

Cubo in prospettiva

Diana Cipressi

Docente di matematica e scienze
Istituto Comprensivo n. 4 Chieti
Scuola Sec. di 1° grado G. Mezzanotte
e-mail diana.cipressi@gmail.com

Sunto

Per “*Fare matematica*” e per sviluppare un pensiero geometrico passo dopo passo, occorre una cura didattica indirizzata allo sviluppo di situazioni problematiche, che possano valorizzare l’esperienza e l’opera degli alunni, la narrazione e il confronto delle idee, l’acquisizione progressiva di concetti e competenze.

Nel laboratorio “*Cubo in prospettiva*”, l’alunno potrà padroneggiare le figure nello spazio e progettare modelli geometrici, manipolando oggetti concreti a forma cubica, potrà formulare ipotesi e riconoscere relazioni e proprietà del cubo.

La presentazione del cubo da diversi punti di vista (strutture scheletrate, solidi pieni, sviluppo piano) sarà un valido supporto per acquisire familiarità con un ambiente a tre dimensioni.

I ragionamenti sugli errori e sugli ostacoli cognitivi saranno gli elementi essenziali di una discussione di classe in cui l’alunno potrà superare i momenti di contrasto con sé e gli altri e trasformare la percezione reale dell’oggetto nel modello astratto geometrico.

Parole chiave: Cubo; sviluppo piano; esami; Leonardo da Vinci; assonometria; volume.

1. Introduzione

Disciplina di riferimento: Matematica

Ordine di scuola: Scuola sec. di 1° grado, classi seconda/terza.

Dalle Indicazioni nazionali 2012:

Competenze di disciplina

- Riconoscere e risolvere problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.
- Riconoscere e denominare le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e cogliere le relazioni tra gli elementi.

- Sostenere le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati.

Obiettivi di apprendimento

Spazio e figure

- Visualizzare oggetti tridimensionali a partire da rappresentazioni bidimensionali e viceversa
- Conoscere le principali proprietà delle figure geometriche; individuare gli elementi significativi di una figura.

Relazioni e funzioni

- Interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà.

Moduli

- I poliedri di Leonardo da Vinci
- Il cubo scheletrato
- La prospettiva e l'assonometria
- Lo sviluppo del cubo e gli esamini
- Il volume in scatola

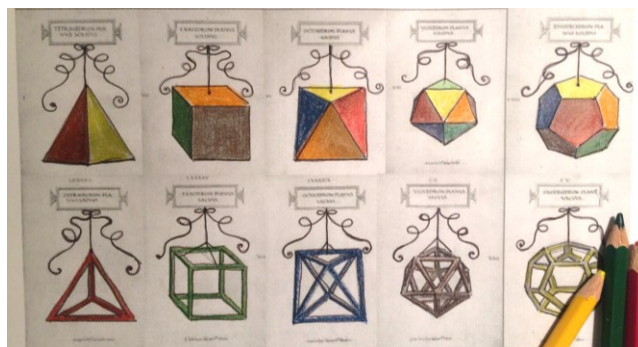
Metodologie

Problem solving; Learning by doing; Lavori di gruppo; Didattica ludica; Didattica metacognitiva.

2. I poliedri di Leonardo da Vinci

Nel 2019 ricorrono i 500 anni dalla morte di *Leonardo Da Vinci*, personaggio poliedrico per eccellenza del Rinascimento, artista, scienziato e matematico.

Un contributo di Leonardo sui poliedri regolari è rappresentato nel “*De divina proportione*” di Luca Pacioli; ecco i 5 disegni di Leonardo da Vinci che rappresentano il tetraedro, l'esaedro, l'ottaedro, l'icosaedro e il dodecaedro:



Cubo in prospettiva

L'osservazione di questi poliedri, rafforzata con modelli di plastica o legno, permetterà agli alunni di individuarne le principali caratteristiche:

- *le facce sono poligoni regolari*
- *le facce sono uguali fra loro*
- *ogni spigolo è il lato di due facce*
- *ogni vertice è l'estremo di almeno tre spigoli*
- *in ogni vertice concorrono almeno tre facce*

e di determinare il numero complessivo di facce, spigoli e vertici.

Infine gli alunni possono compilare una tabella:

Poliedro	Forma di una Faccia	n° totale di Facce (F)	n° totale Vertici (V)	n° totale Spigoli (S)
Tetraedro	triangolo equilatero	4	4	6
Esaedro	quadrato	6	8	12
Ottaedro	triangolo equilatero	8	6	12
Icosaedro	triangolo equilatero	20	12	30
Dodecaedro	pentagono regolare	12	20	30

Dalla tabella essi deducono che coppie di poliedri scambiano il numero delle facce e dei vertici; diremo che sono duali il cubo e l'ottaedro e anche l'icosaedro e il dodecaedro.

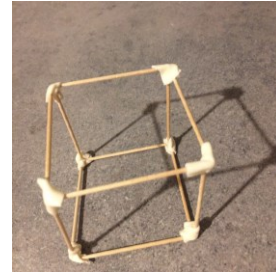
3. Il cubo scheletrato

La prima attività sui cubi, fatti da stuzzicadenti e plastilina o biadesivo, servirà a visualizzare spigoli e vertici; essa sarà affiancata successivamente da cubi costruiti in cartoncino, ad evidenziare le facce dei solidi.

Il gioco “*Amici nel cubo*” promuove l'osservazione delle relazioni topologiche tra gli elementi del cubo (tralasciando invece le caratteristiche metriche):

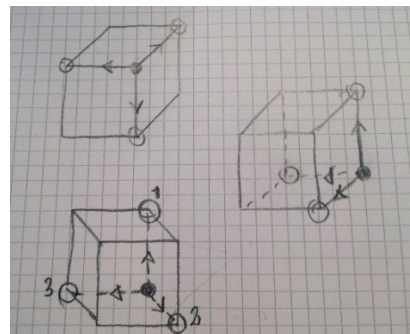
- a) *Supponete che ogni vertice del cubo sia una persona e ogni spigolo tra due vertici sia una relazione di amicizia tra due persone.*

- Cercate una persona P amica con altre tre persone. Quante sono le persone P ?
- Potete trovare un gruppo G di quattro persone amiche a due a due?



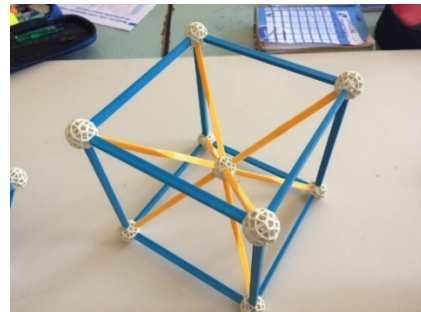
Gli alunni osservano il modello costruito e riflettono sui disegni tracciati sul foglio.

- Ogni vertice nero P è collegato con tre vertici bianchi, quindi ogni vertice P del cubo ha tre relazioni di amicizia: le persone P sono 6.
- Un qualsiasi gruppo di 4 persone-vertici non può essere formato da amici a due a due.



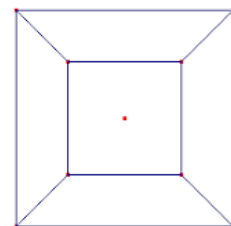
- b) Utilizzate ora il cubo scheletrato con le diagonali del cubo. Supponete che ogni vertice del cubo sia una persona e ogni relazione di amicizia tra due persone sia data da spigoli oppure da diagonali. Trovate le differenze con il cubo precedente.

- Ogni vertice P è collegato con 4 vertici, tre lungo uno spigolo e uno lungo una diagonale; quindi le persone P con 4 amici sono tante quanti i vertici del cubo, cioè 6.
- In ogni gruppo di almeno tre amici, non si trovano amici a due a due.



- c) Il grafo del cubo, che si ottiene proiettando il poliedro stesso su un piano, potrà essere di aiuto per esplorare ancora le proprietà del cubo e per individuare le “trasformazioni” subite dal cubo:

- Le sei facce del cubo sono diventate nel grafo un quadrato piccolo, un quadrato grande e quattro trapezi isosceli.
- Gli otto vertici del cubo sono nel grafo i vertici dei quadrilateri che lo formano.
- I dodici spigoli del cubo si contano ora nei lati dei due quadrati e dei quattro trapezi.



Cubo in prospettiva

Il parallelismo tra spigoli non è più conservato nei quattro trapezi che stanno a rappresentare le facce laterali del cubo.

La verbalizzazione delle procedure sarà un valido aiuto per l'acquisizione del linguaggio specifico.

4. La prospettiva e l'assonometria

Il disegno di Leonardo è un'assonometria isometrica? È una rappresentazione grafica da cui è possibile ricavare la forma precisa e le dimensioni reali dell'oggetto reale?

Per rispondere, ogni alunno avrà una scatola cubica appoggiata sul banco da guardare da più punti di vista e potrà notare che la visione dipenderà dalla distanza tra l'oggetto e l'osservatore e dalla posizione dell'osservatore.

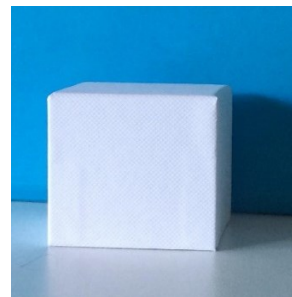
Spunti di riflessioni:

Ponete la scatola in modo che sia visibile una faccia frontalmente:

- *Le facce visibili appaiono tutte quadrate?*
- *Gli spigoli visibili sono di uguale lunghezza?*
- *Quali spigoli sembrano ancora paralleli?*

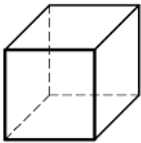
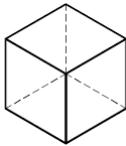


- *Allontanate il punto di vista, cercando di visualizzare una forma di quadrato per la faccia frontale e di parallelogramma per altre due facce.*
- *Quali spigoli appaiono paralleli?*

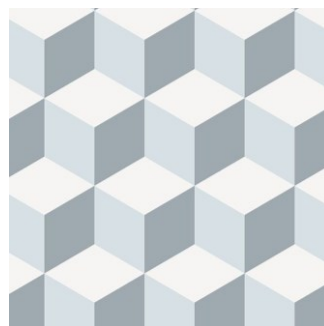
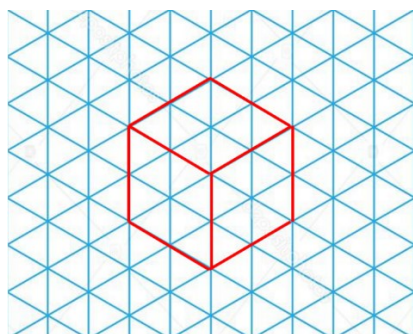


L'osservazione delle scatole cubiche variata rispetto alla distanza tra osservatore e piano di proiezione genera due tecniche di rappresentazione grafica, la prospettiva e l'assonometria.

Gli alunni in gruppo riferiscono le rispettive analisi, riflettono in una discussione collettiva e sintetizzano in una tabella le proprietà rilevate:

	<i>Assonometria cavaliera o obliqua</i>	<i>Assonometria isometrica</i>
Rappresentazione grafica		
Facce quadrate	La faccia frontale e la sua opposta	Nessuna faccia
Parallelismo tra facce opposte	Si conserva	Si conserva
Parallelismo tra spigoli opposti	Si conserva	Si conserva
La lunghezza degli spigoli	Misure reali asse x e z; dimezzate asse y	Misure reali sui tre assi x, y, z

Gli alunni si metteranno alla prova con la rappresentazione di assonometrie, in particolare usando la carta appositata per l'assonometria isometrica.



5. Lo sviluppo del cubo e gli esami

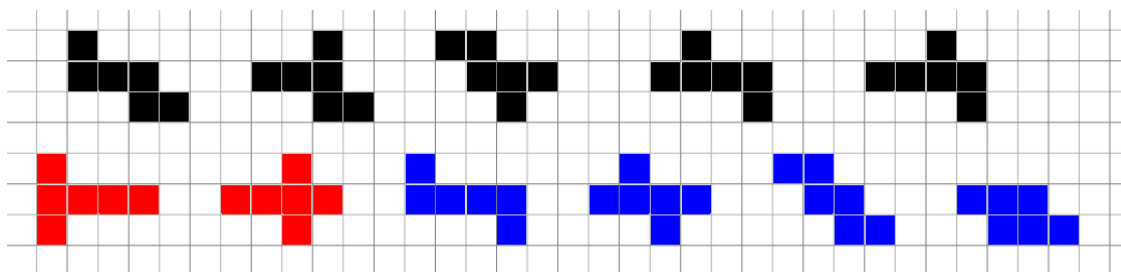
Per organizzare il passaggio tra immagine bidimensionale e tridimensionale, proponiamo alla classe la costruzione di figure piane, unendo sei quadrati uguali, aventi almeno un lato in comune. Con le figure che si ottengono - gli “*esamini*” – i ragazzi scoprono che il cubo non ha un solo sviluppo piano, a forma di croce.

- Scegliete una opportuna unità di misura e cercate gli esami che rappresentano lo sviluppo piano di un cubo. Costruite una tabella per gli sviluppi del cubo:

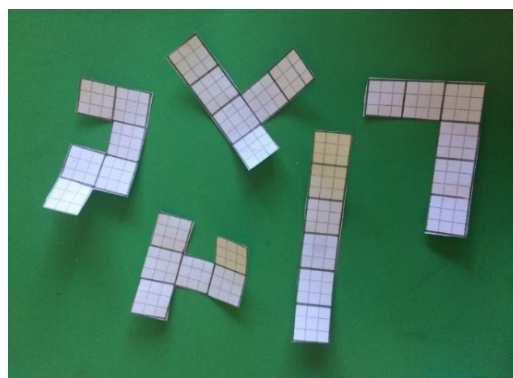
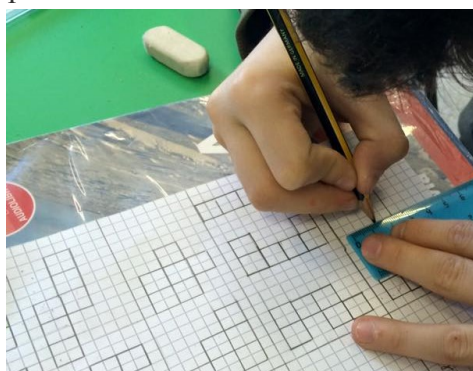
Figura	Perimetro	Area

Cubo in prospettiva

Man mano che gli alunni disegnano le figure sul foglio, devono decidere se due esamiini sono uguali e se differiscono per una rotazione o un ribaltamento e valutare quante sono complessivamente le figure. Ritagliano gli esamiini e dal confronto reciproco ricavano gli undici sviluppi del cubo:

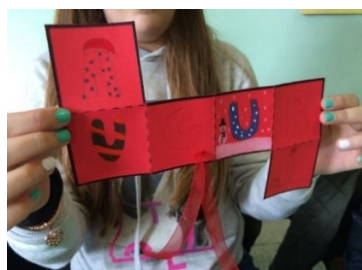


La classe riconosce infine che tutti gli esamiini sono equivalenti e che non tutti sono isoperimetrici.



Sul sito xlatangente <https://www.youtube.com/watch?v=URUb7GOEWyU> la classe può vedere un'attraente animazione che mostra gli sviluppi piani del cubo.

- *Stampate su un cartoncino uno sviluppo piano del cubo; ritagliate e decorate, per il prossimo Natale, l'esamino con la parola "AUGURI". Chiudete il pacchetto con un fiocco rosso.*



La realizzazione di un pacchetto infiocchettato, fatto con le proprie mani, crea un clima di festa, di collaborazione e di coinvolgimento e nello stesso tempo l'approccio *Learning by doing* promuoverà una relazione naturale tra il "fare" e il "pensare".

Se la classe è interessata, i gruppi di lavoro potranno indagare anche su possibili classificazioni degli esami (in base alla concavità, oppure rispetto agli assi di simmetria, ecc.).

Gli esami, come si è notato, possono rappresentare un contesto didattico adatto alla visualizzazione di relazioni matematiche di diverso genere:

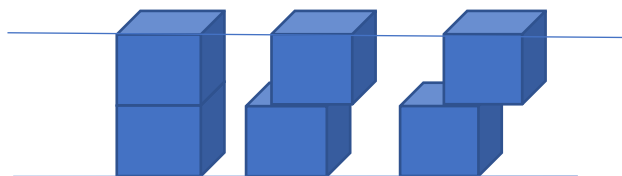
- *isometriche*: per riconoscere le figure congruenti, se soggette a spostamenti;
- *metriche*: per calcolare perimetro e area, distinguendo grandezze e unità di misura;
- *topologiche*: per trovare relazioni tra lati o vertici.

6. Il volume in scatola

Alcuni dei moduli precedenti si adattano anche ad una programmazione di classe seconda mentre questo modulo con difficoltà legate al linguaggio algebrico è più consono ad una classe terza.

A) Provate a costruire con cubetti uguali torri di uguale altezza ma forma diversa. Che cosa notate?

Proviamo a sovrapporre due cubetti uno sull'altro.



Poiché la diversa forma dei tre solidi non compromette lo spazio contenuto in essi, diremo che i tre solidi sono equivalenti, cioè hanno lo stesso volume.

Costruendo solidi con tre, quattro, ... cubetti, aventi stessa base e stessa altezza, gli alunni percepiranno il volume come prodotto dell'area di base per l'altezza.

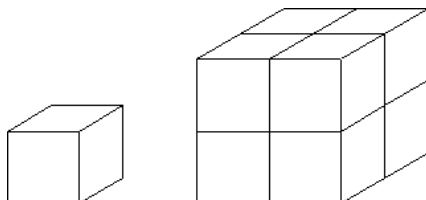
Ricorderemo a tal proposito un contesto analogo nella geometria piana: se due quadrilateri hanno stessa base e stessa altezza, allora hanno la stessa area cioè sono equivalenti.



Cubo in prospettiva

B) Si narra che ad Atene si era diffusa la peste; gli abitanti, giunti a Delo, interrogarono l'oracolo di Apollo che rispose: "La peste cesserà quando sarà mitigata l'ira degli dei" e suggerì di raddoppiare l'altare a forma cubica di Apollo.

Gli ateniesi fecero costruire un altare, con lo spigolo doppio, ma la peste continuò. Sapete perché il metodo non funzionò?



Gli alunni confrontano alcuni esempi, dopo aver riportato i risultati in una tabella: se lo spigolo del primo cubo è 1 cm, il suo volume è 1 cm^3 , mentre il cubo con spigolo doppio, cioè lungo 2 cm, avrà volume 64 cm^3 , e quindi il volume V_2 non è il doppio di V_1 .

spigolo $l_1 \text{ (cm)}$	volume $V_1 \text{ (cm}^3\text{)}$	spigolo $l_2 = 2 l_1 \text{ (cm)}$	volume $V_2 \text{ (cm}^3\text{)}$	rapporto V_2/V_1
1	1	2	8	$8/1=8$
2	8	4	64	$64/8=8$
3	27	6	216	$216/27=8$

Essi potranno formalizzare la questione con il linguaggio algebrico:

- Se lo spigolo viene raddoppiato - $l_2 = 2 \times l_1$ - allora il volume del cubo diventa otto volte maggiore, cioè $V_2 = (l_2)^3 = (2 \times l_1)^3 = 8 \times V_1$.
- Se il volume del cubo viene raddoppiato - $V_2 = 2 \times (V_1) = 2 \times (l_1)^3$ - allora lo spigolo dell'oracolo non è raddoppiato, infatti $l_2 = \sqrt[3]{V_2} = \sqrt[3]{2} \times l_1$.

In conclusione per soddisfare Apollo, occorrerà moltiplicare lo spigolo l_1 per $\sqrt[3]{2}$, cioè si tratterà di padroneggiare un numero irrazionale.

Che cosa c'è di strano in questo numero?

Per i matematici greci si trattava di costruire un segmento con le regole geometriche della riga e del compasso, ma ciò non è possibile per i numeri irrazionali e i Greci non riuscirono a debellare la peste.

Un problema simile è quello della duplicazione del quadrato:

$$A_2 = 2 \times A_1$$

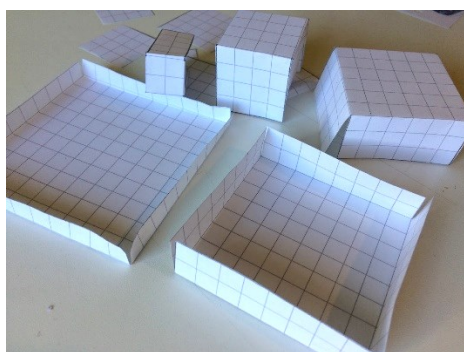
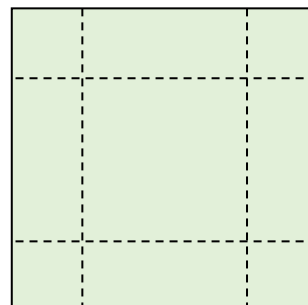
$$(l_2)^2 = 2 \times (l_1)^2$$

$$l_2 = \sqrt{2} \times l_1$$

Come si nota, anche per il quadrato di area doppia si deve utilizzare un numero irrazionale, $\sqrt{2}$.

C) Consegniamo a ciascun gruppo fogli quadrati di lato 12 cm e chiediamo:

- di costruire scatole a base quadrata, ritagliando quattro quadratini agli angoli del foglio.
- di organizzare una tabella con dimensioni (valori interi) e rispettivi volumi delle scatole.
- di ricavare il volume massimo e minimo tra tutte le scatole.
- di scrivere il volume della scatola in funzione della sua altezza.



Per la prima scatola occorre togliere un quadratino di lato 1 cm , in modo che nel centro del foglio resti un quadrato di lato $12\text{ cm} - 2 \times 1\text{ cm} = 10\text{ cm}$; la scatola, di altezza 1 cm e area di base 100 cm^2 , ha il volume definito dal prodotto dell'area di base per la misura dell'altezza, cioè 100 cm^3 .

La tabella riporta i casi possibili:

Lato x del quadratino (cm)	Area Ab di base (cm^2)	Altezza h della scatola (cm)	Volume V della scatola (cm^3)
1	100	1	100
2	64	2	128
3	36	3	108
4	16	4	64
5	4	5	20
6	0	6	0

Come si può vedere, il volume della scatola dipende dal lato x del quadratino: è massimo se x è lungo 2 cm e nullo se x è 6 cm .

Gli alunni ripetono l'esperienza con fogli quadrati di altre dimensioni (18 cm , 24 cm , ...) e scoprono che il valore massimo si ha se x è $1/6$ di a e minimo se x è $1/2$ di a , come si deduce dalla tabella:

Cubo in prospettiva

foglio quadrato $a \times a$	lato x se V è max	lato x se V è min
12 x 12	$x = 2$ cm	$x = 20$ cm
18 x 18	$x = 3$ cm	$x = 9$ cm
24 x 24	$x = 4$ cm	$x = 12$ cm

Traducendo nel linguaggio algebrico, il volume della scatola è espresso in $V = (a - 2x)^2 \cdot x$ ovvero $V = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$.

Gli alunni potranno verificare i valori massimo e minimo della funzione con una rappresentazione della funzione $V(x)$ sul piano cartesiano.

Una nota per il docente: la funzione V di x ammette infatti un massimo e un minimo rispettivamente in $x = \frac{1}{6}a$ e $x = \frac{1}{2}a$, come si evince dalla derivata $V' = 12x^2 - 8ax + a^2$.

I casi riconducibili a valori interi sono cioè caratteristici di un foglio con il lato multiplo di 6.

7. Considerazioni finali

Le attività in cui l'alunno manipola (taglia, disegna, piega, ..) serviranno a sviluppare una maggiore sicurezza e un incremento di emotività positiva, essenziali per una buona visione dello spazio.

La progressione graduale dei concetti guidata dall'insegnante stimolerà la classe nel riconoscimento di analogie in situazioni diverse, al fine di raggiungere un'idea unitaria del sapere: la struttura scheletrica del cubo, le trasformazioni degli sviluppi piani, l'ottimizzazione dei volumi, ... sono i cardini fondamentali di un sapere contestualizzato. La prospettiva del presente laboratorio è dunque quella di valorizzare l'esperienza diretta dei discenti in quei contesti di apprendimento che stimolano la riflessione, con alcuni nuclei fondanti del curriculum di matematica, che possono essere versatili su vari livelli di approfondimento.

Bibliografia e sitografia

Emma Castelnuovo. *La Matematica. Figure solide*. La Nuova Italia

Pierluigi Odifreddi. *C'è spazio per tutti*. Mondadori

Gianfranco Arrigo, Silvia Sbaragli. *Salviamo la geometria solida! Riflessioni sulla geometria dall'infanzia alle superiori*

<http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/sbaragli/geometria%20solida.pdf>

Maria Dedò. *Modelli nella comunicazione a scuola, ma non solo*

<http://www.xlatangente.it/upload/files/modelli%20nella%20comunicazione%20a%20scuola%20C%20ma%20non%20solo.pdf>