Mondo Matematico e Dintorni, Vol 2, No 1 (2019), 55-62

Un laboratorio di Matematica per sperimentare la probabilità, tra gioco e studio: il fenomeno delle coincidenze

Bonaventura Paolillo[1]

Sunto. Si presenta un'attività laboratoriale da proporre in una classe terza della scuola secondaria di primo grado, basata sul Calcolo delle Probabilità. In essa si propongono anche i concetti di base del calcolo combinatorio e si pone l'attenzione sul mondo delle coincidenze. In particolare, si sperimenta il classico problema del compleanno, notando come la valutazione precisa degli eventi spesso si discosta da quella condotta secondo convinzioni o percezioni personali.

Parole chiave: laboratorio, calcolo combinatorio, probabilità composta, problema del compleanno, coincidenze, scommesse.

1. Introduzione

Lo scopo della seguente attività didattica è quello di preparare gli allievi a riflettere, in modo più consapevole, sulla valutazione dell'incerto e quindi almeno nei suoi aspetti essenziali sull'importante concetto di probabilità. In particolare, si esploreranno alcune questioni relative al mondo delle coincidenze. Queste ultime, infatti, intervengono spesso nella nostra vita quotidiana, ma sfuggono alla nostra percezione di ponderarle adeguatamente. A titolo di esempio, chi scommetterebbe sulla coincidenza di compleanni che si potrebbe ottenere da un gruppo qualsiasi di **23** persone? Ci occuperemo, pertanto, di eventi connessi con l'ultima richiesta, nota come problema del compleanno. Tale tipologia di coincidenza non esaurisce affatto una varietà più ampia e che pure meriterebbe attenzione, si veda per esempio **[1], [5].** Il laboratorio che si esaminerà viene proposto alle classi terze della scuola secondaria di primo grado e può essere realizzato in maniera operativa e concreta, secondo un approccio *problem-solving*, sia a livello curricolare che extra-curricolare. I prerequisiti richiesti agli allievi sono minimali, in quanto necessitano delle quattro operazioni di base del calcolo e un minimo background di elementi di logica. Il tema delle coincidenze conduce inevitabilmente a soffermarsi sul mondo del gioco d'azzardo, così massicciamente diffuso sul territorio nazionale, coi suoi palesi rischi. Tra gli intenti auspicabili, derivanti da tale attività laboratoriale, c'è quello di natura sociale e pedagogica. Si

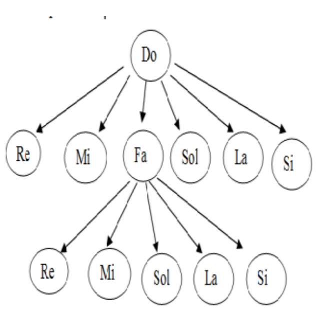
[1] Liceo Scientifico "Francesco Severi-Salerno"; Tutor Coordinatore TFA-A047, 2015, Università degli Studi di Salerno. *bpaolillo@unisa.it*

vorrebbe, infatti, far emergere alcuni aspetti critici che emergono dall'illusorio mondo delle scommesse. Far leva su tecniche legate al *Calcolo delle Probabilità* permette di leggere criticamente e di filtrare, con maggiore attenzione alcuni messaggi o segnali che giungono da slot-machine, giochi on-line, ecc.

Si distingueranno **cinque fasi didattiche** su cui impostare il lavoro d'interazione allievi-docente. Nelle prime tre si forniscono concetti di base del calcolo e sono propedeutiche ad una giusta comprensione della tematica delle coincidenze. Quest'ultima viene esplorata in dettaglio nella quarta e quinta fase.

Fase 1. In questa fase (**2 ore-3 ore**) si introducono i concetti chiave del *Calcolo Combinatorio* e in particolare le disposizioni semplici e quelle con ripetizioni. Si riporta a titolo illustrativo qualche esempio: "*Quanti raggruppamenti di tre note distinte si possono formare partendo dalle sette: Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si*? *Quante terne possibili* (*anche con ripetizione*) *si formano partendo dalle stesse note musicali?* Si nota come tra le disposizioni semplici si includa sia la terna (*Do, Mi, Sol*) che quella di (*Mi, Sol, Do*). In quelle con ripetizione, compaiono invece le sequenze (*Do, Do, Mi*) e (*Sol, Sol, Sol*), ecc. Inoltre, le disposizioni semplici costituiscono un sottoinsieme proprio di quelle con ripetizione. Come strumento di supporto didattico, si è utilizzato sovente il grafo ad albero, che ha il pregio di visualizzare in verticale le informazioni che si vengono ad accumulare. Per la richiesta precedente, fissando la 1° nota *Do*, si ottengono alcune sequenze relative alle disposizioni semplici (*Do, Fa, Re*), (*Do, Fa, Mi*), (*Do, Fa, Sol*), (*Do, Fa, La*), (*Do, Fa, Si*), (*si veda la figura sotto*). Si riportano le note formule relative, rispettivamente, alle disposizioni semplici e con ripetizione, di d elementi e di classe n:

$$\boldsymbol{D_{d,n} = d(d-1)(d-2)\ldots(d-(n-1)); \quad D'_{d,n} = d^n}.$$



Successivamente si pone l'attenzione sulle permutazioni, viste anche come particolari disposizioni semplici di n elementi di classe n.

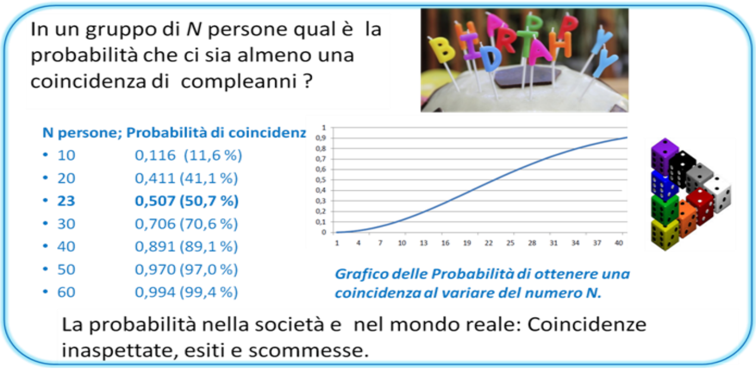
Esempi: In quanti modi si può disporre di un cucchiaio, coltello e forchetta sul tavolo? Avendo quattro elementi, per esempio le tre posate precedenti a cui si aggiunge un cucchiaino, come cresce il numero delle sequenze rispetto a prima?

Evidentemente, è auspicabile condurre gli allievi a far scoprire le leggi di formazione delle sequenze e a riflettere sulla definizione di fattoriale. Altre riflessioni simili possono essere svolte riguardo alle combinazioni e al relativo triangolo di Pascal.

Fase 2. Questa fase (**2 ore - 3 ore**) è dedicata ad esaminare il concetto di probabilità. Partendo da classiche situazioni reali, si valutano *l'uscita della faccia di una moneta, il gioco dei dadi, della tombola, delle carte, ecc.* Si sceglie l'approccio della *scuola* *classica*, definendo la probabilità di un evento come rapporto tra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili. Per questo scopo si possono considerare vari esempi di spazi di probabilità. Anche se in maniera intuitiva e semplice le definizioni frequentista e soggettiva di probabilità possono essere di stimolo di discussione in classe, evitando però un confronto impegnativo tra tali approcci. Si esamina poi il significato probabilistico di evento contrario e dell'unione di eventi disgiunti, avvalendosi di strumenti grafici come quello di *Eulero-Venn*, che mostra una buona efficacia esplicativa. L'attenzione si può porre ad alcune questioni classiche che suscitano vivo interesse: *la somma di due facce nell'uscita del doppio dado e le relative probabilità, la relativa somma nell'uscita del triplo dado (in particolare l'uscita del 9 e 10 studiata da Galilei), il problema storico della ripartizione della posta introdotto da Pascal e Fermat.*

Fase 3 (**3 ore-4 ore**). In questa fase si può approfondire il concetto di probabilità totale e quello di probabilità composta. Si possono inquadrare alcuni problemi classici, in contesti storici, per esempio quelli tratti dal *Cavaliere de Méré*: *Valutare le probabilità dell'uscita di almeno un 6 dal lancio di 4 dadi o di almeno un doppio 6 da 24 lanci di un doppio dado.* Successivamente si possono mostrare esempi di eventi dipendenti e indipendenti distinguendoli dalla natura più semplice degli eventi disgiunti. Gli esempi, possono essere dati inizialmente in maniera intuitiva, senza soffermarsi troppo sulla definizione formale. In particolare, si fa notare che alcuni quesiti di probabilità sulle estrazioni di biglie da urne, sono risolvibili sia con i mezzi del calcolo combinatorio che con quelli probabilistici.
Avvalendosi di una maggiore padronanza di strumenti matematici, gli allievi possono allora approcciarsi ad esplorare la tematica delle coincidenze.

Fase 4 (**2-3 ore**). **La coincidenza nel problema del compleanno**. Il problema del compleanno è storicamente attribuito al filosofo e matematico *Richard von Mises* che lo ha elaborato nel **1939**. In **[2]** si sono trattati alcuni aspetti d'insieme di tale problematica, dal punto di vista più teorico. Si esamina allora la probabilità che possa accadere almeno una coincidenza di compleanno (solo mese e giorno) in un gruppo qualsiasi di persone, più precisamente: *se si scommette sulla possibilità che si verifichi l'evento coincidenza di almeno una coppia di compleanni, quanto deve essere numeroso il minimo gruppo di persone?* In modo equivalente, si vorrebbe il minimo *n* per cui la probabilità di vincere superi quella di perdere. Non si considera per motivi di semplicità l'anno bisestile, sebbene la sua inclusione non influenzi l'impostazione argomentativa e i conseguenti risultati. Prima di fornire la risposta agli allievi è doveroso aiutarli a far ricercare e a testare da soli (o in gruppi) la possibile risposta. Esplicitamente, si induce a pronunciarli gradualmente sulla richiesta iniziale, come segue: *poiché con un gruppo di **n=366** persone si ha una coincidenza sicura, come si può abbassare tale soglia numerica per avere una probabilità di successo maggiore del* **50%**? *In particolare, tra i valori indicativi per **n*** **= 200, 182, 60, 23,15**, *qual è il valore minimo che soddisfa tale richiesta*?



La risposta spesso gettonata è **182** che è plausibile e segue un criterio di diretta proporzionalità, ma è palesemente errata. La risposta corretta è invece ***n*=23**, che fornisce una probabilità precisa del **50,7%** di successo. In questo modo, gli allievi sono spronati ad operare una personale proiezione dei loro convincimenti iniziali, su situazioni che investono sempre di più la piattaforma del mondo reale. Dopo aver fornito la soluzione del problema, può risultare esigente per loro, mirare a rielaborare gli strumenti matematici adoperati in campo, che non hanno condotto ad una strategia risolutiva. Si è allora escogitata una nuova metodologia di soluzione, e in questo modo si ristruttura anche un nuovo ed efficace quadro di competenze. Ecco la dimostrazione presentata agli allievi. Si consideri per un gruppo di *n* persone, l'evento coincidenza di almeno due compleanni e lo si indichi con *Coinc* sottintendendo, per semplicità, il riferimento a *n*. L'evento contrario, in cui per ogni coppia di persone scelte, le date di nascita relative al giorno e al mese non coincidono, sarà indicato con *Non_Coinc*. Si calcolerà, per motivi di facilità, la probabilità di quest'ultimo evento contrario e dopo quella dell'evento *Coinc*. Si osserva che i casi favorevoli alla non coincidenza sono le disposizioni semplici $\boldsymbol{D_{365,\,n}}$ cioè di **365** oggetti su *n* posti diversi, in quanto descrivono le sequenze in cui si possono scegliere *n* date differenti da un calendario annuale. I casi possibili sono invece dati dalle sequenze in cui si possono scegliere *n* date qualsiasi del calendario, anche con ripetizione, pari a $\boldsymbol{D'_{365,n} = 365^n}$. Si otterrà evidentemente $\boldsymbol{P(Non\_Coinc) = \frac{D_{365,n}}{D'_{365,n}}}$.

Il primo valore di *n* per cui questa probabilità è inferiore a **0,50** è proprio **23**, da ciò si ha subito:

***P*(*Coinc*)=1-*P*(*Non_Coinc*)= 1-0,493 = 0,507**, (corretto alla terza cifra decimale).

Per convincersi ancor di più della validità di tale sorprendente responso si può ricorrere ad un'idea metaforica utilizzata dal noto matematico ed enigmista *Martin Gardner*. Un gruppo di *n* persone viene invitato ad entrare in una stanza, ma entra sempre una persona alla volta. Per la prima persona non ci sono conflitti, infatti l'evento della non coincidenza si verifica con probabilità pari a **1=365/365.** La seconda persona che entra realizza l'evento della non coincidenza con la prima, con probabilità **364/365**, analogamente per la terza persona si ha **363/365** e così via, la persona *n*-ma realizza la non coincidenza di compleanno con le altre (n-1), con probabilità **(365-(n-1))/365**. Per il teorema della probabilità composta, risulta:

$$\boldsymbol{P(Non\_Coinc) = \frac{365}{365}\frac{364}{365}\frac{363}{365}\frac{362}{365}\dots\frac{365-(n-1)}{365}}$$

Evidentemente ***P(Coinc)*** è ancora uguale a **1-*P(Non_Coinc).***
Si osserva che nell'ultima formula, al membro destro compare di nuovo, il rapporto tra i valori delle due disposizioni. Si è poi osservato che scegliendo ripetutamente gruppi di **23** persone, la frequenza relativa della coincidenza (e non coincidenza) approssimava il valore della probabilità vicino al **50%**. E' questo un buon contesto per introdurre, con la dovuta cautela didattica, la legge dei grandi numeri, immaginando un numero di prove indefinito. Ripercorrendo poi l'analoga strategia risolutiva e indicando con la variabile N la cardinalità di un generico gruppo di persone, si è riusciti, in generale, a determinare la funzione probabilità dell'evento coincidenza. Così, per ***N*=30** la probabilità è del **70%**, per ***N*=40** dell'**89%** e per ***N*=60** si supera il **99%**, pur non raggiungendo il **100%** se non dal valore di ***N*=366** in poi. La curva che si ottiene ha la forma di una *logistica*, anche se questa, in generale, ha un carattere asintotico per N che tende ad infinito. La nostra invece presenta un valore effettivamente asintotico fino a **365** e successivamente, un andamento costante unitario, poiché l'evento in questione diventa certo. Uno dei *misteri* legati alla problematica del compleanno è costituito dalla convinzione, almeno iniziale nelle persone, di non trovare riscontro o conferma di tale fatto. Tra gli ostacoli epistemologici più seri alla base della mancata comprensione, c'è forse quello di non saper cogliere in modo consapevole, il quoziente numerico, esaminato poc'anzi, tra i due tipi di disposizioni, quelle semplici e con ripetizione. In effetti, difficilmente nei contesti della vita reale si va a valutare la discrepanza esistente tra questi due raggruppamenti. Ad un livello equivalente anche la valutazione dell'evento non compleanno, risulta sorprendente ed inaspettata.

Fase 5 (**3-4 ore**). **Sperimentare coincidenze di altri eventi. Simulazioni via software.** Partendo dalle osservazioni di base del problema classico del compleanno, si possono sperimentare in aula, altre situazioni didattiche in cui vengono formulate richieste che conducono spesso a coincidenze inattese, per esempio la seguente:
Dato un mazzo di 40 carte napoletane (*o di altro tipo*), *si scelga una carta a piacere e si segni il valore su un foglio, ad esempio il 3 di denari. Successivamente si rimetta la carta nel mazzo e si ripeta, segnandola, l'estrazione di un'altra carta e così via. Stabilire quanto deve essere il minimo numero n di estrazioni perché si verifichi una coincidenza di almeno due carte, con probabilità maggiore del 50%.*
Diventa interessante l'analisi della soluzione. Denotando con d il numero dei *giorni del nuovo calendario*, che risulta di **40**, si imporrà:

***P*(*Coinc*)=1-*P*(*Non_Coinc*)=**$\boldsymbol{1-\frac{D_{d,n}}{D'_{d,n}} > 0,50}$**.**

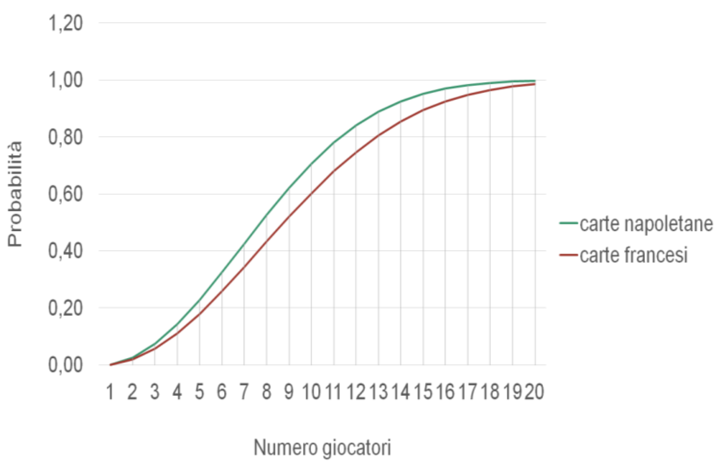
Risulta: $\boldsymbol{\frac{D_{40,8}}{40^8} = \frac{40\ 39\ 38 \dots 33}{40^8} = 0,473.}$

Il risultato cercato è quindi dato da **8** estrazioni che fa superare del **52%** la probabilità di successo, mentre con **7** estrazioni non si raggiunge il quorum del **50%**. Si riporta la tabella numerica che illustra bene la distribuzione di probabilità del mazzo di carte napoletano.

Numero giocatori	Probabilità	Percentuale
2	0,02500	2,5 %
4	0,14322	14,3 %
6	0,32529	32,5 %
8	0,52686	52,7 %
10	0,70665	70,7 %
14	0,92463	92,4 %
18	0,98944	98,9 %
22	0,99928	99,9 %

La probabilità di coincidenza nel mazzo di carte napoletano

Nella figura in basso a sinistra, si mostrano i grafici relativi al mazzo di carte napoletano (*parte superiore*) e al mazzo di carte francese (*parte inferiore*).



Si nota come il calendario con i **365** giorni sia stato rimpiazzato con le **40** carte e il valore **23** dal nuovo valore **8**. Per le carte francesi da **52** il valore di interesse è **12** che dimezza la probabilità al **50%**. Similmente, se si ripete l'esperienza con la tombola si riscontra che il nuovo calendario è formato da **90** numeri e il valore da determinare è ***n*=12**. La lista dei valori di *n*, dei vari calendari con *d* giorni, fino al valore **99** è mostrata in tabella.
Indagare queste nuove collezioni di oggetti e trovare il relativo minimo *n* che realizzi la probabilità di successo, diventa per gli allievi di sicuro stimolo. Sono infatti coinvolti a reinventare o a elaborare aspetti del reale e di natura quotidiana: coincidenze di brani scanditi in play-list su cellulari, elencare in una partita di calcio le date di nascite dei **22**

calciatori, con in più l'arbitro, ecc. È importante anche osservare che la soluzione si basa su operazioni davvero elementari (n-1 moltiplicazioni e 1 sottrazione). Diventa anche piuttosto naturale, per gli allievi, ricorrere alla simulazione software di tali attività. Per questo scopo, è sufficiente scegliere il foglio *Excel* che ha un ambiente di progettazione semplice e produttivo.

Calendari di taglia d	Valore di n Prob >50%
3-5	3
6-9	4
10-16	5
17-23	6
24-32	7
33-42	8
43-54	9
55-68	10
69-82	11
83-99	12

In figura la schermata grafica realizzata dagli allievi con esperimenti di simulazione relativi a compleanni, carte, tombola

Con esso, sono state determinate le frequenze di coincidenze per centinaia di gruppi di **23** persone. utilizzando la nota funzione *Random*. Così pure per le estrazioni di carte e del gioco della tombola.

A livello teorico, rimane l'esigenza di determinare per valori di d molto grandi- ad esempio un milione - delle formule dirette che restituiscano il valore di n. A titolo informativo, una formula che approssima bene tale valore è $\boldsymbol{n \approx 1.2\sqrt{d}}$**,** si veda **[7],** ottenuta con l'aiuto di strumenti di matematica superiore. La ricerca matematica, in tal senso non è del tutto conclusa e si lavora per ottenere stime più accurate **[3], [7]**.

In **[4]** si definisce il quasi-compleanno (con distanza **1**) come il verificarsi di almeno due date che distano al più un giorno, per esempio *5 e 6 Dicembre* oppure *31 Dicembre e 1 Gennaio*, ecc. Analogamente si possono fornire, in generale, i quasi compleanni con distanza *d*. Ebbene si mostra che con **14** persone si ha una probabilità maggiore di **0,5**, di ottenere un quasi compleanno con distanza **1**, mentre **8** persone realizzano con probabilità maggiore di **0,5** l'evento di essere separati da al più **4** giorni, cioè il quasi-compleanno con distanza **4**.

Distanza	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Numero n di persone	23	14	11	9	8	8	7	7	6	6

In tabella si mostrano i quasi compleanni e le probabilità relative

In **[3]** invece, si tratta il caso delle coincidenze multiple, come si evince nella successiva tabella. I numeri nella riga inferiore indicano il raggiungimento della probabilità maggiore di **0,5** del verificarsi dell'evento multiplo. Per esempio, se siamo in una sala cinematografica o in un auditorium con **88** persone, possiamo puntare sull'evento di almeno **3** compleanni coincidenti, oppure in una scuola di **798** persone sul verificarsi di almeno **8** compleanni, ecc. Tali risultati si ottengono prevalentemente in maniera software, poiché da un punto di vista matematico si rivelano alquanto impegnativi.

1, 23,	**88,**	**187,**	**313,**	**460,**	**623,**	**798,**	**985,**	**1181,**	**1385,**	**1596,**	**1813,**	
2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13	

Coincidenze Multiple *(Diaconis and Mosteller 1989)*

In conclusione, l'attività qui descritta si può rivelare istruttiva, permettendo di consolidare diverse competenze matematiche. L'approccio alla probabilità può rivelarsi efficace, se accompagnato da esplorazioni di tipo intuitivo su aspetti del reale, come il fenomeno delle coincidenze. Non solo, come detto all'inizio, ciò si può ripercuotere in chiave sociale, su come dare un significato ponderato alle scommesse di eventi incerti. Ciò costituisce un primo gradino, per avviarsi ad una forma terapeutica, in cui il cittadino può pensare di ridurre la fallacia del giocatore.

Bibliografia

[1] Dall'Aglio.G., *Calcolo delle probabilità*, Zanichelli, 2003.

[2] Paolillo B. "*Il problema del compleanno e le sue varianti*", *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate* **37** A-B, N 5, 2014.

[3] Diaconis, P. and Mosteller, F. *"Methods for Studying Coincidences." J. Amer. Statist. Assoc.* **84**, 853-861, 1989.

[4] Morton Abramson and W. O. J. Moser; *"More Birthday Surprises*", *The American Mathematical Monthly, Vol. 77, No. 8 (Oct., 1970), pp. 856- 858*

[5] Stewart, I. "What a Coincidence!" *Sci. Amer.* **278**, 95-96, June 1998.

[6] Tesler, L. "Not a Coincidence!" http://www.nomodes.com

[7] *http://www.dm.unito.it/~cerruti/aprile-07-luglio 08.html#compleanno*

[8] *https://people.richland.edu/james/misc/simulation /birthday.html*