciamo solo l’esistenza, ma non il funzionamento.

Nelle nostre scuole e università oggi troppo tempo viene speso nell’acquisizione di abilità operative dell’uso di programmi già disponibili sul mercato specializzato, ma non viene affrontato il problema di come sia possibile trasformare una formula di matematica o di geometria in un algoritmo. Tutte le operazioni che avvengono all’interno di un Software richiedono un’ampia conoscenza delle matrici e dei vettori e di tutte le operazioni che avvengono con essi. Sarà nostro impegno introdurre la spiegazione di tutte le operazioni interne ad un Cad in modo da far comprendere agli alunni e studenti che oltre alla teoria esiste anche un mondo pratico che dalla teoria produce i risultati che utilizziamo tutti i giorni e che possono essere spendibili per la collocazione nel mondo del lavoro.

Vista la complessità dell’argomento, in questo articolo, si sono esposti solo alcuni dei concetti fondamentali alla base del disegno automatico. Successivamente si continuerà ad illustrare ulteriori funzionalità per dare una conoscenza completa agli studenti al fine di accrescere la loro capacità di utilizzo dello strumento. Si darà più completezza e consapevolezza per meglio gestire il disegno nella sua complessità di forme geometriche. Nei prossimi lavori si mostreranno anche i risultati ottenuti dalle classi.

A chiusura aggiungiamo che l’utilizzo dei Cad da parte delle scuole comporta un costo non indifferente e, per tal motivo, avere una Piattaforma Grafica Proprietaria a costo zero, facilmente implementabile in tutte le sue funzioni, è una opportunità che si offre in questo periodo di crisi economica.

Bibliografia

Palka P., Cavallini E., (2012), *Storia di Fotorad dal 2009 al 2013*, Aracne Editrice, ISBN 978-88-548-9266-8.

Palka P., Cavallini E., (2013), *Informatica applicata al Disegno Automatico,* Aracne Editrice, ISBN 88-548- 66482.

Harrington S., (1987), *Computer Graphics*, McGraw-Hill International Editions, ISBN 88-386-06013.

Rogers D., J. Alan Adams, (1990 Second Edition), *Mathematical Elements for Computer Graphics*, McGraw-Hill International Editions, Computer Science Series, ISBN 0-07-100289-8.

Ammeraal L., (1993), *Programmazione Grafica in C++*, Tecniche Nuove Università+Ricerca, ISBN 88-481-0002-3.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 3, No 1-2 (2020), 13-24

Bullismo e Cyberbullismo tra gli studenti

Cristina ISPAS[1], Mario Innocenzo MANDRONE[2]

[1]Universitatea Babeș-Bolyai, Centrul Universitar UBB din Reșița (Romania)
email cristina.ispas@ubbcluj.ro

[2]Università del Sannio di Benevento (Italia)
email almavit@libero.it

Sunto
Questo lavoro presenta alcuni aspetti fondamentali legati a un fenomeno la cui gravità sociale è decifrata nei tanti casi che i media presentano quasi ogni giorno all'attenzione dell'opinione pubblica: il bullismo e il cyberbullismo. Il fenomeno del bullismo si è recentemente diffuso non solo nelle scuole, ma anche online, sui social network, tramite e-mail o su varie piattaforme digitali, conosciuto come cyberbullismo. Lo sviluppo senza precedenti della tecnologia della comunicazione attraverso l'informazione digitale, nonché un contesto specifico, ha permesso al bullismo di andare oltre il cortile della scuola e di spostarsi nello spazio online, diventando cyberbullismo. Nascosto dietro un computer, smartphone, ecc. connesso a Internet, l'aggressore può molestare la vittima senza dover usare la forza fisica, ma solo una piccola conoscenza di base che può aiutarlo a portare a termine il suo piano. Gli effetti possono essere devastanti per la vittima.

Abstract
This paper presents certain fundamental aspects related to a phenomenon whose social gravity is deciphered in the many cases that the media presents almost every day to the attention of public opinion: bullying and cyberbullying.The phenomenon of bullying has recently become widespread not only in schools, but also online, on social networks, by e-mail or various digital platforms, being known as cyberbullying. The unprecedented development of communication technology through digital information, as well as a specific context have allowed bullying to go beyond the schoolyard and move into the online space, becoming cyberbullying. Hidden behind a computer, smartphone, etc. connected to the internet, the aggressor can harass the victim without having to use physical force, but only a little basic knowledge that can help him carry out his plan. The effects can be devastating for the victim.

Parole Chiave Bullismo, cyberbullismo, scuola, studenti, violenza, differenze di genere

Keywords Bullying, cyberbullying, school, students, violence, gender differences

1. Introduzione

Il bullismo tra gli studenti è certamente un fenomeno molto antico. Tuttavia, fu solo all'inizio degli anni '70 che esso divenne oggetto di ricerche più sistematiche (Olweus, 1973a, 1978). I paesi scandinavi sono stati tra i primi ad aver affrontato il problema per cercare di comprendere e studiare tale fenomeno.
Alla fine degli anni '80 e '90, altri paesi, come Giappone, Regno Unito, Paesi Bassi, Canada, Stati Uniti e Spagna (Olweus, 1993) hanno iniziato a prestare sempre maggiore attenzione al bullismo tra i bambini in età scolare. Ma, nonostante i numerosi sforzi intrapresi, la gestione delle situazioni di bullismo tra alunni rimane tuttora un problema aperto in quasi tutti i paesi del mondo.
Il bullismo mira a un continuo e deliberato abuso di potere attraverso ripetuti comportamenti verbali, fisici e/o sociali attraverso i quali intende causare danni fisici, sociali e / o psicologici. Tale fenomeno può coinvolgere una persona o un gruppo che abusa del proprio potere reale (o anche potere percepito) su una o più persone che si sentono inermi e quindi incapaci di fermarlo (https://bullyingnoway.gov.au/understanding-bullying). Il bullismo è, pertanto, un fenomeno oltremodo complesso. L' autore ferisce ripetutamente, perseguita e intimidisce la sua vittima in vari modi (https://b.politiaromana.ro/files/pages_files/BULLYING.pdf):

- *verbale:* sarcasmo, insulti;
- *fisico:* qualsiasi forma di violenza e di aggressione fisica;
- *mobbing* - aggressione verbale ed emotiva di un gruppo verso un individuo;
- *relazionale:* intimidazione, denigrazione, isolamento, manipolazione;
- *cyberbullismo:* inviare messaggi o immagini sul telefono o su Internet allo scopo di denigrare la vittima dell'aggressione verbale:
- *sociale* – esclusione e/o insulti riguardanti lo status sociale.

Negli ultimi 20 anni c'è stato uno sviluppo quasi esplosivo in questo campo, sia in termini di ricerca e di intervento che di politiche nazionali (Smith, Morita, Junger-Tas, Olweus, Catalano e Slee, 1999; Juvonen, & S Graham, 2001; Espelage & Swearer, 2004; Smith, Pepler & Rigby, 200 9, Davis, S., & Nixon, C., 2010, Gini, G., & Espelage, DD, 2014, Patchin, JW e Hinduja, S., 2019)

Nell'ultimo decennio, l'enfasi nella ricerca si è spostata sulla prevenzione delle aggressioni online, in cui i bambini / giovani possono essere sia aggressori, sia vittime. Studi recenti hanno dimostrato, oltre ogni dubbio, che l'aggressività sia online che offline e le molestie in qualsiasi contesto perpetrate, hanno un'influenza negativa sull'adattamento dei giovani e possono avere conseguenze fisiche ed emotive durature. Ciò ha indotto genitori, educatori e responsabili delle decisioni ad intervenire tempestivamente, sia in campo educativo che clinico, per tentare di arginare la diffusione di tale nefasto fenomeno mediante l'informazione, la prevenzione, la sensibilizzazione di tutti, giovani ed adulti.

Molte sono le cause che possono contribuire a determinare o ad incrementare tale increscioso fenomeno. Recenti ricerche condotte con una pluralità di metodi diversi in vari paesi europei concordano nel sostenere che esse vanno ricercate da quelle sociali e culturali e, quindi, valoriali ad altre aventi un carattere più spiccatamente psicologico, ad altre ancora di contesto, prioritariamente scolastico. Il bullismo è generalmente caratterizzato da un comportamento aggressivo intenzionale che mira a causare disagio o dolore, si manifesta ripetutamente, regolarmente nel tempo; (Limber, 2002; Olweus, 1993a; Nansel et al., 2001), comporta uno squilibrio di potere tra l'aggressore e la vittima (Olweus,1993). La scoperta che le molestie subite, in qualsiasi contesto vengano perpetrate, possono avere conseguenze fisiche ed emotive durature, ha portato genitori, educatori e responsabili delle decisioni a compiere interventi mirati, sia di carattere educativo che clinico, tesi a mitigare le dannose conseguenze di tali comportamenti violenti.

Uno studio sociologico condotto in Romania a livello nazionale dal titolo "*Bullismo tra i bambini* -2016 (https://oradenet.salvaticopiii.ro/docs/Bullying_Studiu_sociologic_salvati_copiii.pdf) ha evidenziato le seguenti caratteristiche del fenomeno del bullismo in ambienti scolastici:

- L'impatto del bullismo a scuola determina l'isolamento del bambino-vittima, causa depressione e si accentua persino la tendenza al suicidio.
- Il target preferito è un bambino diverso dagli altri per aspetto fisico, per comportamenti o caratteristiche differenti dalla maggioranza (timidezza, rendimento scolastico, presenza di una disabilità o un bisogno educativo speciale, presenza di una diagnosi di disturbo di salute mentale), un contesto socio-economico svantaggiato, etnie diverse, ecc.
- A volte i bambini possono assumere un doppio ruolo: aggressore in un contesto, vittima in un altro.
- La dinamica dei ruoli (vittima o aggressore) è più pronunciata nel caso dei bambini più piccoli (si possono facilmente ritrovare nel ruolo di vittima o aggressore, a seconda delle circostanze). Nel caso degli adolescenti, invece, i ruoli tendono a diventare più stabili e le dinamiche risultano meno pronunciate.
- Gli atti di bullismo da parte di bambini con buoni risultati scolastici vengono a volte ignorate o trascurate, essendo essi considerati alla stregua di incidenti di percorso. Risultano quindi meno visibili e, se sanzionati, lo sono in modo più mite. Mentre i bambini con risultati scolastici deludenti sono talvolta percepiti come colpevoli.
- Gli studenti delle scuole medie considerano le sanzioni scolastiche efficaci come misure per ridurre i comportamenti di bullismo, mentre gli adolescenti (studenti delle scuole superiori/licei) sono piuttosto pessimisti sull'efficacia di queste misure in relazione alla riduzione del fenomeno.

- Secondo l'opinione degli studenti, gli adulti sono generalmente tolleranti nei confronti delle forme psicologiche ed emotive di bullismo.
- La reazione dell'istituzione scolastica varia da scuola a scuola.
- Gli interventi si concentrano principalmente sull'aggressore e sulla vittima, dando poca importanza alla reazione del gruppo di testimoni.
- Non sempre l'intervento dei genitori contribuisce alla riduzione della violenza.

2. Il bullismo e le differenze di genere

Riprendendo le idee espresse da Ada Fonzi in "La Repubblica" del 8 settembre 2003, "*il bullismo al femminile è diverso da quello maschile: le ragazze prediligono un'aggressività indiretta, non fisica, più sottile e spesso più dolorosa- Emarginano le compagne più deboli, le calunniano, le ricattano, le isolano…le fanno sembrare invisibili. Esattamente come i bulli anche le bulle soffrono di irrequietezza, di aggressività e vivono in uno stato di disimpegno morale senza provare alcun senso di colpa*...". La vittima spesso perde la propria autostima e ciò può determinare altri tipi di disturbo ad essa correlati come ad esempio comportamento alimentare non adeguato, depressione ,attacchi di panico o altro. Permangono, però, rispetto alla versione maschile, alcune costanti legate

1. ai ruoli: una vittima e uno o più seguaci;
2. all'età: si tratta soprattutto di adolescenti e preadolescenti;
3. al contesto: in genere la sopraffazione avviene in ambito scolastico.

Gli atti di molestia e di intimidazione psicologica assumono la forma di minacce, di false accuse, di denigrazione. Tali modalità aggressive, di tipo psicologico-relazionale, possono essere sia dirette che indirette. Infine, il bullismo nelle scuole, come d'altra parte il mobbing, è fortemente influenzato da dinamiche di gruppo, trova sostegno nell'ambiente circostante ed è coperto da atteggiamenti di omertà e negazione. Mentre le ragazze tendenzialmente denunciano le prepotenze subite e, se spettatrici di episodi di bullismo perpetrati ai danni di altri, reagiscono per difendere la vittima, i ragazzi sono più avvezzi ad un comportamento omertoso e complice (Sullivan, 2000). Le differenze di genere, a livello comportamentale, si manifestano in modo evidente con l'età: meno evidenti, quasi nulle, nei primi anni di scuola, emblematiche del genere di appartenenza durante il periodo adolescenziale (Genta, 2002). I problemi derivanti da un comportamento aggressivo delle ragazze sono generalmente inferiori per numero ed intensità rispetto a quelli dei ragazzi. Tali comportamenti devianti sono dovuti essenzialmente a:

1. disturbo della condotta,
2. disturbo oppositivo-provocatorio.

Il primo è caratterizzato da una modalità di comportamento ripetitiva e persistente in cui i diritti fondamentali degli altri oppure le norme o le regole della società vengono violate. L'atteggiamento tipico di questa forma di devianza si manifesta con un comportamento prepotente, minaccioso, o intimidatorio. La sfera affettiva risulta generalmente compromessa. Il secondo, invece, non si manifesta con atti di aggressività diretta quanto piuttosto attraverso un atteggiamento provocatorio, disobbediente ed ostile nei confronti delle figure che rappresentano l'autorità, in particolare gli adulti.

La ricerca nei paesi scandinavi e in Finlandia, nonché in altri paesi in Europa, Nord America, Australia e Giappone, ha dimostrato che almeno il 5% degli studenti delle scuole primarie e secondarie viene molestato settimanalmente o più spesso. Il numero di vittime tra le ragazze è quasi uguale a quello tra i ragazzi, ma l'aggressività dei ragazzi è maggiore rispetto a quella delle ragazze. Inoltre, diversi studenti sono coinvolti in atti di bullismo occasionale. (O'Moore, Kirkham e Smith, 1997; 1999; Pepler et al., 1993; Olweus, 1997, Rigby, 1997; Roland e Munthe, 1997; Smith, 1997, Roland, 1998). Le variabili dominanti trovate in letteratura sono le condizioni di vita e gli aspetti della personalità relativamente stabili degli studenti direttamente coinvolti in atti di bullismo. (Olweus, 1980, 1999; Roland e Idsøe, 2001). E' stato anche osservato che la numerosità degli atti di bullismo conclamato risulta indipendente dal contesto scolastico (se contesto urbano o rurale) e dalle dimensioni della classe (Olweus, 1993; Roland, 1998). Il bullismo, sia al maschile che al femminile, è un fenomeno sociale che, in quanto tale, coinvolge frequentemente la classe scolastica in quanto gruppo formale nato non per cooptazione spontanea. L'enfasi sulla natura di gruppo del fenomeno e gli effetti di rinforzo reciproci tra i partecipanti (Craig e Pepler, 1997) ha permesso di studiare in maniera più approfondita i ruoli e le dinamiche che ne sono alla base.

E' abbastanza evidente, infine, che l'interazione docente-alunno influenza direttamente sia il comportamento dello studente che i suoi risultati di apprendimento (Doyle e Carter, 1987; Kounina, 1970; Mortimore et al.., 1989; Teddlie e Stringeld, 1993). Molte ricerche che si sono concentrate sull'identificazione delle situazioni di bullismo, sulla personalità delle vittime e degli attori e delle loro condizioni familiari hanno mostrato che le difficoltà vissute da alcuni studenti in famiglia possono determinare, a livello comportamentale, forme di devianza e condotte aggressive purtroppo, ancora oggi, in aumento tra i preadolescenti e gli adolescenti . (Smith e Myron-Wilson, 1998).

3. Caratteristiche delle vittime e degli aggressori tipici

È possibile distinguere le vittime di bullismo in due gruppi generali: vittime passive o sottomesse e vittime provocatorie. L'immagine della vittima tipica risultante dalla letteratura è relativamente inequivocabile. (Olweus, 1978, 1984, 1993a).

Le vittime di aggressioni sono, in generale, più ansiose e insicure rispetto agli altri studenti, spesso sono cauti, sensibili e calmi, hanno una visione negativa di se stessi e della loro situazione, si sentono sole e abbandonate dalla scuola, non sono aggressivi e non disturbano gli altri con il loro comportamento. Si può dire, quindi, che la vittima passiva o sottomessa è caratterizzata da un pattern di reazione ansiosa combinato (nel caso dei ragazzi) con debolezza fisica. Esiste anche un gruppo minoritario di vittime, le cosiddette vittime provocatorie, caratterizzato da una combinazione di schemi di reazione sia ansiosi che aggressivi (Olweus, 1978). In generale, la vittima provocatoria (o aggressiva) è spesso più rilassata a scuola rispetto ai suoi coetanei, presenta tassi più elevati di fumo, di consumo di alcool, è soggetta, in genere, a depressione e manifesta una spiccata tendenza al suicidio.

Gli aggressori tipici, invece, mostrano aggressività nei confronti di insegnanti, famiglia, colleghi, conoscenti, ecc... Sono impulsivi, con forti tendenze a dominare gli altri, hanno poca empatia per le vittime dell'aggressione e, specie nel caso dei ragazzi, in genere, sono fisicamente più forti e prestanti dei loro coetanei, in particolare delle loro vittime. I risultati delle ricerche effettuate in questo settore non forniscono dati chiari ed inequivocabili. Quello che si può dire, però, è che i dati basati su diversi campioni ottenuti utilizzando metodi sia diretti che indiretti, come tecniche proiettive e test ormonali, indicano che gli aggressori hanno un livello basso o, in alcuni casi, medio di ansia e insicurezza (Olweus, 1981, 1984) e non soffrono di bassa autostima.

Il bullismo può anche essere visto come il risultato di un modello di comportamento disordinato, antisociale, orientato a infrangere le regole. Gli studi di settore (Huesmann & Eron, 1984, in stampa; Loeber & Dishion, 1983; Magnusson, Stattin e Duner, 1983; Stattin e Magnusson, 1989) confermano che gli aggressivi giovani a scuola sono a maggior rischio di sviluppare successivamente ulteriori comportamenti gravemente problematici, come ad esempio crimini di vario genere, dipendenze varie o altro.

Si può quindi affermare che le vittime passive sono descritte come psicologicamente e fisicamente deboli, ansiose, insicure, ipersensibili dotate di scarsa autostima (Boulton e Smith, 1994). Vivono in condizioni di isolamento e di esclusione all'interno del contesto scolastico, hanno poche capacità relazionali, non sanno rispondere alle offese (Kochenderfer e Ladd, 1997). Al contrario, le vittime provocatrici sono emotive ed impulsive; si tratta, in genere, di soggetti iperattivi, irritanti e fastidiosi verso il prossimo (Pepler ei al., 2004). Per quanto concerne i rapporti con i coetanei, allo stesso modo delle vittime passive, anche quelle provocatrici, hanno scarsi rapporti relazionali e sono, quindi, anch'esse destinate all'isolamento ed all'alienazione. (Pepler et al., 2004).

4. Cyberbullismo

L'uso della tecnologia, dei nuovi mezzi di comunicazione, di internet hanno cambiato in maniera sostanziale soprattutto le modalità di relazione tra gli individui. Ciò ha prodotto delle evoluzioni anche nei fenomeni negativi come il bullismo che si è evoluto in un fenomeno nuovo: il cyberbullismo, che può essere pertanto definito come la manifestazione in Rete del bullismo. Pertanto, con il termine cyberbullismo o bullismo on line si indicano quegli atti di bullismo, di molestia e di prevaricazione effettuati tramite mezzi elettronici come le e-mail, le chat, i blog, i telefonini cellulari, i siti web o qualsiasi altra forma di comunicazione riconducibile al web. A differenza del bullo tradizionale, però, che di regola è un leader, il cyberbullo agisce in anonimato, in modo subdolo. Spesso è lo status di una persona debole, di chi gode di poca visibilità, di scarsa considerazione nella vita reale. La rete garantisce l'anonimato e l'anonimato sviluppa delle dinamiche che rendono le persone più disinibite e le spingono ad avere condotte illegali e immorali.

Il cyberbullismo o il bullismo cibernetico è diventato un fenomeno estremamente diffuso negli ultimi anni. Sebbene sembri un fenomeno facile da riconoscere, notiamo che anche tra i ricercatori di cyberbullismo esiste una grande varietà di modi con cui definire e considerare il cyberbullismo (Menesini e Nocentini, 2009; Oblad, 2012; Ybarra, Boyd, Korchmaros e Oppenheim 2012; Patchin e Hinduja 2012; Kowalski, Limber, & Agatston, 2008). Tra le definizioni di cyberbullismo o bullismo elettronico-digitale maggiormente accreditate, ricordiamo quelle di Smith, Mahdavi, Carvalho, Fisher, Russell e Tippett (2008) che definiscono il cyberbullismo come "un atto aggressivo attuato tramite l'ausilio di mezzi di comunicazione elettronici, individuale o di gruppo, ripetitivo e duraturo nel tempo contro una vittima che non può facilmente difendersi."

E' necessario sottolineare che, nonostante le varie definizioni di cyberbullismo, questo fenomeno possiede delle caratteristiche e delle peculiarità specifiche che lo differenziano dal bullismo tradizionale. Queste sono:

1. l'anonimato: il cyberbullo rimane nell'ombra e, quindi, avverte un senso di protezione della propria identità;
2. l'irreperibilità: fortemente legato all'anonimato;
3. la spavalderia: le azioni del cyberbullo sono prive di freni inibitori, senza riserve morali su ciò che fa o dice, grazie anche all'anonimato e alla irreperibilità;
4. l'ampliamento spazio-temporale: ogni azione sul web ha una risonanza tale che travalica le tradizionali barriere spazio-temporali. (Aleandri 2008).

Alcune ricerche sul cyberbullismo prendono in considerazione tutti i mezzi di comunicazione e i luoghi in cui può verificarsi il cyberbullismo, mentre altre si concentrano solo su poche tecnologie (come le webcam) o ambienti virtuali (come le reti di gioco online, social network, ecc.).Tutto ciò può determinare risultati non sempre confrontabili fra loro specie se si confrontano i risultati delle ricerche sui tassi di prevalenza riportati in letteratura e se si valutano i dati raccolti a livello internazionale (Craig, Henderson, & Murphy, 2000; Smorti, Menesini, & Smith, 2003), in quanto, sebbene al cyberbullismo vengano riconosciute le stesse caratteristiche paradigmatiche del bullismo, queste si manifestano, però, con valori e modalità differenti. Le varie concettualizzazioni non sono sorprendenti perché, in realtà, c'è un continuum di comportamenti, che vanno da attacchi fastidiosi o deludenti ad attacchi gravi, persistenti e ubiquitari. La domanda da porsi è pertanto: a che punto nel corso degli eventi, una azione prevaricatrice può essere considerata un atto di cyberbullismo - o addirittura a un atto criminale? Le risposte a queste domande non sono ancora chiare e necessitano di ulteriori indagini ed esami formali. Una conseguenza della mancanza di una definizione affidabile e ampiamente accettata di cyberbullismo è l'esistenza di diverse misurazioni della natura e del grado di molestia nel cyberspazio, che fornisce un quadro incompleto del fenomeno, portando a disinformazione e confusione (Mishna, Pepler, & Wiener, 2006; Patchin e Hinduja, 2012).

Un altro problema è che, spesso, i termini "bullismo" e "cyberbullismo" sono attualmente abusati da adulti e bambini, senza comprendere esattamente il vero significato di questi termini. Va comunque messo in evidenza, ovviamente, che non tutti i conflitti o le situazioni problematiche che possono sorgere tra studenti, o tra studenti e insegnanti, ecc. possono essere annoverati tra gli atti di bullismo o di cyberbullismo. indipendentemente da dove l'azione si svolga (se online o in spazi tradizionali) (Willard, 2007).

Il cyberbulling, come il bullismo tradizionale, è caratterizzato da intenti, ripetizioni, danni e squilibrio di potere (Patchin e Hinduja, 2006; Wolak et al., 2007) e non tutti i conflitti, ovviamente, soddisfano questi criteri (Baas, de Jong e Drossaert, 2013).

Compito degli educatori dovrebbe essere quello di aiutare gli studenti a comprendere e differenziare le situazioni che possono determinarsi al fine di far comprendere ai ragazzi quali sono le diverse sfaccettature di questo deprecabile fenomeno, presentando esempi, scenari e persino esercizi di role-playing grazie ai quali fornire indicazioni e riflessioni per la conoscenza, e la prevenzione, del cyberbullismo e dei fenomeni ad esso riconducibili e per la sensibilizzazione ad un uso corretto della rete.

5. Problemi specifici del cyberbullismo

La comunicazione elettronica consente a chi utilizza questo tipo di comunicazione di trasmettere e ricevere molte informazioni tramite Internet.

L'apparente sicurezza fornita dall'anonimato online percepito dall'utente e l'uso di pseudonimi nella creazione di account utente o e-mail utilizzati per la comunicazione informatica rendono difficile conoscere la reale identità di queste persone.

Il loro comportamento su Internet spesso supera i limiti della legalità sfociando, quindi, in comportamenti illegali. Nel corso degli anni si sono moltiplicate le ricerche volte a indagare sia la frequenza del fenomeno del bullismo, sia ad esplorare le dinamiche psicologiche e relazionali che si innescano tra i soggetti coinvolti nel fenomeno stesso. Le stesse ricerche evidenziano che la percentuale dei fenomeni di bullismo diminuisce con l'aumentare dell'età dei ragazzi coinvolti. Ciò non implica però una regressione del fenomeno stesso, ma solo un cambiamento. Difatti sebbene gli episodi di bullismo diminuiscano con l'aumentare dell'età dei bulli, aumenta, di contro, il tasso di gravità e di pericolosità.

Inoltre, le diverse forme di bullismo trovano il loro luogo preferenziale negli ambienti scolastici. Studi empirici condotti per la prima volta da Genta et al. nel 1996 e,

successivamente indagini effettuate da Fonzi et al., nel 1997, da Baldry (2001) e Marini e Mameli nel 1999, hanno confermato che il tasso di incidenza registrato sul territorio nazionale è superiore a quello degli altri paesi europei.
L'analisi dei risultati ottenuti da un'indagine compiuta in sette regioni italiani su un campione di 7.000 studenti appartenenti a diversi ordini di scuola mostrano che il 27% degli studenti delle primarie ed il 20% di quelli delle secondarie di primo grado compiono atti di bullismo. Importante, dunque, è considerare non solo la pervasività del fenomeno, ma anche la sua gravità. La crescita esponenziale di tale fenomeno, in modo particolare nel contesto scolastico, sottolinea l'importanza di affrontare tale problematica, di studiarla e conoscerla a fondo per evitare che in futuro possa divenire una vera e propria piaga sociale.
Pur presentandosi in una forma diversa, anche quello su internet è bullismo. Sebbene non comporti violenza o altre forme di coercizione fisica, nelle comunità virtuali il cyberbullismo vittimizza di solito le ragazze più frequentemente dei ragazzi e spesso con messaggi contenenti allusioni sessuali. Solitamente il disturbatore agisce in anonimato, talvolta invece non si preoccupa affatto di nascondere la sua vera identità. In Inghilterra, più di un ragazzo su quattro, tra gli undici e i diciannove anni è stato minacciato da un bullo via e-mail o sms. In Italia, secondo alcune ricerche, è emerso che il 24% degli adolescenti subisce in questo modo prevaricazioni, offese o prepotenze.

6. Conclusioni

Il bullismo scolastico è stato uno dei problemi più comuni tra i bambini in età scolare in diversi paesi, come riportato da ricerche internazionali in paesi come Paesi Bassi, Belgio, Germania, Italia, Spagna, Portogallo, Irlanda, Australia, Nuova Zelanda, Romania , Turchia, Canada, USA ecc. Numerosi studi (Hoover, Oliver e Hazler, 1992, Olweus, 1993, Rigby, 2005, Chan, 2006, Gini, 2007, Boulton, Smith and Cowie, 2010) ecc. hanno riferito aumenti sostanziali del numero di studenti bulli o vittime di bullismo oppure testimoni/spettatori.
Una serie di condizioni contestuali, di motivazioni favoriscono la comparsa e il mantenimento del fenomeno del bullismo.
Lo sviluppo delle nuove tecnologie delle comunicazioni di massa (in particolare di Internet), dagli anni '60 fino allo sviluppo dei media digitali, e la diffusione dei media sociali hanno profondamente cambiato ogni aspetto dell'attività umana.
E' proprio a partire da questi profondi cambiamenti sociali, culturali e comunicativi che anche la didattica ha dovuto ridefinire i suoi spazi fisici, pedagogici, epistemologici e relazionali. Accanto, quindi, alle potenzialità ed innovazioni, prima inimmaginabili, della rivoluzione digitale, si accompagnano inevitabilmente criticità e rischi legati al loro utilizzo. L'unico modo di difendersi dai possibili rischi connessi all'utilizzo delle nuove tecnologie della comunicazione è quello di conoscerle, impararne il funzionamento, le dinamiche pregi e difetti. Il bullismo tra bambini / ragazzi appare

come un problema a lungo termine che sembra mutare le sue forme parallelamente all'evoluzione delle tecnologie dell'informazione e della comunicazione. Offrono ai molestatori/aggressori un nuovo ambiente in cui possono intimidire gli altri nascondendo la loro identità (Patchin e Hinduja, 2019). Il cyberbullismo ha oltrepassato i confini della scuola e l'ambiente circostante e può manifestarsi ovunque siano disponibili le tecnologie di comunicazione Internet, fin dalla tenera età e continuando fino alla giovane età adulta, anche più tardi.

Bibliografia

Aleandri, G. (2008). Giovani senza paura. Analisi socio-pedagogica del fenomeno bullismo. Roma: Armando Armando.

American Psychiatric Association. (2014). DSM-5. Manuale diagnostico e statistico dei disturbi mentali. Milano: Raffaello Cortina Editore.

Baldry, A. C. (2001). Bullismo a scuola e comportamenti devianti negli adolescenti: possibili fattori di rischio. Rassegna Italiana di Criminologia, 12, 375-396.

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. Psychological Review, 84, 191-215.

Beale, Andrew & Hall, Kimberly. (2007). Cyberbullying: What School Administrators (and Parents) Can Do. The Clearing House. 81. 8-12. 10.3200/TCHS.81.1.8-12.

Blatchford, Peter & Goldstein, Harvey & Mortimore, Peter. (1998). Research on class size effects: A critique of methods and a way forward. International Journal of Educational Research. 29. 10.1016/S0883-0355(98)00058-5.

Bradshaw, Catherine & Sawyer, Anne & O' Brennan, Lindsey. (2007). Bullying and peer victimization at school: Perceptual differences between students and school staff. School Psychology Review. 36. 361-382.

Davis, S., & Nixon, C. (2010). The youthvoiceresearchproject: Victimizationandstrategies. Retrievedfrom: http://njbullying.org/documents/YVPMarch2010.pdf

De Mennato, (1998) Fonti per una pedagogia della complessità, Liguori, Napoli

Espelage, D. L., & Swearer, S. M. (Eds.). (2004). *Bullying in American schools: A social-ecological perspective on prevention and intervention.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Gini, G., &Espelage, D. D. (2014) Peer victimization, cyberbullying, and suicide risk in childrenandadolescents. *JAMA Pediatrics*, *312*, 545-546. Retrieved from http://jamanetwork.com/journals/jama/article-abstract/1892227

Graham, S., & Juvonen, J. (2001). *An attributional approach to peer victimization.* In J. Juvonen & S. Graham (Eds.), *Peer harassment in school: The plight of the vulnerable and victimized* (p. 49–72). The Guilford Press.

Gulemetova, Michaela; Drury, Darrel; and Bradshaw, Catherine P. (2011) "National Education Association Bullying Study,"Colleagues: Vol. 6: Iss. 2, Article 11.

Hinduja, Sameer & Patchin, Justin. (2010). Bullying, Cyberbullying, and Suicide. Archives of suicide research : official journal of the International Academy for Suicide Research. 14. 206-21. 10.1080/13811118.2010.494133.

Kounin, J. S. (1970). Discipline and Group Management in Classrooms. New York: Holt, Rinehart and Winston.

Kowalski, R. M., Limber, S. P., & Agatston, P. W. (2008).Cyber bullying: Bullying in the digital age. Malden, MA: Blackwell.

Li, Q. (2010) 'New Bottle But Old Wine: A Research on Cyberbullying in Schools', Computers and Human Behavior.

Lund, Emily & Blake, Jamilia & Ewing, Heidi & Banks, Courtney. (2012). School Counselors' and School Psychologists' Bullying Prevention and Intervention Strategies: A Look Into Real-World Practices. Journal of School Violence. 11. 246-265. 10.1080/15388220.2012.682005.

Morin E. (1993), Introduzione al pensiero complesso, Sperling e Kupfer, Milano

Myrick, R. D., Highland, W. H., & Sabella, R. A. (1995). Peer helpers and perceived effectiveness. *Elementary School Guidance & Counseling, 29*(4), 278–288.

Offord, Abaigh & Turner, Hannah & Cooper, Myra. (2006). Adolescent inpatient treatment for anorexia nervosa: A qualitative study exploring young adults' retrospective views of treatment and discharge. European Eating Disorders Review Eur. Eat. Disorders Rev. 14. 377-387.

Olweus, D. (1973). Hackkycklingar och iiversittare: Forskning om skolmobbning. Stockholm:

Olweus, D. (1978). Aggression in the schools. Bullies and whipping boys. Washington, DC: Hemisphere Press (Wiley).

Olweus, D. (1980). Familial and temperamental determinants of aggressive behavior in adolescent boys: A causal analysis. Developmental Psychology, 16, 644-660.

Olweus, D. (1980). The consistency issue in personality psychology revisited-with special reference to aggression. British Journal of Social and Clinical Psychology, 19, 377390.

Olweus, D. (1993). Bullying at school: What we know and what we can do. Oxford: Blackwell

Olweus, D. (1993). Victimization by peers: Antecedents and long-term outcomes. InK. H.

Olweus, Dan. (1997). Bully/victim problems in school: Facts and intervention. European Journal of Psychology of Education. 12. 495-510. 10.1007/BF03172807.

O'Moore, A. M., Kirkham, C., & Smith, M. (1997). Bullying behaviour in Irish schools: A nationwide study. *The Irish Journal of Psychology*, *18*(2), 141–169.

Patchin, J. W., & Hinduja, S. (2019). 2019 Cyberbullying Data. *CyberbullyingResearch Center*. Retrievedfrom https://cyberbullying.org/2019-cyberbullying-data .

Patchin, Justin & Hinduja, Sameer. (2012). Cyberbullying: An update and synthesis of the research. Cyberbullying Prevention and Response: Expert Perspectives. 13-35.

Pepler, D. J., & Craig, W. M. (1995). A peek behind the fence: Naturalistic observations of aggressive children with remote audiovisual recording. *Developmental Psychology, 31*(4), 548–553. https://doi.org/10.1037/0012-1649.31.4.548
Peter K. Smith, DebraPepler, KenRigby, 2009, Bullying in Schools: HowSuccessfulCanInterventions Be?, Cambridge University Press;
Roland, E., & Idsøe, T. (2001). Aggression and bullying. *Aggressive Behavior, 27*(6), 446–462. https://doi.org/10.1002/ab.1029
Sabella RA, Patchin JW, Hinduja S. Cyberbullying myths and realities. Comput Hum Behav 2013;29:2703e11.
Salmivalli C, Huttunen A, Lagerspetz KMJ. 1997. Peer networks and bullying in schools. Scand J Psychol 38:305–312.
Smith, P. K., & Myron-Wilson, R. (1998). Parenting and school bullying. *Clinical Child Psychology and Psychiatry, 3*(3), 405–417. https://doi.org/10.1177/1359104598033006
Smith, P. K., Morita, Y., Junger-Tas, J., Olweus, D., Catalano, R. F., & Slee, P. (Eds.). (1999). *The nature of school bullying: A cross-national perspective.* Taylor & Frances/Routledge.
Sutton J, Smith PK, Swettenham J. 1999. Social cognition and bullying: Social inadequacy or skilled manipulation? Br J DevPsychol 17:435–450.
Teddlie, C and Stringfield, S (1993). Schools make a difference: lessons learned from 10- year study of school effects. New York: Teachers College Press.
Vivolo-Kantor, Alana & Hamburger, Merle & Basile, Kathleen. (2011). Measuring Bullying Victimization, Perpetration, and Bystander Experiences: A Compendium of Assessment Tools.
Winburn, A. & Niemeyer, R. & Reysen, Rebekah. (2012). Mississippi principal perceptions of cyberbullying. 2. 1-15.
Ybarra, M. L. & Mitchell, K. J. (2004). Online aggressor/targets, aggressors, and targets: a comparison of associated youth characteristics. Journal of Child Psychology and Psychiatry, 45, 1308–1316.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 3, No 1-2 (2020), 25-40

La geometria dinamica

Veronica De Sanctis

Insegnante di Scuola Primaria
veronica.de.sanctis@virgilio.it

Sunto
L'area del rettangolo si troverà sempre moltiplicando base per altezza e il perimetro del quadrato il lato di esso per quattro, su questo non c'è dubbio, ma davvero non esiste altro modo di fare geometria se non quello di assegnare pagine di formule da studiare a memoria ed esercizi mnemonici in cui applicarle? La geometria dinamica nasce proprio con lo scopo di proporre un'efficace alternativa, di certo legata alla tradizione, ma con innovativi risvolti didattici che contribuiscono a rendere meno ostile una disciplina che per molti, fin dalla tenera età, lo è.

Parole Chiave: Geometria, Geometria dinamica, Modello dinamico concreto, Modello dinamico virtuale, Geogebra, Formule, Didattica, Didattica alternativa, Innovazione

Abstract
The area of the rectangle will always be found by multiplying the base by the height and the perimeter of the square by multiplying the side by four times, there is no doubt about it. But is it really true, that there is no other way to do geometry, other than assign pages of formulas to study and mnemonic exercises in which apply those rules? The dynamic geometry was born with the aim to give an efficient alternative, for sure linked to tradition, but with innovative educational implications that contribute to make less unfriendly what is for most, since an early age, a complicated discipline.

Keywords: Geometry, Dynamic Geometry, Concrete dynamic model, Virtual dynamic model, Geogebra, Formulas, Didactic, Alternative didactic, Innovation.

1. Rivoluzione o innovazione?

Siamo abituati ad una geometria tramandata noiosamente di generazione in generazione, figure e formule che si susseguono (e che ci perseguitano, direbbero alcuni) dalla scuola primaria fino all'università.
Nel pensiero comune non esiste alternativa e molti rinunciano a quella che sembra essere una battaglia persa in partenza. Per cercare una via di accesso a questa disciplina tanto avversa quanto forte si è sentita la necessità di cambiare la prospettiva con cui si guardava a questo mondo, nascono e si sviluppano gli studi legati alla *geometria dinamica*. La volontà non di rivoluzionare, quanto di innovare, ci viene suggerita dai termini stessi: g*eometria* perché non si pone in antitesi, bensì in continuità con la geometria tradizionale; *dinamica* perché si basa sull'utilizzo di modelli dinamici e virtuali, dotati di elementi mobili che favoriscono il continuo modificarsi degli oggetti costruiti. Ed è proprio in quest'ultima caratteristica che risiede la novità della disciplina. Le conoscenze non vengono trasmesse in modo unidirezionale dall'insegnante al discente ma l'alunno stesso diventa protagonista e autore del proprio apprendimento basato sulla propria esperienza, percezione e osservazione. L'attenzione si focalizza non sul prodotto finale, sulla formula preconfezionata, quanto sul processo con il quale si può arrivare ad essa, sull'implicita costruzione di immagini mentali. Un viaggio ricco di stupore che parte dai più piccoli ma che riesce a coinvolgere anche e soprattutto i docenti, che ritrovano il piacere di insegnare una disciplina così tanto consolidata e ripetuta nella propria carriera. E' dalla meraviglia che bisogna, quindi, ripartire per riscoprire, a qualsiasi età, la bellezza di una geometria rinnovata senza dover, necessariamente, rivoluzionarne i contenuti.

2. La geometria dinamica a scuola

Le attività di geometria dinamica si rivolgono, per lo più, alle ultime classi di scuola primaria e alle classi di scuola secondaria di primo e secondo grado che possiedono già una base di geometria piana su cui poter operare. Esse sono strutturate sottoforma di laboratorio di dimostrazione geometrica diviso in più fasi, il cui obiettivo è quello di verificare il perché di determinate ipotesi e non semplicemente l'esattezza o meno di esse.
Nella *prima fase* l'insegnante ricopre il ruolo principale perché è responsabile della scelta di adattamento delle attività alla propria classe, al livello di conoscenza e alle caratteristiche peculiari di ciascun alunno, al curricolo già svolto, al linguaggio che sono in grado di padroneggiare. Nonostante un'attenta e dettagliata programmazione, egli dovrà, in ogni caso, essere pronto a eventuali modifiche di essa, dovute, per lo più, ai numerosi stimoli che i modelli forniscono e che potrebbero indirizzare l'attività verso

mete non precedentemente stabilite; in tal caso, è sempre necessario avere a disposizione altri modelli dinamici, pur se non previsti dall'attività, che possano fungere da contro esempi o da modelli di appoggio in caso di conclusioni errate. È bene, inoltre, predisporre l'aula affinché venga favorito il cooperative learning.

Nella *seconda fase* entrano in gioco i modelli dinamici concreti, strumenti costruiti dagli alunni stessi attraverso l'uso di materiale facile da reperire e da maneggiare (cartoncino, filo di spago, fermacampioni, legnetti…) e con l'aiuto di schede guida fornite dall'insegnante. Ciascun alunno opererà sul proprio modello giungendo a delle osservazioni personali che saranno necessarie nella fase successiva di condivisione. Quanto emerso verrà confrontato con i modelli dinamici virtuali, software di geometria dinamica disponibili sul web, acquistabili o scaricabili gratuitamente (Geogebra, Cabri, Dèclic, Cinderella…). Attraverso funzioni specifiche (Punto, Retta, Circonferenza, Retta perpendicolare, Retta parallela) viene costruita una figura geometrica che potrà poi essere manipolata, attraverso la funzione di trascinamento dei punti, senza che essa perda le sue proprietà di costruzione, riproducendo ciò che nella realtà è stato realizzato con il modello dinamico concreto.

Nella *terza ed ultima fase* ciascun gruppo ha la possibilità di condividere con gli altri le ipotesi a cui è giunto così da iniziare una discussione che terminerà con la definizione di una conclusione in cui l'insegnante svolgerà un ruolo chiarificatore e di coordinazione.

3. Un esempio concreto: la geometria dinamica per prevenire le misconcezioni e facilitare il problem solving

Proprio perché la geometria dinamica si fonda sull'esperienza concreta sarà più facile comprenderla tramite un esempio di progetto didattico realmente svolto in una classe quinta di una scuola primaria. In questo caso specifico, la geometria dinamica è stata utilizzata come modalità di intervento per aiutare a prevenire le misconcezioni più comuni. Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione (D'amore, 1999).

Sono step necessari, quindi, ma che non devono coincidere con il concetto stesso che si viene a creare nella mente del discente e che rimane radicato nel tempo. La geometria dinamica interviene proprio in questo momento delicato, introducendo un'inconsueta, quanto più corretta, visione delle figure geometriche e delle proprietà che le legano fra loro. In particolare, questo progetto si pone come obiettivo quello di prevenire l'insorgere delle misconcenzioni connesse ai concetti di area e perimetro e quelle che si riferiscono all'individuazione delle figure legandole alla loro posizione nello spazio e alla rappresentazione grafica che maggiormente ricorre nei libri di testo e nella

spiegazione dei docenti. Il progetto è strutturato in tre attività diverse che presentano una simile modalità di svolgimento, secondo un processo di *problem solving*.
Tutte hanno come filo conduttore la presentazione iniziale di un problema da risolvere che viene introdotto loro tramite una lettera cartacea consegnata ad ogni gruppo e, di volta in volta, accompagnata dagli strumenti necessari a svolgere l'attività. Lo stesso personaggio, Rosina, chiede a ciascun studente di aiutarla in alcune peripezie legate ad un terreno di sua proprietà, così che i ragazzi riflettano e operino dapprima sui concetti di area e perimetro, e successivamente sulle varie forme geometriche. Il progetto prende spunto da un'attività sul perimetro e sull'area, proposta all'interno di una rivista didattica[1], ma completamente riadattata nelle modalità e negli scopi, lasciando invece invariata l'idea della forma narrativa come strumento di anticipazione del contesto in cui operare. I ragazzi sono stati invitati a procedere in autonomia, senza fornire indicazioni precise né sullo svolgimento né sugli obiettivi del lavoro, permettendo loro di essere svincolati dall'idea di dover risolvere un problema strettamente connesso alla matematica, e in maniera specifica alla geometria. Questo ha consentito l'accrescere della motivazione ad apprendere e la partecipazione attiva alla risoluzione del problema, anche da parte di quegli alunni che, in particolare nelle discipline matematiche, appaiono disinteressati e restii all'acquisizione di conoscenze. Il lavoro effettuato in maniera concreta è stato poi riportato in maniera digitale sulla LIM attraverso l'uso del software di geometria dinamica, GeogebraPrim, di cui sono state illustrate solo le funzioni principali e strettamente collegate alla riuscita del progetto (Costruzione di un segmento; costruzione di un segmento con una misura data; trascinamento; costruzione di un poligono; calcolo dell'area di un poligono).

Attività 1: equiestensione e isoperimetria con area fissa

Obiettivo
I concetti di area e perimetro, presentati, nella maggior parte dei casi, in maniera sequenziale e consequenziale, spesso sono legati dalla misconcezione per cui al modificarsi di uno deve, necessariamente, seguire il cambiamento dell'altro. L'attività si pone come obiettivo quello di individuare forme diverse che abbiano perimetri differenti, pur possedendo tutti la stessa area, mettendo in stretta relazione i concetti di equiestensione e isoperimetria.

Strumenti:
- Lettera di presentazione del problema

Ciao a tutti, mi presento, sono Rosina. Mi hanno parlato molto bene di voi e sono sicura che potrete darmi una mano. Qualche giorno fa, purtroppo, è venuta a mancare una mia cara zia e, a mia insaputa, mi ha lasciato in eredità un grande terreno a disposizione e ora non so che farne ma voglio sfruttarlo al meglio! La pianta ha una

[1] A. Erspamer, L. Perini, *Spazi in campagna,* In: *Nuovo Gulliver News,* n. 178, pp.126-132

base quadrata e ogni suo lato misura 18 m. Il mio architetto mi ha consigliato di occupare la superficie dividendola nei seguenti modi: casa 112 m^2; orto 58 m^2; pollaio 74 m^2; laghetto 49 m^2; fontana 30 m^2 ma non mi ha dato indicazioni sulle forme di ogni stanza e ho pensato che potreste darmi una mano a deciderle. Insieme a questa lettera trovate anche un foglio di carta millimetrata che potrete usare per aiutarvi a disegnarle e una tabella in cui dovrete appuntare il perimetro di ogni stanza secondo quello che è il vostro progetto. Vi ringrazio in anticipo!

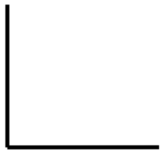
- Tabella riportante le misure delle aree

AMBIENTI	AREA (cm^2)	PERIMETRO (cm)
Casa	112	
Orto	58	
Pollaio	74	
Laghetto	49	
Fontana	30	

- Un foglio di carta millimetrata

Svolgimento
Dopo aver diviso la classe in gruppi eterogenei e equilibrati secondo i vari livelli di competenze, ogni gruppo riceve tutti gli strumenti. Attraverso l'uso della carta millimetrata, la cui quadratura rispetta l'1 cm per lato, i ragazzi sono facilitati nella misura e, quindi, nel calcolo del perimetro così come richiesto. Nell'analizzare le figure ci si accorge che la figura più gettonata è, senza dubbio, il quadrato. Raccogliendo i dati nella tabella appare subito evidente che i perimetri sono calcolati, nella maggior parte dei casi, moltiplicando o dividendo per 4 la misura dell'area così si decide di procedere alla verbalizzazione del ragionamento sottostante per individuare la causa dell'errore.
A: *"Ogni lato è di 112 perché in pratica."*
Maestra: *"Ma 112 non è la misura del lato!"*
A: *"Si, è la misura dell'area"*
Maestra: *"E l'area e il lato sono la stessa cosa?"*
A: *"No"*
Maestra: *"E allora perché avete fatto per 4?"*
A: *"Perché se facciamo un metro quadrato, è formato da 4 lati formati da 1 metro"*
Da questa risposta si intuisce che il loro ragionamento si basi sulla spiegazione di metro quadrato che la maestra aveva fornito loro quando aveva introdotto tale concetto e ci si ritrova, inaspettatamente, davanti ad una misconcezione "inevitabile" di cui la letteratura studiata non porta traccia. Nella spiegazione dell'unità di misura per il calcolo della superficie, si è soliti utilizzare un piccolo quadrato con il lato da 1 m come esempio: *"L'unità di misura fondamentale della superficie è il metro quadrato (m^2).*

Il metro quadrato è l'area racchiusa in un quadrato che ha i lati lunghi un metro"[2]
Questa definizione viene poi spesso accompagnata da un disegno:



In questo caso l'area sarà di 1 m^2 e il perimetro, erroneamente, sarà esatto anche se moltiplichiamo l'area per il numero dei lati; infatti se un quadrato ha 4 lati di 1 m ciascuno, il perimetro sarà di 4 m e se moltiplichiamo l'area di 1 m^2 per 4 otteniamo sempre il risultato di 4 m. Seguendo questo ragionamento scorretto, essi hanno calcolato il perimetro dividendo le aree di cui conoscevano la misura per il numero dei lati che la forma scelta possedeva. Per focalizzare l'attenzione sull'obiettivo prefissato, si può decidere di scegliere come figura unica il rettangolo con un'area uguale per tutti e chiedendo di ipotizzare il valore del perimetro. Dalla raccolta dei dati, si noterà che, pur con un'area uguale, il perimetro cambia di gruppo in gruppo in base alla misura dei lati stabiliti. Con Geogebra prendiamo come esempio due rettangoli, uno in cui la base è maggiore rispetto all'altezza e uno in cui, al contrario, l'altezza è maggiore della base.
I rettangoli, che visibilmente risultano diversi tra loro, risultano avere la stessa area, calcolata attraverso la funzione "calcolo dell'area".

Attività 2: area massima e area minima con perimetro fisso

Obiettivo:
L'attività si pone in linea con quella precedente. Lo scopo è far comprendere ai ragazzi come alla modificazione dell'area non corrisponda necessariamente la modificazione del perimetro, che invece, come nel caso presentato dal problema, può rimanere costante. I ragazzi, attraverso l'esplorazione e la manipolazione, scopriranno come a forme diverse con aree diverse, può in realtà corrispondere un identico perimetro.

Strumenti:
- Lettera di presentazione del problema

Ragazzi, sono di nuovo io. Ricordate il terreno di cui vi ho parlato? Insieme ad esso ho ricevuto anche un'altra superficie coltivabile il cui perimetro è di 80 m. Potete aiutarmi a trovare una forma da dare a questo terreno affinché possa ricavarne la massima superficie coltivabile? Mio padre invece dice che sarebbe meglio ricavarne solo la minima superficie in modo da non avere problemi di tempo e anche lui mi ha chiesto di trovare una forma. Se volete aiutarmi, rispondete alle domande che trovate nel foglio. Vi ringrazio in anticipo!

[2] G. Barbero, F. Castelli, Scoprire insieme 5, Lisciani, Teramo 2017, p.354

- Questionario 1

1. Quante forme potrà assumere il terreno di Rosina? 2. Qual è la forma da dare al terreno per ottenere la massima superficie che Rosina può ricavare? Perché? (nella spiegazione potete aiutarvi con dei disegni e calcoli) 3. Qual è la forma da dare al terreno per ottenere la minima superficie che Rosina può ricavare? Perché? (nella spiegazione potete aiutarvi con dei disegni e calcoli)

- Questionario 2

1. Quante forme potrà assumere il terreno di Rosina? Come le riconosci? 2. Qual è la forma da dare al terreno per ottenere la massima superficie che Rosina può ricavare? Perché? 3. Qual è la forma da dare al terreno per ottenere la minima superficie che Rosina può ricavare? Perché? 4. Avete cambiato qualche risposta? Se sì, cosa vi ha fatto cambiare idea?

- Un filo di spago di lunghezza 40 cm

Svolgimento

Dopo aver consegnato gli strumenti a ciascun gruppo e aver raccolto le risposte, è possibile notare come nella maggior parte dei casi viene confuso il concetto di superficie e di perimetro tanto che, per calcolare la forma necessaria ad ottenere l'area massima e minima, essi prendono in considerazione la misura della lunghezza del contorno, come se fosse la misura dell'area, e la dividono in parti uguali. Dopo aver risposto alle domande e aver consegnato il foglio contenenti le risposte, ai ragazzi viene consegnato un filo di spago lungo 40 cm, spiegando loro che esso è una rappresentazione del perimetro del terreno descritto nel problema, e un secondo questionario, le cui domande sono uguali alle precedenti ma le cui risposte dipenderanno dall'uso dello spago. Lo spago è uno dei materiali meno dispendiosi da utilizzare come modello dinamico concreto e risulta molto efficace per l'individuazione di forme diverse a partire dallo stesso perimetro, se consideriamo che esso non si modifica e non cambia la propria misura, perché non elastico, e che è facilmente maneggiabile. Nel confronto tra il primo e il secondo questionario, ciò che appare evidente, a primo impatto, è la modifica della risposta alla domanda in cui si chiedeva di individuare tutte le forme possibili. Proprio il movimento dello spago, di cui loro stessi prendono coscienza, permette agli alunni la scoperta di forme che prima non avevano pensato. Riporto l'esempio di un gruppo in particolare che nel primo questionario aveva individuato come unica forma possibile il quadrato e che, grazie all'uso dello spago, si accorge che, in realtà, "mettendo in movimento" la figura, poteva ottenerne un'altra, tanto che la risposta al secondo questionario ammetterà anche la forma del rettangolo.

Inoltre, con l'uso del filo, visivamente sarà più immediato il collegamento del perimetro, misura del contorno, allo spago stesso e della superficie allo spazio delimitato da esso, evitando così la misconcezione più comune. Successivamente, senza commentare le risposte date ai questionari, vengono riportate sul programma GeogebraPrim le forme geometriche che ciascun gruppo ha individuato come possibili. Di ognuna di esse viene calcolata la misura della superficie, attraverso la funzione "calcolo dell'area", scoprendo come a forme diverse, con aree diverse tra loro, corrisponde esattamente lo stesso perimetro. In seguito, vengono messe a paragone le misure delle estensioni trovate, cercando di scoprire quale fosse la più grande e quale la più piccola. Tra le due richieste, è stato più facile giungere alla conclusione che il quadrato fosse la forma con la superficie più estesa possibile, considerando che alcuni gruppi avevano già individuato la risposta esatta dal primo questionario. Riconoscere la forma con la minima superficie, invece, è stato più difficoltoso, giungendo alla conclusione errata che essa fosse il triangolo. Alla sollecitazione di trovare una forma ancora più piccola, presentando anche la possibilità di un'area nulla, gli alunni sono rimasti sbigottiti. Nel contratto didattico, infatti, non è previsto che un'area sia nulla e gli studenti non sono andati al di là di ciò che hanno sempre sperimentato.

Attività 3: alla ri-scoperta di alcune forme geometriche

Obiettivo:
Giunti a questo punto del percorso, i ragazzi sono invitati a fare esperienza diretta dei modelli concreti dinamici, costruendoli con le proprie mani. Attraverso il movimento di esso, opereranno al fine di scoprire forme geometriche diverse e individuarne le proprietà specifiche che le contraddistinguono e che le legano.

Strumenti:
- Lettera di presentazione del problema

Dopo aver visionato i vostri progetti, l'architetto mi ha consigliato delle forme da dare agli ambienti di cui vi avevo parlato nella lettera precedente ma, poiché è un po' vecchiotto, non ricorda più le proprietà di queste forme. Anche questa volta ho pensato a voi perché sono sicuro che voi, invece, le ricordate! Il mio amico architetto mi ha dato per ogni ambiente uno strumento che vi può aiutare per rispondere alle domande che lui mi ha chiesto di farvi. Attenzione però, lo strumento dovrete costruirlo voi! Insieme a questa lettera troverete tutto il necessario per il vostro lavoro!

- Istruzioni per la realizzazione di ciascun modello
- Materiale necessario per la costruzione di ciascun modello

Svolgimento
A differenza delle altre, quest'attività è pensata come composta da più lavori di gruppo paralleli che abbiano simili modalità di svolgimento e scopi, articolandosi ciascuno in tre fasi distinte. A partire da una lettera comune, ogni gruppo sarà chiamato ad operare,

dopo averlo costruito, con un modello dinamico diverso e a riportare su GeogebraPrim il lavoro effettuato, facendo attenzione alla differenza tra i fattori variabili e i fattori invariabili. Nel lavoro alla LIM, ognuno di essi avrà la possibilità di confrontarsi, a turno, con la classe in uno scambio reciproco di informazioni e conoscenze in cui ciascuno è fonte di arricchimento per l'altro.

- Gruppo 1: fontana

Fonte: questa attività è stata realizzata dalla sezione Mathesis di Pesaro all'interno di un percorso sui parallelogrammi[3], presentandola in una classe quinta di scuola primaria e una classe seconda di scuola secondaria di primo grado. Riprendendo il lavoro svolto nella quinta elementare e adattandolo al contesto classe, protagonista del mio progetto, ho messo a punto questa attività.

Obiettivo specifico: scoprire quali condizioni sono necessarie per ottenere, durante il movimento, una particolare figura: il rombo.

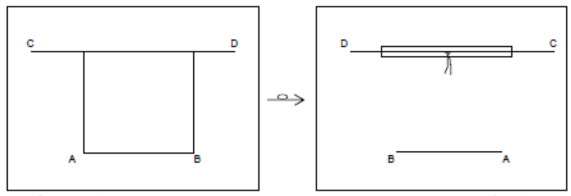
Fase 1: Costruzione del modello dinamico

[3] A.M. Facenda, P. Fulgenzi,J Nardi, F. Paternoster, D. Rivelli, D. Zambon, *Uso integrato di Cabri e modelli dinamici: resoconto di una esperienza sui parallelogrammi. Terza parte.*, in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. A, 5, 429-444, 2008

Materiale: cartoncino F4 liscio; pezzo di foglio acetato trasparente; filo elastico; colla; taglierino

Realizzazione:

1. Disegnate sul foglio F4 un segmento AB di 10 cm
2. Fate un forellino agli estremi (bucate i punti A e B)
3. Disegnate un segmento CD lungo 20 cm nella parte superiore del foglio, opposta al segmento AB
4. Con un taglierino (facendo molta attenzione)incidete il segmento CD
5. Nella parte posteriore del foglio, fate passare i due capi di un filo elastico attraverso i fori A e B
6. Infilate i capi del filo elastico nei due fori che trovate nel pezzo di foglio acetato trasparente e annodateli in modo da creare un rettangolo
7. Introducete il pezzo di foglio acetato trasparente nella fessura



a *(fronte)* b *(retro)*

Il modello presenta infiniti parallelogrammi equiestesi ma non isoperimetrici. Per facilitare il lavoro, sono state fornite le misure dei segmenti AB e CD in modo da far sì che AB fosse di lunghezza minore rispetto a CD.

Fase 2: Compilazione del questionario relativo

Ai ragazzi viene consegnato un questionario che contiene le seguenti domande:

1. Muovete il pezzo di foglio acetato trasparente e scrivete quali e quanti figure si formano
2. Come fate a riconoscere ciascuna figura? Quali proprietà ha ciascuna figura?
3. Se volessimo ottenere uno o più rombi, come dovrebbe essere il modello? Perché? (Potete aiutarvi con un disegno)

Nell'analizzare le risposte alle prime due domande notiamo come non venga presa in considerazione l'idea che possano formarsi infiniti parallelogrammi, ma i ragazzi si limitano ad identificarne uno solo. Quest'insufficienza può esser frutto della visione univoca data dai libri di testo e dalle spiegazioni degli insegnanti che prediligono un solo tipo di parallelogramma senza prendere in considerazione tutti quelli che potrebbero formarsi pur mantenendo costanti le caratteristiche dei lati, ovvero opposti uguali e paralleli. Un'altra considerazione può esser fatta prendendo in esame la risposta al terzo quesito in cui si chiede di trovare una modalità per far sì che con lo stesso modello si ottenga uno o più rombi. I ragazzi, pur non riuscendo a verbalizzare la risposta esatta, cioè che AB sarebbe dovuto essere maggiore della distanza tra il segmento stesso e la scanalatura, disegnano la loro idea attraverso una riproduzione del movimento del modello.

Fase 3: Resoconto dell'attività e riproduzione del lavoro svolto su GeogebraPrim

In quest'ultima fase, i componenti del gruppo sono invitati ad esporre alla classe il loro lavoro, descrivendone le fasi di costruzione e di risoluzione dei quesiti. Successivamente riproducono la situazione del modello sulla LIM attraverso l'uso del software. Tramite l'azione contemporanea dei due studenti, il movimento effettuato manualmente viene riprodotto al computer attraverso la funzione "trascinamento". Nella costruzione delle figure, particolare attenzione è riservata alla riproduzione delle caratteristiche invarianti, che non si modificano con il movimento, con la funzione di produzione di segmenti con misura fissa e che in questo caso erano rappresentate dai segmenti AB e CD. Successivamente vengono evidenziate le caratteristiche variabili, che si muovono e che permettono la costruzione delle forme. Esse saranno riprodotte con due linee mobili che avranno i vertici nei due segmenti fissi.

- *Gruppo 2: pollaio*

Fonte: questa attività è ripresa da una precedentemente realizzata dalla sezione Mathesis di Pesaro all'interno di un percorso sulla definizione di quadrato[4] rivolta a due classi terze e due classi quinte di una scuola primaria e una classe prima della scuola secondaria di primo grado.

Obiettivo specifico: scoprire quali condizioni è necessario rispettare per ottenere, durante il movimento, la figura del quadrato con riferimento ai lati e agli angoli.

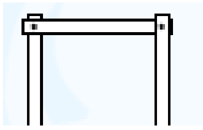
Fase 1: Costruzione del modello dinamico

[4] A.M. Facenda, J Nardi, D. Rivelli, D. Zambon, *Tutte le strade portano al quadrato (alcune definizioni di quadrato),* Da: *"Incontri con la matematica",* XXIV Convegno Nazionale, Castel San Pietro Terme (BO), 5-7 novembre 2010

Materiale: asticciole di legno già precedentemente tagliate e bucate nei vertici; viti; bulloni; cacciavite

Realizzazione:

1. Unite il vertice di ogni asticciola con il vertice di un’asticciola diversa da essa
2. Fate coincidere i buchi e infilate una vite per ogni lato
3. Inserite ora il bullone per bloccare le viti



Fase 2: Compilazione del questionario relativo

Ai ragazzi viene consegnato un questionario che contiene le seguenti domande:

1. Muovete il modello e scrivete quali e quanti figure si formano
2. Come fate a riconoscere ciascuna figura? Quali proprietà ha ciascuna figura?
3. Perché si forma un solo quadrato? (Potete aiutarvi con un disegno)

Nelle risposte al questionario, notiamo come il gruppo, nell’individuazione del quadrato e del rombo faccia riferimento ai vertici, ai lati e agli angoli senza prendere in considerazione le diagonali. Riescono a comprendere la differenza tra rombo e quadrato nella disuguaglianza degli angoli (retti nei quadrati e acuti nel rombo) anche se non aggiungono che il quadrato possiede tutti gli angoli congruenti mentre il rombo li ha a due a due congruenti, questo sarà invece oggetto di riflessione durante la riproduzione del modello su Geogebra.

Fase 3: Resoconto dell’attività e riproduzione del lavoro svolto su GeogebraPrim

Questa fase del lavoro, caratterizzato dal descrivere al resto della classe l’attività svolta, è stata fruttuosa dal punto di vista del superamento delle misconcezioni ad opera dei bambini stessi. In modo quasi naturale, infatti, essi hanno dimostrato ai propri compagni come il quadrato fosse solo un caso particolare di un rombo. *“Il quadrato è quando, per sbaglio, metti il rombo con gli angoli retti e così ottieni il quadrato”* ha esclamato il portavoce del gruppo mentre contemporaneamente muoveva lo strumento. È stato facile poi riprendere la domanda che loro stessi avevano compilato nel questionario di analisi dello stato attuale. Nel riprodurre il tutto su GeogebraPrim, ci si è focalizzati sui caratteri invarianti e varianti che permettono il formarsi del quadrato e del rombo. Dopo aver disegnato il quadrato, lasciando fissa la misura dei segmenti, attraverso la funzione “trascinamento” è stato possibile formare il rombo e poi da esso a tornare alla figura quadrato.

- *Gruppo 3: laghetto*

Fonte: quest'attività riprende quella descritta all'interno del progetto delineato dalla sezione Mathesis di Pesaro nell'ambito della scoperta della figura dei deltoidi.[5]

Obiettivo specifico: a differenza dei percorsi precedentemente descritti, rispetto al progetto iniziale, l'obiettivo è stato modificato, semplificandolo e ponendolo come scoperta delle figure e delle proprietà di esse, rendendolo, quindi, simile alle attività degli altri gruppi. Inoltre, sarà necessario individuare le figure che soddisfino le richieste di area massima, area minima, perimetro massimo, perimetro minimo, facendo riferimento alle prime due attività del progetto.

Fase 1: Costruzione del modello dinamico

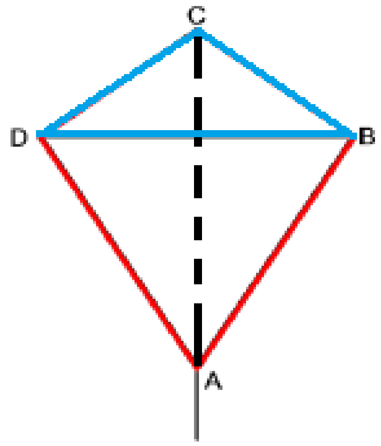
Materiale: cartoncino F4; filo elastico; taglierino

Realizzazione:

1. Disegnate sul cartoncino tre segmenti (BC, CD e BD) in modo che compongano un triangolo isoscele con vertice in C (Nel disegno in azzurro)
2. Disegnate un punto A che sia sulla stessa retta di C e che disti da C circa 15 cm
3. Collegate i punti C e A e incidete questo segmento (CA) con il taglierino (facendo molta attenzione!)(Nel disegno tratteggiato)

[5]A.M. Facenda, P. Fulgenzi,J Nardi, F. Paternoster, D. Rivelli, D. Zambon, *Deltoidi come aquiloni, un "volo"attraverso la geometria,* In: *Didattica della matematica. Dalle ricerche alle pratiche d'aula,* 2018, pp.2-20

4. Praticate un foro nei punti A, D e B
5. Tagliate due pezzi di filo elastico: uno della lunghezza di AD e uno della lunghezza di BD
6. Prendete un pezzo di filo, un capo lo infilate nel punto D e fate un nodo.
7. Prendete un altro pezzo di filo, un capo lo infilate nel punto B e fate un nodo.
8. Ora unite i due capi rimasti con un nodo e infilatela nell'incisione (Nel disegno in rosso)



Nella istruzione del modello, pur specificando di dover disegnare un triangolo isoscele, si nota come i bambini scelgono di disegnare l'angolo in C come angolo acuto. "È possibile che ciò sia dovuto al fatto che l'eventuale angolo retto si presenterebbe in posizione "non canonica" e/o che l'immagine di angolo che domina nella mente degli allievi è quella, appunto, dell'angolo acuto"[6].

Fase 2: Compilazione del questionario relativo

Ai ragazzi viene consegnato un questionario che contiene le seguenti domande:

1. Muovete il nodo del punto A lungo l'incisione e scrivete quali e quante figure si formano
2. Quali proprietà hanno i quadrilateri che man mano si formano?
3. Quali figure non si possono ottenere? Perché?
4. Quando l'area è massima? Quando è minima?
5. Quando il perimetro è massimo? Quando è minimo?

Nella compilazione del questionario vediamo come, pur muovendo il modello, non riescono ad individuare gli altri quadrilateri che, al contrario, definiscono come figure

[6] Ibidem

impossibili da ottenere. Questo sarà ripreso durante la verbalizzazione dell'attività e la riproduzione di essa su Geogebraprim.

Fase 3: Resoconto dell'attività e riproduzione del lavoro svolto su GeogebraPrim

Tutta l'attività viene riprodotta alla LIM, disegnando come elementi fissi i segmenti che compongono il triangolo isoscele, da loro disegnato sul cartoncino, e come elementi mobili i due segmenti partenti dai vertici B e D. Abbiamo usato la funzione "trascinamento" su GeogebraPrim, mentre venivano mossi i fili elastici del modello concreto, formando tutte le figure che avevano già individuato precedentemente.

- *Gruppo 4: orto*

Obiettivo specifico: attraverso il movimento del modello, determinare tutte le figure possibili e le proprietà che le caratterizzano, individuando quale tra esse è quella che occupa l'area massima e l'area minima

Fase 1: Costruzione del modello dinamico

Materiale: cartoncino F4; spago

Realizzazione:

1. Disegnate un segmento AB della lunghezza di 15 cm
2. Forate i punti A e B
3. Tagliate un pezzo di spago (che sia lungo più di 30 cm) e inserite un capo nel punto A e un capo nel punto B
4. Per ogni punto fate un nodo nella parte posteriore del foglio

Fase 2: Compilazione del questionario relativo

Ai ragazzi viene consegnato un questionario che contiene le seguenti domande:

1. Muovete lo spago e scrivete quali e quante figure si formano
2. Come fate a riconoscere ciascuna figura? Quali proprietà ha ciascuna?
3. Quando l'area è massima? Quando è minima?

La risposta esatta alla domanda 3 è di certo frutto delle attività precedenti.

Fase 3: Resoconto dell'attività e riproduzione del lavoro svolto su GeogebraPrim

Nell'esporre l'attività ai propri compagni ci si sofferma sull'individuazione di tutti i tipi di trapezi possibili, e i ragazzi sono invitati a muovere lo spago, posizionandolo anche sotto la linea disegnata che per loro, rappresenta sempre e univocamente la base di appoggio. La classe rimarrà allora sorpresa nell'individuare tutte quelle figure *"storte",* *"al contrario", "a testa in giù".* Queste espressioni, che più volte ricorrono durante quest'attività, sottolineano un tipo di misconcezione legata al linguaggio utilizzato, a volte anche inconsapevolmente, dalla maestra. Lo strumento verrà poi riprodotto su GeogebraPrim.

4. Conclusioni

La geometria dinamica è un percorso di meraviglia che rende protagonista ciascun bambino delle proprie scoperte, consapevole che, a volte, basta spingersi oltre ciò che si è sempre visto, anche solo girando il foglio che si ha davanti, per trovare in esso una novità. Credo che sia proprio dalla meraviglia che bisogna partire per riscoprire la bellezza della geometria e della matematica in sé, a qualunque età. Non servirà, allora, modificare il mondo della matematica ma sarà necessario avere il coraggio di guardare con occhi nuovi ed innamorarsi di ciò che abbiamo davanti e, come in ogni cosa, non si potrà insegnarlo ai bambini se prima non saranno i docenti ad esserne coscienti.

Bibliografia

B. D'Amore, *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora Editrice, Bologna 1999, p.124

A. Erspamer, L. Perini, *Spazi in campagna*, In: *Nuovo Gulliver News*, n. 178, pp.126-132

G. Barbero, F. Castelli, *Scoprire insieme 5*, Lisciani, Teramo 2017, p.354

A.M. Facenda, P. Fulgenzi,J Nardi, F. Paternoster, D. Rivelli, D. Zambon, *Uso integrato di Cabri e modelli dinamici: resoconto di una esperienza sui parallelogrammi. Terza parte.*, in *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. A, 5, 429-444, 2008

A.M. Facenda, J Nardi, D. Rivelli, D. Zambon, *Tutte le strade portano al quadrato (alcune definizioni di quadrato),* Da: *"Incontri con la matematica",* XXIV Convegno Nazionale, Castel San Pietro Terme (BO), 5-7 novembre 2010

A.M. Facenda, P. Fulgenzi,J Nardi, F. Paternoster, D. Rivelli, D. Zambon, *Deltoidi come aquiloni ,un "volo" attraverso la geometria,* In: *Didattica della matematica. Dalle ricerche alle pratiche d'aula,* 2018, pp.2-20

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 3, No 1-2 (2020), 41-50

La storia della Matematica nella didattica: La prova del nove

Bruno Iannamorelli[1]

[1]Università degli Studi dell'Aquila,
Dipartimento di Scienze Umane,
Viale Nizza, 2, 67100, L'Aquila, Italy
jannab@tiscali.it

Sunto
La storia della Matematica offre la possibilità di svelare il lento e faticoso percorso che si nasconde dietro una regola, una formula, un algoritmo. È questo il caso della "prova del nove": una regola dal sapore magico appresa nella Scuola Primaria e mai più incontrata nella vita. Grandi maestri come Fibonacci o Luca Pacioli ci aiutano a comprendere l'origine di tale prova che un tempo era molto utile e, andando ancora indietro nel tempo, si scopre che era conosciuta anche dai grandi algebristi arabi nel medioevo.

Parole chiave: moltiplicazione, prova, regola, aritmetica modulare.

1. Premessa

Una delle regole che vengono imposte nella scuola primaria con maggiore disinvoltura è la prova del nove per la moltiplicazione. In qualche caso si esagera imponendo la stessa regola per la divisione e, per fortuna, a molti bambini vengono nascoste entrambe. Gli insegnanti che la impongono si giustificano sostenendo che la "prova del nove" è diventato un modo di dire nel nostro linguaggio e, pertanto, è bene che i futuri cittadini la conoscano.
Purtroppo, alcuni bambini che l'hanno evitata alle elementari se la ritrovano imposta in prima media. E in questo caso è proprio una tortura continuare a imporla senza alcuna giustificazione. Sarebbe il caso, invece, di portare i ragazzini a scoprire questa regola introducendoli nel mondo dell'aritmetica modulare. Vediamo come.

2. La regola

Volendo calcolare il prodotto della moltiplicazione 13 x 11 basta osservare che si può considerare la moltiplicazione equivalente (10 + 3) x 11: è come se volessi trovare l'area di due rettangoli di aree 10 x 11 e 3 x 11 che formano un rettangolo di area 13 x 11.

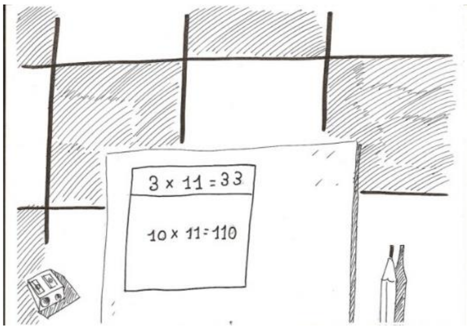


Fig.1

L'area del rettangolo grande è 143 perché è la somma 110 + 33.
Richiedere la prova del nove di questa moltiplicazione è una assurdità in quanto è chiaro a tutti che il prodotto trovato è esatto, ma vediamo cosa vuol dire fare la fatidica prova.
L'insegnante, di solito, fa disegnare sul quaderno una croce, come quella della fig. 2 e spiega: "A sinistra, in alto della croce, scrivete la somma delle cifre del primo fattore 1 + 3 = 4; a sinistra, in basso, scrivete la somma delle cifre del secondo fattore 1 + 1 = 2; a destra, in alto, scrivete
4 x 2 = 8; a destra, in basso scrivete la somma delle cifre del prodotto 1 + 4 + 3 = 8.
La prova è corretta perché a destra ci sono due numeri uguali!"

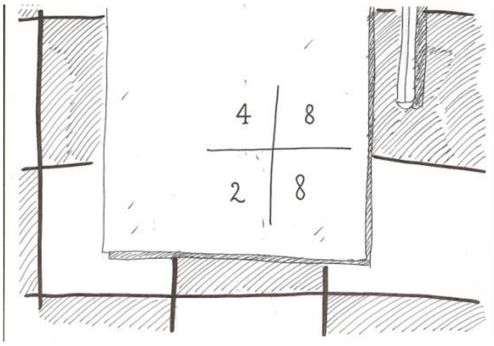


Fig.2

Proviamo un'altra moltiplicazione. Il prodotto di 126 x 83 è 10458. Verifichiamo se è corretto con la prova del nove.
A sinistra, in alto, si dovrebbe scrivere 1+2+6 = 9, ma ecco il primo trucco della regola. Non si scrive 9, ma zero. Boh! A sinistra, in basso, si dovrebbe scrivere 8+3 = 11 e ci risiamo: non si scrive 11 ma 1+1 = 2. A destra, in alto si riporta il prodotto 0 x 2 = 0.
A destra, in basso, si dovrebbe scrivere la somma delle cifre del risultato 1+0+4+5+8 = 18,

ma invece la regola dice che si deve scrivere 1+8 = 9, cioè zero. A destra della crocetta compaiono due zeri e quindi la prova è corretta.

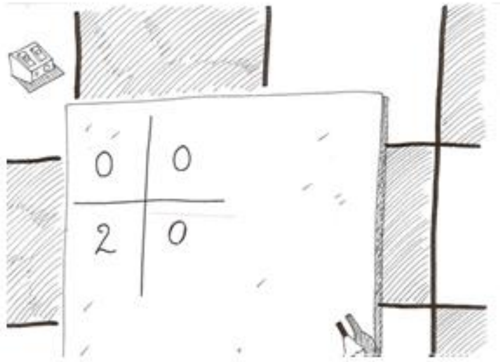


Fig 3

Se qualcuno trova che il prodotto 126 x 83 è 10548 o 1458 la prova del nove è ancora corretta, come si può verificare, ma una moltiplicazione non può avere due o più risultati diversi.
Ma allora la prova del nove che prova è? Come faccio a scoprire qual è il risultato giusto di una moltiplicazione senza ricorrere a una calcolatrice?

Una possibilità è quella di legare ancora la moltiplicazione al calcolo dell'area di un rettangolo. Per esempio si potrebbero decomporre i due fattori come in fig.4 e moltiplicare a mente 100 x 80, 20 x 80, 6 x 80, 100 x 3, 20 x 3 e 6 x 3. Infine si somma 8.000+1.600+480 = 10.080; 10080+300+60+18 = 10458.

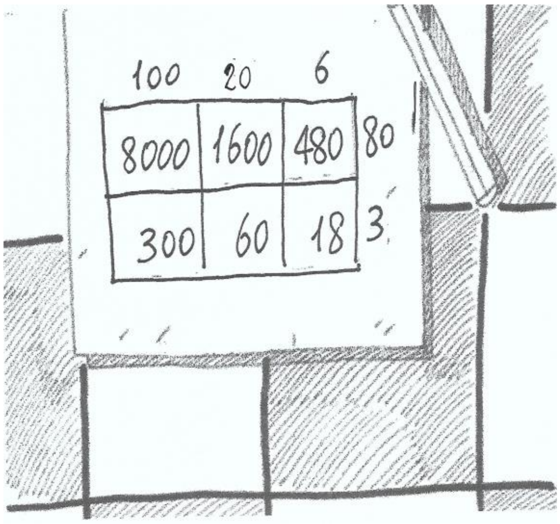


Fig.4

3. Chi ha inventato la prova del nove?

Le origini della prova del nove si perdono nella notte dei tempi. Se ne trovano tracce in tanti trattati di aritmetica. Luca Pacioli (1447, 1517) la presenta nella famosa *Summa De Arithmetica* (1496).

Prima di fra' Luca la prova del nove è stata riportata da Leonardo Pisano, meglio conosciuto come Fibonacci, nel suo *Liber abaci* pubblicato nel 1202.
L'esempio di moltiplicazione riportato da Fibonacci è 37 x 37:

- Moltiplica le unità 7 x 7 = 49; scrive 9 e trattiene 4 decine sulle dita di una mano.
- Moltiplica 3 x 7 e 7 x 3 e somma i due prodotti con le 4 decine del riporto (21+21+4 = 46); scrive 6 davanti al 9 e trattiene ancora 4 centinaia sulle dita di una mano.
- Infine, moltiplica 3 x 3 = 9 e aggiunge le 4 centinaia di riporto ottenendo 13. Il risultato della moltiplicazione è 1369 scritto come in fig. 5.

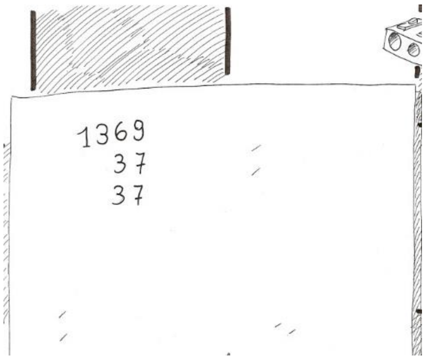


Fig. 5

A questo punto, Fibonacci scrive: "*…verifichiamo se la moltiplicazione è esatta".* E così continua: "*…sommiamo le cifre del numero 37 e otteniamo 10 da cui togliamo 9 e ci resta 1".* Lo stesso viene ripetuto per l'altro fattore 37. Poi moltiplica 1 x 1 = 1 e infine somma le cifre del risultato 1 + 3 + 6 + 9 = 19 da cui toglie due volte 9 e rimane 1. Conclude dicendo che la moltiplicazione è corretta e aggiunge: invece di sommare le cifre del numero 37 e poi togliere 9 per ottenere 1, si può dividere 37 per 9 e il resto è 1.
La stessa conclusione era stata trovata duecento anni prima da un matematico arabo di nome Ibn al Haytam al Hazin, da noi conosciuto con il nome Alhazen. A questo punto è doverosa una piccola riflessione sul nome di questo matematico: Ibn significa figlio e Hazin è il nome della regione o paese dove è nato. Il nome: figlio di Haytam di Hazin è stato semplificato in occidente con Alhazen. La stessa storpiatura è stata fatta per altri matematici arabi tra cui anche il famoso Alkuwaritzmi. Proviamo a riflettere su cosa penseremmo noi occidentali se la stessa operazione fosse fatta dagli arabi per i nostri scienziati: Galileo Galilei da Pisa diventerebbe semplicemente Pisa o anche peggio!

Alhazen (965-1039 dC)

(Ibn al-Haytham al-Hazin), fisico e matematico arabo, uno dei più grandi fisici del medioevo. Autore di numerose opere di matematica, astronomia, medicina, filosofia e scienze fisiche, in gran parte perdute. Pare gli si debba attribuire la scoperta della “prova del nove” per le operazioni aritmetiche.

4. Quale mistero si nasconde dietro la prova del nove?

Nessun mistero, nessuna magia! Basta giocare con gli orologi analogici e si chiarisce tutto.
I numeri 0, 1, 2, 3, … siamo abituati a vederli distribuiti su una linea retta, la linea dei numeri naturali. I numeri stampati sul quadrante di un orologio analogico sono solo dodici: da 1 a 12. Pensiamo, invece, un orologio con i numeri che vanno da 0 a 11, come in fig. 6.

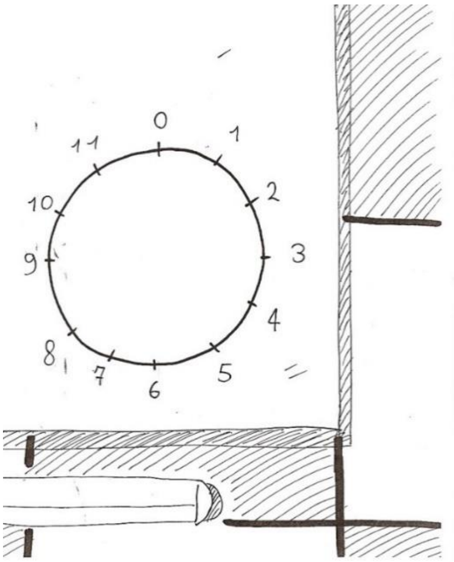


Fig. 6

Si tratta di un orologio notturno: la mezzanotte è l’ora 0 e il mezzogiorno non c’è. In tutti gli orologi, invece, il mezzogiorno è segnato dal 12 e non c’è la mezzanotte che dovrebbe essere 24, come non ci sono il 13, 14, 15, …, 23. Tutti questi numeri dal 13 al 23 sono nascosti sotto l’1, il 2, il 3, … l’11. E potremmo continuare a nascondere il 25 sotto l’1, il 26 sotto il 2, il 27 sotto il 3 ecc.

La retta dei numeri possiamo avvolgerla su una circonferenza, come il metro da sarta arrotolato su un cilindro.
Il numero 120 sull'orologio disegnato in fig. 6 si trova su 0 perché 120 è 10 volte 12. Sullo 0 si trovano tutti i multipli di 12. E allora 121 è nascosto sotto 1, 122 sotto il 2 e così via.
E 3725 dove è nascosto? Per scoprirlo si dovrebbe trovare il multiplo di 12 più vicino a 3725 e si può ragionare così: 12 per 100 è 1200, per 200 è 2400, per 300 è 3600, più 120 fa 3720 che si trova sotto lo 0 dell'orologio. Allora 3721 sta sotto l'1, … 3725 si trova sotto il 5.
E se il numero è più grande? Si divide il numero per 12. Se la divisione è esatta allora quel numero si nasconde sotto lo 0 dell'orologio. Se il resto è 1 allora quel numero si nasconde sotto l'1, se il resto è 2 il numero si nasconde sotto il 2, ecc.. Ecco perché nel *Liber abaci* e in altri trattati di aritmetica si parla di resti di divisioni nella prova del nove.
Ci siamo quasi. Basta sostituire il quadrante dell'orologio con 12 tacche con quello di fig.7 che di tacche ne ha 9, numerate da 0 a 8.

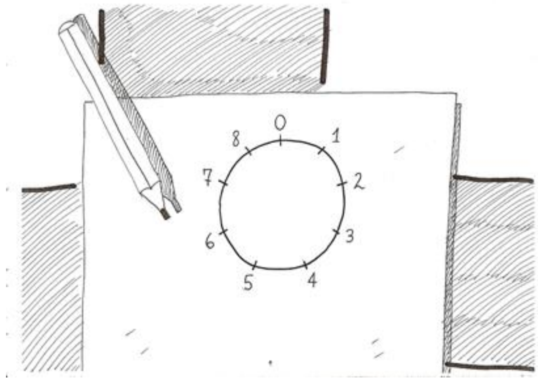


Fig. 7

Su questo orologio il 9 si trova sotto lo 0, il 10 sotto l'1, l'11 sotto il 2 e così via: il quadrante riporta i resti della divisione di un numero per nove.
A questo punto prendiamo due numeri e moltiplichiamoli tra loro. Per esempio, moltiplichiamo 13 e 11: sono i numeri considerati all'inizio per illustrare la regola della prova del nove. Sistemiamo i due numeri sull'orologio a nove tacche: l'11 si trova sotto il 2, e il 13 si trova sotto il 4. Il prodotto 2 per 4 è 8, mentre il prodotto 13 per 11 è 143.
E 143 dove si trova nel nostro orologio?
Se si trova nascosto sotto l'8 allora il mistero della prova del nove è stato svelato! Infatti, 144 è uguale a 90 + 54, quindi è multiplo di 9 e si trova sotto lo 0, mentre 143 si trova sotto l'8. Oppure, si trova che la divisione 143 : 9 ha resto 8.
La scoperta è fatta. Manca ancora qualche dettaglio da sistemare ma il grosso è fatto.

5. Perché proprio la prova del nove?

Fare la prova del nove di una moltiplicazione significa moltiplicare due numeri sull'orologio a nove tacche, ma si potrebbe usare anche un altro orologio? Cerchiamo di scoprirlo.
Proviamo con un orologio a quattro tacche, come quello disegnato in fig. 8.

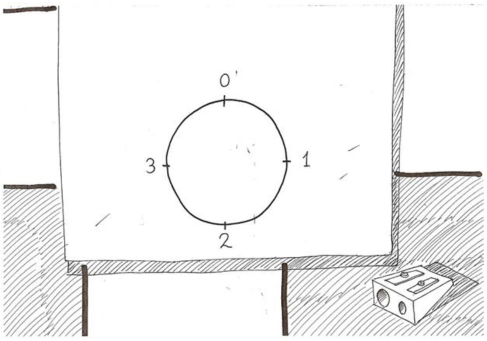


Fig. 8

Facciamo la prova del quattro per la stessa moltiplicazione 13 x 11.
Il 12 sta sotto lo zero, quindi il 13 sta sotto l'1 e l'11 sta sotto il 3. Moltiplico 1 x 3 e ottengo 3.
Scommettiamo che il risultato della moltiplicazione, che era 143, si trova sotto il 3 in questo strano orologio? Infatti, 140 è multiplo di 4 e quindi sta sotto lo 0, ne segue che 143 sta sotto il 3.
Allora si può fare anche la prova del tre, del cinque, del sette, del dodici, ma perché a scuola si insegna solo la prova del nove?
Per scoprirlo, proviamo a riflettere: il numero 10 posso scriverlo 10 = 9 + 1, e così 100 = 99 + 1 = 9x11 + 1, come pure 1000 = 999 + 1 = 9x111 + 1 e così via per le altre potenze di dieci. La somma delle cifre dei numeri 10, 100, 1000, 10000, è sempre 1 che è proprio il resto delle divisioni di tali numeri per 9.
Lo stesso vale per 20, 200, 2000, perché 20 = 2x9 + 2 e 200 = 2x(9x11) + 2. Il resto delle divisioni di questi numeri per 9 è sempre 2, cioè la somma delle loro cifre.
Lo stesso dicasi per 30, 300, 3000, e così via. Ma perché il resto della divisione per 9 di un numero qualunque è dato dalla somma delle sue cifre?
Se consideriamo un numero qualunque, per esempio 3725, possiamo scrivere 3725 = 3000 + 700 + 20 + 5: i resti delle divisioni per 9 dei quattro addendi sono 3, 7, 2 e 5. La loro somma è proprio la somma delle cifre di 3725. Ma 3 + 7 + 2 + 5 = 17 e il resto della divisione 17 : 9 è 8, cioè è dato dalla somma 1 + 7 perché 17 = 10 + 7= (9+1)+7 = 9+8.
Ecco perché nella prova del nove si sommano le cifre dei numeri e se viene un numero più grande di nove, si continua a sommare le cifre. La prova del nove è stata scelta per questo motivo: non è necessario dividere un numero per 9 e trovare il resto, basta sommare le sue cifre ripetutamente finché non rimane una sola cifra e se questa è 9 si sostituisce con 0.

6. Perché la prova del nove non è sempre affidabile?

A scuola, prima o poi si scopre che la prova del nove non è sempre affidabile. D'altra parte, si tratta di una scoperta molto abbordabile. Infatti sommando le cifre di due numeri come 143 o 134 si ottiene lo stesso risultato, ma la moltiplicazione in uno dei due casi è errata. Anche se è difficile commettere un errore del genere nell'esecuzione di una moltiplicazione. È più probabile commettere un errore di ordine di grandezza: per esempio se trovo che 1,3x1,1 = 14,3 la moltiplicazione è errata, ma la prova del nove è corretta

Vediamo se esistono altri possibili errori non segnalati dalla prova del nove.

La moltiplicazione riportata in fig.9 è corretta, mentre in quella di fig. 10 sono stati commessi errori nei riporti.

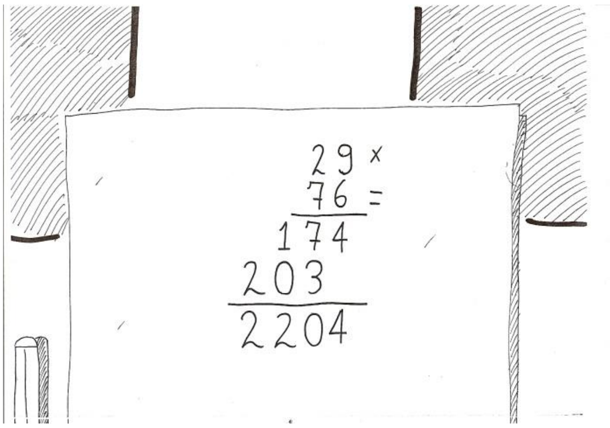


Fig 9

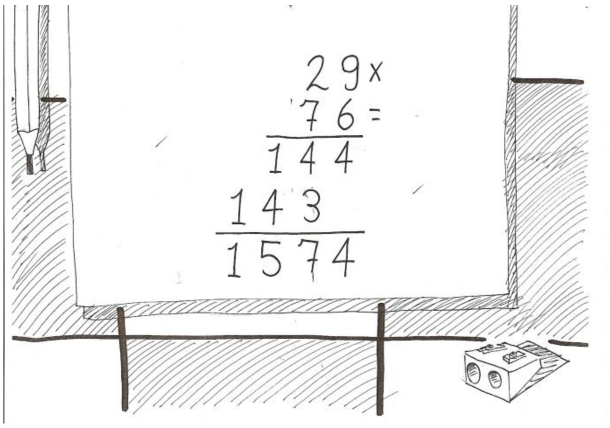


Fig 10

Eppure la prova del nove è corretta in entrambi i casi. Questo errore è più probabile.

Capita spesso che uno studente si distrae e dimentica i riporti.
Esempi di distrazioni di questo genere sono stati compiuti anche da uno studente geniale: Leonardo da Vinci. Nel Codice B, il più antico scritto da Leonardo, al foglio 77 recto si trova la moltiplicazione riportata in fig. 11.a. È errata! Il prodotto di 108x27 è più grande di 2000, ma più piccolo di 3000. L'errore consiste nel non aggiungere allo 0 del prodotto 7x0 il riporto 5 di 7x8 e nell'aggiungerlo al successivo 7x1 = 7. Lo stesso errore si ripete nel calcolo del secondo prodotto parziale.
Analoga svista la ritroviamo nel Codice L, al foglio 80 recto, scritto da Leonardo quando è vicino ai cinquant'anni. In questa moltiplicazione zeppa di errori, riportata in fig. 11.b, è omesso il primo prodotto parziale. Il prodotto del moltiplicando per 7 ripete ad ogni 0 del moltiplicando il solito errore del riporto. Nel terzo prodotto parziale non è stata considerata la cifra 2 delle decine.

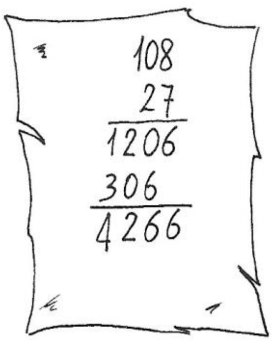


Fig. 11.a

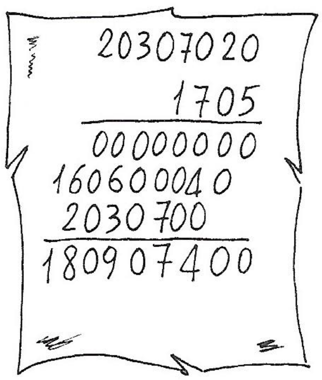


Fig. 11.b

In entrambi i casi la prova del nove è corretta: verificare per credere.
Chissà se Leonardo ha eseguito la prova e si è fidato?

Della non affidabilità della prova del nove si era accorto Luca Pacioli, il quale la ripropone insieme alla prova del sette. Nella *Summa de Arithmetica*, a pag. 27 e 28, Pacioli riprende la stessa moltiplicazione proposta da Fibonacci: 37 x 37 = 1369. Esegue la prova del nove e del sette trovando i resti delle divisioni 37 : 9 e 37 : 7 , moltiplica questi resti e verifica che coincidono con i resti delle divisioni 1369 : 9 e 1369 : 7. In questo caso Pacioli non utilizza la crocetta che disegnerà per altri esempi più avanti, ma riporta a margine del testo due figure come quelle di fig. 12.a e fig. 12. b.

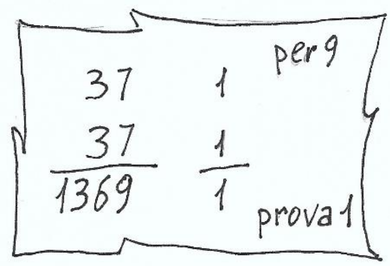


Fig.12.a

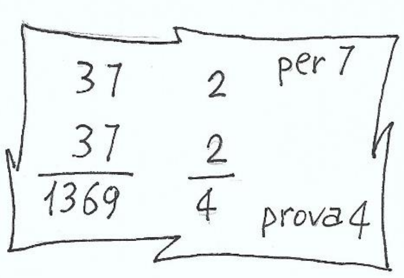


Fig.12.b

Per verificare l'esattezza di una moltiplicazione se si utilizza un'altra prova oltre a quella del nove l'attendibilità del risultato aumenta, a patto che si eseguano per bene le due prove.
Certamente noi siamo molto più fortunati perché possiamo ricorrere alla calcolatrice del telefonino, però ricordiamoci degli sforzi fatti dai nostri antenati per facilitarci il calcolo aritmetico.

Bibliografia

D'Amore B. – Sbaragli S., (2018), La Matematica e la sua Storia vol.2. Bari: Ed. Dedalo

Pacioli L., (1993), Suma De Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalità, Volume riprodotto in fac-simile dall'originale di proprietà del prof, Carlo Antinori, Roma, Poligrafico dello Stato.

Buchwald J.Z. – Lutzen J. – Toomer G. J., (2003), Fibonacci's Liber Abaci, New York, Springer.

Al-Khalili J., (2013), La casa della saggezza, Torino, Boringhieri.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 3, No 1-2 (2020), 51-64

La costruzione della tavola pitagorica con il prodotto cartesiano[1]

Franco Eugeni

Già professore ordinario di Filosofia della Scienza

Presidente dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (www.afsu.it)

Sunto

Costruire la tavola pitagorica e memorizzarla è la prima conquista del fanciullo. La presente nota è una prima idea di progetto di classe e di laboratorio: ciascuno costruisca la sua tavola pitagorica. Si ricorre, e lo diciamo ai docenti, alla operazione di moltiplicazione, definita da Bertrand Russell come cardinalità di un prodotto cartesiano, che si spiega con linguaggio adatto all'età minima scolare.

Parole chiave: contare, cardinalità, corrispondenza, prodotto cartesiano, Francesco Speranza.

1.- La spontaneità del contare

Nel contatto con il mondo il bambino oggi, come l'uomo primitivo nel suo passato più antico si trova davanti la necessità di comprendere il concetto di quantità. Siamo convinti che tale comprensione è automatica anche se la si impara, con una certa gradualità traendone esperienza dalla vita di tutti i giorni. Guardare le cose, capire che sono tante, senza ulteriori specificazioni è indubbiamente la prima fase, fase simboleggiata dai topolini in una lunga bici della fig.1.

Fig.1

[1] Dedicato al ricordo di Giuseppe Manuppella e Vincenzo Di Marcello, recentemente scomparsi

L'associare una quantità indefinita ad una ulteriore specifica è la naturale fase successiva, e consiste nella associazione del numero alla quantità. Dall'esperienza giornaliera si inizia ad osservare, ed ascoltare l'adulto che dice una tazza di latte, due biscotti, tre caramelle e quattro macchinine ed ancora un cucchiaio, due piatti, tre matite da colori, ***fig. 2*** quattro pupazzetti.

Fig 2

Nasce pure un confronto allora che agli oggetti si fanno associare un dito, due dita, tre dita, quattro dita! Le dita sono uno strumento di validazione della corrispondenza. All'intera mano si fa corrispondere il cinque dei bandisti della ***fig.2***.

Il successivo passaggio richiede che si passi *dalla forma orale a quella scritta*. Questo passaggio è ovviamente più complesso dovendo interagire una parte tecnica con una operazione mentale. Las parte tecnica è impadronirsi dell'uso carte matita e imparare ad esprimere dei segni o disegni scelti a priori. L'idea di rappresentare non è banale. Occorre quindi convertire il numero, che si conosce oralmente, ad un segno grafico preciso, che è un simbolo che rappresenta il numero.

Le due operazioni compiute dall'adulto dall'esterno sono le seguenti:
1.- *dire due biscotti – due piatti – due dita, quindi dire* DUE;
2 – *insegnare un simbolo grafico che significhi* DUE.

Sono queste operazioni quelle che il filosofo-matematico Bertrand RUSSEL (1872-1970) chiama la *definizione nominale della cardinalità del numero*[2].
Questo processo coincide in parte con la storia dei segni grafici dei numeri (vedi fig.3)
In questa fase non si ha il possesso dello zero, che viene introdotto quasi furtivamente senza grandi spiegazioni.
Lo "0" è un numero molto ambiguo e la sua scoperta non è così antica: i Greci e i Romani non avevano questa cifra.
Il numero naturale quindi nasce, con la necessità di assegnare un simbolo ad un insieme che ne caratterizzi la quantità. Lo "0" nasce con l'insieme viuoto!

---

[2] Russell, tra le moltissime opere, è autore con Alfred Whitehand dei "***Principia Mathematica"*** "un'opera sui fondamenti logici della matematica.

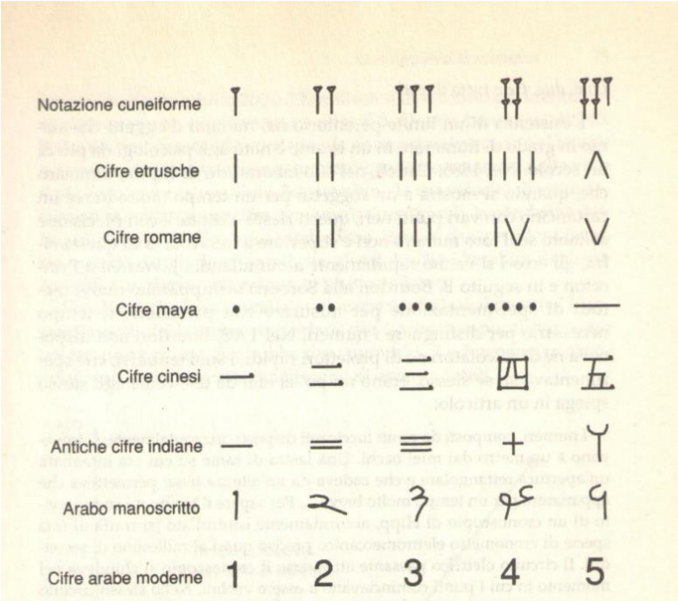


Fig. 3

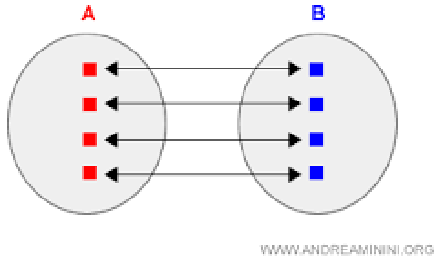
Le dita sono di grande importanza per poter rapidamente imparare l'opera-zione di addizione che consiste nello imparare a contare oltre le dita della mano, diciamo fino a cento, ed usare le dita per fare le addizioni.

- … I bambini esplorano la realtà, imparando a organizzare le proprie esperienze attraverso azioni consapevoli quali il raggruppare, il comparare, il contare, l'ordinare, l'orientarsi e il rappresentare con disegni e con parole …
- … Partendo da situazioni di vita quotidiana, dal gioco, dalle domande e dai problemi che nascono dall'esperienza concreta il bambino comincia a costruire competenze trasversali quali: osservare, manipolare, interpretare i simboli per rappresentare significati …

Naturalmente tante sono le linee che si presentano nella didattica iniziale e varie sono le problematiche che si presentano, come indicato in S. D'Andrea [1],[2].

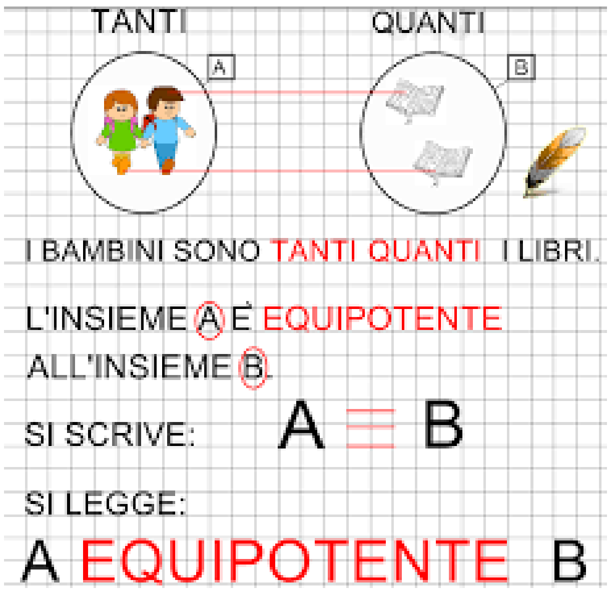
Il passo successivo del contare sarà l'uso del computer e a riguardo segnaliamo l'interessante *Lettera aperta a coloro che amano la Scuola*, di Renata Santarossa e le molteplici risposte e commenti di altri studiosi alla sua lettera riportati nello stesso fascicolo in cui appare la nota (cfr. [8]).

Alla base della cardinalità vi è il principio della equi-potenza degli insiemi finiti.



Per insiemi finiti intendiamo insiemi di oggetti presi dalla natura (in natura non esistono insiemi infiniti, i quali sono solo oggetti del nostro pensiero).

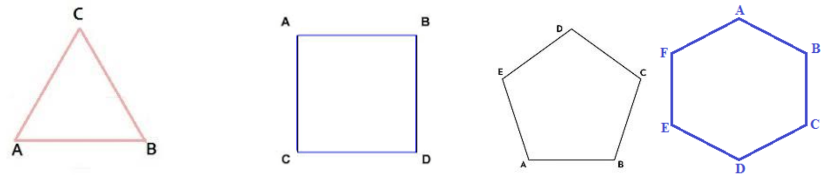
Due insiemi A e B si dicono *equipotenti* se esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti dell'uno con quelli dell'altro. Questa idea traduce in simboli il concetto di "*tanto-quanto*".



Secondo alcune idee molto avanzate, di quella corrente, che da[3] Bruno de Finetti (1906–1985) e Bruno Rizzi (1935-1995) ed altri, ha preso il nome di *fusionismo* [3], corrente che vuole aprire con ogni concetto nuovo, anche altri concetti di ambienti paralleli, ma pieni di altri saperi, è possibile introdurre a fianco dei numeri anche dei concetti

[3] Per vedere un profilo di tali autori e delle loro opere cfr. www.afsu.it/discipline/matematica/i personaggi della M./m.tra1900/1940.

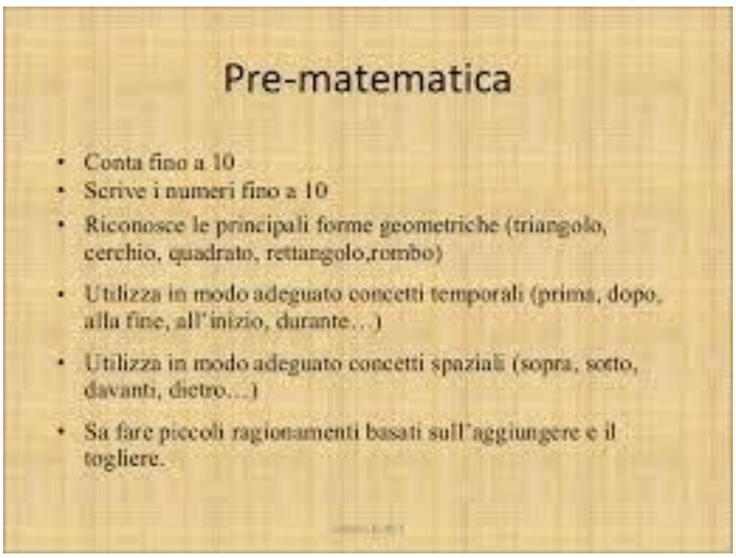
geometrici. Così si possono presentare le seguenti figure ancora associate ai concetti di astrazione dei primi numeri.



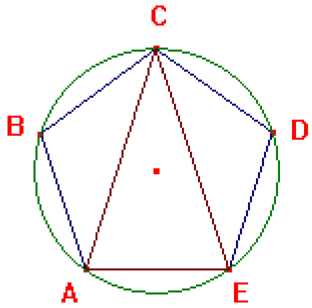
Triangolo	**quadrato**	**pentagono**	**esagono**
3 vertici	**4 vertici**	**5vertici**	**6 vertici**

Anche riguardo la geometria e l'atteggiamento di disattenzione che oggi continua ad imperversare nelle scuole vogliamo segnalare un articolo di oltre 25 anni fa dello scomparso prof. Francesco Speranza (1932- 1998), tuttora molto attuale, nel quale si ricorda il progetto culturale del grande Matematico e Filosofo della Scienza, Federigo Enriques (1871-1946), del quale attraverso il lavoro di Speranza (cfr. [9]) ci giunge ancora la voce.

E' molto importante esser in sintonia con progetti più ampi del semplice contare. Una idea importante è il comprendere una logica di **pre-matematica**, intendendo con tale locuzione quanto riassunto nel seguente progetto.

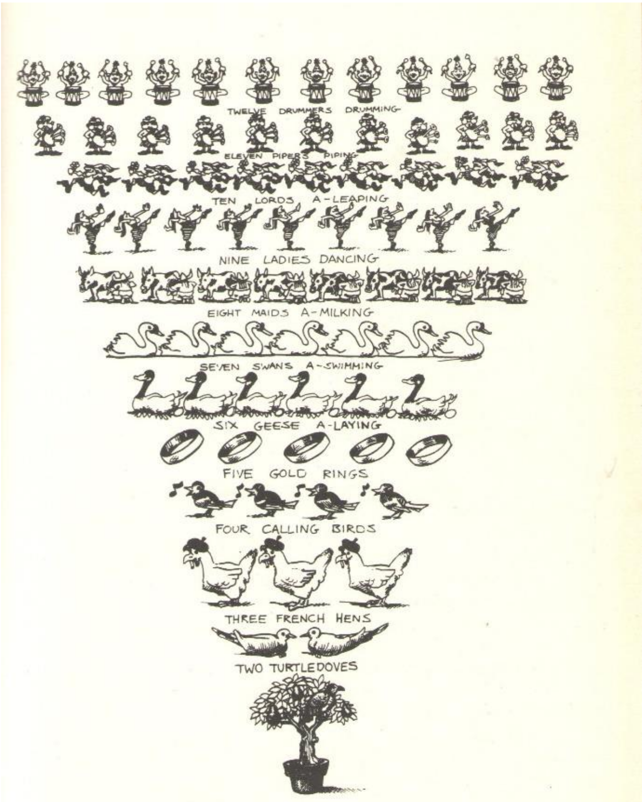


Con una ulteriore digressione ci si può familiarizzare con il pentagono regolare e con le sue proprietà mediante un simpatico gioco di piegamento di carta, riportato nel paragrafo in appendice. Infatti, nel pentagono regolare il rapporto tra una diagonale



(segmento che congiunge due vertici separati da un solo intermedio, ad esempio AC e CE dono due differenti diagonali) e un lato (ad esempio AC/AE), rapporto che vale circa 1,61… cioè è quel numero detto *numero d'oro* o se si vuole *sezione aurea*. Tale concetto che nasce dagli antichi geometri dell'Antica Grecia, fu, in particolare, usato nelle sue opere dallo scultore greco Fidia (490-430 a.C.), è tuttora ancora molto studiato per la sua presenza in natura e per i suoi legami con i famosi *numeri di Fibonacci*. In omaggio a Fidia la sezione aurea è di solito indicata con la lettera φ $(iniziale\ di\ Fidia)$. Per renderci conto di quanto ampia sia la problematica consigliamo il lettore di riferirsi ai lavori [4], [5], [6].

I modi e le tecniche per contare oltre il cinque, sono molte, non ultime poesie, filastrocche e immagini. La poesia figurata in lingua inglese, nell'immagine seguente, è molto nota ai bambini di quelle terre.



È sempre possibile complicare le cose.

PER IMPARARE I NUMERI

Lo 0 è come un uovo
l'1 è un bastone nuovo
il 2 è un cigno bianco
il 3 è un gabbiano stanco
il 4 sta seduto
il 5 è un gancio panciuto
il 6 è una pompa di benzina
il 7 è uno strappo sulla camicina
l'8 è una mascherina di carnevale
il 9 è un palloncino che volando sale

I numeri

0 cero	10 diez	20 veinte
1 uno	11 once	30 treinta
2 dos	12 doce	40 cuarenta
3 tres	13 trece	50 cincuenta
4 cuatro	14 catorce	60 sesenta
5 cinco	15 quince	70 setenta
6 seis	16 dieciseis	80 ochenta
7 siete	17 diecisiete	90 noventa
8 ocho	18 dieciocho	100 cien
9 nueve	19 diecinueve	200 doscientos

DA UNO A DODICI

1 è il sole che splende di giorno.
2 sono gli occhi che guardano intorno.
3 sono i Magi che vanno, che vanno.
4 stagioni formano un anno.
In una mano ci son 5 dita.
6 son le zampe che ha una formica.
L'arcobaleno ha 7 colori;
ha 7 stelle l'Orsa Maggiore.
La settimana ha 7 giornate.
Con 8 zampe, se voi le contate,
si muove il ragno nel suo ragnatelo.
9 pianeti girano in cielo.
Due mani insieme fan 10 dita.
11 e 11 fan la partita.
12 mesi formano un anno;
conta e riconta fino a un altr'anno.

English numbers: 1-10

1	ONE
2	TWO
3	THREE
4	FOUR
5	FIVE
6	SIX
7	SEVEN
8	EIGHT
9	NINE
10	TEN

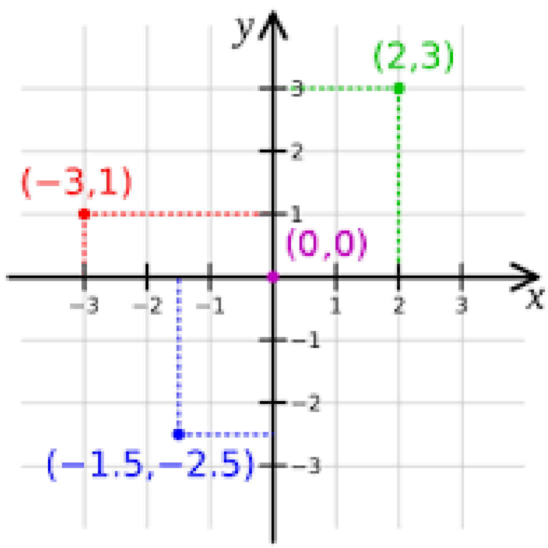
Ricordiamo che imparare a contare i numeri in più lingue, davanti ai bambini che hanno una ricettività incredibile, significa compiere un primo passo verso il multilinguismo, indispensabile per affacciarsi ad un mondo globalizzato.

Vogliamo concludere il paragrafo ricordando, in poche parole, quado Francesco Speranza (cfr. [9]), riassume circa il progetto culturale di Enriques.

Tale progetto "consiste nella costruzione d'un sistema nel quale scienza (in particolare matematica), filosofia, storia, didattica specifica e scienze dell'educazione (come si usa dire oggi) interagiscono organicamente nella formazione del sapere in ogni individuo. Ecco alcune caratteristiche importanti: il valore formativo e non solo utilitaristico della scienza; l'esigenza che essa sia rispettosa delle convinzioni di ognuno; l'attenzione alla formazione di tutti: La scienza non mira soltanto agli acquisti positivi che si trasformano in immediate utilità sociali; essa vuole anche porgere una intuizione che tutti gli uomini possano assorbire in una propria individuale visione della vita e del mondo, e che fra tutti crei come legame di solidarietà lo stesso criterio del vero(Enriques, 1910)".

2.- La moltiplicazione come prodotto cartesiano

Iniziamo con considerazioni rivolte ai soli docenti. Tutti i docenti ben conoscono che la geometria, allora che si passa ad una lettura più avanzata, si trasforma nella cosiddetta geometria analitica. Del resto, è noto che in una visione classica e molto vicina alla realtà, la matematica in una grossolana distinzione ha in primo luogo a suo fondamento il *concetto di numero* e in secondo luogo il *concetto di estensione*. Matematica e Geometria sembrano essere così due mondi separati. La geometria analitica costituisce u n ponte tra la geometria e la matematica del numero, e ha la capacità di trasformare problemi geometrici in problemi numerici e viceversa.



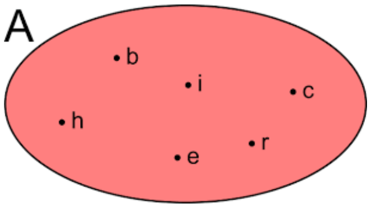
Base di tale geometria è l'assegnare un sistema di coordinate cartesiane per le quali un punto del piano diventa una coppia (x, y) di numeri.

La costruzione della tavola pitagorica con il prodotto cartesiano

E’ immediato osservare che se considero i due insiemi: *asse x* ed *asse y*, un punto P(x,y) del piano è una coppia ordinata di numeri dei quali il primo è sull’asse x, il secondo sull’asse y, in altre parole il piano (cartesiano) è un insieme di coppie.
Vogliamo generalizzare il concetto in qualche cosa di più elementare, in qualcosa che preceda la pre-matematica.

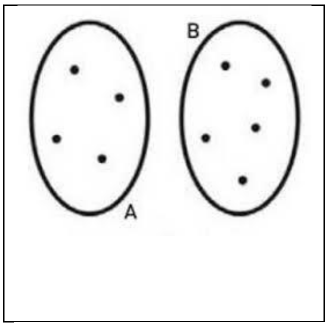
Se A è un insieme finito indichiamo con n(A) il numero dei suoi elementi. Nel caso della fig 4 è n(A) =6.

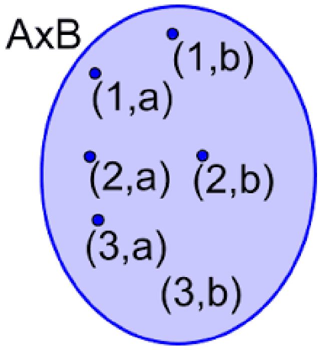
fig.4



Siano adesso A e B due insiemi privi di punti in comune. Allora:

$$n(A) + n(B) = n(A \cup B)$$





Nel caso in figura avendosi n(A) = 4, n(B) =5 è: n(a) + n(B) = 4 + 5 = n(A ∪ B) =9.

Dati ancora gli insiemi A e B, chiamiamo *prodotto cartesiano* dei due insiemi il nuovo insieme A×B formato da tutte le coppie ordinate di elementi (x,y) con x in A ed y in B.

Esempio. Sia A = {1,2,3}, B = {a,b} allora:

$$A\times B = \{(1,a), (2,a), (3,a), (1,b), (2,b), (3,b)\}$$

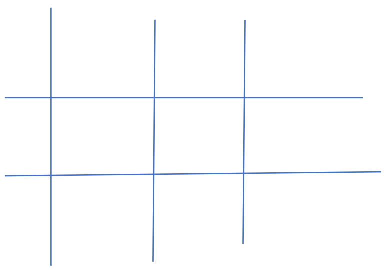
La moltiplicazione di due numeri, siano n(A) ed n(B) si definisce ponendo:

$$n(A) \text{ X } n(B) = n(A\times B)$$

Nel caso dell’esempio ho:

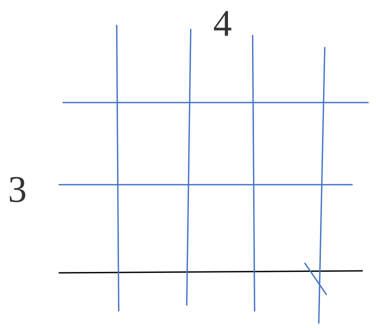
$$n(A) \text{ X } n(B) = 3 \text{ X } 2 = n(A\times B) = 6$$

Passiamo ora al Progetto di “*costruire la tavola pitagorica*”. Prendiamo come punto di partenza la seguente figura formata da due orizzontali e tre verticali.



Asseriamo che:
2 X 3 = numero dei puntini degli incroci = 6.

Nel contesto osserviamo che 2 righe rappresentano il 2, tre colonne rappresentano il 3, il numero di puntini il prodotto, prodotto derivante dal prodotto cartesiano dell'insieme delle righe per l'insieme delle colonne. Ampliamo la figura.



Per calcolare 3x4 consideriamo la figura sopra, formata da tre orizzontali e 4 verticali, contiamo puntini agli incroci sono 12 dunque: 3X4 = 12.
Può dirsi che 3 righe orizzontali rappresentano il 3, quattro colonne in verticale rappresentano il 4, il numero di puntini d'incrocio è il prodotto. E' questo il modo di calcolare il prodotto di due numeri mediante il prodotto cartesiano dell'insieme delle orizzontali con l'insieme delle verticali, i cui elementi sono tanti quanti i "*puntini d'incrocio.*

Notiamo che per calcolare 3 X 5 basta aggiungere a 3 X 4=12 i puntini di una quarta verticale che sono esattamente 3 , quindi 3 X 5 = 3 X 4 + 3 =12 + 3 = 15!!

Passiamo ora ad una costruzione della tavola pitagorica.

Occorre capire, una volta scritti alcuni risultati trovati incrociando righe e colonne, come andare avanti evitando di incrociare le righe con le colonne quando i numeri sono elevati (*cioè più di 5, diciamo*!)

OSSERVAZIONE. Ogni **avanzamento in orizzontale** è di 2 sulla riga 2, di 3 sulla riga del tre, di 4 sulla riga quattro e così via …!!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
2	**4**	**6**	**8**	**10**	12	14	16	10	20
3	6	9	12	15					
4	8	12	16	20					

In altre parole:

nella riga 2 si conta per due: 2, 4 ,6, 8, 10, 12,

nella riga 3 si conta per tre: 3, 6, 9, 12, 15,

nella riga 4 si conta per quattro: 4, 8, 12, 16, 20, 24, …etc.

Così noto che se il risultato in una casella è 12, nella casella successiva a destra si avrà 12 + il numero di caselle verticali accanto indicate con *

				*
				*
				*
			12	*

Dunque, nella casella a destra andrà 12 + il numero di asterischi nella casella a destra in verticale, che sono in numero di 4; quindi nella casella di destra andrà il numero 12+ 4 = 16, che sarebbe 4x4, in accordo anche con il fatto che nella quarta riga si conta per 4.

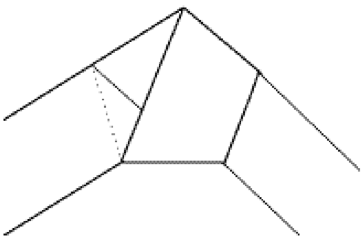
3.- APPENDICE: IL PENTAGONO REGOLARE Sc

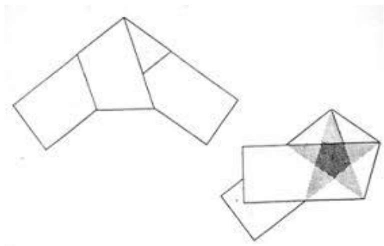
Una questione interessante è la costruzione seguente che è un gioco che si può far fare a qualsiasi età. E' la costruzione del pentagono regolare, mediante piegamento della carte e più precisamente mediante l'annodare una striscia di carta, così come annodiamo uno spago.

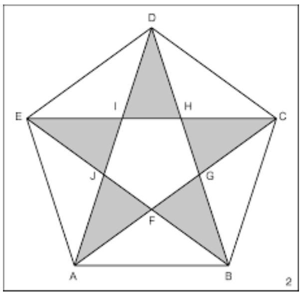
Procuriamoci una *striscia di carta*, possibilmente velina abbastanza lunga, anzi se possibile dotiamo ogni nostro studente di una striscia di carta. La nostra sarà piuttosto grande così che quello che faremo potrà essere visto bene da ciascuno di nostri allievi.

Seguiamo le istruzioni visive:

A partire dalla striscia facciamo un nodo come nella figura sottostante:







Procediamo con la sequenza: annodare la striscia, tirare bene e schiacciare, compare un poligono regolare, con due alette laterali. Se tali alette le piego nel retro o le taglio via, ho il pentagono regolare. Posso poggiarlo sul foglio, segnare il contorno e disegnare il pentagono sul quaderno. Per inciso il rapporto tra una diagonale (segmento che congiunge due vertici non consecutivi per un vertice) e il lato vale all'incirca 1,61… cioè è il numero aureo.

Questo interessa i più grandi che possono anche ricercare su internet la voce "*sezione aurea*" e esplorare il gigantesco mondo di storia, cultura ed arte che si nasconde dietro questa voce cfr. Eugeni-Nicotra [4], [5], [6].

Molte notizie sulla tavola (mensa) pitagorica, costituenti un interessante bagaglio culturale del docente possono essere reperite in L. Nicotra [7].

Se la figura è stata costruita con la carta velina, mettendo la costruzione in controluce appare la cosiddetta stella pentagonale, costruita con tutte le diagonali del pentagono. Questo è un interessante esercizio da fare sul quaderno.

Bibliografia

[1] D'Andrea S., (1994) *Su alcune problematiche per l'insegnamento della matematica in presenza di disabilità, strategie per un curriculum minimo,* Ratio Math. N.8, pp.83-90. (Cfr. www. apav.it).

[2] D'Andrea S., (2019). *Insegnamento della matematica in situazioni socio-psicologiche di differenti apprendimenti*, Mondo matematico e dintorni, n. 2, pp.77- 88. (Cfr. www. apav.it).

[3] De Finetti B.- Rizzi B. (1977). *Conversazione sul Romulus*. Per. di Matematiche.3-4, pp.21-37.

[4] Eugeni F.- Nicotra L., (2018). *Is the golden section a key for understanding beauty? Part I,* Science &Philosophy, vol 6, n.1, pp 93-126

[5] Eugeni F.- Nicotra L., (2018). *Is the golden section a key for understanding beauty? Part II*, Science &Philosophy, vol 6, n.2, pp 129-176.

[6] Eugeni F.- Nicotra L., (2019). *Is the golden section a key for understanding beauty? Part III*, Science &Philosophy, vol 7, n.2, pp 83-112.

[7] Nicotra L., (2018**).** *Storia e proprietà della più celebre tavola di moltiplicazione: la Mensa Pythagorea,* Bollettino AFSU **,** Vol. I (1), pp.75-118.

[8] Santarossa R. (2019). *Lettera aperta a coloro che amano la Scuola*, Periodico di Matematica, anno 34°, serie IV, vol. I (1-2) pp. 299-315.

[9] Speranza F. (2020- postumo), *Il progetto culturale di Federigo Enriques,* Periodico di Matematica, (2020) anno 35°, serie IV, vol. I (1) pp.83-108.

Scrive Albrecht Beutelspacher

Quando io andavo a scuola, era vietato di far calcoli con le dita. A tutt'oggi ancora non ho capito perché dovrebbe essere sbagliato. Infatti, con le dita si calcola che è una meraviglia.

La tabellina del 9. Voglio calcolare 7x9. Apro le 10 dita, dal mignolo sinistro conto 7 dita arrivo all'indice della mano destra (sono 7 dita). Piego l'indice, a sinistra dell'indice piegato ho 6 dita, a destra ne ho 3 di dita. Il risultato di 7x9 è 63.
Non è un caso. Per calcolare 5x9 apro le dita, come sopra, piego il pollice della sinistra e ho 4 a sinistra e 5 a destra. Il risultato è 45.

Perché le tabelline. Perché le dobbiamo imparare, a memoria? Si può essere difficile, ma dopo non dobbiamo imparare altro! Non dobbiamo imparare a memoria 37 per 23, nemmeno 328 per 427 e così via! Nemmeno il moltiplicare coppie di grandi numeri. Basta imparare la procedura!

Sempre più difficile. Moltiplichiamo 93x89 = 8277. Si può fare in altro modo. A 93 manca 7 per 100, sottraggo dal secondo 7 e ho 89-7 = 82! Lo metto da parte!
Adesso a 89 manca 11 per 100. Moltiplico 11 per 7 e ho 77. Questo è il 2° numero.
Li accoppio come segue: **8277 , è il risultato**

Tratto da:A. Beutelspacher, (2008). *Le meraviglie della matematica*, I saggi di Focus, Trento. Cfr. n.20 p.65 e n.29 p.91 n.57 p.175)

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 3, No 1-2 (2020), 65-84

Logica a tre valori e probabilità condizionata nella scuola primaria[1]

Luciana Delli Rocili[1] **Antonio Maturo[2]**

[1]Istituto Comprensivo Statale Pescara 5, Via Gioberti n. 15, 65100 Pescara, lucianadr@live.it
[2]Mathesis Abruzzo, Via Pianacci 21, 65015, Montesilvano, antomato75@gmail.com

Sunto
Si propone un percorso per introdurre la probabilità condizionata dal punto di vista soggettivo, e in generale la logica a tre valori, nella scuola primaria. L'idea di base è che questi concetti sono particolarmente adatti per il trattamento di situazioni di incertezza nel mondo reale e quindi per prendere decisioni. Si commentano i risultati di varie esperienze svolte in alcune classi.

Parole Chiave: Enunciati della logica ternaria. Eventi condizionati. Probabilità soggettiva di eventi condizionati. Condizioni di coerenza. Decisioni in condizioni di incertezza.

1. Introduzione

I concetti di "evento condizionato", "probabilità soggettiva" e "coerenza" sono alla base della teoria razionale delle decisioni, dove la razionalità è intesa come "coerenza" con le proprie opinioni o con opinioni di esperti (de Finetti 1970, Lindley 1990).
Un evento condizionato è una proposizione della logica a tre valori, considerata da vari autori (Reichenbach, 1944; Heyting, 1971; Fadini, 1979) e, recentemente, da un punto di vista più generale in (Smarandache, 2007).
Esperienze condotte in classe ci hanno confermato che la logica trivalente appare abbastanza intuitiva ai ragazzi della scuola primaria, opportunamente guidati dall'insegnante, e il concetto di probabilità condizionata coerente può essere introdotto senza molte difficoltà in quarta o in quinta classe, facendo riferimento alle esperienze della vita quotidiana.

[1] Dedicato al ricordo di Giuseppe Manuppella, fondatore della rivista Mondo Matematico e Dintorni, recentemente scomparso.

Infatti, l'insegnante può evidenziare con semplici esempi che l'incertezza presente nel mondo reale molto spesso non può essere trattata in maniera efficace ed intuitiva con gli schemi classici della logica binaria e della probabilità "oggettiva". Spesso quindi è necessario ricorrere a valutazioni soggettive di probabilità di eventi condizionati, che permettono di prendere decisioni che siano coerenti con le opinioni di esperti, rispetto a vari scenari che si possono presentare. Si può notare che i principi fondamentali su cui si ispira la probabilità soggettiva coerente sono di tipo logico e intuitivo, formativi e non particolarmente legati a conoscenze o abilità complesse di calcolo.
La critica usuale fatta all'impostazione soggettiva della probabilità, che i fautori di altre impostazioni confondono con l'arbitrarietà, si supera mostrando come l'applicazione dei vincoli dovuti all'imposizione della coerenza riduce in maniera drastica ogni arbitrarietà.
Il concetto di evento condizionato E|H ha anche un fondamentale aspetto interdisciplinare. Porta ad una analisi grammaticale e sintattica delle proposizioni condizionali o subordinate del tipo "se vale H allora vale E". Generalizzando il concetto di teorema, visto come proposizione condizionale vera, si considerano proposizioni condizionali che possono essere vere con una certa probabilità.
Si ottiene quindi una eccellente opportunità per un insegnamento interdisciplinare fra Matematica e Italiano. Applicazioni in campo linguistico della logica trivalente sono in (Gentilhomme, 1968).
Lo strumento collaudato per la probabilità soggettiva di eventi condizionati è quello della scommessa, ampiamente accettata dai ragazzi per fare previsioni in ambito sportivo. Varie esperienze hanno dimostrato che l'approccio alla probabilità soggettiva partendo dalle scommesse appare ai ragazzi come un gioco ed è ben accettato dagli studenti anche nelle prime classi della scuola primaria (Delli Rocili, Maturo, 2013A, 2013B, 2015; 2018A, 2018B).
Per approfondimenti, testi citati in questo articolo e che trattano la probabilità da un punto di vista soggettivo e le applicazioni per le decisioni sono (de Finetti 1970, Lindley 1990; Scozzafava, 1996; 2001; Coletti, Scozzafava, 2002)

2. Eventi condizionati e logica ternaria

Nell'impostazione soggettiva del Calcolo delle Probabilità (de Finetti, 1970; Dubins, 1975) assume un ruolo rilevante il concetto di "*evento condizionato*" E|H, che ha il significato logico di proposizione che può assumere tre valori di verità "*vero*", "*falso*" e "*indeterminato*" a seconda che si verifichino $E \cap H$, $E^c \cap H$, H^c, dove per ogni evento A, A^c indica il suo contrario.
Invece, in altre impostazioni del Calcolo delle Probabilità, usualmente utilizzate, non si attribuisce un significato logico al concetto di *evento condizionato*.
Viene definita solo la *probabilità condizionata* p(E|H), con E, H eventi con $p(H) \neq 0$, come rapporto:

$$p(E|H) = p(E \cap H) / p(H). \qquad (2.1)$$

Una conseguenza della "definizione usuale" basata sulla formula (2.1) è che gli eventi di *probabilità nulla* vadano comunque trascurati, mentre nell'impostazione soggettiva, e quindi nella Statistica Bayesiana, essi assumono un ruolo importante.

Nella probabilità soggettiva la probabilità p(E|H) di un evento condizionato E|H esiste indipendentemente dai valori assunti dalle probabilità di E e di H, con l'unica condizione che H non sia l'evento impossibile. In tale contesto, la formula (2.1) non è una definizione, ma è una conseguenza delle condizioni di coerenza.

La formalizzazione delle condizioni di coerenza per la probabilità di eventi condizionati è in (Dubins, 1975), i significati di tali condizioni, e le applicazioni per le decisioni, sono descritti in (de Finetti, 1970) ed in (Lindley, 1990).

Molti autori hanno evidenziato l'opportunità, anzi in alcuni casi la necessità, di considerare proposizioni logiche con 3 valori di verità, ossia che oltre ai valori di verità "vero" e "falso" avessero un terzo valore di verità, intermedio fra vero e falso, che in generale si può chiamare "né vero né falso" (Reichenbach, 1944; Heyting, 1971; Fadini, 1979; Gentilhomme, 1968; Maturo, 1993; Klir, Yuan, 1995; Smarandache, 2007), ciascuno attribuendo un significato particolare a "né vero né falso". Ad esempio, in vari contesti il terzo valore di verità è stato definito come "indeterminato", "vuoto", "indeciso", "inconoscibile", "neutro", etc. In questo lavoro utilizzeremo la notazione di "indeterminato" considerata da Reichenbach e ripresa da de Finetti nell'appendice del suo libro (de Finetti, 1970).

Generalizzando la definizione di proposizione della logica binaria data in (Behnke, et alii, 1968), ed in (Russell, 1962), una *proposizione ternaria* (o della *logica trivalente*) può essere descritta come un "complesso linguistico o segnico per cui ha senso chiedersi se è *vero* o *falso* o vale una *alternativa intermedia* fra il vero ed il falso" (Delli Rocili, Maturo, 2015).

L'opportunità di utilizzare il terzo valore di verità appare in molti discorsi e in molte scelte della vita di ogni giorno e risulta più intuitiva del fatto di restringersi rigidamente ai soli valori di verità "vero" o "falso".

La logica ternaria è stata generalizzata da vari autori considerando logiche a più valori (Kaufmann, 1975A, 1975B; Zadeh, 1965, 1975; Fadini, 1979; Klir, Yuan, 1995). Inoltre, è stata sperimentata in classi della scuola primaria (Delli Rocili, Maturo, 2013A, 2015). Comunque, il caso particolare della logica ternaria sembra ancora il più importante, intuitivo e adatto per lo sviluppo della probabilità soggettiva.

Ad esempio, se chiediamo ad un ragazzo se un suo compagno di scuola è *bravo*, la risposta può essere "vero", "falso" oppure dirà (il caso più frequente) che il suo compagno di scuola è "normale".

Fig. 2.1

Se chiediamo se una data squadra di calcio è *forte* il ragazzo dirà “vero” se la squadra di calcio è ai primi posti della classifica, “falso” se è agli ultimi posti e “né vero né falso” per posizioni di classifica intermedie.
La stessa schedina del totocalcio può essere interpretata come un insieme di valori della logica trivalente, dove, in riferimento alla proposizione “la squadra che gioca in casa è soddisfatta del risultato” si può dire che si possono avere i seguenti valori di verità “1 = vero”, “2 = falso”, “X = né vero né falso”.
Usando la notazione di “indeterminato” per il terzo valore di verità, una proposizione ternaria può assumere i valori “0 = falso”, “1 = vero” e “i = indeterminato”. Se si vuole attribuire un valore numerico a “i” bisogna tener presente la condizione $0 < i < 1$.
Una alternativa considerata in (Delli Rocili, Maturo, 2015; Maturo, 2008) è di porre “falso = (0, 0)”, “vero = (1, 1)” e “indeterminato = (0, 1) = (1, 0)”, ponendo, per a, b, c, d numeri reali, $(a, b) \leq (c, d)$ se e solo se $(a \leq c, b \leq d)$. Il fatto di porre $i = (0, 1)$, si può interpretare pensando che i è “un numero che è un po’ zero e un po’ uno”, concetto che trova sistemazione logica nell’ambito delle teorie della fisica quantistica e dei fuzzy set.
L’attualità del terzo valore di verità e l’opportunità di considerarlo uguale alla coppia (0, 1), o (1, 0), oppure, se si preferisce, all’insieme $\{0, 1\}$ è confermato da recenti ricerche sul computer quantistico e sulla sostituzione dei “bit” con i “qubit”, in cui ci può essere una “sovrapposizione” dei valori 0 e 1. Si vedano, ad esempio gli articoli della rivista “Focus”, N. 168 (ottobre 2006, pp. 40 – 46), dal titolo “*Dai bit ai qubit*”, e N. 339 (dicembre 2020, pp.102-107), dal titolo “*Il mio amico cubit*”, in cui si mostra come, a partire da tali ricerche, è in atto una vera rivoluzione dell’informatica.
Un *evento* E è una proposizione di cui può essere “non conosciuto” il valore di verità (de Finetti, 1970: 38). Se tale valore è conosciuto ed è 1, l’evento si dice *certo*, se è 0, si dice *impossibile*, se non è conosciuto si dice *aleatorio*. Quindi un evento aleatorio può essere considerato come una variabile logica e si possono estendere agli eventi i vari concetti della logica binaria.

Generalizzando il concetto di evento, un evento condizionato $E|H$ è una proposizione della logica trivalente di cui può essere "non conosciuto" il valore di verità. Se si verifica $E \cap H$ tale valore è "1 = vero", se si verifica $E^c \cap H$ tale valore è "0 = falso" e infine se si verifica H^c si ottiene il valore di verità "i = indeterminato", intermedio fra "vero" e "falso".
Un evento condizionato $E|\Omega$, con Ω evento certo, si riduce all'evento E, avendo gli stessi valori di verità di E, in quanto $E \cap \Omega = E$, $E^c \cap \Omega = E^c$, $\Omega^c = \emptyset$, evento impossibile.
Quindi, nell'appendice del suo libro "*Teoria delle Probabilità*", de Finetti considera una logica a tre valori: "*vero*", "*falso*" e "*indeterminato*", basandosi in gran parte anche su lavori di Fisica Quantistica (Reichenbach, 1944) e in questo contesto riconosce l'evento condizionato $E|H$ come una proposizione della logica ternaria, che può assumere i valori di verità "0 = falso", "1 = vero" e "i = indeterminato".

3. Un percorso didattico sulla logica trivalente

3.1 Riconoscere quali affermazioni sono proposizioni della logica trivalente

In una prima fase il docente presenta alcune frasi e invita i ragazzi a scegliere se sono proposizioni della logica bivalente o trivalente oppure se non sono proposizioni logiche.
Ad esempio, i ragazzi riconoscono che sono interpretabili come proposizioni della logica trivalente le frasi:
(1) "Marco è bravo";
(2) "Il Milan è forte";
(3) "Il Pescara è soddisfatto del risultato della partita".
Invece riconoscono che non lo sono affermazioni tipo:
(4) "Luigi bicicletta";
(5) "Carlo i compiti belli".
A questo punto vengono evidenziati dal docente:
(a) Il collegamento fra le varie discipline, in particolare la Matematica e l'Italiano, i criteri su come deve essere strutturata dal punto di vista linguistico una frase per essere una proposizione logica binaria o ternaria;
(b) Gli elementi soggettivi nel valutare la frase;
(c) La necessità di avere un criterio di verificazione. Ad esempio, nella frase (1) il criterio può essere basato sulla pagella o la scheda di valutazione, nella (2) sulla classifica e nella (3) su aspettative e limiti del Pescara.
A completamento della prima fase, il docente invita gli studenti a scrivere loro stessi delle frasi, che dopo dovranno essere valutate da una commissione formata da due studenti e il docente.

In una seconda fase, una volta selezionate le frasi accettate come proposizioni della logica bivalente o trivalente, i ragazzi sono invitati a scegliere una delle seguenti risposte:

(1) "V = Vero",
(2) "F = Falso",
(3) "I = Indeterminato = Né vero né falso",
(4) "Vero o Falso, ma non so quale dei due"
(5) "Vero o Falso o Indeterminato, ma non so quale dei tre"

Se si sceglie la risposta (4) siamo in presenza di un "evento aleatorio", per il quale le informazioni in possesso dei decisori non permettono di decidere se è "vero" o "falso".
Se si sceglie la risposta (5), alla proposizione P considerata è associato un "tri-evento", ossia una partizione dell'evento certo in tre eventi V_P, I_P, F_P e, a seconda di quello dei tre che si verificherà, la proposizione sarà valutata *vera*, *indeterminata* o *falsa*.
Per indicare tale situazione scriviamo

$$P = (V_P, I_P, F_P). \qquad (3.1)$$

3.2 Il problema della negazione

Nella logica binaria la *negazione* del valore "vero" è il valore "falso" e viceversa la negazione del valore "falso" è il valore "vero". In simboli:

$$-V = F, \; - F = V. \qquad (3.2)$$

Inoltre, vale la "involuzione" o "regola dei segni"

$$-(-V) = V, \; -(-F) = F. \qquad (3.3)$$

Nella logica ternaria si pone il problema di decidere quale significato attribuire alla negazione di ciascuno dei simboli V, I, F. In (Reichenbach, 1944) sono presi in considerazione tre tipi di negazione:

- *Ciclica*, che assume -V = I, -I = F, -F = V;
- *Diametrale*, con -V = F, -I = I, -F = V;
- *Completa*, con -V = I, -I = V, - F = V.

La negazione ciclica si ottiene considerando di percorrere in senso antiorario i vertici del triangolo di fig.3.1, mentre quella diametrale si ottiene percorrendo, sempre in uno stesso senso, due dei lati del quadrilatero di fig. 3.2.

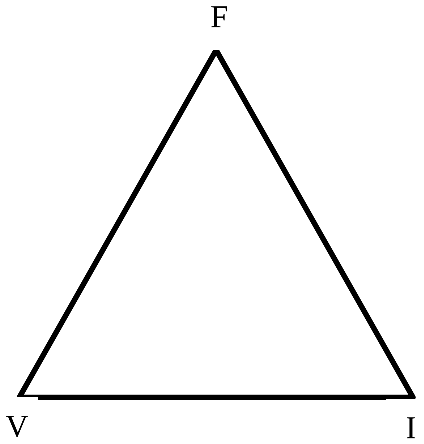


Fig. 3.1

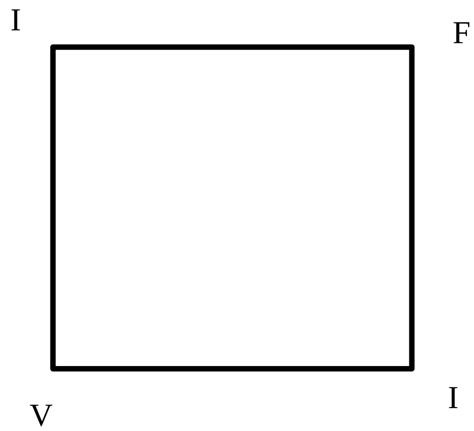


Fig. 3.2

3.3 Le operazioni logiche di unione e intersezione

Poniamo l'ordinamento F < I < V, giustificato dal fatto che, se pensiamo di ottenere un vantaggio dal fatto che una proposizione P della logica trivalente sia vera e uno svantaggio dal fatto che sia falsa, allora se P è indeterminato non si ha né vantaggio né svantaggio.
Ad esempio, sia P = "Supero un esame il 30 gennaio". Si verifica che P è vero se supero l'esame (massimo vantaggio), è falso se non supero l'esame (massimo svantaggio) ed è indeterminato se l'esame è rinviato (situazione intermedia).

Se P e Q sono due proposizioni della logica trivalente si definisce:

- *unione* o *disgiunzione* di P e Q la proposizione, indicata con $P\cup Q$ o con $P\vee Q$, che assume il massimo dei valori assunti da P e Q;
- *intersezione* o *congiunzione* di P e Q la proposizione, indicata con $P\cap Q$ o con $P\wedge Q$ o semplicemente con P Q, che assume il minimo dei valori assunti da P e Q.

In altre parole, valgono le seguenti tabelle:

$P\vee Q$	Q = V	Q = I	Q = F
P = V	V	V	V
P = I	V	I	I
P = F	V	I	F

Tabella 3.1 L'unione

$P \wedge Q$	Q = V	Q = I	Q = F
P = V	V	I	F
P = I	I	I	F
P = F	F	F	F

Tabella 3.2 L'intersezione

Vale la pena osservare che, se attribuiamo valori numerici a V, I, F, ad esempio ponendo V = 1, I = i, F = 0, dove "i" è uguale ad un qualsiasi numero reale appartenente all'intervallo (0, 1), risulta sempre valida la formula:

$$P \vee Q + P \wedge Q = P + Q. \qquad (3.4)$$

I ragazzi possono imparare a comporre proposizioni della logica ternaria e chiarirne il significato in vari contesti con l'aiuto dell'insegnante. Ad esempio poniamo:

P = "Carlo è bravo nel tennis"; Q = "Carlo è bravo nel calcetto".

Se ammettiamo che le alternative siano

V = "bravo", F = "non bravo", I = "né bravo né non bravo",

allora $P \vee Q$ valuta il miglior risultato di Carlo fra tennis e calcetto e $P \wedge Q$ il peggior risultato.

4. Un primo percorso didattico sugli eventi condizionati

4.1 Riconoscere quali affermazioni sono eventi condizionati

Se E e H sono due eventi, l'evento condizionato E|H è definito da una proposizione del tipo:

$$P_{E|H} = \text{“se vale H allora vale anche E”}. \qquad (4.1)$$

Ad esempio sono eventi condizionati:
A = "se il Pescara vince la prossima partita allora non retrocede";

B = “se svolgo bene il prossimo esercizio allora otterrò il livello “avanzato” nella scheda di valutazione”;
C = “se vado a piedi allora impiego almeno 30 minuti ad arrivare al negozio”.

Fig. 4.1 Un evento condizionato

Poiché un evento condizionato E|H è *vero*, *indeterminato* o *falso* a seconda che si verifichi $E \cap H$, H^c, $E^c \cap H$, possiamo scrivere, coerentemente con la (2.1):

$$E|H = (E \cap H,\ H^c,\ E^c \cap H). \tag{4.2}$$

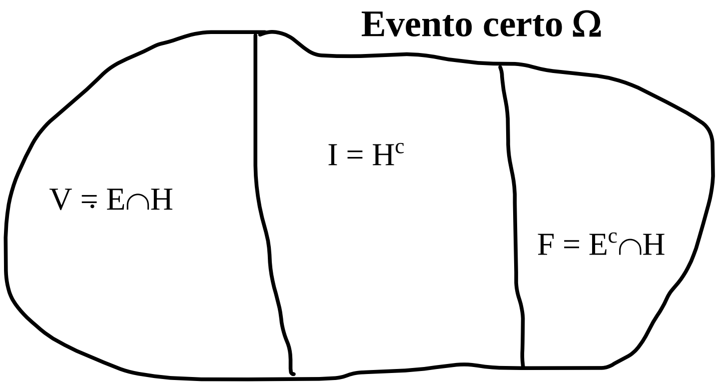


Fig. 4.2 Evento condizionato E|H come tri-evento

In una frase che definisce un evento condizionato c’è una *ipotesi* (o *antecedente*) H e una *tesi* (o *conseguente*) E che sono entrambi eventi, ossia proposizioni della logica binaria. Quindi, data una frase ben posta dal punto di vista sintattico, per classificare la frase come evento condizionato è necessario analizzare la frase per vedere se *antecedente* e *conseguente* sono eventi.

Ad esempio, se scrivo:

$$D = \text{“se sono veloce allora arrivo presto”}, \tag{4.3}$$

le affermazioni H = “sono veloce”, E = “arrivo presto” non sono eventi e quindi D = E|H non è un evento condizionato.

4.2 La probabilità coerente di un evento condizionato

Un evento condizionato E|H può essere rappresentato come una scommessa in cui un individuo, chiamiamolo Carlo, punta una somma K e riceve in cambio dal banco (ossia chi accetta la scommessa):

- una vincita S, se si verifica $E \cap H$;
- la restituzione della somma puntata K, se si verifica H^c;
- niente, se si verifica $E^c \cap H$.

Fig. 4.3 La scommessa

La scommessa si dice *coerente* se, nel caso in cui si verifica H e quindi non viene restituita la scommessa, non si riduce ad un guadagno certo o una perdita certa per Carlo.
Questo avviene se e solo se vale la *condizione di coerenza*:

$$0 \le K \le S, \tag{4.4}$$

che esprime il fatto ovvio che la puntata non può superare la vincita e non può essere il banco a pagare puntata e vincita (a meno che, come accade nelle feste, il banco non sia il padre di Carlo che vuol far felice il figlio…).

Nel caso in cui $E = \emptyset$, non potendosi verificare $E \cap H$, la condizione di coerenza porta a richiedere che sia $K = 0$; infine nel caso in cui $E = H$, deve essere $K = S$.
Se S è non nullo e ammettiamo che K e S siano proporzionali, ossia se raddoppia la vincita raddoppia anche la puntata, allora il rapporto K/S è costante e si dice *probabilità* (soggettiva) di E|H, indicato con p(E|H).
La probabilità p(E|H) si dice *coerente* se valgono le condizioni di coerenza per K e S, da cui si deducono le *condizioni di coerenza* per la probabilità:

$$0 \leq p(E|H) \leq 1,\ p(\emptyset|H) = 0,\ p(H|H) = 1. \tag{4.5}$$

4.3 Il contrario di un evento condizionato

Il contrario di E|H è l'evento condizionato $E^c|H$ rappresentato dalla "scommessa contraria" che annulla gli effetti della scommessa precedente. Ossia Carlo punta una somma T e riceve in cambio dal banco:

- la vincita S, se si verifica $E^c \cap H$;
- la restituzione della somma puntata T, se si verifica H^c;
- niente, se si verifica $E \cap H$.

Quindi:

$$E^c|H = (E^c \cap H, H^c, E \cap H).$$

Interpretando $E^c|H$ come la negazione di E|H si vede che si tratta della negazione "diametrale" di Reichenbach.

Se Carlo fa contemporaneamente una scommessa e la sua contraria sempre con vincita S, allora versa la somma K + T per le due puntate e riceve:

- la vincita S se si verifica H
- restituzione di K + T se si verifica H^c.

Se $S < K + T$ allora Carlo ha fatto una scommessa sfavorevole, in quanto riceve meno di quello che ha pagato se si verifica H, mentre ha la restituzione della puntata se H non si verifica. Se invece $S > K + T$ allora Carlo ha fatto una scommessa per lui vantaggiosa, in quanto riceve più di quello che ha puntato se si verifica H, mentre ha la restituzione della puntata se H non si verifica.

Allora, affinché non sia favorito né Carlo né il banco, deve valere la condizione:

$$K + T = S. \tag{4.6}$$

Dividendo per S, oppure, ciò che è equivalente, ponendo S = 1, si ottiene la *condizione di coerenza* per un evento condizionato e il suo contrario:

$$p(E|H) + p(E^c|H) = 1. \tag{4.7}$$

4.4 Le scommesse a due risultati nello sport

In un torneo di tennis in Australia che si tiene in questi giorni, un “banco” ha stabilito le seguenti quote:

Paolini (Ita) contro Marino (Can): Paolini 2,62; Marino 1,44.

Ostapenko (Lat) contro Errani (Ita): Ostapenko 1,33; Errani 3,25.

Che significano questi numeri?
Le partite si possono considerare eventi condizionati E|H, con H = “La partita si gioca”, E = “Vince il primo giocatore”, E^c = “Vince il secondo giocatore.
Nelle scommesse, se S è la vincita e K è la puntata, allora la quota è Q = S/K. Quindi se S_1 è la somma che si vince puntando su Paolini e K_1 è la puntata, risulta $S_1 = 2{,}62\ K_1$.
Analogamente se S_2 e K_2 sono la vincita e la puntata su Marino, si ha $S_2 = 1{,}44\ K_2$.
La probabilità soggettiva è p = K/S = 1/Q.
Quindi posto E = “Vince Paolini”, E^c = Vince Marino”, le probabilità soggettive attribuite dal banco a Paolini e Marino, condizionate al fatto che la partita si giochi, sono, rispettivamente,

$$p_1 = p(E|H) = 1/2{,}62 = 0{,}38;\ p_2 = p(E^c|H) = 1/1{,}44 = 0{,}69.$$

Risulta:

$$p_1 + p_2 = 0{,}38 + 0{,}69 = 1{,}07 > 1.$$

La scommessa non è coerente ma è a favore del banco che si aspetta in media un guadagno del 7% rispetto al totale delle somme che paga. Infatti, se ci sono due scommettitori, uno su Paolini e uno su Marino e facciamo l’ipotesi che $S_1 = S_2 = 100$ risulta

$$K_1 = 100\ p_1 = 38;\ K_2 = 100\ p_2 = 69;\ K_1 + K_2 - 100 = 7,$$

per cui il banco paga 100 euro e ne incassa 107.
Le probabilità coerenti p'_1 e p'_2 si possono ottenere dividendo p_1 e p_2 per 1,07. Risulta:

$$p'_1 = 0{,}38/1{,}07 = 0{,}355;\ p'_2 = 0{,}69/1{,}07 = 0{,}645.$$

Da notare che, nonostante le previsioni sfavorevoli, la partita è stata vinta da Paolini.

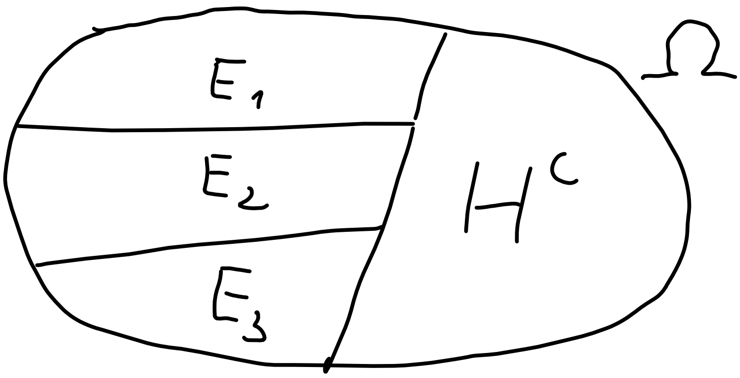
Per quanto riguarda la seconda partita, Ostapenko (Lat) contro Errani (Ita), con il solito significato dei simboli si ha:

$$p_1 = 1/1{,}33 = 0{,}75;\ p_2 = 1/3{,}25 = 0{,}31;\ p_1 + p_2 = 1{,}06;$$
$$p'_1 = 0{,}75/1{,}06 = 0{,}71;\ p'_2 = 0{,}31/1{,}06 = 0{,}29.$$

In media, il banco si aspetta un guadagno del 6% rispetto alle somme che paga.
La partita è stata vinta da Ostapenko, coerentemente con le previsioni.

4.5 La coerenza per una partizione

Si dice che n eventi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ formano una partizione di H se essi sono a due a due incompatibili e la loro unione è uguale a H.
Per n = 1 l'unica partizione di H è formata solo da H; per n = 2, per ogni evento E una partizione è formata da $E \cap H$ e $E^c \cap H$.
Consideriamo ora il caso n = 3. Sia $\{E_1, E_2, E_3\}$ una partizione di H.



.

Fig. 4.4 Partizione di H in tre eventi

Se Carlo fa una scommessa contemporaneamente su $E_1|H$, $E_2|H$ e $E_3|H$ con una vincita fissa S e puntate K_1, K_2, K_3, allora riceve la restituzione delle puntate se non si verifica H, mentre ha un guadagno $G = S - (K_1 + K_2 + K_3)$ se si verifica H.
Affinché la scommessa non sia né favorevole né sfavorevole, G deve essere nullo e quindi deve valere la condizione:

$$K_1 + K_2 + K_3 = S. \tag{4.8}$$

Essendo $p(E_1|H) = K_1/S$, $p(E_2|H) = K_2/S$, $p(E_3|H) = K_3/S$, segue la condizione di coerenza per una partizione di H con 3 eventi:

$$p(E_1|H) + p(E_2|H) + p(E_3|H) = 1. \tag{4.9}$$

Ragionando in maniera analoga, se E_1, E_2, …, E_n è una partizione di H con n eventi deve valere la condizione

$$p(E_1|H) + p(E_2|H) + \ldots + p(E_n|H) = 1. \qquad (4.10)$$

4.6 Le scommesse a tre risultati nello sport

La partita, di Coppa Italia, Inter-Juventus ha avuto da un banco le seguenti quote:

Vittoria dell'Inter 2,37; Pareggio 3,25; Vittoria della Juventus 3,00.

Indicando con H l'evento "La partita si gioca", E_1 = "La partita si gioca e vince l'Inter", E_2 = "La partita si gioca e le due squadre pareggiano", E_3 = "La partita si gioca e vince la Juventus", gli eventi E_1, E_2, E_3 sono una partizione di H.
Le probabilità che il banco assegna ai tre risultati sono:

$p_1 = p(E_1|H) = 1/2{,}37 = 0{,}42$; $p_2 = p(E_2|H) = 1/3{,}25 = 0{,}31$; $p_3 = p(E_3|H) = 1/3 = 0{,}33$

Risulta $p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}42 + 0{,}31 + 0{,}33 = 1{,}06$, per cui il banco si aspetta in media un guadagno del 6% rispetto alle somme che pagherà.
Le probabilità coerenti si ottengono dividendo p_1, p_2, p_3 per 1,06. Esse sono:

$p'_1 = 0{,}42/1{,}06 = 0{,}40$; $p'_2 = 0{,}31/1{,}06 = 0{,}29$; $p'_3 = 0{,}33/106 = 0{,}31$.

La partita è stata vinta dalla Juventus.

Fig. 4.5 Scommesse sul calcio

4.7 La proprietà additiva

Se A e B sono due eventi incompatibili, allora $A \cap H$, $B \cap H$, $C \cap H$, con $C = H - (A \cup B)$, formano una partizione di H.

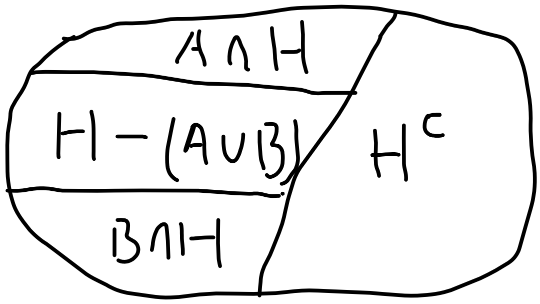


Fig. 4.6 Caso di A e B incompatibili

per cui:

$$p(A|H) + p(B|H) + p(C|H) = 1. \tag{4.11}$$

D'altra parte. anche $(A \cup B) \cap H$ e $C \cap H$ sono una partizione di H per cui:

$$p((A \cup B)|H) + p(C|H) = 1 \tag{4.12}$$

Confrontando la (4.11) e la (4.12) si deduce la *proprietà additiva*:

$$p((A \cup B)|H) = p(A|H) + p(B|H). \tag{4.13}$$

5. La proprietà moltiplicativa e l'ordinamento di eventi condizionati

5.1 La proprietà moltiplicativa

Consideriamo tre eventi condizionati $A|B$, $B|C$, $A|C$, con $A \subseteq B \subseteq C$ e supponiamo che Carlo scommetta sui tre eventi condizionati, rispettivamente con puntate K_1, K_2, K e vincite S_1, S_2, S.

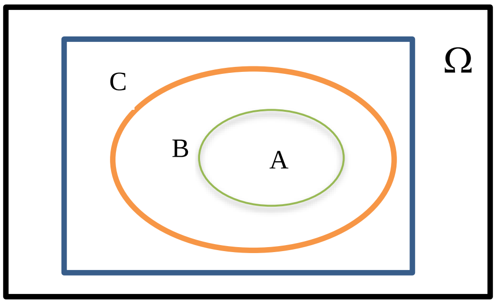


Fig.5.1 Condizione $A \subseteq B \subseteq C$

I possibili guadagni di Carlo si ottengono dalla seguente tabella 5.1:

Guadagni	A|B	B|C	A|C
A	$S_1 - K_1$	$S_2 - K_2$	$S - K$
A^cB	$-K_1$	$S_2 - K_2$	$-K$
B^cC	0	$-K_2$	$-K$
C^c	0	0	0

Tabella 5.1

Se imponiamo che, se si verifica B^c C, il guadagno totale sia nullo deve essere

$$-K_2 - K = 0, \text{ e quindi } K_2 = -K \tag{5.1}$$

In tal caso, considerando le prime due righe della tabella si ottiene la seguente tabella 5.2:

Guadagni	A|B	B|C	A|C
A	$S_1 - K_1$	$S_2 + K$	$S - K$
A^cB	$-K_1$	$S_2 + K$	$-K$

Tabella 5.2

Se imponiamo che, se si verifica A^c B, il guadagno totale sia nullo deve essere

$$S_2 = K_1 \tag{5.2}$$

In tal caso il guadagno totale nel caso in cui si verifica A è $G = S_1-K_1+K_1+K+S-K = S_1+S$. Tale guadagno è nullo se risulta

$$S_1 = -S. \tag{5.3}$$

Mettendo insieme le condizioni:

$K_1 = p_1S_1$, $K_2 = p_2S_2$, $K = pS$, $K_2 = -K$, $S_2 = K_1$, $S_1 = -S$,

si ottiene

$K_2 = p_2\, S_2 = p_2\, K_1 = p_2\, p_1\, S_1$, inoltre $K_2 = -K = -p\, S = p\, S_1$, per cui $p_2\, p_1\, S_1 = p\, S_1$.

Essendo $S_1 \neq 0$ (perché per $S_1 = 0$ sarebbero anche S e S_2 nulli) segue che $p_1\, p_2 = p$, ossia vale la *proprietà moltiplicativa*:

$$p(A|B)\ p(B|C) = p(A|C). \tag{5.4}$$

Se lasciamo cadere la condizione $A \subseteq B \subseteq C$, possiamo scrivere $ABC \subseteq BC \subseteq C$ e la (5.4) è sostituita dalla $p(ABC|BC)\ p(BC|C) = p(ABC|C)$. Essendo, per ogni coppia E, H, di eventi, $E|H = EH|H$ si ha infine la formula:

$$p(A|BC)\ p(B|C) = p(AB|C). \tag{5.5}$$

Dalla formula (5.4), se $C \subseteq D$, si ha $p(A|C)\ p(C|D) = p(A|D)$, per cui vale anche la:

$$p(A|B)\ p(B|C)\ p(C|D) = p(A|D). \tag{5.6}$$

5.2 L'ordinamento

Se $E_1|H_1$ e $E_2|H_2$ sono due eventi condizionati è ragionevole affermare che

$$E_1|H_1 \subseteq E_2|H_2 \text{ se } (E_1H_1 \subseteq E_2H_2,\ E_1^c\, H_1 \supseteq E_2^c\, H_2), \tag{5.7}$$

ossia se il primo evento ha la parte vera "più piccola o uguale" e la parte falsa "più grande o uguale".
Ragionando a partire dalla proprietà moltiplicativa (5.4) e dalla condizione di coerenza (4.7) si ottiene la seguente *proprietà di monotonia (o compatibilità dell'ordinamento con la probabilità condizionata coerente*):

$$E_1|H_1 \subseteq E_2|H_2 \Rightarrow p(E_1|H_1) \leq p(E_2|H_2). \tag{5.8}$$

Si può notare che anche la relazione d'ordine data dalla (5.7) si presta ad una interpretazione con la logica ternaria, considerando che rispetto alla affermazione "$p(E_1|H_1) \leq p(E_2|H_2)$" valutata solo a partire dal fatto che sia o no $E_1|H_1 \subseteq E_2|H_2$, vale il valore di verità "vero" se $E_1|H_1 \subseteq E_2|H_2$, "falso" se "$E_1|H_1 \supset E_2|H_2$" e "indeterminato" se non si verifica nessuno di questi due casi.

6. Conclusioni e prospettive didattiche

Il concetto di evento condizionato è fondamentale per le decisioni. Infatti se $H_1, H_2, \ldots, H_n$ formano una partizione dell'evento certo e sono gli eventi che possono accadere indipendentemente dalla volontà del decisore (detti *stati di natura*), e se la scelta del decisore dipende dalla probabilità del verificarsi di un evento E, il decisore, per poter fare una scelta razionale, dovrà valutare le probabilità degli eventi $H_1, H_2, \ldots, H_n$ e degli eventi condizionati $E|H_1, E|H_2, \ldots, E|H_n$. Per un approfondimento di questi aspetti rinviamo ai testi di de Finetti (1970) e Lindley (1990).
Dal punto di vista didattico e formativo l'analisi delle frasi tipo "se si verifica H allora si verifica E" in condizioni di incertezza su H e su E è un passo avanti rispetto al concetto di teorema, in cui se l'ipotesi H è vera, allora è vera anche la tesi. Infatti, considerando l'evento condizionato $E|H$, l'affermazione "se H è vero anche E è vero" può essere *vera* o *falsa* con certe probabilità che un decisore assegna in base alle sue informazioni.
Ad esempio, la frase "se gioca Ronaldo, allora la Juventus vince" è un evento condizionato, ma non un teorema.
Gli eventi sportivi, molto sentiti dai ragazzi, forniscono una miniera di esempi in cui vale la pena ragionare con una logica trivalente e modellizzando le situazioni con eventi condizionati.

Un passo avanti si ha se cerchiamo di dare un significato all'affermazione:

D = "se sono veloce, allora arrivo presto".

Ponendo A = "sono veloce", B = "arrivo presto", si vede che A e B non sono eventi, per cui l'affermazione, pur potendosi mettere nella forma $D = B|A$, non è un evento condizionato. Una strada per attribuire un valore di verità a D può essere quella di considerare A e B due tri-eventi $A = (V_A, I_A, F_A)$, $B = (V_B, I_B, F_B)$ ponendo ad esempio

- V_A = "la mia velocità è superiore a 80 km/h";
- F_A = "la mia velocità è inferiore a 40 Km/h";
- I_A = "la mia velocità è compresa fra 40 e 80 Km/h";
- V_B = "arrivo prima di 10 minuti";
- F_B = "arrivo dopo 30 minuti";
- I_B = "il tempo di arrivo è fra 10 e 30 minuti".

Estendendo il ragionamento basato sulle scommesse, in cui c'è la restituzione della posta in caso di indeterminazione, si arriva alla conclusione che D è a sua volta un tri-evento che assume:

- il valore "vero = V_D" se sono veri sia A che B;
- il valore "falso = F_D" se è vero A e falso B;
- il valore "indeterminato" negli altri casi.

Tuttavia, ragionando in maniera diversa rispetto al criterio basato sulle scommesse, si possono avere risultati diversi. Alla base di tutto ci sono scelte soggettive (ma soddisfacenti opportune condizioni di coerenza) del decisore, sia su come modellizzare le proposizioni del tipo D = "se A allora B" che non sono eventi condizionati, ma sono ben formate da un punto linguistico, sia sul valore di verità da attribuire a D in base ai valori di verità assunti da A e B. Un processo didattico formativo è quello di provare a far fare queste scelte ai ragazzi, mostrando la necessità di scelte soggettive, che però rispettino la logica del linguaggio, evidenziando la necessità di un approccio interdisciplinare fra Matematica e Italiano.

Bibliografia

Behnke and alii, (1968), *Matematica 1 and 2*, Feltrinelli Editore Milano.

Coletti, G., Scozzafava, R., (2002), *Probabilistic logic in a coherent setting*, Kluwer Academic Publishers, London.

de Finetti, B. (1970), *Teoria delle Probabilità*, vol. I e II, Einaudi, Torino.

Delli Rocili L., Maturo A., (2013A), Logica del certo e dell'incerto per la scuola primaria, *Science & Philosophy*, 1 (1), 37-58.

Delli Rocili L., Maturo A., (2013B), Probabilità e Statistica nella scuola primaria: esperienze didattiche e proposte, *Science & Philosophy*, 1 (2), 49-78, ISSN 2282-7765.

Delli Rocili L., Maturo A., (2015). Interdisciplinarietà, logica dell'incerto e logica sfumata nella scuola primaria (Interdisciplinarity, logic of uncertainty and fuzzy logic in primary school). *Science & Philosophy*, 3(2), 11-26, ISSN 2282-7765.

Delli Rocili L., Maturo A., (2018A), Il gioco delle scommesse, la probabilità soggettiva e le decisioni nella scuola primaria, in Manuppella G., & Maturo A. (Eds.), *Insegnare Matematica: didattica, inclusione e cooperazione*, pp. 35-46, Serie: Quaderni APAV, no 3, Pescara.

Delli Rocili L., Maturo A., (2018B), La "Battaglia Gattale": uno strumento per l'apprendimento interdisciplinare di Geometria, Statistica e Probabilità, attraverso il gioco, *Mondo Matematico e Dintorni*, Vol 1, No 1-2 (2018), 53-68

Delli Rocili L., Maturo A., (2019A), Un percorso didattico per introdurre il ragionamento probabilistico nella Scuola Primaria, in Manuppella G., & Maturo A. (Eds.). *Dall'intuizione ai concetti: metodologie per elaborare percorsi didattici e modelli matematici* pp. 35-46, Serie: Quaderni APAV, no 5, Pescara.

Delli Rocili L., Maturo A., (2019B), Logic and probability for an inclusive and cooperative education, *ANALELE universităŢiI "eftimie murgu" DIN reşiţa, FASCICOLA DE ŞTIINŢE SOCIAL-UMANISTE*, Anul VII, 2019, 222-235.

Dubins, L.E., (1975), Finitely additive conditional probabilities, conglomerability and disintegrations, *The Annals of Probability*, 3, 89-99.

Fadini A., (1979), *Introduzione alla teoria degli insiemi sfocati*, Liguori Editore, Napoli.

Gentilhomme, M.Y., (1968), Les ensembles flous en linguistiques, *Cahiers de linguistique theorique et appliquée*, Bucarest, (5) 47, pp. 47-65.

Heyting, A., (1971), Intuitionism, an introduction, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Kaufmann A., (1975A), *Theory of fuzzy subsets*, Vol I, Academic Press, New York.

Kaufmann A., (1975B*), Introduction a la théorie des sous-ensemble flous,* Vol II e Vol III, Masson, Paris.

Klir G.J., Yuan B., (1995), *Fuzzy sets and fuzzy logic*, Prentice Hall.

Lindley D. V., (1990), *La logica della decisione*, Il Saggiatore, Milano.

Maturo A., (1993), Struttura algebrica degli eventi generalizzati, *Periodico di Matematiche*, 4, 1993, p. 18-26.

Maturo A., (2008), La moderna visione interdisciplinare di Geometria, Logica e Probabilità in Bruno de Finetti**,** *Ratio Sociologica*, 2, 2008, pp. 39-62.

Reichenbach H., (1944), *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica*, tr. it. Einaudi, Torino, 1954

Russell B., (1962), *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milano.

Scozzafava R., (1996), *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*, Zanichelli, Bologna.

Smarandache F., (2007), *A unifying field in logics: neutrosophic logic. Neutrosophy, neutrosophic set, neutrosophic probability and statistics*, InfoLearnQuest, USA.

Scozzafava R., (2001), *Incertezza e probabilità. Significato, valutazione, applicazioni della probabilità soggettiva*, Zanichelli, Bologna.

Zadeh, L., (1965). Fuzzy sets. *Inf. Control*, 8, 338-353.

Zadeh, L., (1975). The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning I. *Inf. Sciences*, 8, 199-249.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 3, No 1-2 (2020), 85-92

Valutazione scolastica nelle classi della scuola primaria

Carmine D’Ottavio[1]

c.dottavio@alice.it

Sunto
D’Ottavio si rivolge alla valutazione di apprendimenti, comportamenti, competenze degli allievi. Elabora una sua scheda per il rendimento scolastico individuale settimanale con ascisse e ordinate per i giorni e le discipline, con indicatori analitici degli apprendimenti e descrizione sintetica dei comportamenti in classe, da porre in correlazione.
La complessità della valutazione della personalità umana non può essere scomposta esclusivamente in elementi semplici, che invece vanno ricomposti sempre in quadro organico. Per D’Ottavio le molteplici dimensioni da valutare comprendono i valori etici che entrano nel comportamento degli allievi, l’ambiente sociale che influenza la loro formazione, la programmazione di una scuola attiva che indica obiettivi, metodi, contenuti, le potenzialità funzionali dell’educando rispetto agli sviluppi che consegue negli apprendimenti, le interazioni con i suoi pari, con gli insegnanti, con la famiglia in cui si manifestano e formano i suoi comportamenti.
La concretezza del giudizio deve concentrarsi sugli hic et nunc della quotidianità di una identità del discente in continua evoluzione, senza pensare di generalizzare la sua concreta realtà esistenziale in valutazioni standardizzate, perché la sua irripetibile personalità complessa si trasforma circolarmente in modo dinamico in tutte le sue dimensioni relazionali, per cui la valutazione deve registrare questo dinamismo specifico e diverso per ogni allievo in grafici multidimensionali, compreso il giudizio sulle conseguenze formative prodotte in ogni studente dalla valutazione ricevuta.

Parole Chiave Valutazione scolastica, scheda di valutazione

[1] Maestro di lunghissima esperienza prima nella scuola primaria e poi come docente di scienze dell’educazione nel liceo pedagogico, attualmente in pensione

1. Introduzione

Prima di riportare l'esperienza da me maturata in tanti anni di insegnamento nella scuola primaria in merito alla valutazione del rendimento scolastico dei singoli allievi, ritengo importante delineare alcuni presupposti teorici dell'argomento.
Di per sé la "valutazione", nella percezione generalizzata della realtà esistenziale si presenta, quale elemento conoscitivo, molto complessa, poiché in essa si convogliano molti elementi percettivi di giudizio globale che rendono difficile l'analisi dettagliata.
Innanzi tutto, provo ad esaminarne aspetti di filosofia nell'educazione, di pedagogia, di didattica, per poi presentare la mia esperienza della valutazione nella prassi quotidiana dell'insegnamento.

Da sempre gli intellettuali hanno affrontato l'idea di condensare i contenuti impliciti nel termine "valutare" che sfugge alla dimensione della precisione o dell'esattezza matematica, intrisa come è anche di valori etici riferiti alle varie realtà dei comportamenti personali e sociali concreti.
Tuttavia, un tentativo in tal senso dovevo farlo, se non altro per legittimare la valutazione scolastica, della quale mi stavo occupando e che, secondo le varie normative succedutesi nel tempo, mi rimandava all'uso della scala numerica da 0 a 10.
Il fatto è che nella valutazione devono essere considerate molteplici dimensioni. Un fattore, apparentemente non influente è l'habitat di collocazione della scuola, perché l'educazione interagisce con la società e i risultati della formazione scolastica dipendono in tanta parte dalla formazione sociale degli allievi, essa stessa oggetto di valutazione.
Certo la valutazione deve concentrarsi sui "meriti" personali nell'esecuzione di un compito, ma non ne consegue l'importanza di una scala numerica, perché una valutazione può fare anche a meno dei numeri come, per esempio, ha fatto don Milani nella scuola di Barbiana.

La mia esperienza ha avuto come base culturale la convinzione personale di realizzare una "scuola attiva", dopo aver apprezzato quanto ci ha trasmesso Dewey, in Scuola e società.

Molti altri studiosi di pedagogia, di psicologia e di didattica si sono impegnati nell'approfondire il tema della valutazione dal punto di vista delle loro discipline, ma io ho cercato di farlo soprattutto tentando di coinvolgere anche i protagonisti della valutazione, cioè gli alunni, piccoli o grandi delle varie classi, continuando ad occuparmi di valutazione anche quando dopo tanti anni di insegnamento nella scuola

primaria sono stato titolare della cattedra di scienze dell'educazione nel liceo pedagogico.
L'elaborazione di un mio strumento di valutazione non è stato affatto semplice, nel momento in cui ho dovuto fare i conti con la concretezza di un giudizio qualificante l'apprendimento ed il comportamento dell'alunno Y, diverso dall'alunno Z.

2. La scheda di valutazione

La mia riflessione, per non soffermarsi a valutare la conoscenza nozionistica di ogni singolo alunno, ha avuto bisogno di soffermarsi a valutare anche l'azione della scuola in riferimento ad alcuni passaggi concettuali riguardanti la programmazione curriculare, come è necessario valutare l'utilizzo di test psicologici circoscritti e settoriali delle funzionalità cerebrali dell'educando. Tutte queste dimensioni particolari vanno considerate nella valutazione, ma senza invalidare la ricerca stessa avente come oggetto un universo di esperienze conoscitive che non può essere parcellizzato in frammenti di sapere, disgiunti gli uni dagli altri, formanti invece un variegato mosaico organico.
La frammentarietà apparente deve ritrovare la sua compattezza nel "tutto" dell'alunno, che evolve e cresce nel suo "fieri" quotidiano, in relazione all' "hic" et "nunc" dei contesti sociali ed ambientali, oltre che all' "ubi consistam" della sua personalità.
Lo studente, "attore intelligente", deve essere "educato" per affrontare problemi teorici e pratici della quotidianità che è sempre in "fieri". Questo compito è affidato alla "scuola", impersonata da uno o più docenti, con lo scopo di trasmettere le conoscenze culturali e di promuovere la formazione integrale della personalità.
Questi compiti alla fine devono essere valutati, ma non solamente esaminando il risultato di apprendimento e comportamento dell'alunno. Perché non sondare anche il contributo dell'insegnante o della famiglia? Alla fine, ho elaborato uno strumento di valutazione pensato per dare una risposta ad un giudizio tendenzialmente globale sulla concreta personalità dell'alunno in interazione con tutte le sue relazioni ambientali e sociali.
Questo strumento tiene conto della valutazione come elemento "fluttuante", superando la cristallizzazione possibile nel "voto", poiché connesso con i cambiamenti della realtà vissuta da ogni soggetto. In effetti l'insegnante dovrebbe dare un giudizio secondo indicatori qualitativi e quantitativi prefissati ad ogni azione o pensiero palesemente espresso dal discente. Il che era impossibile con il sistema esistente negli anni del mio lavoro.
Pertanto, ho avviato decenni fa una mia ricerca di uno strumento dinamico di valutazione che mi consentisse di acquisire nuove conoscenze in modo ordinato e consequenziale, tentando di conferire un carattere quasi scientifico a tutto il mio lavoro didattico monitorato in ogni momento della valutazione scolastica.

La ricerca si è sviluppata per prova ed errore, "inciampando" in un problema di valutazione analitica per trovare la sintesi valutativa finale della sua soluzione.
Nel mezzo di tale percorso è stata inserita la programmazione curriculare – utile per guidare al possesso dei "saperi" in modo graduale ed in piena consapevolezza.
Nella mia messa a fuoco ho dovuto approfondire le novità della scuola attiva che ha messo il discente al centro dell'attività scolastica coinvolgendolo in ogni progettazione educativa.

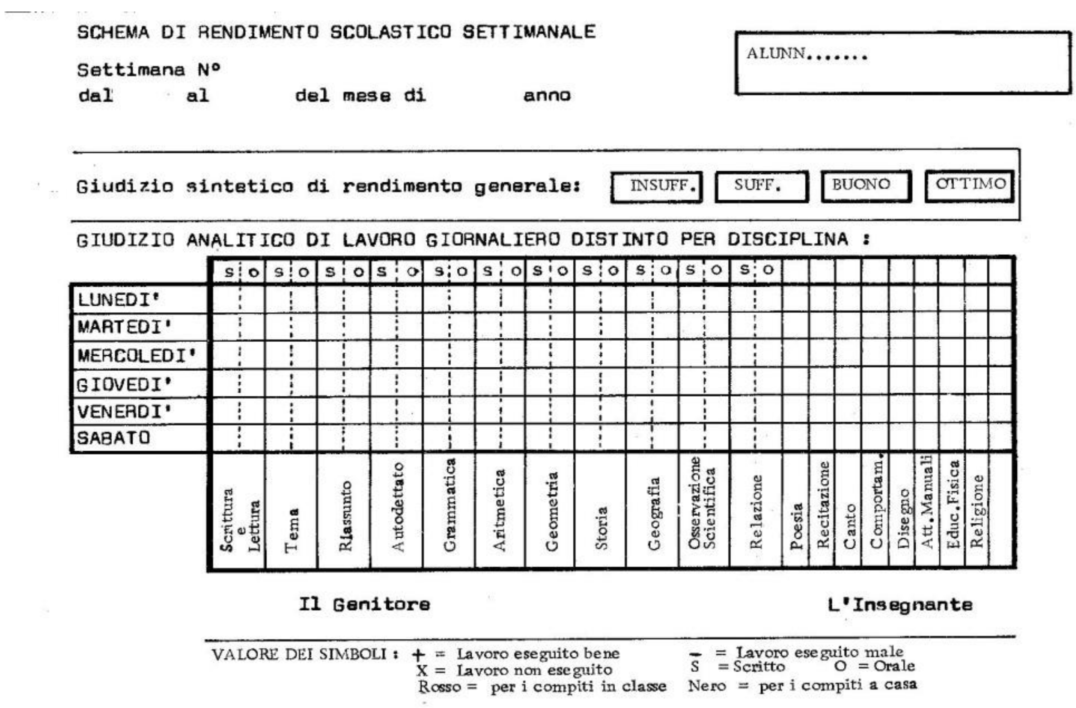
La "valutazione" fa da cornice ad ogni attività dell'allievo perché da essa si può affrontare l'espansione delle conoscenze, delle competenze, dei modi di apprendimento e di comportamento, in relazione ai vari ritmi di "crescita" individuale.

Negli anni centrali del sec. XX Dewey, per esempio, ha parlato di una scuola "attiva" pronta a mettere al centro dell'attività pedagogica l'educando stesso in tutte le sue attività, in tutte le sue relazioni sociali, in tutte le dimensioni di crescita della sua personalità. Pertanto, la valutazione scolastica non poteva essere circoscritta esclusivamente al dato tecnico dell'accrescimento di contenuti del sapere, poiché avrebbe tradito, almeno nella scuola primaria, il complesso compito della scuola tesa ad indirizzare lo sviluppo armonico di tutte le potenzialità mentali, fisiche e psicologiche degli allievi nelle attività cognitive, pragmatiche, etico-sociali.
In questo modo ho pensato di dover avere una immagine più completa del divenire della formazione della personalità infantile con una valutazione che tenesse conto delle varie dimensioni del suo saper conoscere, saper essere, saper fare, in riferimento necessariamente ai singoli.

Il mio esperimento circa la valutazione scolastica è partito proprio da tale consapevolezza e mi ha indotto ad escogitare modi e strumenti idonei a fornirmi elementi utili di una qualificazione multidimensionale di eventi educativi mentre accadevano dinamicamente, superando i limiti di una memorizzazione a lungo termine che costringe a ricorrere all'uso intuitivo del buon senso comune.
Nei primi anni di insegnamento ho toccato con mano l'insufficienza valutativa basata proprio sul ricordo dei vari interventi registrati durante le cosiddette interrogazioni e, per non sbagliare eccessivamente nell'esprimere un giudizio, assai spesso ero tentato di essere più generoso del dovuto.
Per superare i limiti di tale modo di operare, ho pensato di ricorrere a delle schede personali dove registrare i comportamenti quotidiani e il rendimento degli apprendimenti con riferimento a quanto proposto con la programmazione concretamente svolta con crescente progressione della difficoltà.
Naturalmente la programmazione come parte dell'insieme dell'"apprendimento" ne costituiva "il modello" a cui far riferimento per capire il "quanto" appreso e da valutare.

Occorreva ideare, quindi, un supporto alla memoria per registrare i risultati conseguiti. Personalmente ho pensato di servirci di due tipi di schede, inizialmente molto semplici e perfezionate in seguito.
La prima serviva per annotare i comportamenti o atteggiamenti tenuti in classe, la seconda per registrare i risultati conseguiti sul piano del sapere.

Ne è nata una scheda, come quella qui riprodotta:



SCHEMA DI RENDIMENTO SCOLASTICO SETTIMANALE

ALUNN.......

Settimana N°
dal al del mese di anno

Giudizio sintetico di rendimento generale: INSUFF. SUFF. BUONO OTTIMO

GIUDIZIO ANALITICO DI LAVORO GIORNALIERO DISTINTO PER DISCIPLINA :

	Scrittura e Lettura	Tema	Riassunto	Autodettato	Grammatica	Aritmetica	Geometria	Storia	Geografia	Osservazione Scientifica	Relazione	Poesia	Recitazione	Canto	Comportam.	Disegno	Att. Manuali	Educ. Fisica	Religione
	S O	S O	S O	S O	S O	S O	S O	S O	S O	S O	S O								
LUNEDI'																			
MARTEDI'																			
MERCOLEDI'																			
GIOVEDI'																			
VENERDI'																			
SABATO																			

Il Genitore L'Insegnante

VALORE DEI SIMBOLI : + = Lavoro eseguito bene — = Lavoro eseguito male
X = Lavoro non eseguito S = Scritto O = Orale
Rosso = per i compiti in classe Nero = per i compiti a casa

La scheda è sviluppata sul modello cartesiano delle ascisse e delle ordinate con l'indicazione delle discipline e dei giorni della settimana.
Ogni lavoro svolto, sia scritto che orale, era oggetto di valutazione e registrato con segni convenzionali – anch'essi riportati nella scheda – quotidianamente. Ogni settimana si concludeva con un giudizio sintetico finale graduato dall'insufficiente all'ottimo.
Il sabato la scheda veniva consegnata a ciascun allievo con l'obbligo di farne prendere visione ai genitori e di riconsegnarla, poi, all'insegnante con la loro firma di presa visione.

Quando presentai queste idee, esse sono state giudicate troppo macchinose.
In realtà, e contrariamente di quanto pensavano i colleghi, le schede ideate hanno confermato quanto avevo previsto: la facilità di registrazione, la riduzione dei margini d'errore, la possibilità di conferire concretezza all'acquisizione del sapere.

Inoltre l'introduzione della scheda settimanale ha offerto l'opportunità di intessere un rapporto più profondo tra scuola e famiglia, che, oltre al rendersi conto del rendimento scolastico del figlio, poteva vedere "quanto" lavoro veniva svolto dal maestro. In tal modo i genitori responsabili avrebbero potuto anche auto-valutare il loro intervento educativo a casa rispetto al lavoro fatto dal maestro in classe.
Non era più possibile esprimere giudizi nelle solite frasi come: "suo figlio è intelligente, ma potrebbe fare di più". Come poter dire ciò di fronte ad un bambino che per tre settimane consecutive è stato qualificato insufficiente e quindi si autovaluta?
E come non prendere atto, da parte della famiglia del bambino, della scarsa applicazione scolastica? E come poter giustificare, da parte del maestro, il suo scarso impegno se non ha verificato in base al suo lavoro educativo i compiti eseguiti, compresi quelli orali?

3. Conclusioni

La lettura attenta della scheda mi ha aiutato anche a capire le motivazioni di fondo di un eventuale rendimento scolastico deludente e, quindi, insieme alla famiglia porvi rimedio.
Col tempo, ho notato che, anche con la scheda si rischiava di ricadere nell'errore di parcellizzare i risultati. In effetti la valutazione per voti tradizionali era comunque sempre da stilare *ope legis*.
Il rischio è stato evitato con la descrizione in una tabella generale dei risultati settimanali e costituenti, in effetti, un grande grafico che veniva aggiornato da settimana in settimana.
Tutti i bambini venivano registrati con un numero e col nome per evitare che estranei potessero individuarli.
Questo nuovo strumento, a mio parere, si è dimostrato ancora più efficace della scheda, perché dava l'opportunità di visionare in concreto il proprio rendimento nella dinamica individuale e nel personale contributo apportato nell'ambito del gruppo di lavoro. Infatti di solito organizzavo la classe in gruppi, generalmente composti da quattro o cinque elementi omogenei per genere e qualità di impegno nel lavoro.

Il confronto valutativo, consentito dall'osservazione del grafico generale emergente dai risultati singoli, generava un meccanismo di autovalutazione che apriva alla competizione "sana" mirata alla personale crescita nel gruppo, senza permettere mai di considerare gli altri come "avversari" sui quali prevalere. Un altro fattore è emerso dal confronto valutativo consentito dal grafico, un consolidamento della solidarietà che sollecitava i più pronti ad aiutare il componente debole del gruppo di appartenenza.

Un ultimo aspetto, che riteniamo interessante sottolineare, è il comportamento dei bambini delle prime classi della scuola elementare che, normalmente, sono estremamente vivaci ed irrequieti.

Nella scheda settimanale veniva registrato anche il modo di comportarsi nel rapporto con i compagni e in caso di scorrettezza alla casella corrispondente veniva registrato un meno (-), che non consentiva di conseguire "l'ottimo" anche con risultati positivi nelle varie discipline. In tal modo tutti hanno imparato a rispettare il regolamento di classe, a controllarsi, ed in particolare, a non dar fastidio ai compagni.

Bibliografia

Aquario D., *La valutazione nella scuola contemporanea*, CLEUP, 2009

Castoldi M., *Valutare e certificare le competenze*, Carocci, 2016

Dewey J., *Scuola e società*, Edizioni Conoscenza, 2018

Domenici G., *Manuale della valutazione scolastica*, Laterza, 2007

Ferrari L., *Scrivere profili e giudizi*, Erickson, 2010

Galliani L., Notti A.M., *Valutazione educativa*, Pensa Multimedia, 2014

Gentili G., *La certificazione delle competenze nella scuola dell'infanzia e primaria*, Erickson, 2019

Greenstein L., *La valutazione formativa*, UTET, 2017

Manzi G., *La valutazione scolastica. L'influenza del giudizio sulla motivazione dei nostri figli*, Il Leone Verde, 2019

Mason L., *Valutare a scuola. Prodotti, processi, contesti dell'apprendimento*, CLEUP, 1996

Milani Don Lorenzo, Scuola di Barbiana, *Lettera a una professoressa*, Libreria Editrice Fiorentina, 2010 (Mondadori 2017)

Notti A.M. (a cura di), *A scuola di valutazione*, Pensa Multimedia, 2014

Notti A.M. (a cura di), *La funzione educativa della valutazione. Teorie e pratiche della valutazione educativa*, Pensa Multimedia, 2017

Petracca C., *Valutare e certificare nella scuola*, Liscianilibri, 2020

Schiedi A., *La valutazione nella scuola. Aspetti, modelli ed esperienze*, EdiSES, 2013

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 3, No 1-2 (2020), 93-102

La fantasia intesa come creazione ludica entra di diritto nel mondo reale e scolastico

Dal gioco matematico alla storia inventata e alla favola, al mito del buon selvaggio, contadino e astronomo.

Fernando Cipriani

fercip2002@yahoo.it

Sunto
Il mondo della scuola chiede un uso razionale della fantasia ma anche un'etica delle storie inventate; il riconoscimento della libertà del ragazzo che apprende deve avere la priorità nei compiti scolastici e nella creazione artistica. Qui presentiamo delle storie verosimili, affidate alla creatività linguistica e alla logica della composizione e della narrazione, ben articolata, dei passaggi, dei momenti di pausa, al rilancio dell'azione, ma affidate soprattutto alla creazione di simboli significativi, coinvolgenti gli stessi personaggi e protagonisti, siano essi favolistici o concretamente impegnati nel mondo della quotidianità. Ecco come educare i giovani adolescenti alla fantasia, cioè alla creazione di storie e storielle.
Queste storie cominciano con un gioco matematico necessario a liberare la fantasia dei ragazzi di una classe e proseguono con una favola somma di altre favole ben note per ribaltarne le funzioni e i significati. La sorpresa diventa l'elemento pedagogico fondante. La tecnica narrativa di semplificazione si ritrova infine nella storia, apparentemente fantasiosa, del piccolo pastorello Valentin che, figlio di contadini, poi badante del gregge, ascende ai gradi della cultura e della scienza.

Parole chiave: La fantasia creativa, il gioco ludico dei numeri, l'invenzione linguistica, la fantasia creativa nell'infanzia e nel racconto, la favola e gli stereotipi, giochi di parole, scrivere nell'età scolare, scrivere per i ragazzi; l'uomo naturale, il mito del buon selvaggio, lo studio delle stelle, dalla stalla alle stelle, il significato delle *Memorie*, l'assolutismo e il mecenatismo a confronto, la cultura del merito.

Premessa. Non ci può essere forse migliore introduzione al mio prossimo libro *Fantasie, Storie e favole quasi attuali,* in via di ultimazione, che un breve cenno alle virtù e ai meriti della fantasia raccomandati da Gianni Rodari.

Qui sottoponiamo all'attenzione dei lettori solo tre storie della raccolta sopra citata, di cui diamo i titoli[1]: "Anche le favole possono diventare vere: conta che ti passa", "Cappuccetto d'oro", infine "Una storia vera! Il figlio di contadino a corte ovvero il pastorello 'lorenese' astronomo", una storia ricostruita sulla base dei *Mémoires* scritti da Valentin Jamerey-Duval, che diventerà astronomo, geografo e bibliotecario del duca Leopoldo di Lorena.

1. I meriti della fantasia secondo Gianni Rodari. Come nascono le storie e le favole.

I libri di Gianni Rodari, in particolare *Favole al telefono* (Einaudi Ragazzi, Torino, 1962, prima edizione) mostrano che i bimbi hanno tale e tanta fantasia da inventarsi un loro mondo, un mondo tale da rovesciare quello quotidiano e sostituirlo con uno nuovo, trasparente e allo stesso tempo invisibile. Si può abbassare nella divisione il nove senza sentire protestare tutte le altre espressioni, da «abbasso lo sceriffo» a «abbasso il tuo naso»? Può arrivare un topo a mangiare i gatti? Certamente, come ha provato un topo di biblioteca che divorava i gatti fatti ovviamente di carta e inchiostro, ma poi di fronte al reale pericolo si rifugiava proprio tra i libri.
Non esiste nelle favole quello che siamo soliti chiamare l'inverosimile; la lezione o più comunemente la morale, se manca, bisogna il più delle volte cercarsela. Soprattutto l'oggetto magico e la metamorfosi della realtà sono alla base di tante altre storie di Rodari e dei suoi piccoli allievi, illustrate dai disegni di Bruno Munari. Un bambino che crede al potere magico di un bastone, regalatogli da un vecchio, vola con la sua fantasia: esso si trasforma quindi in un cavallo galoppante, poi in un cammello a due gobbe, in un'automobile da corsa, in un motoscafo, infine in un'astronave. Dopo tante avventure il ragazzo restituisce il bastone al vecchio. La lezione viene chiaramente espressa alla fine della favola: un vecchio è felice quando può regalare qualcosa a un bambino senza pretendere nulla in cambio.

[1] Anche le favole possono diventare vere: conta che ti passa, Mascherine da carnevale, Quella signora chiamata Felicità, Una casa tutta di bambù, La gallinella dalle uova d'oro, Attenti ai caporali e alle caporali, C'è pizzo e pizzo, Una damigella e non una "damigianetta", Scioglilingua, A ognuno la sua pallina o il suo pallone, Luci e luce, La bontà e la sua ricompensa, Mai abbassare la guardia, Una scena sempre la stessa ma diversa, Quel vecchio flauto magico, Atmosfera da sogno o da incubo, Parole in eco, parole incrociate o parole prolungate? Gli Stati generali degli animali, Al cuore non si comanda, Una scuola stanca di vacanze, Cappuccetto d'oro, Oltre l'aldilà, Lo spappagallo, La sfilata, Ma chi è l'altro? Una storia vera! Il figlio di contadino a corte ovvero un pastorello 'lorenese' astronomo, Come gli uccellini diventano dei cuoricini.

Il libro è stato scritto certamente per i bambini e capire il momento magico dell'infanzia che è quello della fantasia. In una favola si racconta che un barbiere compra (o meglio pensa di aver comprato) la città di Stoccolma per un taglio di capelli e frizione.
Morale esplicita del racconto «A comprare la città di Stoccolma»: «E invece si sbagliava, e l'aveva pagata troppo. Perché ogni bambino che viene in questo mondo, il mondo intero è tutto suo, e non deve pagarlo manco un soldo, deve soltanto rimboccarsi le maniche, allungare le mani e prenderselo». Dunque, l'intento pedagogico si rivela suo malgrado.
Resta l'interesse linguistico legato speso a quel gioco matematico dell'ipotesi derivata dall'analogia. Tra altri esempi di parole nuove inventate, ottenute da quelle ben note, precedute da prefissi, incontriamo lo «staccapanni», che porta vestiti già pronti e da infilare, la «macchina sfotografica» che invece delle foto produce le caricature, infine l'imprevista somma di «due stramilioni e sette centimetri». Giocare con le parole è stato anche per noi un particolare divertimento durante la narrazione delle storie inventate, come vedremo.
Altre volte Rodari sembra insistere per l'invenzione delle parole, specialmente sulla sovrapposizione o combinazione di due parole che lascia spazio alla fantasia del lettore: «la brontolite» suggerisce la bronchite che fa brontolare, «la febbre mangina» la febbre di una bambina che non vuol mangiare, infine le pastiglie di «stupidina» lascerebbero supporre l'aspirina per una bambina stupida che pensa di far prendere le pastiglie alle sue bambole, mentre il nonno vorrebbe fare delle iniezioni a quest'ultime.
Anche le favole più note possono essere sconvolte dalla fantasia creativa, come vuole l'autore della *Grammatica della fantasia,* fino a rompere con le forme convenzionali della scrittura favolistica. Che succederebbe se cappuccetto Rosso incontrasse nel bosco Pollicino e i suoi fratelli oppure se Pinocchio bussasse alla casa dei Sette Nani? Per sbrigliare la fantasia creativa dei ragazzi Rodari propone anche "favole a rovescio": Biancaneve invece dei Sette Nani incontra sette giganti e diventa la loro mascotte giungendo a compiere tante imprese banditesche. Anche noi abbiamo tentato (ma lungi da noi l'idea dell'imitazione) tra l'altro di scrivere a modo nostro delle favole, secondo la nota ricetta dell'«insalata di favole» proposta da Rodari; altre volte ubbidendo all'aspettativa di molti lettori, soprattutto di quelli in età scolare, abbiamo dato alle storie raccontate, anzi inventate, il sapore della "favola".
La fantasia ovviamente è anche alla base dell'arte, come spiega Bruno Munari che, sull'esempio di Rodari, prende spunto dalla fantasia (titolo di un suo libro) per illustrare e capire alcune opere artistiche (e non solo pittoriche), quasi a sottolineare che la fantasia applicata in ogni campo non conosce limiti.
Pluralis maiestatis a parte, a noi (sono compresi ovviamente i nipoti, attenti ascoltatori delle favole inventate) è sembrato opportuno cogliere a volo alcune parole, anche comuni, interessanti tuttavia dal punto di vista fonetico (pensiamo all'onomatopea, alla ridondanza di alcune sillabe), per costruire una storia, a volte molto breve e intrigante, come se le parole chiedessero alla fine di diventare le protagoniste, senza essere necessariamente incapsulate in una morale. Altre volte un semplice proverbio del

passato, ma ancora di uso corrente, ha suggerito una storiella; perfino un particolare gioco di parole ha fatto da tramite allo sviluppo della storia, anche se legata a una sua logica interna.

L'iniziativa spettava spesso in questi casi alla singola parola, come raccomandava tra l'altro l'adolescente e poeta Rimbaud, tuttavia presa nelle sue particolari accezioni (un esempio tra le storie narrate il verbo "abbassare" o "pizzo") e quindi nei suoi diversi significati.

Perfino Queneau (*Exercices de style* nella traduzione italiana di Umberto Eco) ha offerto nel momento dell'invenzione lo spunto per qualche innocuo esercizio stilistico con modalità diverse. Neppure poteva mancare per l'ispirazione di un racconto particolarmente significativo (vedi *infra* **«**Una storia vera: il figlio di contadino a corte ovvero il pastorello 'lorenese' astronomo**»)** una fonte segreta, poco conosciuta, i *Mémoires* del pastorello Valentin Jamerey-Duval, più noto col nome di Duval, uno degli scrittori lorenesi, fin troppo ingiustamente dimenticati[2]. Ma anche il dialogo tra alcuni personaggi si è imposto quasi come correttivo e nello stesso tempo come tessuto della stessa storia.

2. Il gioco matematico: pari e dispari

Nella storiella che segue apriamo la porta alla favola, che ricorre alla bacchetta magica della maestra che canta e conta, imitata dai ragazzi. La maestra si addormenta mentre gli alunni giocano a pari e dispari. La maestra si sveglia e vede che Pietro ha fatto bene a mettere in due colonne i numeri pari e accanto quelli dispari. Il gioco è fatto! Ecco il raccontino in chiave favolistica. «Anche le favole possono diventare vere: conta che ti passa»

– Ragazzi, facciamo ora un gioco – disse la maestra alzando la bacchetta polverosa, ma sempre miracolosa. – Vediamo se Giorgio conosce bene i numeri dispari.

Giorgio va saltellando tra i banchi come un uccello che per partire deve fingere di zoppicare e comincia a contare: – tre, ... sette, ... nove, ... tredici. Dietro di lui saltella Pietro che però continua con i pari, saltando anche lui, ma esitando: – Due, ... sei, ... dieci.

Intanto la maestra si era distratta guardando un uccellaccio, quasi certamente un corvo, che stringeva un ramoscello nel becco curvo e sembrava dire: – Conta, conta che ti passa e la classe interpretando meglio in coro: – Canta, canta che ti passa. Ora perfino la bacchetta cantava e contava e toccava le teste dei ragazzi e delle ragazze che spalancavano gli occhi nel vedere la maestra addirittura volare. Miracolo della bacchetta o dei ragazzi trasformati in numeri?

---

[2] Si veda Fernando Cipriani, *Dalla corte al ritiro, Figure e temi della civiltà letteraria del Sei-Settecento francese,* Solfanelli, Chieti 1993, pp. 49-189.

La fantasia intesa come creazione ludica entra di diritto nel mondo reale e contingente

– Ascoltami sette, mi manca un tre per arrivare a dieci.

– Te lo presto io, in cambio dammi un due per arrivare a nove, il numero dove abito.

La maestra assisteva a questa festa dei numeri tanto contenta che lasciò fare tutto alla sua bacchetta e si addormentò. Quando si svegliò, tutta rannicchiata nella sedia della cattedra, vide Pietro che le mostrava il quaderno con le due colonne dei numeri pari e dispari e accanto gli uccelli disegnati in quantità giusta. Il corvo si stava occupando di moltiplicazione e non figurava sul quaderno.

La bacchetta restava sulla cattedra a cantare o meglio a contare, dal dispari al pari, entrambi finalmente riconciliati dalla somma.

3. Insalata di favole. Superamento del modello dei personaggi tradizionali. Una favola rivista e corretta: «Cappuccetto d'oro»

Seguendo la metodologia di Rodari riguardo all'invenzione delle favole, si può organizzare il racconto in modo da ottenere una somma di dati in analogia con uno standard situazionale, noto come modello. Si tratta di mescolare o sovrapporre o meglio far incontrare casualmente personaggi di favole note, Cappuccetto Rosso, Cenerentola, Pollicino, conferendo però a ognuno di loro quella peculiarità psicologica e comportamentale ormai nota. Parimenti interessante sarà il superamento dello stereotipo sottinteso per inventare nuovi rapporti interpersonali tra i protagonisti, tanto di Cappuccetto, quanto dei personaggi apparentemente secondari: il lupo, il cacciatore e la nonna. Cappuccetto non porta più il cappuccetto rosso ma giallo, anzi d'oro e il lupo è un lupo mansueto e il cacciatore ha tuttavia paura del lupo.

Ecco la favola di «Cappuccetto d'oro»**.**

La mamma aveva preparato tutto il necessario per il pranzo della nonna e raccomandato alla figlia Letizia, ormai dodicenne, di attraversare il bosco in fretta per arrivare puntuale dalla nonna, prima di mezzogiorno. Nulla mancava nella borsa che la figlia portava a tracollo: il pollo arrosto, l'insalatina, il pane e perfino le noci che tanto piacevano alla vecchia. Quel giorno faceva un freddo da battere i denti; Letizia aveva voluto però cambiare il suo cappuccetto rosso, ormai logoro e bucherellato, e sostituirlo con un altro giallo, così luminoso da sembrare d'oro e da vedersi da lontano.

Quando si trovò nel bel mezzo del bosco sentì un fruscio di foglie secche: era il lupo che spesso aveva incontrato ma che, ormai vecchio e stanco, si trascinava mostrando la sua zampa dolorante. Letizia questa volta provò compassione per quella brutta ferita e vi spalmò sopra un'erba fresca e profumata. Per un momento il vecchio lupo emise un guaito che a Cappuccetto sembrò un ululato! Lo trattò come fosse stato il suo cane a cui era tanto affezionata, ma senza accarezzarlo, come raccomandava sempre la madre per tutti gli animali!

Una giovane fanciulla che passava da quelle parti non riusciva a trovare la strada che doveva portarla dal suo principe in trepida attesa. Cappuccetto si ricordò che aveva conosciuto quella fanciulla a una festa dove la matrigna le aveva preparato una pozione per farla sprofondare in un sonno profondo. Quindi la chiamò per nome:

- Cenerentola, sono Letizia, vieni verso di me; sono sulla sponda destra del fiume. Mi vedi? – Certo Letizia, disse allegramente Cenerentola. Sto correndo dal mio principe che mi aspetta a casa, dove dorò ricucire il mio vestito in modo da farlo sembrare nuovo e andare al ballo.

– Buona fortuna! aggiunse Letizia, sventolando la sua mano in forma di saluto.

Un bimbo era appena passato nel bosco a qualche passo da Cappuccetto e aveva seminato sassolini bianchi per segnare il sentiero che lo avrebbe dovuto ricondurre a casa, dove lo aspettavano i genitori e i fratellini. Lo chiamavano Pollicino perché era il più piccolo dei figli. Cappuccetto d'oro sentì all'improvviso sfiorarsi dalla mano di qualcuno come volesse toglierle la borsa; quando si girò per vedere chi era, Pollicino era già scomparso.

Nella sua casetta intanto la nonna di Letizia stava aspettando la nipote con ansia; la fanciulla si fece riconoscere con i suoi tre colpi ripetuti due volte, a distanza, sulla porta, che al segnale convenuto si aprì quasi silenziosamente, e la nonna l'abbracciò affettuosamente con tanta tenerezza da farle dimenticare tutta la stanchezza accumulata durante il viaggio. Cappuccetto interruppe quell'abbraccio tanto atteso per togliersi il cappuccio dorato e sdraiarsi sul letto della nonna e riposarsi. Ma un colpo di fucile la fece sobbalzare mentre la nonna stava assaporando le gustose pietanze.

Era il cacciatore a cui la vecchia era ormai abituata, ma la nipote pensò che fosse stato lui ad aver sparato al lupo colpendolo leggermente alla zampa destra. La nonna capì dall'espressione preoccupata della nipote il suo timore e la rassicurò: – Non ti preoccupare, lui spara sempre a salve, per intimorire il lupo. Domenico viene spesso a trovarmi e mi chiede un liquorino che lo rincuori. Altro che cacciatore di lupi! come si fa chiamare, sentenziò la nonna.

4. Introduzione alla storia del pastorello poi bibliotecario del duca di Lorena, Leopoldo. Un'affermazione della cultura contadina

Presentare brevemente la storia del pastorello dell'eremo di Sant'Anna in poche sequenze richiede alcune considerazioni di natura prettamente letteraria: evidenziare con continuità narrativa e stilistica alcuni avvenimenti, quindi la sua fuga di casa, il suo soggiorno all'eremo di Sant'Anna, il suo apprendimento della scrittura e della lettura, lo studio dell'astronomia, in particolare della posizione di alcune stelle, infine l'incontro con il duca Leopoldo.
Inizieremo con il perfezionamento degli studi e il riconoscimento dei suoi meriti.

Il lettore, leggendo le *Memorie di* Valentin Jamerey-Duval (1696-1775), scritte in gran parte durante l'attesa del parto di Maria Teresa d'Austria, capirà che il buon duca Leopoldo riconobbe i meriti del piccolo pastorello, istruito dagli eremiti e incontrato durante una battuta di caccia nei boschi, poi condotto a corte e divenuto suo bibliotecario; da lui fu anche nominato storico, astronomo, geografo, numismatico, perfino linguista (tra le altre lingue correnti parlava anche l'italiano); tanti meriti apprezzati dagli storici lorenesi (Dom Calmet) e che lo fecero conoscere in tutte le corti d'Europa, da quella di Vienna a quella di Toscana, infine nei salotti parigini. Spesso considerato da chi lo conobbe (dallo stesso Rousseau) un'incarnazione del mito del buon selvaggio. Ma il nostro studioso autodidatta, lorenese per adozione, non perse mai di vista, scrivendo a più riprese i *Mémoires* (1733-1747) i suoi due punti fondamentali di riferimento: l'eremo di Sant'Anna (Sainte-Anne), dove aveva imparato tra l'altro a leggere e a scrivere, e il mecenatismo del duca Leopoldo che gli aveva permesso di perfezionare gli studi d'astronomia intrapresi da adolescente in un diretto e prolungato contatto con la natura, osservata in maniera scientifica. Appare evidente soprattutto il senso etico di una simile avventura, che sembra appartenere all'aneddotica.

Pur vivendo a corte, in verità questo figlio di contadini non si sentì mai un cortigiano, invece trovò più di un'occasione per difendere la cultura contadina e quindi la classe contadina, ingiustamente sottostimata e perseguitata dalla monarchia francese d'inizio Settecento in aperto contrasto con le idee liberali del ducato lorenese, ancora autonomo, rispetto alla politica francese, in cui si parlava una lingua diversa dal francese, anche se in parte simile.

La lezione che deriva dalla storia individuale di Valentin Jamerey-Duval e dalla politica culturale di Leopoldo sta nell'accettare e avvalorare un evento culturale e cioè che nel cosiddetto Secolo dei Lumi i meriti della cultura di un figlio di contadini venivano riconosciuti e diventavano fondanti di nuove future certezze, indipendentemente dalla condizione sociale di appartenenza.

5. Dalla narrazione fantasiosa alla storia reale: le *Memorie* scritte dall'autodidatta Valentin Jamerey-Duval. «Una storia vera: il figlio di contadino a corte ovvero un pastorello 'lorenese' astrologo».

Chi legge le *Memorie* di Duval si chiede giustamente: come può un ragazzo (vagabondo), costretto a fuggire di casa, a superare mille difficoltà accolto e assoldato poi dagli eremiti come pastore, scolaro diligente, poi vagabondo amante della natura, dei boschi e dello studio delle stelle, scampato all'epidemia del terribile inverno del 1709, assunto come bibliotecario del duca Leopoldo, riuscire a giustificare nella narrazione autobiografica la sua vita randagia e il passaggio dallo stato selvaggio allo stato civile di studioso e astrologo riconosciuto? Non si può che ripercorrere queste tappe che lo portarono dalla stalla alle stelle, cercando di dare un senso convincente alla sua avventura, talvolta dolorosa, oltre che un riconoscimento sociale e un valore etico ai suoi meriti, seguendo qui di seguito una nostra tecnica narrativa idonea a rispecchiare gli eventi e le situazioni e a doppiare naturalmente alla terza persona la voce narrante del memorialista.

C'era una volta, trecento anni fa, un ragazzo che viveva quasi allo stato naturale, libero, come un selvaggio, senza una fissa dimora. Questo piccolo vagabondo era stato costretto a fuggire dalla sua casa (dal paesino di Arthonnay, in Francia), perché, morto il padre, il suo patrigno lo picchiava troppo spesso, facendogli perdere il sonno, l'appetito e il buon umore, che prima non l'aveva mai abbandonato.

Valentin, questo era il suo nome, era stato (quando viveva suo padre) quindi sempre allegro, pronto a dare una mano alla famiglia e ai suoi vicini. Durante la sua fuga da casa con le lacrime agli occhi, scalzo e mal vestito, camminando a lungo senza sosta, per giorni e giorni, una sera si era rifugiato in un grande bosco dove era crollato a terra tra le foglie secche per la stanchezza e si era addormentato. Svegliandosi, aveva visto sulla vicina collina il fumo che usciva dal camino di una capanna costruita in pietra e in legno. La fame si faceva sentire così forte che corse a bussare alla porta nella speranza di trovare qualcuno. Si affacciò un signore anziano dalla lunga barba bianca, coperto di un mantello vecchio e logoro che vedendo quel fanciullo mal vestito e mal nutrito s'intenerì e, mettendogli una mano sulla spalla e sorridendo, lo fece entrare e lo presentò ai suoi fratelli, gli eremiti, che lo invitarono a sedere con loro a tavola e consumare un pasto frugale: pane e brodo di cipolle con patate. Allora per farlo sentire ben accetto gli chiesero come si chiamasse. Lui, sorridendo davanti a quei visi allegri pronunciò il suo nome in modo scherzoso: - Mi chiamano Valentin, forse perché sono ancora piccolo. Ma so fare anche cose da grandi, per esempio, pulire la stalla. Anzi, comincerò subito da li. Fatemi strada! disse correndo con un pezzo di pane nero in mano. Al ritorno gli eremiti lo nominarono pastore dell'eremo, una nomina che fu festeggiato con un ottimo vino.

Valentin sentì allora di aver trovato in quell'eremo una vera famiglia: chi gli insegnava le preghiere, chi a sbucciare le patate, chi a giocare e chi ancora a scrivere e leggere. In pochi mesi fece tanti progressi che padre Anselmo ne era entusiasta; era lui a fargli apprendere le parole con un piccolo disegno e poi a ripeterle ad alta voce e quando doveva scrivere o copiare la parola, era lui a dirigere con la sua mano tremante la mano docile e ferma del piccolo allievo. L'anziano eremita rimase commosso quando Valentin lesse a voce alta la scritta incisa sul legno «Eremo di Sant'Anna», poi, quando durante la lettura il piccolo vagabondo aveva scambiato la parola stalla per stella, interpretò l'errore come un presagio: doveva lasciare la stalla per le stelle, cioè lo spirito del deserto voluto dagli eremiti per lo studio delle stelle. E non si sbagliava. La sua tenacia nella lettura e nella scrittura al lume della candela doveva però portarlo lontano.

In realtà il piccolo pastorello lasciò l'eremo per tornare a vagabondare nei boschi, ad ascoltare le voci della natura, da quella degli uccelli a quella dello scoiattolo, ai rumori delle foglie secche calpestate, ma soprattutto si divertiva a osservare la notte le stelle luminose del firmamento. Per studiarne meglio il movimento il nostro giovane selvaggio saliva su una quercia e intrecciava i rami e poi al chiarore di luna riportava con un piccolo carbone su una tavoletta le precise posizioni di cinque stelle, che evidenziava con una pietra gessosa. All'alba verificava il loro spostamento che riportava su di una mappa; Valentin era tanto contento che si mise a ballare e battere le mani, mentre lo scoiattolo, che non lo lasciava mai, sbucò da un cespuglio e sembrava anch'esso saltellare dalla gioia.

A questo punto va detto che il piccolo vagabondo aveva diretto sempre i suoi passi, dalla sua casa all'eremo, in direzione del sole nascente, l'astro che aveva considerato la sua guida, la sua stella che l'avrebbe condotto verso est, in Lorena, un ducato estraneo, come egli spiegherà poi nelle sue Memorie, *alle mire espansionistiche della Francia. Fu quasi per miracolo (forse voluto dalla Divina Provvidenza) che questo adolescente e pastorello incontrò in quella stessa foresta il duca di Lorena, Leopoldo, che un giorno era uscito a caccia con i nobili della sua corte. Vedendolo tutto intento a studiare le sue mappe gli chiese:*

- *Ragazzo che ci fai qui, non hai paura di qualche lupo? Cosa significano quei disegni?*

- *Le posizioni diverse che assumono le mie stelle prima la sera e poi all'alba,* - *rispose con naturalezza Valentino, che continuava a stringere il suo scoiattolo, ormai addomesticato, come si fosse trattato di un suo amico, o meglio del suo unico porta fortuna.*

Il duca dopo aver espresso la sua ammirazione lo invitò a seguirlo sul suo cavallo, promettendogli di fornirgli tutti i mezzi per perfezionare non solo la sua mappa ma anche i suoi studi a Lunéville, dove egli viveva con la sua corte. Valentino, che da tempo aspettava di realizzare il suo sogno con strumenti più perfetti dei suoi, accettò la sua proposta e la sera si ritrovò finalmente su un letto morbido, fra tanti libri, sfere e carte geografiche, di cui tappezzò la stanza e a cui aggiunse perfino quelle che si era portato dietro dall'eremo. Un giorno il duca entrò nella biblioteca e lo trovò sprofondato nello studio della Terra vicino a mappe che rappresentavano la volta celeste. Leopoldo aveva accettato e accolto quel giovane selvaggio di un tempo, che non era certo amato dai cortigiani, invidiosi dei suoi meriti e del suo talento, ma non aveva mai osato chiedergli una spiegazione riguardo alle ferite che deturpavano il suo bell'aspetto, il suo viso in particolare; approfittando del momento in cui Valentin, nominato due giorni prima bibliotecario di Sua Maestà, metteva ordine tra le centinaia e centinaia di libri e manoscritti, gliene chiese la causa:

Scommetto che è stato un animale ad aggredirti e rovinarti il volto!

Valentin che si aspettava da tempo questa domanda, dopo un silenzio iniziò a raccontare le sue sofferenze durante il terribile inverno del 1709 che stroncò tante vite umane:

– Sua Altezza ricorderà il terribile freddo e gelo di cinque anni fa, che distrusse tanti raccolti e fu la causa di una spaventosa epidemia, nota come il vaiolo, che fece tante vittime. Allora mi trovavo al servizio di un contadino e dormivo in una sua stalla riscaldata dal calore del gregge; il contadino che mi ospitava, per togliermi la febbre mi ricoprì allora di letame, lasciando fuori solo la testa. Mi sembrò d'impazzire; il sudore bagnava tutto il mio corpo: braccia, viso, gambe erano coperti di numerose pustole, che presto divennero cicatrici sanguinanti. Certo fu una brutta esperienza e sofferenza che mi ricorda tanto quella di Giobbe.

Vedendo Leopoldo profondamente turbato da questo suo racconto, il bibliotecario aggiunse sorridendo: – Ecco perché preferisco restare nell'ombra, lontano dallo splendore della corte, anche se sono sempre attratto dalla luce, soprattutto dalla luce delle stelle. Sua Maestà capirà ora perché preferisco restare nell'ombra, lontano dallo splendore della corte, anche se sono sempre attratto dalla luce, naturalmente dalla luce delle stelle. Da precisare che quando Sua Altezza m'incontrò, alcuni mesi fa, ero stato guidato dal sole, o meglio dalla Divina Provvidenza.

- Insomma, dalla stalla alle stelle, - concluse il duca Leopoldo che aveva seguito con interesse quei dolorosi ricordi del pastorello.

Breve conclusione. Le tre letture citate, nate dalla fantasia di tipo favolistico proprio dell'infanzia, per quanto di contenuto diverso, potranno avere il loro effetto terapeutico soprattutto se il nostro lettore avvertirà la voglia, anzi la necessità di trovare un titolo diverso da quello proposto e soprattutto di creare altre storie, secondo i diversi modelli stilistici proposti da Raymond Queneau, ancora più allegre e fantasiose di quelle nostre, accompagnate (sia pure leggermente e marginalmente) da brevi riflessioni ironiche sui tempi attuali. L'obiettivo finale di questo libro resta comunque il sorriso del lettore, la sua creatività, intesa soprattutto come combinazione del buon umore con la fantasia, alleata con l'ironia, con il gioco di tipo matematico e in ultimo con la poesia.

Bibliografia

Cipriani F., (1993) *Dalla corte al ritiro, Figure e temi della civiltà letteraria del Sei-Settecento francese,* Solfanelli, Chieti

Id., (2019) *Dal buon umore all'umorismo*, Solfanelli, Chieti

Jamerey-Duval, V., (1981) *Mémoires*, présentés par Jean Marie Goulemot, *Enfance et éducation d'un paysan au XVIII siècle,* Éditions Le Sycomore

Queneau R., (1983) *Esercizi di stile*, Introduzione e traduzione proposte da Umberto Eco, Nuova Edizione a cura di Stefano Bartezzaghi, Einaudi, Torino

Rodari G., (1980), *Grammatica della fantasia, Introduzione all'arte d'inventare storie*, Einaudi Ragazzi, Torino

Id., (1980) *Favole al telefono,* Disegni di Bruno Munari, Einaudi Ragazzi, Torino.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 3, No 1-2 (2020), 103-120

Matematica e letteratura: un viaggio affascinante tra numeri e parole

Angela Chiefari[1], Mario Innocenzo Mandrone[2], Franca Rossetti[3]

[1]Convitto Nazionale "P. Giannone"- Benevento- e-mail: angelachiefari@gmail.com
[2]Dipartimento di Scienze e Tecnologie-Università del Sannio-Benevento, e-mail: almavit@libero.it
[3]Inserita nella Banca Dati Esperti Valutazione e miglioramento, osservatori dei processi di insegnamento e apprendimento- e-mail: rossetti.franca@fastwebnet.it

……*«A volte mi chiedo dove finisca la matematica e dove inizi la magia»…*
"Il mago dei numeri" Hans Magnus Enzensberger

Sunto
In questo percorso si vuole evidenziare come discipline tra loro apparentemente lontane possano avere molte cose in comune e incontrarsi con un approccio interdisciplinare, attraverso la progettazione di esperienze significative, nelle scuole di ogni ordine e grado. In modo particolare, partendo già dalla scuola primaria, è possibile avvicinare i bambini alla precisione, al rigore e alla sistematicità della matematica anche attraverso la fantasia e la creatività presenti nelle favole, nella letteratura per i ragazzi e nelle grandi opere letterarie. L'approccio metodologico proposto è quello del problem solving, della scoperta e della ricerca dei concetti chiave che suscitano il desiderio di "capire" e cercare spiegazioni, magari divertendosi a sperimentare. L'apprendimento collaborativo ed i piccoli gruppi di lavoro risultano, infatti, altamente produttivi per sviluppare abilità e competenze, per valorizzare il potenziale di apprendimento di ciascun alunno e favorirne l'autonomia. Tale approccio risulta anche valido nella realizzazione di percorsi di inclusione in quanto permette di attivare percorsi di peer tutoring e di peer to peer.

Parole chiave: matematica, letteratura, ricerca-azione, laboratorio linguistico-matematico gioco, problem solving, apprendimento cooperativo, tecnologia, competenze, inclusione, peer tutoring, peer to peer, didattica integrale.

1. Introduzione: Matematica e letteratura

«Un matematico, come un pittore o un poeta, apre dei sentieri. Se i suoi durano più dei loro, è perché sono fatti con le idee. (Godfrey Harold Hardy 1877-1947)
Letteratura e matematica evocano mondi antitetici. Ma- a ben guardare- i rapporti e le affinità tra la matematica, regina delle scienze, e la letteratura, regno della narrazione, del fantastico e della narrazione, sono ben più stretti di quanto si possa immaginare. E sono rapporti che vengono da lontano. La matematica ha da sempre esercitato un fascino profondo su romanzieri, letterati e poeti. Nella creazione letteraria e in quella matematica entrano in gioco capacità linguistiche e attività ideative che hanno profonde affinità tra

loro; affinità e qualità estetiche che emergono dall'interno delle opere letterarie, musicali e figurative. La cultura scientifica e quella umanistica, quindi, non si escludono mutuamente, bensì si postulano reciprocamente. La matematica, difatti, abita da sempre nel cuore dell'uomo, come sete di sapere certo. A questo proposito vorremmo ricordare che un illustre Collega, G. Melzi, in un suo acuto libretto: Perché la matematica, dice che "la matematica alberga nel cuore dell'uomo perché essa traduce quel bisogno di chiarezza, di certezza, di rigore e di coerenza che è tipico di ogni uomo che voglia conoscere".

Per un grande matematico come Hardy la bellezza è una delle caratteristiche della matematica e dice che "Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere belle", "le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale; al mondo non c'è un posto perenne per la matematica sgradevole" e ancora "è senza dubbio molto difficile definire la bellezza matematica, ma questo è altrettanto vero per qualsiasi genere di bellezza". Naturalmente è impossibile qui indagare tutti gli intrecci, le sfaccettature, le convergenze e le divergenze, tutti quegli aspetti, cioè, che rendono la matematica e la letteratura una coppia, oserei dire, indissolubile. Certamente, la forte interconnessione tra matematica e letteratura viene messa in risalto dalle estese sovrapposizioni concettuali, dai prestiti linguistici e dalle profonde interferenze culturali tra le varie forme del pensiero umano. La matematica potenzia l'intuizione e si sa bene che l'intuizione è il punto di partenza di ogni processo di astrazione. L'astrazione, la generalizzazione, la simbolizzazione sono modi particolari della nostra attività razionale, ma sono anche le caratteristiche fondamentali dell'attività matematica. Questa, infatti, movendo dall'osservazione della realtà e dalla manipolazione del concreto, attraverso le operazioni mentali di discriminazione, confronto, associazione ed invarianza, elabora il modello generale, concettuale, simbolico, rappresentativo della realtà stessa.
A livello di scuola primaria l'acquisizione del metodo si realizza in sintonia con la formazione del pensiero mediante l'organizzazione di esperienze e la riflessione su di esse. Il punto di partenza per l'insegnamento della matematica è l'individuazione di un problema e la sua conseguente soluzione. In altre parole, la matematica non si insegna per numeri e per operazioni, ma si insegna per problemi. Infatti, la domanda di formazione matematica è profondamente mutata. Oggi è necessario saper usare concetti, principi e procedimenti matematici adeguati a leggere, interpretare, prevedere la realtà sia naturale, che sociale e tecnologica per poter così valutare, decidere ed agire in modo coerente e produttivo. Compito dell''insegnante è, quindi, quello di saper opportunamente creare le condizioni perché l'interesse e la curiosità del bambino rimangano sempre vivi, facendo anche ricorso alla novità, all'irreale, all'imprevedibile. Ciò è importante soprattutto dal punto di vista metodologico: presupponendo di dover affrontare problemi sia di contenuto matematico, sia di carattere generale, diventa fondamentale il ricorso alle strategie proprie della metodologia della ricerca. A tal proposito il **"Cooperative learning"** si rivela di fondamentale importanza nell'ambito dell'apprendimento.

Numerose ricerche hanno anche dimostrato che con il cooperative learning si recuperano allievi problematici, poco motivati allo studio e con problemi affettivi, si facilita l'integrazione di allievi disadattati per handicap o etnie diverse, si valorizzano gli allievi bravi (gifted student), si sviluppano competenze sociali del senso civico, del rispetto dell'altro, si favorisce lo sviluppo di un cittadino democratico (competenze di cittadinanza). Questo itinerario didattico nasce, pertanto, dal desiderio di aprire la sguardo sulla matematica, una disciplina spesso considerata sterile, astratta, piena di regole, fine a se stessa, per coglierla «in azione» all'interno dell'espressione artistica e letteraria. Esistono, infatti numerosi intrecci, sfaccettature, convergenze e divergenze che possono mostrare questo legame. G. Harold Hardy, un grande matematico britannico, affermava che una delle caratteristiche della matematica fosse la bellezza e che « le forme create dal matematico» , come quelle del pittore o del poeta, devono essere belle. Matematica, letteratura, poesia, infatti, sono creazioni umane che hanno alla base la fantasia, la creatività e un linguaggio rigoroso. Sebbene il rapporto fra la scienza dei numeri e la creazione artistica non sia del tutto evidente, gli intrecci e le convergenze fra queste due sfere della cultura sono stati, nel corso dei secoli, profondi e fecondi. «Scienza e Poesia non possono camminare su strade divergenti. I Poeti non devono aver sospetto di contaminazione. Lucrezio, Dante e Goethe attinsero abbondantemente alla cultura scientifica e filosofica dei loro tempi senza intorbidire la loro vena. Piero della Francesca, Leonardo e Dürer, Cardano e Della Porta e Galilei hanno sempre beneficiato di una simbiosi fruttuosissima tra la logica e la fantasia". (Leonardo Sinisgalli (1908-1981, poeta, estratto da "Natura calcolo fantasia", giugno 1951). Il processo creativo del matematico è anche quello che segue il poeta ed il linguaggio metaforico e simbolico che adopera il poeta è lo stesso di cui si serve il matematico. Ciò che indiscutibilmente appare evidente dallo sviluppo storico della matematica è il legame che questa disciplina ha con la filosofia. Si pensi, ad esempio, solo per citarne alcuni, a Platone, Cartesio, Leibniz, Pascal, i quali, oltre ad interessarsi di filosofia, si sono interessati anche di matematica e quindi per essi il pensiero filosofico era prevalentemente costituito dal pensiero scientifico.

Molti sono gli esempi, nel panorama letterario mondiale, in cui l'intreccio fra scienza e letteratura è fin troppo evidente, o per la formazione dello scrittore, come nei casi del logico Lewis Carrol, dell'ingegnere Carlo Emilio Gadda, del logico Bertrand Russel (Nobel per la letteratura nel 1950), del chimico Primo Levi, del fisico Aleksandr Solgenitsin (Nobel per la letteratura nel 1970), o per il genere letterario, come la science-fiction : Asimov, Crichton, Dan Brown, tanto per citarne alcuni; o i thriller matematici ("Delitti Pitagorici", "Il teorema del pappagallo", ...). Dal canto suo Jacques Hadamard (1865-1963), definito «la leggenda vivente della matematica», in base alla sua personale esperienza, sosteneva che le emozioni possono favorire anche la produzione matematica». (Hadamard Jacques, La psicologia dell'invenzione in campo matematico, p.8-9, Cortina Editore- Milano 1913- Ed. italiana a cura di B. Sassoli). Interessante è anche l'affermazione di Daunou, citata in « Bulletin de la Societé Francaise de Philosophie , vol. 28, Gennaio 1928, p.18 : « Nelle scienze, anche le più rigorose, nessuna verità è nata

dal genio di un Archimede o di un Newton senza una emozione poetica e un brivido dell'intelligenza». Nell'analisi di un processo creativo, che può portare alla nascita di nuove idee sia nel campo matematico che nel campo poetico, stretti legami, quali la fantasia e l'intuizione, sussistono fra la matematica, la letteratura, la poesia.
K. Weierstrass (1815-1897) diceva: «Un matematico che non abbia in sé nulla di poetico non sarà mai un matematico completo.» Pertanto, si può dire che l'intuizione è l'analogo nel dominio dell'intellegibile, di ciò che sono la vista, l'udito, il tatto, nel mondo sensibile. Il fascino di una formula, di una poesia risiede non solo nell'eleganza, nella semplicità e nell'armonia con cui sono legate le loro parti, ma anche nella capacità di stabilire delle relazioni significative fra idee diverse. Molti sono i passi in cui Dante, nella Divina Commedia, mostra di trovarsi perfettamente a suo agio non solo con l'astronomia (cosa ovvia data la struttura dell'intera opera) ma anche con l'aritmetica, la geometria e la logica, tanto che quando gli servono similitudini o metafore, che potrebbe scegliere in qualunque ambito, non ha problemi a sceglierle dalla geometria o dall'aritmetica.

Anche nella vita e nelle opere di Giacomo Leopardi (1798-1837), la scienza è un punto di riferimento costante e importante. Molto significativo è, ad esempio, il seguente passo , tratto dallo Zibaldone, in cui in maniera diretta Leopardi accomuna letterati e scienziati: « … or questa facoltà (la facoltà inventiva) appunto è quella che fa i grandi filosofi e i grandi scopritori di verità. E si può dire che da una stessa sorgente, da una stessa qualità dell'animo, diversamente applicata, e diversamente modificata e determinata da diverse circostanze e abitudini, vennero i poemi di Omero e di Dante, e i Principi matematici della filosofia naturale di Newton. Il Leopardi, ancora, nello Zibaldone così si esprime: "La pratica delle matematiche, del loro modo di procedere e di giungere alle conseguenze, del loro linguaggio… aiuta infinitamente le facoltà intellettive e ragionatrici dell'uomo, compendia le operazioni del suo intelletto, lo rende più pronto a concepire, più veloce e spedito nell'arrivare alla conclusione dei suoi pensieri e dell'intero suo discorso; insomma, per una parte assuefà, per l'altra facilita all'uomo l'uso della ragione!"

Il matematico Bruno de Finetti (1906-1985), famoso probabilista, a proposito di Pirandello così si esprime: «Considero Pirandello come uno dei più grandi spiriti matematici; …. e tale affermazione mi parve accolta con meraviglia. Ed essa infatti non può non sembrare paradossale se, cullandosi nelle inveterate illusioni razionalistiche, si considera la matematica come un complesso di verità assolute che col relativismo pirandelliano sarebbe addirittura agli antipodi». De Finetti ravvisa nelle opere di Pirandello (1867-1936) la struttura che assumono i sistemi logico-deduttivi della matematica dopo la rivoluzione delle geometrie non euclidee. I termini e i metodi della matematica sono costantemente presenti anche in tanti scritti di Italo Calvino: Molti altri racconti di Calvino, direttamente ispirati dalla scienza, si trovano nella raccolta «Le Cosmicomiche» in cui teorie scientifiche, anche avanzate, diventano fonte di ispirazione per racconti fantastici.

Un autore contemporaneo che spesso discute con autorevolezza su temi scientifici, da cui spesso attinge per similitudini, metafore e ispirazioni narrative, già dal suo primo romanzo «Il nome della rosa», è Umberto Eco. Una metafora fisico-matematica è addirittura il punto centrale del suo secondo romanzo: «Il pendolo di Foucault», anch'esso un romanzo giallo. Un altro scrittore famoso come Edgar Allan Poe riteneva che il genio fosse la combinazione indissolubile di matematica e poesia, e numerosi altri autori hanno sottolineato il rapporto privilegiato tra la matematica e la letteratura. Diversi matematici professionisti, appassionati di letteratura, evidenziano le sorprendenti analogie e convergenze tra i due mondi, fornendo anche spunti concreti per ulteriori approfondimenti. Non ho difficoltà a immaginare un'antologia dei più bei frammenti della poesia mondiale in cui trovasse posto anche il teorema di Pitagora. Perché no? Lì c'è quella folgorazione che è connaturata alla grande poesia, e una forma sapientemente ridotta ai termini più indispensabili, e una grazia che non a tutti i poeti è stata concessa». Sono parole del premio Nobel 1996 per la letteratura Szymborska, di sincera ammirazione per uno dei risultati fondamentali della matematica. Virgilio, nell'Eneide, racconta che la regina Didone arrivata sulle coste africane chiese a Labra, re della regione, un pezzo di terra dove fondare una città. Il re per schermirla gli propose tanta terra "… quanta cerchiar di un bue potesse un tergo"; un pezzo di terra grande solo quanto la pelle di un bue. Ma Didone tagliando la pelle di bue in strisce sottilissime cucite insieme e, partendo da un punto sulla costa si mise a recintare con le strisce la terra su cui fondare Cartagine. Un problema che, con linguaggio moderno, rappresenta un tipico problema di massimo e minimo. Il problema che Didone doveva risolvere era quello di circondare con la lunghezza delle strisce la maggior estensione di terra possibile. Risolse brillantemente il problema disegnando un semi-cerchio. Il problema fu trattato per la prima volta in termini matematici da Pappo nel libro V dei suoi volumi di matematica e Fisica, intorno al 390 A.D. Molti artisti, in epoche diverse, hanno subito il fascino della matematica e delle sue idee e dalle sue tecniche e dalle sue forme hanno tratto ispirazione per le loro opere e i loro linguaggi. Il legame tra conoscenze scientifiche ed immaginazione dimostra come regole matematiche possano diventare strumenti di creatività e la ricerca scientifica e tecnologica possano stimolare la fantasia e l'immaginazione. "L'atteggiamento scientifico e quello artistico coincidono-sosteneva Italo Calvino- Entrambi sono atteggiamenti insieme di ricerca e di progettazione, di scoperta e d'invenzione". E lo stesso Victor Hugo affermava: "… non vi è alcuna incompatibilità fra l'esatto e il poetico. Il numero è nell'arte come nella scienza… L'anima dell'uomo ha tre chiavi che aprono tutto: la cifra, la lettera, la nota. Sapere, pensare, sognare. Tutto qui". Anche la matematica, quindi, collocata abitualmente nel dominio scientifico, è arte. Difatti, "Mathematics does to the mind what Music does to the soul and Poetry to the heart".

La matematica, pertanto, sorta nella più lontana preistoria non appena l'uomo ha sentito il bisogno di contare e di misurare, per millenni si è limitata a fornire metodi per la risoluzione di problemi pratici e perciò non si è sviluppata come scienza speculativa. E' nella civiltà greca che la matematica acquista il carattere di una scienza pura e, seguendo i voli del pensiero, inizia il suo sviluppo che, nel volgere dei secoli, ha consentito e precorso lo sviluppo della civiltà. La matematica è, quindi, una disciplina che ha a che fare con idee, pure creazioni del pensiero, la cui definizione e comprensione richiedono notevoli dosi di fantasia e capacità di astrazione. L'immaginazione e la fantasia sono in fondo gli ingredienti principali che stanno alla base della creatività. Fantasia ed immaginazione, d'altra parte, stimolano nuove emozioni, ispirano pensieri creativi e ci immergono in nuove realtà. «Come espressione della mente umana la matematica riflette la volontà attiva, la ragione contemplativa e il desiderio di perfezione estetica. I suoi elementi fondamentali sono la logica e l'intuizione, l'analisi e la costruzione, la generalità e l'individualità. Tradizioni diverse potranno mettere in evidenza aspetti diversi, ma è soltanto la reazione di queste forze antitetiche e la lotta per la loro sintesi che costituiscono la vita, l'utilità e il valore supremo della scienza matematica. (R. Courant e H. Robinson - Che cos'è la matematica" -Universale Bollati Boringhieri) .

La matematica, dunque, è al tempo stesso, strumento e linguaggio; quindi il suo apprendimento dovrebbe avere caratteristiche simili a quelle che connotano l'apprendimento di una lingua. In questo, l'insegnamento della matematica e quelli delle discipline dell'area linguistico- letteraria possono trovare un'utile sinergia. Concludiamo con le parole di Dino Buzzati rivolte a Sinisgalli :" La tua natura di poeta, la tua cultura di ingegnere e la tua inguaribile passione per le avventure matematiche si sono fuse con sorprendenti risultati; e proprio là dove il punto di contatto fra mondo artistico e mondo tecnico, fra i fantasmi e le cifre, poteva sembrare più difficile o addirittura assurdo, tu hai costruito un ponte che li unisce; scoprendo tutta una serie di imprevedibili rispondenze e affinità, tutta una rete di segreti vasi comunicanti. In questo mi sembra stia il significato più interessante di «Civiltà delle macchine», viva dimostrazione che non ha senso stabilire dei reparti stagni, qua l'arte e là la scienza, qui la letteratura e lì la tecnica; geniale tentativo quindi di proporre, su un livello di massimo impegno, una fusione culturale della vita moderna. Dino Buzzati, «Civiltà delle Macchine», 1956, n.1.

2. **Un viaggio affascinante tra numeri e parole**

…… la mente non ha bisogno, come un vaso, di essere riempita, ma, come legna da ardere, ha bisogno solo di una scintilla che la accenda, che vi infonda l'impulso alla ricerca e il desiderio della verità. (Plutarco, Moralia, De audiendo)

Cercare connessioni tra due discipline così diverse tra loro potrebbe sembrare impossibile, eppure hanno diverse cose in comune. Possiamo verificarlo, ma soprattutto sperimentarlo, con la progettazione di esperienze significative attraverso un approccio interdisciplinare. Siamo di solito portati a credere che, mentre la lingua e la narrazione implicano fantasia e creatività, la matematica sia sinonimo solo di precisione, rigore e concretezza. Non dobbiamo dimenticare, però, che leggere apre la mente e, nelle storie come nei racconti, possiamo trovare una matematica più simpatica e coinvolgente.

Nelle Indicazioni Nazionali e nuovi scenari del 2018 troviamo scritto che "…La matematica fornisce strumenti per indagare e spiegare molti fenomeni del mondo che ci circonda, favorendo un approccio razionale ai problemi che la realtà pone e fornendo, quindi, un contributo importante alla costruzione di una cittadinanza consapevole"... *"In particolare, la matematica (...) contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e* *discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri"*

La dialettica matematica contribuisce quindi allo sviluppo del pensiero, delle idee, al ragionamento e ad un approccio scientifico rispetto ai problemi che la realtà ci pone.

Sempre nello stesso documento viene ribadito che "Lingua e matematica, apparentate, sono alla base del pensiero computazionale. Sostanzialmente, si tratta di un'educazione al pensiero logico e analitico diretto alla soluzione di problemi. Ciò contribuisce alla costruzione delle competenze matematiche, scientifiche e tecnologiche, ma anche allo spirito di iniziativa, nonché all'affinamento delle competenze linguistiche"

Viene quindi confermato il legame tra competenze matematiche e competenze linguistiche indispensabili per affrontare e superare i problemi che incontriamo nella vita di tutti i giorni.

Da ciò l'importanza che riveste una didattica che tenga conto di questo legame realizzando una pluralità di percorsi operativi. E' necessario un lavoro di ricerca-azione da parte del docente, con la selezione dei brani o dei testi, in base agli obiettivi che si vogliono raggiungere e la sperimentazione, in classe e/o per piccoli gruppi, delle proposte didattiche scelte.

L'approccio interdisciplinare stimola l'immaginazione e il desiderio di sperimentare e favorisce atteggiamenti di ricerca, progettazione, scoperta e invenzione. Permette il contemporaneo sviluppo del pensiero umanistico e di quello scientifico, per migliorare sia le competenze logiche e linguistiche dei ragazzi che la capacità di risolvere problemi e di comunicare.

Matematica e letteratura rappresentano quindi un binomio avvincente in grado di coinvolgere gli allievi nel loro percorso di apprendimento. L'esperienza maturata in anni di insegnamento con bambini dai sei agli undici anni dimostra come ciò sia possibile, se non addirittura auspicabile e produttivo. Perché tale approccio contribuisce a sviluppare abilità e competenze, soprattutto "imparare ad imparare" per valorizzare il potenziale di apprendimento di ciascun alunno. La metodologia suggerita sarà quella laboratoriale, della Flipped Classroom e del problem solving.

Partendo già dalla scuola Primaria si possono quindi:

- progettare percorsi operativi graduali, selezionando tipologie testuali in base all'età degli alunni e agli argomenti che si vogliono presentare;
- realizzare attività di lettura creativa o di ascolto per suscitare curiosità, interesse e motivazione verso argomenti ritenuti difficili e astratti;
- scoprire o consolidare contenuti di matematica attraverso narrazioni significative in contesti inusuali, reali o fantastici, con protagonisti spesso vicini al mondo del lettore.

Il laboratorio linguistico-matematico diventa perciò un ambiente di apprendimento flessibile che pone al centro del processo l'alunno, valorizzando le sue competenze, il suo vissuto relazionale e la sua autonomia. Favorisce l'apprendimento collaborativo anche attraverso forme di peer to peer, peer tutoring e attività per piccoli gruppi di lavoro.

Permette inoltre la realizzazione di percorsi di inclusione, sperimentando la disponibilità verso l'altro e la gioia di condividere quanto ricercato, verificato e appreso in modo diverso e divertente.

Il percorso didattico presentato è stato realizzato con gli alunni delle classi quinte della scuola Primaria del Convitto Nazionale "Pietro Giannone" di Benevento, nell'ambito del Progetto "Matematica in gioco" e presentato dai ragazzi alla Manifestazione "Studenti in cattedra e docenti nei banchi" alla finale della XIII edizione dei Giochi Matematici del Premio Aldo Morelli.

Questo percorso è iniziato dalla lettura di alcuni capitoli tratti dal libro "Il mago dei numeri" di Hans Magnus Enzensberger" che racconta le avventure di Roberto, un ragazzino di dodici anni che non ama la matematica. Una notte, Roberto incontra in sogno il "Mago dei Numeri", un diavoletto bizzarro e astuto. Per dodici notti farà in sua compagnia, un viaggio avventuroso alla scoperta della Matematica. Si ritrova così in scenari fantastici dove impara "divertendosi" scoprendo che la matematica non è affatto difficile e noiosa come quella studiata a scuola, ma può diventare invece un'avventura entusiasmante!

La storia ha subito incuriosito i ragazzi che sono passati dalla lettura individuale a quella collettiva e ad alta voce con scambio di ruoli e drammatizzazione delle scene più divertenti. Dalla lettura è scaturito l'approfondimento sul significato delle parole, delle regole presentate e anche dei confronti con le conoscenze possedute. Per ogni capitolo del libro sono stati estrapolati i contenuti matematici e ciò ha stimolato la ricerca e la scoperta di concetti chiave, parole che "accendono" le lampadine dell'esperienza, oppure che suscitano il desiderio di "capire" e cercare spiegazioni, divertendosi a sperimentare. I ragazzi si sono divisi i compiti e hanno approfondito i diversi argomenti cercandoli sui testi, su internet con immagini, video, tutorial, giochi online o da scaricare. L'utilizzo di internet ha permesso agli alunni di allargare l'orizzonte letterario e matematico e scoprire loro positiva interazione. La ricerca di software e giochi, anche online, gli ha dato la possibilità di mettersi alla prova, di consolidare e scoprire sempre nuove applicazioni per regole e strategie. Nei diversi gruppi di lavoro i ragazzi hanno scelto di approfondire i capitoli relativi alla seconda e terza notte ricercando tutti le connessioni possibili tra letteratura e matematica.

- La prima cosa che gli alunni hanno ricercato è stata la storia del Mago dei numeri in rete. Sono riusciti così a trovare alcuni video delle diverse parti del racconto che hanno aiutato i compagni a comprendere meglio lo sviluppo della storia.

  https://www.youtube.com/watch?v=FypYQsygZGU

  Prima, seconda e terza notte

  https://www.youtube.com/watch?v=QWjg4UoNTpU

  Quarta,quinta e sesta notte

  https://www.youtube.com/watch?v=rbVaJHyvFXI

  Settima,ottava e nona notte

  https://www.youtube.com/watch?v=f90fhyeNc9g

  Decima,undicesima e dodicesima notte

  https://www.youtube.com/watch?v=uMRV0TcsVUo

  L' attenzione dei ragazzi si è poi focalizzata sulla seconda e terza notte.

- **SECONDA NOTTE**

  Nel sogno della seconda notte, il mago dei numeri parla a Roberto dei numeri "saltellati" cioè i numeri elevati a potenza perché moltiplicati per se stessi è come se facessero dei saltelli.

Le potenze rappresentano un argomento particolarmente interessante e coinvolgente per i ragazzi che hanno ricercato filastrocche antiche e moderne, approfondimenti, leggende e giochi online.

- Nel papiro di Rhind (1650 a.C.) Ahmes scrive una filastrocca, conosciuta come il problema #79

"I 7 gatti di Ahmes"

In una proprietà ci sono 7 case
In ogni casa ci sono 7 gatti
Ogni gatto acchiappa 7 topi
Ogni topo mangia 7 spighe
Ogni spiga dà 7 heqat[1] di grano
Quante cose[2] ci sono in tutto in questa filastrocca?

[1] L'heqat era la misura di capacità pari a circa 4,785 litri.
[2] Col termine "cose" si intendono sia gli oggetti che gli animali e le misure.

Case $7^1 = 7$
Gatti $7^2 = 49$

Topi $7^3 = 343$
Spighe $7^4 = 2.401$
Heqat $7^5 = 16.807$

Totale 19.607

- Tra tutti quelli che hanno citato questo gioco, ricordiamo anche Fibonacci nel suo <u>Liber Abaci</u> del 1202, nella versione

"Sette vecchie in viaggio per Roma"

Ci sono sette vecchie in viaggio per Roma
Ognuna di esse ha sette muli
Ogni mulo porta sette sacchi
Ogni sacco contiene sette pagnotte
In ogni pagnotta ci sono sette coltelli
Ogni coltello è in sette foderi
Donne, muli, sacchi, pagnotte, foderi,
in quanti viaggiano per Roma?

Vecchie $= 7^1 = 7$
Muli $= 7^2 = 7 X 7 = 49$
Sacchi $= 7^3 = 7 X 7 X 7 = 343$
Pagnotte $= 7^4 = 7 X 7x 7 X 7 = 2\,401$
Coltelli $= 7^5 = 7 X 7 X 7 X 7 X 7 = 16\,807$
Foderi $= 7^6 = 7 X 7 X 7 X 7 X 7 X 7 = 117\,649$

Totale = 120 449

- **FILASTROCCA**

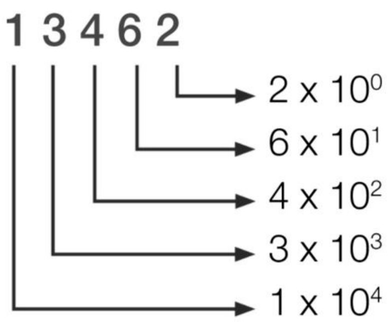
Per la strada che porta a Camogli
passava un uomo con sette mogli.
Ogni moglie aveva sette sacche
in ogni sacca aveva sette gatte,
ogni gatta sette gattini.
Fra gatti, gatte, sacche e mogli
in quanti andavano, dite, a Camogli?

1 lui
Mogli $= 7^1 = 7$
Sacche $= 7^2 = 7 X 7 = 49$
Gatte $= 7^3 = 7 X 7 X 7 = 343$
Gattini $= 7^4 = 7 X 7x 7 X 7 = 2\,401$
7 + 49 + 343 + 2401 = 2.800 + 1 lui

Totale 2.801

Insieme alle potenze sono stata approfondite le caratteristiche delle potenze del 10 e i POLINOMI NUMERICI

Classe dei miliardi			Classe dei milioni			Classe delle migliaia			Classe delle unità		
hG	daG	uG	hM	daM	uM	hk	dak	uk	h	da	u
100 miliardi	10 miliardi	1 miliardo	100 milioni	10 milioni	1 milione	100 mila	10 mila	mille	cento	dieci	uno
10^{11}	10^{10}	10^9	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10	1



Le unità sono rappresentate da $10^0 = 1$
Le decine da $10^1 = 10$
Le centinaia da $10^2 = 100$
Le unità di migliaia da $10^3 = 1\,000$
Le decine di migliaia da $10^4 = 10\,000$
$1 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 2 \times 10^0 = 13\,462$

34 670 = (3 X 10 000) + (4 X 1 000) + (6 X 100) +(7 X 10)
34 670 = $3 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 7 \times 10^1$
Oppure
$7 \times 10^5 + 3 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 9 \times 10^1 = 731\,890$
(7 X 100 000) + (3 X 10 000) + (1 X 1000) +(8 X 100) + (9 X 10) = 731 890

3. La storia di Sissa Nasir

Una leggenda legata alle potenze è quella degli Scacchi di Sissa Nasir che inventa per il re di Persia questo gioco bellissimo. Dietro l'insistenza del sovrano, che voleva a tutti i costi ricompensarlo, Sissa Nasir chiese in cambio qualcosa apparentemente di poco valore…
1 granello di riso per la prima casella, 2 per la seconda, 4 per la terza, e così via sempre al **raddoppio**, fino a completare le caselle della scacchiera che lui stesso aveva inventato. Il re rise a questa richiesta ma i suoi tesorieri sbiancarono in volto perché, facendo i dovuti calcoli, anche raccogliendo tutto il riso di Persia, di Cina e di India e di ogni terra emersa, attuale, passata e futura, mai e poi mai si sarebbe potuto raccoglierne tanto. Non potendo ricompensarlo allora il sovrano fece decapitare Sissa Nasir.

In termini matematici, gli alunni hanno scoperto che ogni casella della scacchiera doveva rappresentare *una potenza di base 2*, e ciascuna di esse aveva come esponente il numero naturale successivo di quello che indicava l'esponente della casella precedente.

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2^{24}	2^{25}	2^{26}	2^{27}	2^{28}	2^{29}	2^{30}	2^{31}
2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
2^{40}	2^{41}	2^{42}	2^{43}	2^{44}	2^{45}	2^{46}	2^{47}
2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{52}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}

$1 + 2 = 3$

$1 + 2^1 + 2^2 = 7$

$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15$

$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$

....

$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots\dots\ 2^{63} = 18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$

18 trilioni 446 biliardi 744 bilioni 73 miliardi 709 milioni 551 mila 615

DANTE…GLI SCACCHI E IL…PARADISO

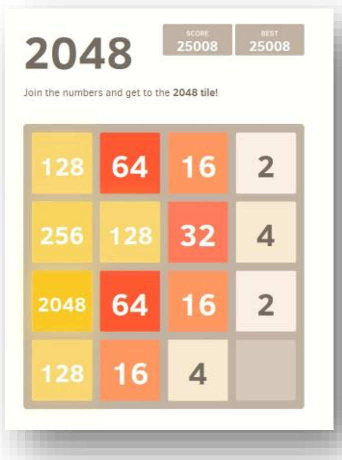
La leggenda di Sissa Nasir era notissima durante il Medioevo con il nome di *Duplicatio scacherii*, tanto che vi appare un accenno anche nella Divina Commedia di Dante Alighieri, dove viene adoperata dal sommo poeta per dare un'idea al lettore del numero degli Angeli presenti nei cieli:

"*L'incendio suo seguiva ogne scintilla*
ed eran tante, che 'l numero loro
più che 'l doppiar de li scacchi s'inmilla"

Paradiso, XXVIII, 91-93

Qui si parla di un incendio con tante scintille, usate come metafora per rappresentare la moltitudine degli angeli. Ma per dare un'idea di quanto siano numerose queste scintille, ovvero gli angeli, Dante fa riferimento alla famosa leggenda di Sissa Nassir, l'inventore degli scacchi, al quale il re promise qualunque ricompensa per la meravigliosa invenzione. Lui, usando la progressione geometrica dei numeri, riesce a richiedere una quantità inestimabile di chicchi di riso e Dante associa a questo "grande numero" gli angeli che nascono mille a mille. Così facendo vuole creare un senso d'immensità. Inoltre, intende che il numero degli angeli supera addirittura quello infinitamente grande usato nella Bibbia per descrivere la folla dei salvati: miriadi di miriadi ovvero mille miliardi di miliardi, cioè 10^{144}.

GIOCHIAMO CON LE POTENZE DEL 2



Il gioco online, scoperto dai ragazzi, è 2048, un puzzle-game molto coinvolgente creato da Gabriele Cirulli. L'obiettivo del gioco è quello di fondere insieme i numeri *(potenze di 2)*, al fine di raggiungere l'ultimo '2048 'e vincere la partita! L'area di gioco 2048 è una griglia 4x4 con 16 slot quadrati.

Per giocare
http://gabrielecirulli.github.io/2048/

TERZA NOTTE

Nel sogno della seconda notte, il mago dei numeri parla a Roberto dei numeri "prìncipi", cioè i numeri primi e di come trovarli e riconoscerli. Gli insegna anche dei "segreti "su questi numeri speciali. Dopo la lettura i ragazzi iniziano ad approfondire l'argomento sui numeri primi per scoprirne le caratteristiche, i giochi e le curiosità.

4. Alla scoperta dei numeri primi

Cosa sono i numeri primi?

I numeri primi sono quei numeri divisibili solo per 1 e per sè stessi, con resto 0.

11, ad esempio, è un numero primo perché 11: 11 = 1 con resto 0; se provi a dividere 11 per un altro numero avrai sempre un resto diverso da 0:

11 : 2 = 5 con resto 1   11 : 3 = 3 con resto 2   11 : 4 = 2 con resto 3 ecc.

12, invece, non è un numero primo, perché si può dividere non solo per 1 e per 12, ma anche per 2, per 3, per 4, per 6.

12   1 = 12   12: 12 = 1   12: 2 = 6   12 : 3 = 4   12 : 4 = 3   12 : 6 = 2

Chi li ha inventati?

Fu Eratostene ad inventare un pratico sistema per trovare i numeri primi, comunemente noto come CRIVELLO DI ERATOSTENE. Con questo "crivello" (setaccio), è possibile "setacciare" (separare) facilmente i numeri primi dagli altri numeri. Eratostene, nacque a Cirene (in Libia) intorno al 270 a.C. Fu direttore della grande Biblioteca di Alessandria, filosofo, letterato, poeta e soprattutto matematico, astronomo e geografo: uno dei primi scienziati. Riuscì per primo a misurare con grande precisione e con strumenti molto semplici la circonferenza terrestre, quando molti credevano ancora che la terra fosse piatta.

Ma come si applica questo sistema facile per trovare i numeri primi?

Bisogna costruire una tabella con i primi 100 numeri, senza lo zero e l'uno. Poi procedere così:

1° eliminare prima i numeri pari, quelli della tabellina del 2 o MULTIPLI di 2.

2° eliminare i numeri MULTIPLI di 3, quelli della tabellina del 3.

3° eliminare i MULTIPLI di 5, quelli della tabellina del 5.

4° eliminare i MULTIPLI di 7, quelli della tabellina del 7.

5° Rimarranno 25 numeri primi, tutti dispari tranne il 2. I numeri a due cifre terminano sempre con 1, 3, 7 o 9.

GIOCHIAMO CON I NUMERI PRIMI

Gioco interattivo per scoprire i numeri primi e altre curiosità su Eratostene

Attraverso un lavoro di ricerca e scoperta i ragazzi hanno trovato alcune curiosità sui numeri primi

NUMERI PRIMI GEMELLI	**NUMERI PRIMI REVERSIBILI**	**NUMERI PRIMI CUGINI**	**NUMERI PRIMI PALINDROMI**
Sono coppie di numeri primi consecutivi la cui differenza è 2 (es: 3 e 5 sono consecutivi e la loro differenza è 2).	Sono coppie di numeri primi formati dalle stesse cifre ma sistemate in un ordine posizionale diverso (es:13 e 31, le cifre sono sempre 1 e 3 ma posizionate in modo diverso)	Sono coppie di numeri primi consecutivi la cui differenza è 4 (es: 3 e 7 sono consecutivi e la loro differenza è 4)	Sono numeri primi che rimangono invariati leggendoli da destra a sinistra.
Esempi di NUMERI PRIMI GEMELLI	**Esempi di NUMERI PRIMI REVERSIBILI**	**Esempi di NUMERI PRIMI CUGINI**	**Esempi di NUMERI PRIMI PALINDROMI**
(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73), (101, 103), (107, 109), (137, 139), (149, 151)	1, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97, 101 ….	(13, 17), (19, 23), (37, 41), (43, 47), (67, 71), (79, 83), (97, 101), (103, 107), (109, 113), (127, 131)	11-101-131-151-181-191-313 -353 – 373 - 383 ….

- **CONGETTURA DI *GOLDBACH***

Christian *Goldbach* è stato un matematico tedesco, molto noto per la sua congettura sui numeri primi.

Tale congettura è stata formulata nel 1742 in una lettera indirizzata al matematico svizzero Leonhard Euler. Si tratta di uno dei più antichi problemi matematici ancora oggi irrisolti della Teoria dei Numeri.

*"Ogni **NUMERO PARI** maggiore di 2 è la somma di **due numeri primi**"* 14= 11+3

36= 19 + 17
12= 7 + 5
48= 19 + 29
20 = 17 + 3 …

"Ogni ***NUMERO DISPARI*** *maggiore di 5 può essere scritto come somma di* ***tre numeri primi****"*

27= 17 + 3 + 7
41= 11 + 13 + 17
69= 23 + 17 + 29
37= 11 + 7 + 19
25 = 7 + 13 + 5 …

A conclusione del lavoro posso con piacere affermare che l'esperienza è stata accompagnata dall'entusiasmo dei ragazzi che si sono divertiti a leggere, ricercare, scoprire e mettersi in gioco collaborando tra loro e sperimentando il "piacere di apprendere".
Le idee della matematica, così come tutte le nostre idee, hanno le loro radici nelle esperienze e nelle osservazioni della realtà nella quale viviamo. La letteratura rappresenta un ampliamento della realtà, dove sperimentare, seppure nell'immaginazione, realtà diverse e, in questo allargamento di orizzonti possiamo trovare l'insieme delle esperienze e delle situazioni in cui le idee matematiche affondano le loro radici.

5. Qualche considerazione a supporto di una didattica integrale

Chiediamoci: "come mai l'esperienza sopra riportata ha potuto realizzarsi senza difficoltà addirittura, per ammissione della stessa insegnante, con naturalezza?

Dando per scontato un ambiente favorevole che pone al centro dell'attenzione l'alunno come persona e quindi una predisposizione dell'insegnante nei confronti di un processo insegnamento-apprendimento integrale, ritengo che Matematica e Letteratura, così diverse, così vicine si siano potute facilmente incontrare anche per una questione cerebrale.

Se la Matematica è la scienza relativa a problemi numerici e alle figure geometriche, divisa in branche tutte caratterizzate da rigorosi metodi di formalizzazione, di calcoli, deduzioni e molto altro ancora, mentre la Letteratura è l'insieme delle opere fondate sulla parola e affidate alla scrittura, pertinenti a una cultura o civiltà, a un'epoca o a un genere a noi pervenute, è tuttavia indubbio che alcuni tratti di riferimento siano comuni.

- Lettura e scrittura sono, infatti, indispensabili per entrambe
- Le rappresentazioni mentali e l'utilizzo della Teoria della mente sono rintracciabili tanto nel problem solving quanto nella comprensione di un racconto o del significato di una fiaba
- Capacità di deduzione sono imprescindibili per l'aspetto semantico dei contenuti
- L'intuizione è una componente fondamentale per l'individuazione e la ricerca di nuove soluzioni
- E, non da ultimo, è comune ad entrambe la capacità di generare emozioni, basti pensare alle più belle formule matematiche o al coinvolgimento nella lettura di

una poesia o di un romanzo; ma questi sono solo alcuni esempi e altri se ne potrebbero trovare.

Casualità delle circostanze, data la scelta delle discipline o c'è dell'altro?

La risposta emerge dalle considerazioni che si possono fare andando ad esplorare la nascita e lo sviluppo di alcune nuove scienze, ad esempio percorrendo varie tappe che hanno portato alla Teoria delle intelligenze multiple, desunte da studi di Neurofisiologia, ne ricordo qualcuna:

- 1865: un chirurgo francese, studiando pazienti affetti da afasia, individua un'area del cervello che porta il suo nome, Broca, deputata alle funzioni del linguaggio; in seguito a questa scoperta il cervello verrà mappato.
- 1905: A. Binet e T. Simon nell'intento di risolvere il problema dell'inserimento scolastico dei bambini con ritardo mentale propongono la prima scala metrica dell'intelligenza.
- 1912: nasce il concetto di Quoziente Intellettivo con relativa formula per il suo calcolo (per gli studi dell'epoca, l'intelligenza era una diretta conseguenza dalle abilità matematiche possedute dai bambini)
- 1933: Cattell-Horn-Carroll cominciano a distinguere tra intelligenza fluida e cristallizzata.
- Attualmente, dalla Neurofisiologia sappiamo che per garantirci efficienza e funzionalità ottimali, in tutte le nostre esperienze, abbiamo bisogno che tanto l'emisfero destro, quanto il sinistro, funzionino perfettamente e, possibilmente, in comunicazione tra loro, in una sorta di collaborazione.

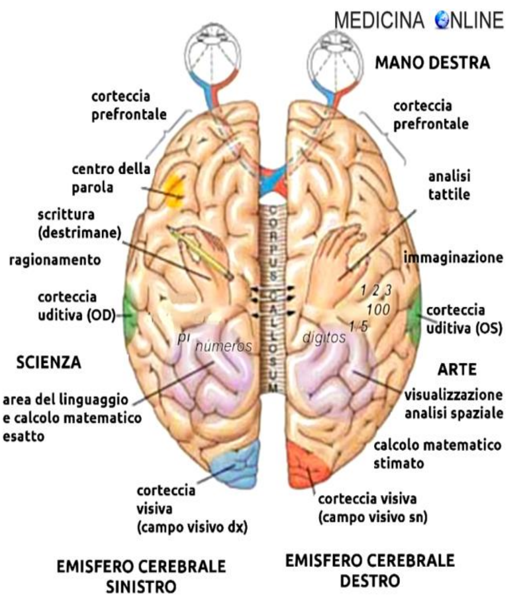


Immagine tratta da medicinaonline.co del 3/9/2018

Come si può notare dall'immagine sopra riportata, l'emisfero sinistro è deputato a funzioni importanti che riguardano il centro della parola, il ragionamento, l'area del linguaggio e del calcolo matematico esatto, mentre l'immaginazione, la visualizzazione spaziale e il calcolo matematico stimato sono prerogativa dell' emisfero destro; il corpo calloso congiunge i due emisferi e ne rende possibile la collaborazione tenendo presente che la lateralizzazione funzionale è inversamente proporzionale al coinvolgimento del corpo calloso stesso. Quindi, ritornando al discorso da cui siamo partiti, dobbiamo desumere che, nella fattispecie, questo collegamento, non solo sia avvenuto, ma abbia funzionato in modo egregio perché non dobbiamo dimenticare che il nostro apprendimento funziona anche per associazione, facendo collegamenti tra concetti chiave e immagini, stimolando la memoria con l'uso dei colori, il ricordo di una poesia così come di una tabellina o di un algoritmo. Ovviamente queste considerazioni sono valide anche se la matematica viene coniugata con altre discipline, anzi "allargare" i confini della matematica dovrebbe diventare uno stile di lavoro per una grande conquista: una didattica integrale caratterizzata da un pensiero radiale che influisce sulla plasticità del cervello, tanto più plastico quanto più è giovane, un pensiero che induce l'alunno a pensare radialmente e a imparare divertendosi, in un ambiente di apprendimento flessibile; senza pregiudizi e in ogni ordine di scuola.

Buona didattica a tutti!

Bibliografia

I magnifici dieci. L'avventura di un bambino nella matematica, Anna Cerasoli, editoriale Scienza

La sorpresa dei numeri. Un viaggio nella matematica simpatica, Anna Cerasoli, editoriale Scienza

La geometria del faraone, di Anna Cerasoli, editoriale Scienza

Gli artisti dei numeri, Albrecht Beutelspacher, Salani editore

La doppia vita dei numeri, Erri De Luca, Feltrinelli editore

L'uomo che sapeva contare, Malba Tahan, Salani editore

Manuale delle metodologie e tecnologie didattiche, Gallo- Pepe, edizioni Simone

Psicologia generale, Feldman, Amoretti, Ciceri,Mc Graw Hill Education

Neurofisiologia, Làdavas-Berti, Il Mulino

Matematica e Letteratura. Dalla Divina Commedia al Noir", Gian Italo Bischi , Egea, Centro Pristem Università Bocconi,2016

Matematica e letteratura -curatori: P.Maroscia, C.Toffalori, F.S. Tortoriello, G. Vincenzi -UTET Università ,2016

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 3, No 1-2 (2020), 121-128

Alcuni suggerimenti didattici di geometria Euclidea

Enzo Barone

enzo.barone@libero.it

Sunto

Nel rileggere alcune pagine di geometria euclidea e nell'aiutare i miei nipoti o quelli dei miei amici, mi sono imbattuto in alcune gustose proprietà sulle quali non mi ero mai soffermato e che credo possano essere spunto per delle riflessioni didattiche e delle idee artistiche.
In quanto segue quindi non c'è nulla di originale, ma solo un tentativo di enucleare e mettere in evidenza alcune proposizioni fra le tante della geometria euclidea.

Parole Chiave: Geometria euclidea, didattica, disegno geometrico.

1. Premesse

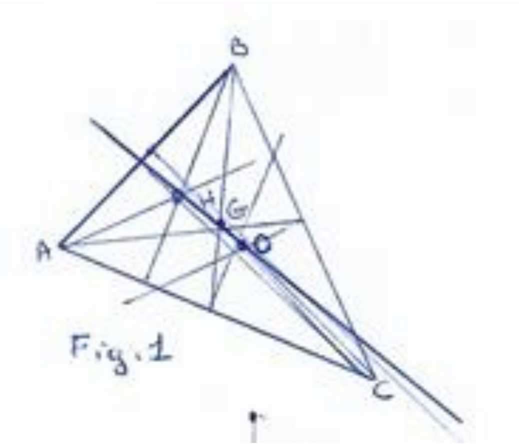
Intanto ho osservato che tutto ciò che riguarda i triangoli è fondamentale per tutta la geometria euclidea. In particolare, i criteri di uguaglianza e quelli di similitudine, oltre ovviamente ai famosi *Teorema di Pitagora, di Euclide e di Talete.* Inoltre, conviene ricordare i luoghi geometrici dei triangoli:

a) *Circocentro O:* punto d'incontro degli *assi* dei lati del triangolo,
b) *Incentro I:* punto d'incontro delle *bisettrici* del triangolo,
c) *Ortocentro H:* punto d'incontro delle *altezze* (o dei prolungamenti) dei lati di un triangolo. È interno al triangolo, solo se questo è *acutangolo,*
d) *Baricentro G:* punto d'incontro delle *mediane* di un triangolo.

Ci sono altri *punti notevoli*, ma non siamo interessati per gli scopi di questa nota. a), b), c) e d) sono proprietà che si devono dimostrare e la cosa non è affatto banale, specie per un ragazzo di quattordici o quindici anni.
Sul teorema di Pitagora è interessante osservare che il teorema vale anche se al posto dei quadrati, si mettono dei poligoni regolari o dei semicerchi.
Un risultato geniale, dovuto al grande EULERO (1707-1783) è il seguente teorema dove si sono usate le lettere O, G e H precedenti.

Teorema 1. In un triangolo H, G ed O sono allineati, con O ed H da parti opposte rispetto a G e HG = 2 OG. La congiungente HGO si chiama retta di Eulero (Vedi fig.1).

Sorvoliamo sulla dimostrazione che si può trovare su internet, cercando “retta di Eulero”.



2. Osservazioni sui quadrilateri

Tornando allo scopo di questa nota, vediamo qualche conseguenza dello studio dei triangoli sui quadrilateri.

Incominciamo con il

Teorema 2 di Varignon (1654-1722).

I punti medi dei lati di un quadrilatero ABCD sono vertici di un parallelogrammo A’B’C’D’, i cui lati sono la metà delle diagonali del quadrilatero. (vedi fig.2)

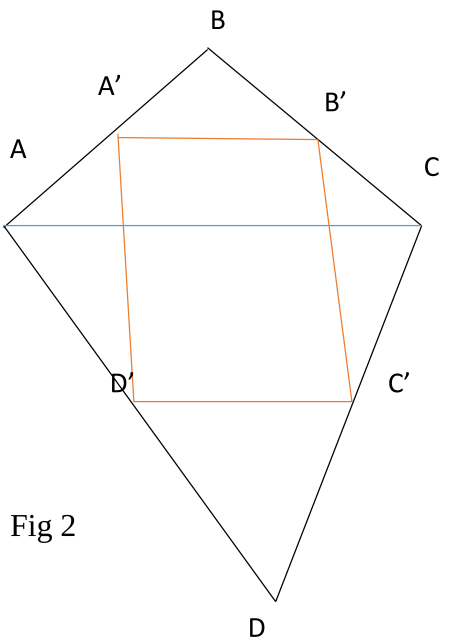


Fig 2

Dimostrazione

Questo teorema è una conseguenza del seguente

Lemma

In un triangolo ABC, se A’ è il punto medio del lato AB e A’B’ è la parallela al lato AC, allora BB’ = B’C e A’B’ = AC/2.

Basta applicare tale lemma ai triangoli formati dalle diagonali del quadrilatero.

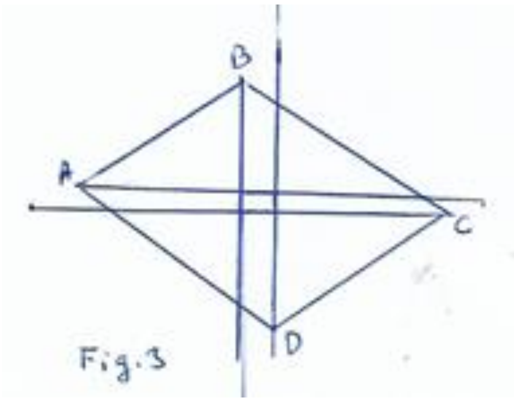
c.v.d.

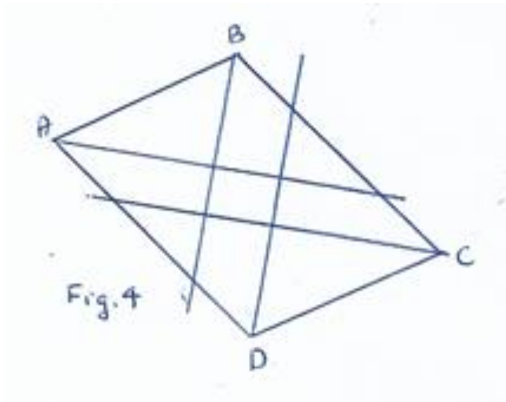
Questo teorema ci consente dunque di passare in modo unico, da un quadrilatero qualunque ad un parallelogrammo, cioè da una figura irregolare ad una molto più regolare, avendo lati, a coppie, paralleli.

<u>Teorema 3.</u>

Le bisettrici degli angoli di un parallelogrammo formano un rettangolo.

Vedi fig. 3 e fig.4.





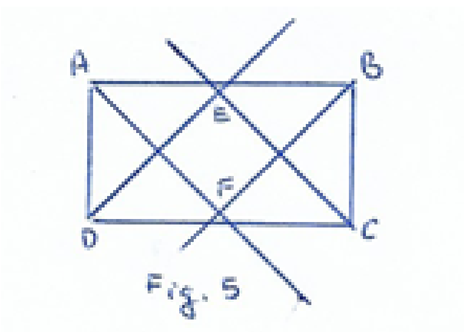
<u>Dimostrazione</u>

Denoteremo con A^ l'angolo nel vertice A. Considerato un parallelogrammo ABCD, le bisettrici di A^ e di C^ sono parallele ed altrettanto accade per B^ e D^. Inoltre, poiché A^ + B^ = π, la bisettrice di A^ è perpendicolare alla bisettrice di B^.

<u>c.v.d.</u>

<u>Teorema 4.</u>

Le bisettrici degli angoli di un rettangolo formano un quadrato (Vedi fig.5).



<u>Dimostrazione</u>

Considerato il rettangolo ABCD, sia F il punto d'incontro delle bisettrici di B^ e di A^ e sia E l'intersezione delle bisettrici di C^ e di D^. I triangoli BFA e CED sono uguali e le loro intersezioni formano angoli retti. <u>c.v.d.</u>

In altre parole, i teoremi 2, 3 e 4 ci dicono come si può passare da un quadrilatero arbitrario ad un quadrato che è il quadrilatero più regolare possibile.

Volendo rappresentare graficamente questa **evoluzione**, ci si accorge che se si parte da un quadrilatero arbitrario, difficilmente si arriva ad un quadrato di dimensioni significative ed esteticamente soddisfacenti. Si può allora pensare di seguire il procedimento inverso, cioè partire dal quadrato per costruire via via un rettangolo che lo genera, poi un parallelogrammo che genera il rettangolo ed infine un quadrilatero che genera il parallelogrammo. Ho usato l'articolo indeterminativo non a caso.

Infatti, dato il quadrato esistono infiniti rettangoli che lo generano, mediante le bisettrici. Tra questi bisogna sceglierne uno che non presenti problemi estetici con la costruzione del parallelogrammo che lo genera e così via. Ecco allora che si devono fare un bel po' di conti per ottenere una figura accettabile.

Diamo un cenno di tale costruzione, invitando il lettore a continuare i calcoli.

Partendo da un quadrato ABCD di lato L, si prolunga il lato AB a sinistra ed il lato DC a destra e si sceglie una distanza d da A e da C per determinare i punti A' e C'che saranno due vertici del rettangolo.

Dovendo essere AA' bisettrice del rettangolo e lo stesso per CC', necessariamente da A' devono partire due semirette con angolo di 45°. Lo stesso si farà per C'.

Il rettangolo che si determina dipende quindi dalla scelta del parametro d. Più piccolo è d, più stretto sarà il rettangolo.

Osserviamo che tutti i possibili rettangoli generanti il quadrato iniziale sono tutti paralleli fra loro e se si sceglie d = L, il rettangolo passerà per B e D.

È noto che il rettangolo esteticamente più bello è quello con dimensioni "auree", cioè con lati a/b = 1,618…. Possiamo chiederci: come scegliere d per avere questo risultato?

Con un po' di calcoli si trova d = L / 0,618... ma si vede subito che non è una buona idea, se si vuole rappresentare in un unico disegno tutta l'evoluzione dal quadrilatero al quadrato.

Più o meno così si procede per costruire il parallelogrammo ed infine il quadrilatero.

Riporto qui la mia proposta di questa **evoluzione** di quadrilateri.

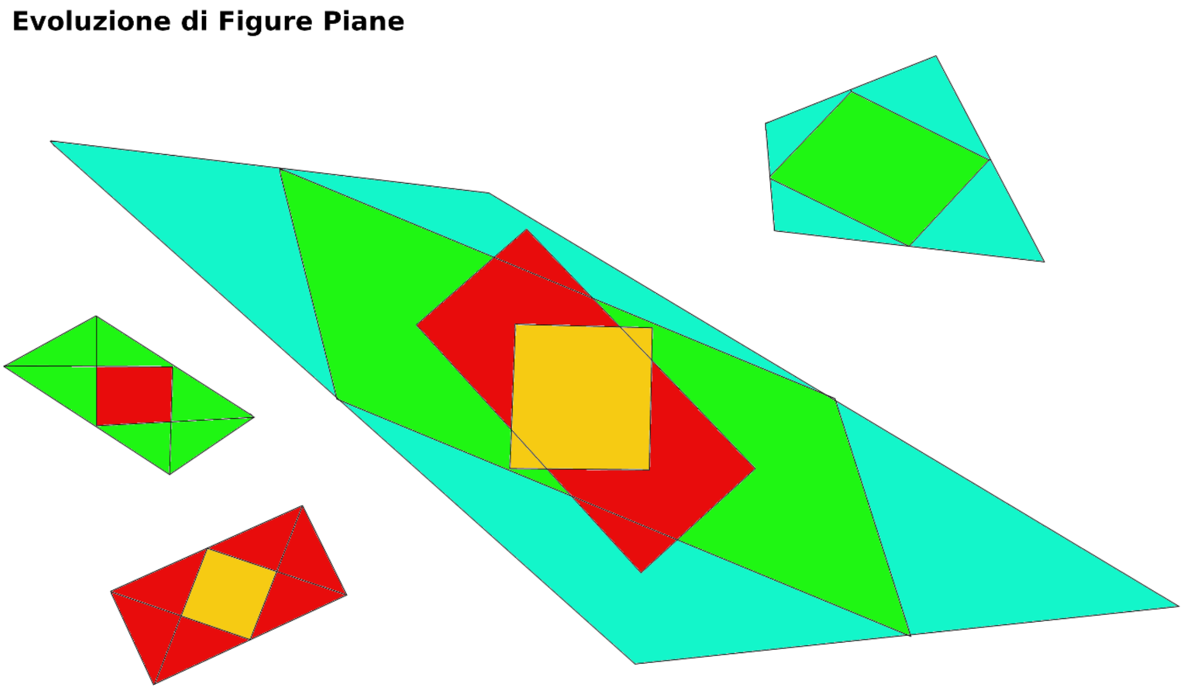
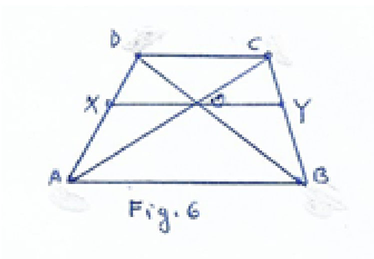


Fig. 6

3. Osservazioni sui trapezi

Un particolare tipo di quadrilatero è il trapezio, caratterizzato dall'avere due lati paralleli, detti *basi* del trapezio.
Un primo risultato significativo è il seguente.
<u>Teorema 5.</u>
In un trapezio la congiungente i punti medi delle basi passa per il punto d'incontro dei prolungamenti dei lati non paralleli e per l'intersezione delle diagonali (Vedi fig.6).



<u>Dimostrazione</u>
Considerato un generico trapezio ABCD siano AB e CD le sue basi. Denotiamo con O l'incontro delle diagonali. Mandiamo da O la parallela alle basi e siano X e Y le intersezioni con i lati AD e BC. Osserviamo che i triangoli DCA e XOA sono simili e lo stesso vale per i triangoli DAB e DXO.
Quindi
XO : DC = AX : AD e XO : AB = DX : AD.

Da questo segue che
AX = XO * AD / DC e XD = XO * AD / AB.
Sommando queste uguaglianze otteniamo
AD = AX + XD = XO (1/DC + 1/AB) AD,
da cui si deduce

(1) XO = 1 / (1/DC + 1/AB).

Ragionando in modo analogo sui triangoli DCB e OYB e CAB e COY si ottiene

(2) YO = 1 / (1/DC + 1/AB).

Pertanto O si trova sulla congiungente i punti medi delle basi. <u>c.v.d.</u>

Sommando (1) e (2) si trova inoltre

(3) XY = 2 / (1/DC + 1/AB)

Cioè:

<u>Teorema 6.</u>

Il segmento XY passante per l'incontro delle diagonali e parallelo alle basi è la <u>media armonica</u> delle basi del trapezio.

Questo risultato va inserito con le seguenti altre proprietà dei trapezi.

<u>Teorema 7.</u>

(a) La corda UV parallela alle basi, che divide il trapezio in due trapezi simili è <u>media geometrica</u> delle basi,
(b) La corda MN parallela alle basi, passante per i punti medi dei lati obliqui, è <u>media aritmetica</u> delle basi,
(c) La corda RS parallela alle basi, che divide il trapezio in due trapezi equivalenti (stessa area) è <u>media quadratica</u> delle basi.

Vedi fig. 7 e 8.

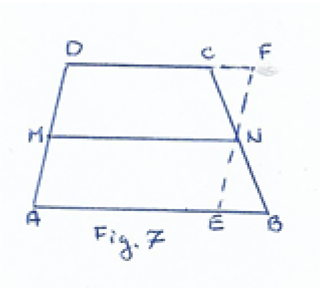


Fig. 7

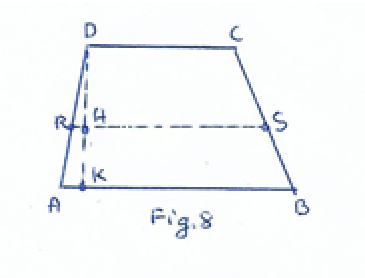


Fig. 8

Dimostrazione

(a) Se i due trapezi DCUV e UVAB sono simili, deve essere
DC : UV = UV : AB
E quindi
UV^2 = DC * AB.

(b) Siano M punto medio di AD ed N punto medio di BC. Sia EF la parallela per N ad AD. Osservato che i triangoli CNF e ENB sono uguali, si ha
MN = DC + CF = AB – EB
Sommando si ha
2 MN = DC + CF + AB – EF
ed essendo CF = EB risulta
MN = (DC + AB) / 2.

(c) Area (DCRS) = DH * (DC + RS) / 2

Area (RSAB) = HK * (AB + RS) /2

Dove H e K sono le intersezioni con RS ed AB della perpendicolare ad AB per D.

Queste aree sono uguali per ipotesi e dovranno essere la metà dell'area del trapezio. Da queste relazioni si ottiene

DH = DK * (AB + CD) / (2*(DC + RS))

HK = DK * (AB + CD) / (2*(AB + RS)).

Sommandole si ottiene

$$1 = \frac{AB + CD}{2}\left(\frac{1}{DC + RS} + \frac{1}{RS + AB}\right)$$

E dopo qualche calcolo, si ottiene

$$RS = \sqrt{\frac{AB^2 + CD^2}{2}}$$

Cioè la media quadratica di AB e CD. c.v.d.

Teorema 8.

In un trapezio ABCD, se O è il punto d'incontro delle diagonali, i triangoli COD e AOB sono simili, AOD e BOC sono equivalenti e risulta

(4) DO : OB = CO : OA = DC : AB.

Dimostrazione

I due triangoli DOC e AOB sono simili, perché hanno tre angoli uguali e quindi vale la (4). I due triangoli ADB e ACB sono equivalenti perché hanno la stessa base e la stessa altezza. Togliendo l'area del triangolo comune AOB ai due triangoli precedenti, si ottiene che AOD e BOC hanno la stessa area. c.v.d.

4. Conclusioni

Terminiamo con la seguente osservazione. Nella geometria euclidea ci sono risultati niente affatto semplici per un ragazzo di scuola media inferiore ed i primi due anni della media superiore. Paradossalmente lo strumento cartesiano, con la geometria analitica e lo studio delle funzioni, è per certi aspetti più semplice, in quanto segue un metodo preciso e non si fonda sempre sulle capacità personali di astrazione e di fantasia.

D'altro canto, se si limita l'insegnamento della geometria euclidea agli enunciati dei teoremi ed alla memorizzazione delle formule per trovare aree e volumi, si dà una idea sbagliata della matematica, come un insieme di formule.

Quindi forse converrebbe ridurre l'insegnamento della geometria euclidea ai concetti di base ed ai teoremi che si è in grado di dimostrare, *con qualsiasi mezzo,* anche con *origami,* nelle scuole medie inferiori, per poi riprenderla nelle scuole medie superiori. L'aspetto ludico ed artistico può essere un valido aiuto.

Bibliografia

Giulio Bisconcini: *Geometria Elementare,* Angelo Signorelli editore, Roma 1956

Giulio Bisconcini: *Esercizi e problemi completamente risolti,* Angelo Signorelli editore, Roma 1949

A.M.Yaglom e I.M.Yaglom: *Challenging Mathematical Problems with elementary solutions,* Dover Publications, New York 2018

G. Polya and J. Kilpatrick: *The Stanford Mathematics problem Book.* Dover Publications, New York 2017

La retta di Eulero, Wikipedia.

Mondo Matematico e Dintorni, Vol 3, No 1-2 (2020), 129-140

Raccordo tra scuola dell'infanzia e scuola primaria

Annamaria Viceconte

annav952@yahoo.it

Sunto
Nel presente articolo si pone l'accento e l'attenzione su obiettivi e competenze, si ricordano i temi sui quali riflettere e lavorare e si richiama l'importanza del "gioco" quale momento di stimolo per l'apprendimento. Quindi si ipotizza e si descrive un percorso di raccordo tra la scuola dell'infanzia e la scuola primaria con particolare attenzione all'orientamento "spazio – temporale" e alla sua organizzazione.

Parole Chiave Obiettivi, competenze, temi matematici, problemi, gioco, orientamento spazio-temporale, percorsi.

1. Introduzione

Si legge nel D.P.R. 12 febbraio 1985, n.104 – relativo ai Programmi della Scuola Primaria
"…Si favorirà la formazione di un atteggiamento positivo verso la matematica, intesa sia come valido strumento di conoscenza e di interpretazione critica della realtà, sia come affascinante attività del pensiero umano. …"
Come, poi, si può evincere dal "Documento"[1] del 22 febbraio 2018, la matematica fornisce strumenti per indagare e spiegare fenomeni del mondo circostante, favorendo un approccio razionale ai problemi che la realtà pone, sviluppando competenze trasversali e procurando un contributo importante per la costruzione di una cittadinanza consapevole.
Tali competenze sono rilevanti al fine di una formazione di una cittadinanza attiva e consapevole, nella quale ogni individuo è disponibile sia all'ascolto attento e critico dell'altro sia ad un confronto basato sul riferimento ad argomenti pertinenti. In particolare, l'educazione all'argomentazione può costituire un antidoto contro il proliferare di informazioni false o incontrollate.
Lingua e matematica sono, poi, alla base del *pensiero computazionale* che sia la legge 107/2015 sia il D.L. n.62/2017 chiedono di sviluppare.

[1] INDICAZIONI NAZIONALI E NUOVI SCENARI. Documento a cura del Comitato Nazionale per le Indicazioni Nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di Istruzione - 22 febbraio 2018

Il *pensiero computazionale* va inteso come processo mentale che permette di risolvere problemi di varia natura; pertanto può pensarsi come un processo logico – creativo che, in modo più o meno consapevole, si utilizza nella vita quotidiana.
Ogni situazione che prevede una procedura da costruire attraverso una serie di operazioni, una rete di connessioni da stabilire, come ad esempio un ipertesto, si colloca nell'ambito del pensiero computazionale a patto che le procedure e gli algoritmi utilizzati scaturiscano da un'attenta riflessione esplicita delle scelte operate.
Quindi, sostanzialmente, si tratta di un'educazione al pensiero logico ed analitico indirizzato alla soluzione di problemi.

Sui traguardi, riportati nel CURRICOLO e da raggiungere al termine della scuola primaria si legge:

- l'alunno sviluppa un *atteggiamento positivo rispetto alla matematica*, anche grazie a molte esperienze in contesti significativi, che gli hanno fatto intuire come gli strumenti matematici che ha appreso siano utili per operare nella realtà;
- si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere ad una calcolatrice;
- *percepisce e rappresenta forme, relazioni e strutture* che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo, utilizzando, in particolare, strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura;
- *utilizza rappresentazioni di dati* adeguate e le sa utilizzare in situazioni significative per ricavare informazioni;
- riconosce che gli oggetti possono apparire diversi a seconda dei punti vista;
- *descrive e classifica figure in base a caratteristiche geometriche* e utilizza modelli concreti di vario tipo anche costruiti o progettati con i suoi compagni;
- *affronta i problemi* con strategie diverse e si rende conto che in molti casi possono ammettere più soluzioni;
- *riesce a risolvere facili problemi* (non necessariamente ristretti a un unico ambito) mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati e spiegando a parole il procedimento seguito;
- *impara a costruire ragionamenti* (se pure non formalizzati) e a sostenere le proprie tesi, grazie ad attività laboratoriali, alla discussione tra pari e alla manipolazione di modelli costruiti con i compagni;
- impara a riconoscere *situazioni di incertezza* e ne parla con i compagni iniziando a usare le espressioni "è più probabile", "è meno probabile" e, nei casi più semplici, dando una prima quantificazione.

Si possono, quindi, individuare tre grossi temi:

Spazio* - *Forma* - *Numeri e misura

sui quali riflettere e lavorare.

Non dimenticando, poi, che si deve procedere in modo tale da costruire stretti rapporti con i programmi della Scuola Secondaria del primo ordine, tali temi, a loro volta, si possono articolare in

- ***Problemi***
- ***Aritmetica***
- ***Geometria e misura***
- ***Logica***
- ***Probabilità, statistica e informatica***

Per quanto riguarda i "*problemi*", scopo dell'attività è di allenare l'alunno a ***saper scegliere*** fra le informazioni fornite; importante quindi che l'insegnante abitui l'alunno a

- organizzare le proprie conoscenze
- darsi un metodo di lavoro
- avere uno schema di risoluzione sia per raggiungere un risultato sia per decidere se una certa affermazione è vera o falsa.

L'idea di "problema" deve, pertanto, ***essere strettamente legata*** a quella di ***situazione problematica reale***, equivale a dire, cioè, far scaturire ogni sorta di problema da ogni tipo di situazione.

Per quanto riguarda la ***Geometria***, intesa come ***analisi dello spazio***, si suggerisce di privilegiare nei primi due anni di scuola attività volte a far acquisire gradualmente al bambino capacità di

- orientamento
- riconoscimento e localizzazione di oggetti nello spazio e nel piano attraverso giochi

La formazione logica, poi, è più un ***traguardo generale*** che un insieme di contenuti specifici, quindi la ***Logica*** va intesa continuamente ***come mezzo e come fine***. Tra gli obiettivi da conseguire vi sono le capacità di

- distinguere, classificare e riconoscere alcune particolari caratteristiche di un oggetto o di un evento nel confronto con un altro;
- unire e contrapporre e, cioè, riconoscere la circostanza che si esprime con la congiunzione "e" o con la contrapposizione "o" disgiuntiva e con la "o" congiuntiva;
- ordinare secondo alcuni criteri quantitativi e qualitativi;
- stabilire o riconoscere legami, rapporti, riferimenti di vario genere.

Le principali capacità che la scuola primaria può far acquisire al bambino come propedeutica all'informatica vera e propria sono:

- capacità di catalogare le informazioni
- capacità di tracciare ed interpretare diagrammi di flusso per la rappresentazione di una conveniente classe di problemi
- capacità di organizzazione, anche animata, di un testo.

2. La matematica e il gioco

Nella scuola il gioco spesso è vissuto come una perdita di tempo; a volte è considerato un'esperienza qualitativamente diversa dall'apprendimento e relegato, nella migliore delle ipotesi, ad attività secondaria. E', invece, motivo di stimolo per tutti i ragazzi, indipendentemente dalle loro capacità; per i bambini della scuola dell'Infanzia e Primaria esso è e rimane il catalizzatore dell'attività didattica.
Proprio come la matematica, è un'attività intellettuale, disinteressata, senza un utile immediato, fine a se stessa.

Il gioco matematico è come un problema:

- richiede molto ragionamento;
- necessita di poche conoscenze matematiche specifiche;
- mantiene in forma la mente;
- coinvolge la dimensione affettiva ed emozionale;
- diverte.

Il gioco matematico lancia di volta in volta una sfida alla mente del bambino che la raccoglie proprio perché nel gioco il coinvolgimento della dimensione emozionale è forte. E', altresì, il mezzo più adeguato per avvicinarsi e sviluppare il pensiero astratto.
In situazioni di gioco matematico, dopo aver analizzato, confrontato, scelto, deciso, sintetizzato, dedotto, spesso si deve lasciare spazio all'intuizione, all'immaginazione.

Recenti ricerche hanno messo in luce come un insuccesso in matematica sia vissuto dal ragazzo in modo più definitivo che in altre materie generando noia, frustrazione, demotivazione fino ad intaccare la propria autostima; al contrario se ha successo si prova piacere, divertimento, emozioni positive che lo motivano all'apprendimento.

Il gioco offre opportunità a:

- chi presenta difficoltà di apprendimento;
- chi, se non opportunamente stimolato, potrebbe perdere la motivazione.

Pensando di introdurre nella programmazione didattica un *Laboratorio di giochi*, e di non lasciare il momento del gioco come sporadico, gli obiettivi che si possono conseguire sono:

- motivare l'allievo convinto che la matematica sia una disciplina noiosa e troppo impegnativa;
- offrire opportunità all'insegnante per rilevare le strategie, i ragionamenti, i percorsi mentali degli alunni in una situazione nuova.

3. Orientamento nello spazio-ambiente e sua organizzazione

Organizzazione nel piano e nello spazio

Comprendere le relazioni spaziali che esistono tra gli oggetti assume un ruolo rilevante nel processo di crescita; la capacità di individuare la posizione di oggetti nello spazio e di muoversi all'interno di uno spazio pone le basi della letto-scrittura.
Gli obiettivi che si intendono conseguire sono:

- effettuare spostamenti lungo percorsi
- localizzare oggetti nello spazio
- distinguere oggetti in base alla forma.

La prima cosa è far passare il bambino dalle **intuizioni percettivo – motorie** dello spazio conosciuto e vissuto**,** cioè quelle maturate attraverso l'esperienza sensibile, allo spazio rappresentato, cioè allo **spazio simbolico – ricostruttivo**; in quest'ultimo si dovrà far riferimento ai **codici grafici** per mezzo dei quali si possono trasmettere le informazioni.

Le informazioni spaziali sono quelle a carattere prevalentemente geometrico – matematico e comprendono sia quelle relazionali tra oggetti sia quelle riguardanti le proprietà degli oggetti stessi.
Punto di partenza della geometria prescolare possono essere una serie di intuizioni sulla **percezione degli oggetti nello spazio**, cui possono far seguito riflessioni sui **rapporti spaziali proiettivi** e sui **rapporti metrici.**

Per **rapporti spaziali proiettivi** si intendono:
l'allineamento;
la distinzione tra linee dritte e linee curve;
il riconoscimento di superfici piane;
la distinzione delle forme delle figure, classificati con davanti/dietro sopra/sotto dentro/fuori di fronte/di spalle vicino/lontano sinistra/destra.

Per **rapporti metrici** si intende
il saper distinguere e confrontare gli oggetti
classificarli con grande/piccolo lungo/corto alto/basso.

Particolare importanza assume l'obiettivo di consolidare nel bambino la capacità di orientamento, distinguendo con precisione il **prima e dopo temporale** e il **prima e dopo spaziale**, attraverso le tre fasi dell'apprendimento il cui ordine non potrà essere invertito:

- esperienze di tipo attivo
- esperienze di tipo descrittivo
- rappresentazioni di tipo grafico.

Il prima e dopo temporale

Si costruiscono cartoncini con scenette che possono essere disposte in sequenza e, messe in modo disordinato, si chiederà al bambino di riordinare le immagini nel giusto ordine (fig. 1).

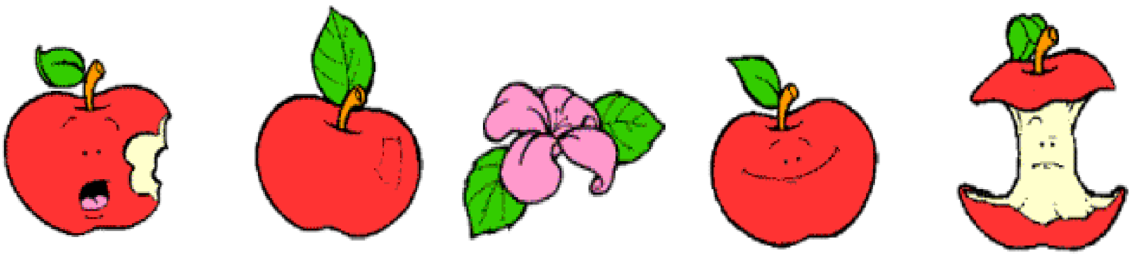


Fig. 1

Il prima e dopo spaziale

Si può preparare un unico cartoncino con una serie di animali girati nello stesso verso da sinistra a destra e poi si può chiedere al bambino "chi è il primo della fila", "chi è l'ultimo", "chi sta davanti", e così via.

Si passa quindi alla costruzione di **modelli tridimensionali** di paesaggi o ambienti, già noti dal vero; ciò rafforza la capacità di orientamento nello spazio e sviluppa le abilità a rappresentare una struttura spaziale.

Si faranno giochi per favorire il senso di orientamento e l'individuazione di punti di riferimento prima in ambienti chiusi e poi in spazi aperti e molto estesi, dove il riconoscimento delle caratteristiche degli ostacoli e dei riferimenti spaziali non richiedono grossi sforzi, essendo decodificabili senza difficoltà.
In tali attività avrà molta importanza per l'esecuzione corretta dell'**algoritmo motorio** il rispetto delle seguenti regole:

- effettuare il tracciato seguendo scrupolosamente la sequenza dei passi indicati;
- eseguire il percorso senza errori;
- sviluppare il percorso rispettando le regole stabilite.

Al termine dell'esperienza ogni bambino dovrà essere in grado di **descrivere** la strada percorsa e le sue caratteristiche spaziali e **ricostruire una mappa** del percorso seguito.

Le strutture topologiche, per il loro carattere di elementare evidenza, sono le prime a formarsi nella mente del bambino. Infatti, egli riconosce, sul piano della concettualizzazione spaziale, come discriminanti se le strutture sono **aperte/chiuse, rotonde/a punta, deformabili/rigide,** mentre non è in grado di elaborare sistemi di riferimento o applicare criteri di natura metrica.
Riflettiamo sul significato di "aperto" e "chiuso":
Spazio aperto: "dove una persona o un cosa può passare per entrare o per uscire" (fig. 2)
Spazio chiuso: "dove il passaggio è ostruito, sbarrato, quindi se una persona
o una cosa si trova fuori non può entrare, se invece sta dentro, non può uscire" (fig. 3)

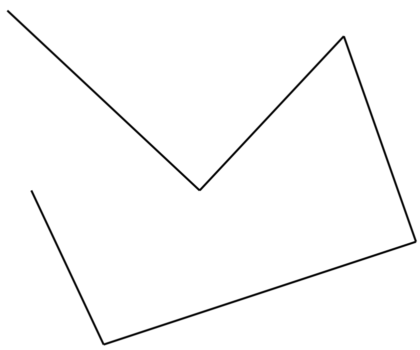


Fig.2

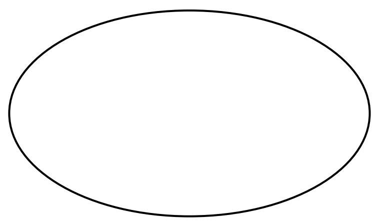


Fig.3

Disegna un topolino solo dentro i recinti chiusi.
Ogni superficie delimitata da una linea chiusa è una regione

Direzione: percorsi e labirinti

OSSERVA BENE QUESTI ANIMALI, LA FRECCIA INDICA LA DIREZIONE DOVE DEVONO ANDARE.
QUALCUNO NON VA NELLA DIREZIONE ESATTA, FAI UNA CROCETTA SOPRA. (fig. 4)

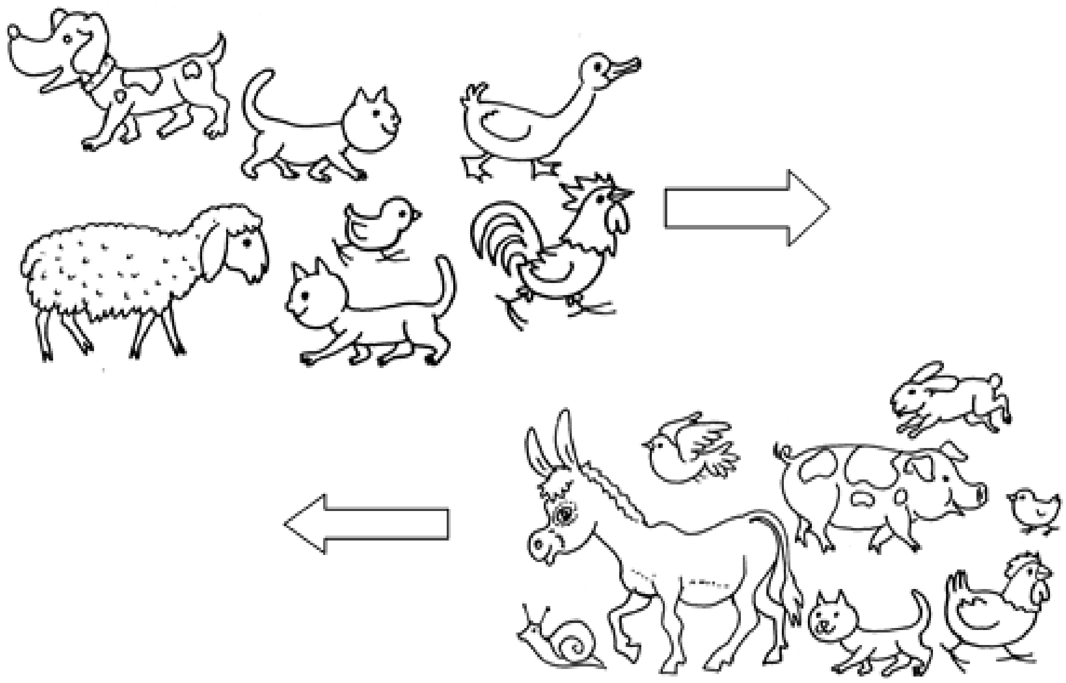


Fig.4

L'uso dello strumento didattico dei **labirinti** ha l'effetto di **rafforzare** concetti topologici e spaziali quali **sopra/sotto, avanti/indietro, a sinistra/a destra, dentro/fuori, vicino/lontano, alto/basso, prima/dopo.**

Inoltre, attraverso l'attività sui labirinti il bambino potrà capire che:

- ogni tracciato ha un inizio e una fine;
- ogni tracciato rappresenta un movimento che si può completare anche con il corpo;
- ogni movimento e ogni tracciato possono essere guidati anche con comandi dati a voce;
- ogni movimento e ogni tracciato possono essere guidati anche con comandi espressi da suoni o immagini grafiche.

Nella fig. 5 è rappresentato un esempio di esercizio sui labirinti

Fig.5

Le forme

La ricerca sperimentale suggerisce che **le somiglianze nella forma dei contorni** vengono afferrate molto presto sia che si tratti di figure chiuse sia di figure aperte, così come altrettanto facilmente il bambino distinguerà le figure che hanno un contorno regolare da quelle con contorno a forma di denti di sega con punte o rientranze angolose. A tale scopo sarà utile un esercizio del tipo indicato in fig. 6

Collega le figure che hanno la stessa forma

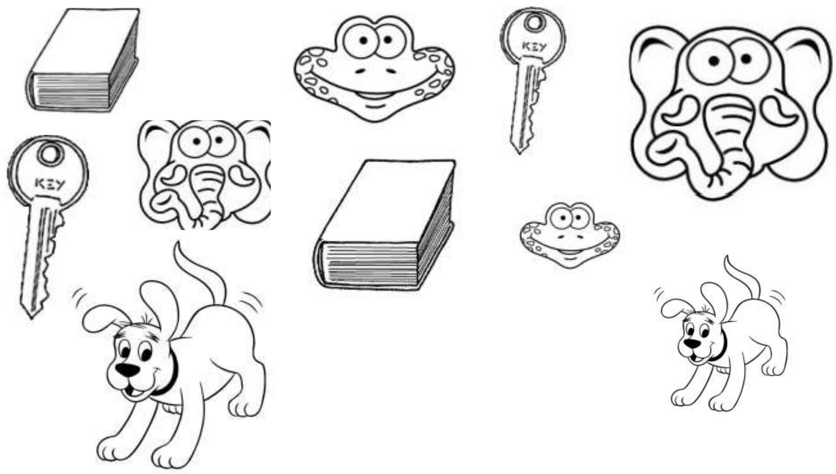


Fig.6

Egualmente presto i bambini avranno l'intuizione del concetto di **frontiera** e riescono a distinguere ciò che è dentro da ciò che è fuori.
Molto significativi saranno in proposito applicazioni del tipo seguente (fig.7).

Colora gli oggetti che sono **fuori** dallo zaino.

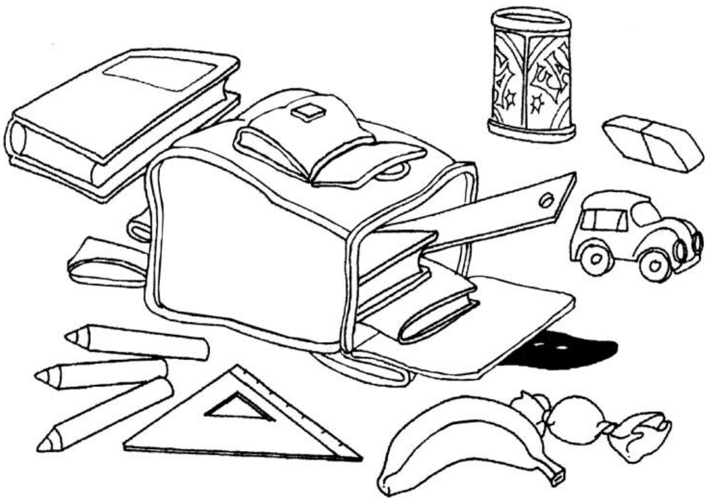


Fig.7

Importante poi sarà far notare ai bambini le figure a **contorno chiuso** e quelle a **contorno aperto**.
Per esempio, su un foglio di quaderno si potrà disegnare una linea che va da un margine all'altro del foglio stesso: in tal caso il foglio viene diviso in due parti, ma nessuna può essere considerata parte interna o parte esterna; al contrario disegnando una linea chiusa, non intrecciata, questa divide il piano del foglio in due regioni: **quella interna** e **quella esterna**.

Le nozioni di spazio-tempo, che nella scienza moderna risultano indissolubili, nell'esperienza sensibile di ogni giorno, per i bambini, sono **separate**.
Pertanto, si inizierà con le **misure di tipo spaziali** distinguendole dalle **misure di tempo.**
Un'attività di misurazione presuppone operazioni mentali di confronto, ordinamento e di segmentazione, oltre che di riferimento all'unità di misura.

Con l'operazione di **misura**, in genere si esegue la **codificazione numerica delle grandezze continue**, potendo così rappresentare ogni grandezza mediante un numero. A tale scopo sarà utile iniziare con operazioni di confronto; un esempio può essere quello della fig. 8

Colora l'albero **più alto:**

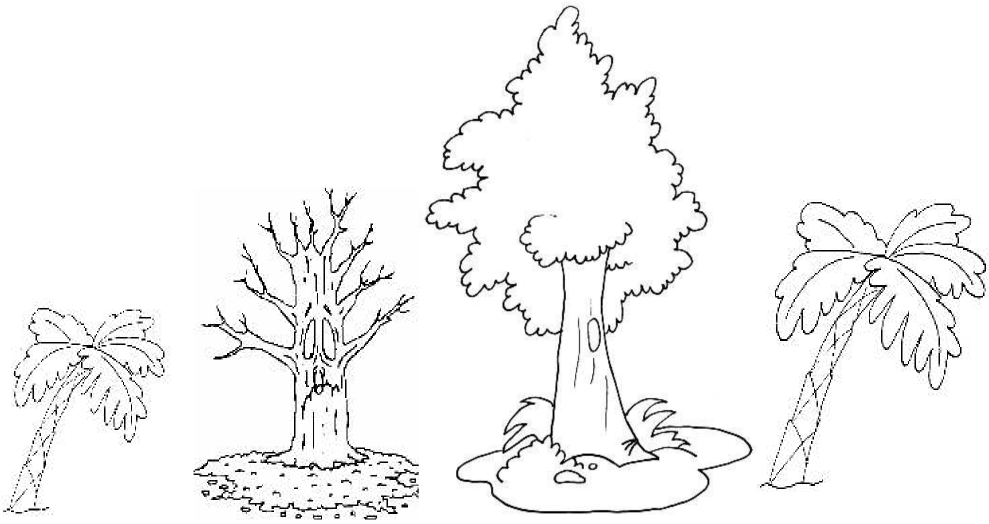


Fig.8

4. Conclusioni

Da quanto esposto appare chiaro che, nel primo anno della Scuola Primaria, si cercheranno di creare concretamente le condizioni per un sereno passaggio dei bambini, dalla Scuola dell'Infanzia alla Scuola Primaria, attraverso percorsi graduali, partendo da conoscenze acquisite per sollecitare la riflessione e la consapevolezza delle competenze già in possesso.

Bibliografia

https://www.lazolla.it/il-percorso-di-raccordo-tra-scuola-dellinfanzia-e-scuola-primaria/

https://www.quartoicnocerainferiore.edu.it/attachments/article/189/Obiettivi%20di%20%20raccordo.pdf

http://www.maestroluigi.it/Progetto_Continuit%C3%A0/Progetto%20Continuit%C3%A0%202013-14-%202.pdf

http://fumanescuola.gov.it/documenti/2015_2016/infanzia/PROGETTO_CONTINUITA_INFANZIA-PRIMARIA_ICFUMANE2015-2016.pdf

http://www.indicazioninazionali.it/category/documenti-ufficiali/

https://www.orizzontescuola.it/indicazioni-nazionali-nuovi-scenari-attivita-formative-livello-singole-istituzioni-scolastiche-scuole-polo/

Indice

Istruzioni per gli autori

Chi desidera inviare un articolo per la Rivista Mondo Matematico e Dintorni deve seguire i seguenti criteri per il formato:

(1) L'articolo deve essere in word, carattere Times New Roman, 12 p; il titolo dell'articolo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 18 p.

(2) I margini sono di 3 cm sotto, sopra, a destra e a sinistra. L'interlinea è multipla 1,15 p

(3) L'articolo deve essere diviso in paragrafi numerati, di cui il primo è una introduzione e l'ultimo una conclusione. I paragrafi vanno separati da due interlinee. Il titolo di ogni paragrafo è in word, carattere Times New Roman, grassetto, 14 p.

(4) Ogni articolo deve avere una lunghezza minima di 6 pagine e non deve superare, di regola, le 14 pagine.

(5) Dopo l'ultimo paragrafo va inserita la bibliografia. Almeno 4 fra libri e articoli nel formato cognome, nome (anno), titolo dell'articolo, titolo del libro o rivista, editore, città.

(6) La bibliografia non va numerata. I riferimenti bibliografici nel testo devono avere la forma (cognome dell'autore, anno).

(7) Non mettere note bibliografiche a piè di pagina. Tutta la bibliografia va messa alla fine.

(8) I disegni vanno fatti con programmi di elaborazione grafica (non in Word!) e salvati in jpg o in png.

(9) L'articolo deve essere inviato in formato doc o docx ed in formato pdf per il controllo dell'impaginazione e deve avere un numero pari di pagine.

Tutti gli articoli ricevuti saranno esaminati da due revisori che invieranno il loro parere sulla pubblicazione ed eventuali proposte di correzioni ai direttori editoriali.

Gli articolo possono essere inviati ad uno dei seguenti indirizzi email:

antomato75@gmail.com   lucianadr@live.it   matematicaedintorni@libero.it

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo
ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola
(Decreto del 24/07/2009 e Direttiva 170/2016)

Finito di Stampare nel mese di Febbraio 2021

Accademia Piceno - Aprutina dei Velati in Teramo
ACCADEMIA DI SCIENZE, LETTERE, ARTI E TECNOLOGIA
Ente accreditato dal MIUR per la formazione del personale della scuola