Mondo Matematico e Dintorni, Vol 1, No 1-2 (2018), 79-98

Il problem solving e la matematica ricreativa nella scuola del primo ciclo

Angela Chiefari[1], Mario Innocenzo Mandrone[2], Franca Rossetti[3]

[1]Convitto Nazionale "P. Giannone" - Benevento- e-mail: angelachiefari@gmail.com
[2]Dipartimento di Scienze e Tecnologie-Università degli Studi del Sannio-Benevento- e-mail: almavit@libero.it
[3]Inserita nella Banca Dati Esperti Valutazione e miglioramento, osservatori dei processi di insegnamento e apprendimento - e-mail: rossetti.franca@fastwebnet.it

Sunto
Nel presente lavoro presenteremo due approcci metodologici particolarmente efficaci nell'insegnamento della matematica nella scuola primaria: il problem solving e il gioco. Il problem solving è una metodologia che rimanda ad attività in cui prevale il saper ragionare, il fare ipotesi ed operare scelte, avvalendosi di una adeguata gestione delle informazioni più che dell'applicazione sterile di procedimenti meccanici volti alla risoluzione di semplici problemi. La matematica ricreativa, invece, attraverso la presentazione di giochi, enigmi e situazioni insolite e curiose, è la modalità di lavoro che meglio incoraggia la ricerca e la progettualità, coinvolge gli alunni nel pensare, realizzare, valutare attività vissute in modo condiviso e partecipato, favorisce lo sviluppo ed il potenziamento di capacità logiche e critiche. Si propongono, pertanto, materiali (giochi, enigmi e situazioni insolite e curiose) dai quali trarre spunti di lavoro; alcune proposte sono state tratte da testi molto antichi, ad es. dal "De viribus quantitatis" di Luca Pacioli, dal "Papiro di Rhind" del 1650 a.C., dal "Manuale di matematica del maestro cinese Sun Tzu Suan Ching" del IV secolo d.C. Non viene specificata la classe ove proporli perché si vuol lasciare al docente la libertà di scegliere in base alla propria esperienza e alle reali situazioni in cui si trova ad operare (recupero di conoscenze pregresse, ma anche valorizzazione delle eccellenze).

Parole chiave: Problem solving, matematica ricreativa, cooperative learning, pensiero computazionale e coding, didattica per problemi, attività laboratoriale.

L'elogio della matematica, elogio alla matematica. Dal discorso pronunciato da Alessandro Padoa in Pinerolo il 28 marzo 1908

"…*Quando affermo che la matematica è più facile d'ogni altra scienza, io non ignoro e non dimentico quanto essa riesca difficile ai più.... Ho detto che la matematica è più utile d'ogni altra scienza; ed invero quale altra fornisce cognizioni tanto universali nel tempo e nello spazio, aiuto altrettanto valido alle scienze fisiche e alle arti costruttive? ..... Perciò io esorto a studiare matematica per chi si accinga a divenire avvocato o economista, filosofo o letterato...; perché io credo e spero che non gli sarà inutile saper bene ragionare e chiaramente esporre* …"

1. Il problem solving e la matematica ricreativa

Come espressione della mente umana la matematica riflette la volontà attiva, la ragione contemplativa e il desiderio di perfezione estetica. I suoi elementi fondamentali sono la logica e l'intuizione, l'analisi e la costruzione, la generalità e l'individualità. Tradizioni diverse potranno mettere in evidenza aspetti diversi, ma è soltanto la reazione di queste forze antitetiche e la lotta per la loro sintesi che costituiscono la vita, l'utilità e il valore supremo della scienza matematica (R. Courant - H. Robbins -Che cos'è la matematica" Universale Bollati Boringhieri). Per quanto riguarda la matematica ricreativa, in prima approssimazione potremmo dire che è un'attività ludica, il cui scopo è di divertire colui che la pratica o al quale essa è proposta. Consiste nel risolvere quelli che vengono comunemente detti "giochi matematici" o "puzzles" o "rompicapo" o "enigmi" per la cui soluzione, sono necessarie talora nozioni matematiche, ma spesso di tipo elementare, quasi sempre ragionamenti logici. Un problema, infatti, per essere considerato un gioco matematico deve rappresentare una sfida intellettuale significativa; l'enunciato, possibilmente, deve essere intrigante e sorprendente, la soluzione stessa deve stupire, divertire e distrarre.

La nostra proposta si avvale di due approcci metodologici: quello del problem solving e quello del gioco; approcci particolarmente efficaci sia perché contribuiscono al raggiungimento dei traguardi nei diversi ordini di scuola, sia perché facilitano il recupero dell'interesse e dell'attenzione nei confronti degli allievi meno motivati e più svantaggiati. Del resto l'importanza e l'efficacia dell'insegnamento per problemi è già stato sottolineato nelle parole di illustri Maestri: nel 1912, Guido Castelnuovo, al III Convegno della Mathesis, affermava che lo studente "non comprenderà l'interesse di una teoria finché non ne avrà vista qualche pratica conseguenza"; per Bruno de Finetti – in Matematica Logico-Intuitiva - la questione rilevante "è non tanto quella di far apprendere la matematica, quanto quella di farla comprendere come qualcosa di vivo nel regno del pensiero". Emma Castelnuovo – nella sua esposizione "Verso un insegnamento della matematica che produce cultura scientifica" - sostiene che per insegnare a saper vedere con gli occhi fisici e con quelli della mente "bisogna insegnare a fare le cose: a osservare, a sperimentare, a ragionare, a intuire." Infine, secondo l'idea di Polya, autore di eccellenti opere sull'insegnamento per problemi - la via efficace per "formare" è "nel fare", per cui "il risolvere i problemi è un'arte pratica, come il nuotare o lo sciare o il suonare un piano: potete impararlo solo con l'imitazione e la pratica". Fatta la doverosa premessa, precisiamo subito che il problem solving tende alla ricerca di una risposta da dare ad un problema che non è necessariamente di tipo numerico (problemi di determinazione): si può, infatti, cercare un oggetto geometrico (problemi di costruzione) o la dimostrazione di una certa proprietà (problemi di dimostrazione), oppure, semplicemente, risolvere problemi complessi che la vita reale ci pone. Il gioco è nel linguaggio comune qualcosa che piace, che diverte e si associa al recupero della dimensione ludica nello studio della matematica. Dato che spesso un problema può essere posto sotto forma di gioco e un gioco può svolgersi attraverso la risoluzione di uno o più problemi, salvo alcune considerazioni di carattere specifico in ciò che verrà detto, i due termini sono in questo contesto, considerati congiuntamente. Il problem solving e il gioco si configurano, pertanto, come un potente strumento didattico capace di trasformare gli studenti da annoiati ripetitori passivi di definizioni, teoremi e meccanici esecutori di algoritmi, in menti attive capaci di padroneggiare in modo flessibile e creativo gli strumenti matematici. A completamento, inoltre, viene suggerita l'opportunità di stimolare l'interesse per il pensiero matematico utilizzando questioni di interesse storico che possono essere presentate sotto forma di problema o gioco con grande valenza didattica come si vedrà nel corso della presente proposta.

Risolvere i problemi è una questione di abilità vera e propria e qualunque abilità può essere acquisita con l'imitazione e l'esercizio; si impara a risolvere i problemi soprattutto … risolvendoli. Gli approcci alla risoluzione di un problema possono essere di vario tipo (intuitivo, sistematico, algoritmico, parziale per tentativi, per esclusione, ecc.); un alunno può manifestare una propensione per alcune tipologie di approccio piuttosto che per altre e, in relazione alla specificità del problema, un approccio può rivelarsi più idoneo e fruttuoso di un altro. In generale però queste tipologie di approccio costituiscono delle strade alternative che è importante conoscere ed appropriarsene al fine di raggiungere una maggiore flessibilità e ricchezza di strumenti da poter utilizzare. Questa visione multi-approccio a giochi e problemi si contrappone alla vecchia logica dell'algoritmo predefinito, del "come si fa", e favorisce l'attivazione di facoltà e di inclinazioni diverse e complementari tra loro: intuito, comprensione degli schemi, progettualità, analiticità, tendenza ad algoritmizzare, ecc. A livello didattico, quindi, è importante da un lato valorizzare e potenziare gli stili e le propensioni individuali e dall'altro arricchire e diversificare il bagaglio di ciascuno, aiutando gli allievi a mettersi in gioco con le proprie competenze. Può essere formativo in tal senso proporre alcuni problemi alla classe e poi, anziché fornire la classica "ricetta" della soluzione, chiedere ad ognuno, anche a chi non è stato in grado di trovare la soluzione, di esplicitare i tentativi che ha fatto e le relative motivazioni. I vantaggi di questa impostazione sia sul piano umano che su quello più specificatamente intellettuale sono molteplici, non ultimo il confronto delle idee individuali e la discussione delle stesse in un confronto democratico. L'impegno dei ragazzi nella progettazione e nella costruzione fisica di modelli favorisce, infine, la stretta connessione fra l'aspetto applicativo e quello teorico e apre agli apporti dell'inventiva, della creatività, al confronto e al desiderio di ricerca. A tal proposito il "Cooperative learning" si rivela di fondamentale importanza nell'ambito dell'apprendimento. La didattica collaborativa si rifà alla teoria del socio-costruttivismo secondo la quale la conoscenza è il prodotto di una costruzione attiva del soggetto ed è ancorata al contesto in cui si svolge attraverso particolari forme di collaborazione e negoziazione sociale. Essa punta al miglioramento dei processi di apprendimento e socializzazione attraverso la mediazione del gruppo i cui membri devono agire sentendosi positivamente interdipendenti tra loro, in modo che il successo di uno sia il successo di tutti. Per Vygotskij, infatti, ogni individuo possiede potenzialità cognitive latenti che si possono esprimere solo attraverso l'interazione con gli altri (zona di sviluppo prossimale). Nella didattica collaborativa il docente assume il ruolo di tutor nel senso che deve favorire l'interazione tra gli studenti, stimolare la discussione, facilitare l'apprendimento ricorrendo a continue sollecitazioni, utilizzando il gruppo in cui gli alunni lavorano insieme per migliorare reciprocamente il loro apprendimento, puntando su una mediazione sociale, contrapposta alla mediazione dell'insegnante.

Caratteristiche positive del lavoro cooperativo sono: lo sviluppo di un legame concreto tra gli studenti**,** l'interazione faccia a faccia che garantisce processi di reciproco apprendimento e incoraggiamento**,** lo stimolo alla responsabilizzazione, lo sviluppo delle "abilità sociali": il gruppo non lavora efficacemente se i suoi membri non possiedono certe capacità (saper ascoltare, essere disponibili a condividere le decisioni, comunicare le proprie opinioni, gestire i conflitti …). Numerose ricerche hanno dimostrato che con il "cooperative learning" si recuperano allievi problematici, poco motivati allo studio e con problemi affettivi, si facilita l'integrazione di allievi disadattati per handicap o etnie diverse, si valorizzano gli allievi bravi (gifted student), si sviluppano competenze sociali del senso civico, del rispetto dell'altro, si favorisce lo sviluppo di un cittadino democratico (competenze di cittadinanza).

2. Qualche nota didattica a partire dalla scuola dell'infanzia

Nell'attuale società, che richiede continui adattamenti a situazioni mutevoli, l'insegnamento e l'apprendimento della matematica sono cruciali per il contributo che possono dare alla formazione di un modo di pensare matematico che metta il "cittadino del mondo" in grado di risolvere i molteplici problemi che la vita reale pone. Nella scuola dell'infanzia, fin dai primi anni, è necessario proporre attività ludiche mirate, che partendo da esperienze vicine al bambino, stimolino la sua curiosità, aguzzino il suo ingegno e allo stesso tempo siano fonte di divertimento. Poiché i bambini imparano attraverso il corpo e il proprio vissuto occorre proporre situazioni concrete che mettano in gioco percezione e movimento, manualità, creatività e iniziativa. In questo modo si stimolerà quello "sguardo matematico" che esplora i fatti, sviluppando logica e immaginazione, in un continuo intreccio con tutti i campi di esperienza. Il gioco è un contesto privilegiato per favorire lo sviluppo progressivo di competenze cognitive e socio-emozionali, indispensabili anche per il successo scolastico. Garantisce il coinvolgimento, l'entusiasmo, la motivazione, la competitività e il rispetto verso le regole. Nel gioco il bambino può effettuare osservazioni, formulare domande e possibili soluzioni, pianificare il controllo delle ipotesi, il racconto dei fatti e l'interpretazione dei dati emersi. Al termine dell'attività ludica si può avviare, inoltre, una discussione collettiva sugli esiti dell'esperienza realizzata finalizzata alla formulazione di spiegazioni alternative col confronto dei risultati. Ovviamente il percorso deve partire dall'esplorazione della realtà che ci circonda per scoprire che è ricca di numeri e di oggetti con i quali i bambini entrano molto presto in contatto imparando ad usarli per i loro giochi. Le osservazioni, le conversazioni, le discussioni, le attività di rielaborazione grafica, pittorica e manipolativa sono essenziali per riflettere e rielaborare la realtà in termini matematici. Il bambino, attraverso un percorso di conoscenza e scoperta, impara a organizzare le proprie esperienze attraverso azioni consapevoli; sperimentando impara a confrontare, a ordinare, a compiere stime approssimative, a formulare ipotesi, a verificarle con strumentazioni adeguate, quindi a interpretare e a intervenire consapevolmente nel suo mondo. Durante le attività diventa fondamentale la verbalizzazione di ciò che succede, il racconto, la storia che si svolge sotto gli occhi di tutti. Nella scuola primaria e nella scuola secondaria di primo grado (scuola media) si preparano e si rafforzano le basi cognitive, sociali, affettive e relazionali che favoriscono il rapporto complessivo della persona con ciò che la circonda attraverso lo sviluppo e il potenziamento delle seguenti capacità:

1. Osservazione della realtà;
2. Organizzazione complessiva del proprio modo di ragionare, argomentare, affrontare problemi acquisendo, oltre alle forme espressive del linguaggio e del senso comune, quelle più caratteristiche della razionalità matematica e scientifica;
3. Uso del linguaggio specifico e delle forme simboliche tipiche della matematica;
4. Progettazione e immaginazione, attraverso attività di risoluzione di problemi in contesti diversi.

Conoscenze e abilità non vanno imposte agli allievi in modo formale, ma attraverso esperienze didattiche significative, nelle quali ogni alunno possa essere motivato all'apprendimento e coinvolto attivamente. Nei primi anni, tuttavia, il livello di capacità astrattiva raggiunta dalla maggior parte degli alunni suggerisce di introdurre gradualmente il tipo di formalizzazione richiesto privilegiando attività e forme espressive più legate al linguaggio naturale e alla logica verbale. È fondamentale, in questo contesto, sollecitare gli alunni a giustificare le loro affermazioni al fine di abituarli a:

1. Individuare, descrivendole, regolarità presenti in semplici contesti concreti;
2. Esprimere semplici congetture verificandole in casi particolari;
3. Avanzare congetture cercando di convalidarle sia empiricamente, sia mediante argomentazioni adeguate, eventualmente ricorrendo anche a contro-esempi.

Va, inoltre, sottolineato come, ad ogni livello scolastico e in ogni contesto conoscitivo, il risolvere problemi offra importanti occasioni agli allievi per costruire nuovi concetti, acquisire nuove nozioni e abilità, arricchendo di significato quanto già appreso verificando l'efficacia di apprendimenti già posseduti. L'insegnante, tramite la proposta di esperienze qualificate, avrà modo di favorire il sorgere e lo svilupparsi delle seguenti competenze:

1. Individuare con chiarezza il problema da risolvere dichiarando esplicitamente l'obiettivo da raggiungere;
2. Rappresentare una stessa situazione problematica con diverse modalità (verbale, iconica, simbolica) cercando di individuare il contesto più favorevole per la risoluzione della stessa;
3. Esporre con chiarezza il processo risolutivo;
4. Valutare la compatibilità delle soluzioni trovate con i dati del problema.

In questo contesto la modalità del gioco può essere fonte preziosa in diverse occasioni, purché trovi nel tempo scolastico una collocazione pensata e mirata. Nella scuola oggi, inoltre, non può essere ignorata la necessità di una comunicazione ricca di informazioni medializzate; gli alunni avranno, pertanto, bisogno di una nuova alfabetizzazione culturale: testi, suoni, immagini multimediali, CD, computer e differenti sussidi didattici sono strumenti di mediazione didattica che facilitano, da una parte il lavoro del docente e, dall'altra, l'acquisizione dei saperi da parte degli alunni. A tal riguardo il "coding" e l'attività di "problem solving" si rivelano perfettamente idonei per coinvolgere e motivare gli alunni rendendoli protagonisti nei loro processi di apprendimento e formazione, motivandoli all'attività di ricerca.

3. Il laboratorio di matematica ricreativa

Anche la partecipazione a giochi matematici a squadre o individuali (Olimpiadi della matematica, Giochi del Pristem dell'Università Bocconi, Kangourou, Premio A. Morelli, Matematica senza frontiere ed altri) a cui molte scuole, non solo del primo ciclo, aderiscono, sono di indiscutibile valore educativo e didattico ai fini di stimolare curiosità e creatività, indispensabili in un processo di apprendimento costruttivo e stabile nel tempo. Nel laboratorio, inteso come luogo non solo fisico in cui promuovere atteggiamenti di curiosità, di riflessione, di valorizzazione della consapevolezza degli apprendimenti e di sviluppo di attività di matematizzazione, si perseguono i seguenti obiettivi:

a) Obiettivi educativi:

1) Sviluppare dinamiche relazionali per lavorare in gruppo;
2) Riflettere sui processi messi in atto;
3) Essere consapevole delle proprie strategie messe in atto.

b) Obiettivi di apprendimento:

1) Applicare tecniche di calcolo, procedimenti, proprietà; eseguire misure;
2) Individuare relazioni: confrontare, ordinare, classificare;
3) Analizzare situazioni problematiche, individuare e applicare strategie risolutive in ambito aritmetico e geometrico: osservare, formulare ipotesi, progettare, verificare;
4) Argomentare: riferire un ragionamento, riconoscere un falso ragionamento, ottimizzare una strategia;
5) Comprendere e utilizzare gradualmente il linguaggio specifico, esprimersi in maniera organica e appropriata: usare rappresentazioni (schemi, tabelle,…), discutere e verbalizzare le esperienze.

Le azioni del docente, finalizzate al raggiungimento degli obiettivi cognitivi ed educativi prefissati saranno quelle di:

1) Organizzare gruppi di lavoro

2) Proporre problemi differenziati scoraggiando le soluzioni rapide e non meditate
3) Proporre anche problemi complessi, per imparare a semplificare, a schematizzare e a rappresentare
4) Favorire il dialogo, ascoltare senza giudicare, formulare domande anche provocatorie per rafforzare le conoscenze metacognitive
5) Richiedere di assemblare e riordinare i ragionamenti e le strategie adottate verbalizzando in forma scritta o orale la loro sintesi per assimilarne i concetti;
6) Lasciare una questione insoluta, come elemento sorpresa, per stimolare curiosità.

L'alunno, riflettendo su quello che fa, impara a lavorare in modo critico, a confrontarsi con i compagni e l'eventuale l'errore contribuisce a sviluppare capacità di inferenza, inducendo a riformulare ipotesi errate e a costruire nuova conoscenza da condividere con altri (Riflessione e consapevolezza). La dimensione sociale della conoscenza, nell'imparare dagli altri e con gli altri, valorizza, inoltre, i processi di apprendimento e la condivisione dei saperi (Apprendimento collaborativo).

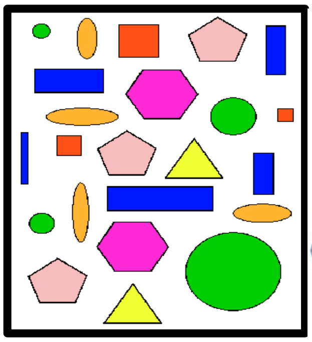
4. Proposte per la scuola primaria e secondaria di primo grado

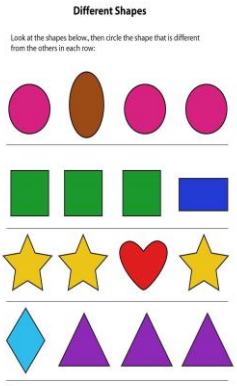
A titolo esemplificativo si propongono materiali dai quali trarre spunti di lavoro, alcuni dei quali tratti da libri molto antichi. Non viene specificata la classe ove proporli perché si vuol lasciare al docente la libertà di scegliere in base alla propria esperienza e alle reali situazioni in cui si trova ad operare (recupero di conoscenze pregresse, ma anche valorizzazione delle eccellenze). Si pone l'attenzione ai traguardi previsti dalle Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione 2012, il cui filo conduttore è il seguente: "L'alunno riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria".
Per la Scuola dell'Infanzia, data la peculiarità dei campi di esperienza, si propone un'attività basata sul raggruppamento e la classificazione in linea col traguardo: il bambino raggruppa e ordina oggetti e materiali secondo criteri diversi, ne identifica alcune proprietà, confronta e valuta quantità; utilizza simboli per registrarle; esegue misurazioni usando strumenti alla sua portata.

Attività:

- raggruppare fiori presenti nel giardino della scuola o sui davanzali delle finestre delle aule, secondo criteri assegnati (in mancanza si può ricorrere ad immagini ritagliate);

- contare inconsapevolmente imparando a memoria una filastrocca con numeri e successivamente, contare fiori, foglie o petali …





Il gioco può essere realizzato con varianti diverse.

a) Occorrente: bambini e cerchi grandi.

Lo scopo è quello di fare entrare nel cerchio il numero di bambini scelti dalla maga. Si può partire da: nessun bambino nel cerchio blu, un bambino nel cerchio giallo, due bambini nel cerchio rosso…

b) Occorrente: oggetti diversi, cerchi, cartellini con i disegni delle quantità o dei numeri, nastro per attaccare i cartellini ai cerchi.

Si può giocare a coppie o a piccoli gruppi. Lo scopo è quello di portare il numero di oggetti scelti dalla maga nel cerchio con il cartellino sul quale sarà scritta la quantità corrispondente o quello di portare oggetti in numero maggiore o minore del numero scelto dalla maga nel cerchio che li rappresenta.

c) Occorrente: carte con la rappresentazione di frazioni, cerchi, cartellini con l'indicazione di frazione propria, impropria, apparente o decimale, nastro per attaccare i cartellini ai cerchi.

Si può giocare a coppie o a piccoli gruppi. Lo scopo è quello di portare la carta con le frazioni richieste nel cerchio corrispondente. Lo stesso gioco può essere proposto con i numeri decimali.

Il metodo della falsa posizione

"Di un albero $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ sono sottoterra. La parte di albero sotterranea misura 21 palmi. Qual è l'altezza dell'albero?"

Nota: il procedimento si rivela utile per affrontare la risoluzione di problemi algebrici riconducendoli ad equazioni lineari del tipo $ax = b$; il problema venne proposto da Leonardo Pisano detto Fibonacci nel suo Liber Abaci.

Soluzione: La lettura del testo richiede attenzione in quanto ai tempi di Fibonacci non si usavano i segni delle operazioni e la scrittura $\frac{1}{4}\frac{1}{3}$ va interpretata $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$. Ciò può essere l'occasione per discutere con la classe la nascita del simbolismo matematico. Si tratta, in sostanza, di determinare l'altezza di un albero i cui 7/12 cioè $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$, che si trovano nel sottosuolo, misurano 21 pollici. Per determinare l'altezza h dell'albero, si può scrivere: $\frac{7}{12} * \mathrm{h} = 21$. Con questo metodo si assegna al valore cercato, in questo caso h, una "falsa posizione", cioè un numero intero scelto arbitrariamente e si valuta il risultato rispetto al valore noto, cioè 21. Si attribuisce ad h un multiplo di 12. Se l'albero misurasse 12 palmi, allora $\frac{7}{12}$ di12 sarebbero 7 palmi, anziché 21. Poiché 21 è il triplo di 7, si deduce che l'altezza dell'albero è il triplo della falsa posizione, cioè il triplo di 12, ossia 36. L'albero, dunque, misura 36 palmi.

Le botti del vignaiuolo
Un vignaiuolo lasciò, morendo, ai suoi tre figli, 21 botti della stessa capacità, 7 delle quali piene di vino, 7 semipiene e 7 vuote. Come, secondo voi, furono ripartite egualmente tra i tre figli quelle botti, senza far uso di alcuna misura?

Risposta: Le 7 botti piene e le 7 semipiene equivalgono a 21 botti semipiene; pertanto ciascun figlio avrà ricevuto 7 botti semipiene, ossia: 3 piene e 1 semipiena, oppure 2 piene e 3 semipiene, o ancora 1 piena e 5 semipiene. Tenendo conto del fatto che ciascun figlio deve ricevere, comunque, 7 botti, piene o vuote che siano, si conclude che il problema ammette le seguenti soluzioni:

Prima soluzione						**Seconda soluzione**			
	Piene	**Semipiene**	**Vuote**				**Piene**	**Semipiene**	**Vuote**
A	**3**	**1**	**3**			**A**	**3**	**1**	**3**
B	**2**	**3**	**2**			**B**	**1**	**5**	**1**
C	**2**	**3**	**2**			**C**	**3**	**1**	**3**

Approfondimento: verificare che, con 24 botti delle quali 8 piene, 8 semipiene e 8 vuote si ottengono 4 soluzioni; con 27 botti, 3 soluzioni.

Dal "De viribus quantitatis" di Luca Pacioli: Riparto di monete
Tre persone si sono divise una quantità nota di oggetti, ad esempio 10 ducati, in parti che il "mago" indovinerà facendo eseguire mentalmente ai giocatori certe operazioni aritmetiche. Precisamente: il primo giocatore dovrà raddoppiare il numero degli oggetti presi; il secondo dovrà moltiplicare quanto in suo possesso per il numero degli oggetti iniziali, il terzo dovrà aggiungere 1 al numero degli oggetti iniziali e moltiplicare il

risultato ottenuto per quanto in suo possesso. I tre giocatori dovranno poi sommare i tre numeri ottenuti e riferire il totale al mago che indovinerà i tre quantitativi di monete. Come farà?

Soluzione: il mago, moltiplicherà il numero degli oggetti iniziali +1 , per il numero degli oggetti iniziali e sottrarrà, dal risultato ottenuto, il totale che i tre giocatori gli avranno riferito; quindi, dividendo il risultato ottenuto per il numero degli oggetti iniziali meno uno, scoprirà che con il quoziente otterrà il numero degli oggetti posseduti dal primo giocatore, con il resto quelli posseduti dal secondo giocatore, infine, per trovare il numero degli oggetti posseduti dal terzo giocatore gli basterà fare la differenza".
Agli alunni, dopo attenta lettura, verrà chiesto di sperimentare il gioco con un numero di oggetti a scelta e di formalizzare, eventualmente, il procedimento descritto.

Dal Papiro di Rhind - L'enigma di Ahmes – 1650 a. C.
Il papiro di Rhind, risalente al 1650 a. C, conservato attualmente al British Museum di Londra, è uno dei più antichi documenti matematici oggi noti. Esso contiene da un lato numerose tavole di calcoli aritmetici e dall'altro una collezione di 87 problemi, alcuni geometrici, altri essenzialmente aritmetici. I primi riguardano il calcolo di superfici e volumi delle più comuni figure geometriche, gli altri sono per lo più relativi a divisioni di vettovaglie, conversioni di grano in pane, d'orzo in birra e calcolo di razioni. Il problema 79 sembra esulare da questi generi ed appartiene piuttosto al genere ricreativo.

Problema 79 – Dal Papiro di Rhind
"Sette case hanno sette gatti ciascuna. Ogni gatto uccide sette topi. Ogni topo avrebbe mangiato sette spighe di grano. Ogni spiga avrebbe prodotto sette misure di farina. Quante misure di farina sono state salvate dai gatti?"

Soluzione: 16.807 misure di farina: $7 * 7 * 7 * 7 * 7 = 7^5 = 16807$. Gli antichi egizi raggiunsero un buon livello matematico, come testimonia l'enigma di Ahmes, forse l'enigma matematico più antico del mondo, trovato nel papiro di Rhind (Ahmes fu lo scriba che compilò il papiro all'incirca nel 1650 a. C.). La soluzione è data dal quinto termine di una progressione geometrica nella quale il primo termine è 7 e la ragione 7.

L'indovinello di St.Ives
L'enigma di Ahmes ha ispirato molte varianti, come quella contenuta nel Liber Abaci (1202) di Fibonacci. Tra esse si può annoverare anche l'indovinello di St. Ives: "Mentre mi recavo a St. Ives incrociai un uomo con sette mogli. Ogni moglie portava sette borse. Ogni borsa conteneva sette gatte. Ogni gatta aveva sette gattini. Gattini, gatte, borse e mogli…in quanti stavano andando a St. Ives?

Soluzione: ovviamente solo uno. Tutti gli altri venivano da St. Ives.

Indovina il numero
Si invita una persona a pensare un numero e successivamente a effettuare questa serie di operazioni:

1) moltiplicare il numero pensato per 5;

2) aggiungere 6 al prodotto;

3) moltiplicare il risultato per 4;

4) aggiungere 9 al nuovo prodotto;

5) moltiplicare per 5 l'ultimo risultato ottenuto.

Comunicando il risultato al "Mago", questi sarà in grado di indovinare il numero pensato: come farà?

Soluzione: al mago, per trovare il numero pensato, è sufficiente sottrarre 165 dalla somma che gli viene comunicata e dividere il risultato per 100. Infatti, indicando con n il numero pensato, con le successive operazioni si ottiene:

a. 5n;
b. 5n + 6;
c. (5n + 6) × 4 = 20 n + 24;
d. 20n + 24 + 9 = 20 n + 33:
e. (20 n + 33) × 5 = 100 n +165

Quest'ultimo risultato giustifica la regola data: sottraendo 165 si ottiene 100 n; dividendo 100 n per 100, si ottiene n, cioè il numero pensato.

Mulini all'opera

10 mulini lavorando per 10 ore al giorno producono in 10 giorni 10 quintali di farina. Quanti quintali di farina è possibile produrre avendo a disposizione 16 mulini che lavorano 16 ore al giorno in 16 giorni?

Soluzione: un mulino, lavorando per una sola ora al giorno, produce ogni giorno

$$n = \frac{\frac{\frac{10 * 1}{10} * 1}{10} * 1}{10} = \frac{1}{100}$$

di quintali di farina. Di conseguenza 16 mulini, lavorando per 16 ore al giorno, producono in 16 giorni

$$m = 16 * 16 * 16 = 4096 \text{ quintali di farina.}$$

Pertanto, avremo: $\frac{1}{n^2} * m * m * m = \frac{m^3}{n^2} = \frac{4096}{100} = 40{,}96$ quintali di farina.

La corsa della gatta e del cane

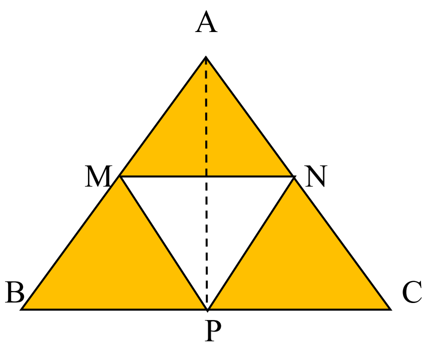
Una gatta e un cane ammaestrati fanno una gara di corsa su una distanza di 100 piedi e ritorno. Il cane fa tre piedi ad ogni balzo e la gatta ne fa solo due, ma essa fa 3 balzi per ogni due del cane. Chi vincerà la corsa?

Risposta: per coprire l'intero percorso, andata e ritorno, la gatta deve compiere 100 balzi. Il cane, invece, è costretto a compiere 102 piedi e ritorno: il suo 33° balzo lo porta soltanto a 99 piedi. Deve quindi fare ancora un balzo che lo porta ad oltrepassare il traguardo di

2 piedi. Quindi il cane, per coprire l'intero percorso, deve fare complessivamente 68 balzi. Poiché la frequenza dei suoi balzi corrisponde ai 2/3 di quella della gatta, nel tempo in cui questa compie 100 balzi, il cane ne può fare al massimo 67. Vince, pertanto, la gatta.

Il bastone rotto

Il re di Aci Picchia, appassionato di giochi matematici, promette di lasciare in eredità parte del suo regno, alla persona che riesce a calcolare la probabilità che, rompendo a caso un bastone da passeggio, i tre pezzi possano formare i lati di un triangolo. Vuoi provare a risolverlo? Vincenzo Viviani (1622-1703), matematico e scienziato, fu allievo di Torricelli e nel 1639, a 17 anni, fu anche assistente di Galileo. Per un suo teorema la somma delle distanze dai lati di ogni punto interno (detto punto di Fermat) a un triangolo equilatero è uguale all'altezza del triangolo. Consideriamo, allora, il triangolo equilatero ABC, la cui altezza risulti uguale alla lunghezza del bastone. Costruiamo ora il triangolo equilatero, interno al triangolo ABC, congiungendo i punti medi dei lati del triangolo ABC. (vedi fig.)



Preso un punto interno al triangolo MNP, consideriamo i tre segmenti di perpendicolare condotti dal punto considerato ad ogni lato del triangolo ABC. La somma di queste tre perpendicolari è costante ed è uguale all'altezza del triangolo, che è pari alla lunghezza del bastone. I tre segmenti formeranno un triangolo solo quando il punto è interno al triangolo MNP. In tal caso nessuna delle tre perpendicolari sarà maggiore della somma delle altre due, che è la condizione perché formino un triangolo. D'altra parte, se il punto è esterno al triangolo MNP, una delle tre perpendicolari è certamente maggiore della somma delle altre due. Poiché l'area del triangolo MNP è $\frac{1}{4}$ dell'area del triangolo ABC cioè: $\delta = \frac{A(MNP)}{A(ABC)} = \frac{1}{4}$, la probabilità che un punto cada al suo interno è data proprio dal rapporto fra le due aree. Tale probabilità sarà, quindi, uguale a:

$$p = \frac{1}{4}$$

Divisibilità per 11

L. Carroll stabilì un curioso criterio di divisibilità di un numero per 11 procedendo in questo modo:

1) se il numero da controllare ha più di due cifre, togliere la cifra delle unità del numero dato e sottrarre tale cifra dal numero così ottenuto;

2) ripetere il procedimento fino ad ottenere un numero di due cifre e, se questo è divisibile per 11, allora lo è anche il numero di partenza.

Ad esempio, verifichiamo se 385462 è divisibile per 11.
1) Da 385462 togliere la cifra delle unità (2);
2) Si ottiene 38546
3) Sottrarre questa cifra (2) dal numero così ottenuto;
4) $38546 - 2 = 38544$
5) Ripetere il procedimento;
6) $3854 - 4 = 3850$
7) $385 - 0 = 385$
8) $38 - 5 = 33$

Il numero 33 è divisibile per 11. Pertanto, in base al criterio formulato, risulta divisibile per 11 anche il numero assegnato 385462.

Quesito: Il numero 12345678895 è divisibile per 11? Provate a rispondere

Risposta: applicando il criterio stabilito precedentemente si ottiene:

12345678895 1234567884 123456784 12345674 1234563 123453 12342

1232 121 11.

Il numero dato 12345678895 è, quindi, divisibile per 11.

I buoi di Augia

Il potente Alcide chiese ad Augia quanti fossero i suoi buoi. Il re così gli rispose: "Sulle sponde dell'Alfeo ce ne sono la metà, un ottavo della mia mandria è al pascolo sulla collina di Saturno, un dodicesimo nei pressi di Taraxippo, un ventesimo pascola nei pressi della divina Elide. Ne lascio un trentesimo sull'erba dell'Arcadia e tu vedi qui il resto della mandria, cinquanta buoi". Quanti buoi possedeva Augia?

Risposta:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{95}{120}$$

Sappiamo così che i $\frac{25}{120}$ del numero totale di buoi è uguale a 50. Il numero totale di buoi è quindi:

$$\mathrm{N}=\frac{120}{25}\times 50=120\times 2=240$$

Palline bianche e nere

Una borsa contiene una pallina ma non sappiamo se è bianca o nera. Si introduce una pallina bianca nella borsa, la si agita e poi si estrae una pallina che risulta bianca. Quante probabilità ci sono a questo punto di estrarre una pallina bianca?

Soluzione: Indichiamo con N e B_1 le due palline che si trovano all'inizio nella borsa, e con B_2 la seconda pallina bianca che introduciamo successivamente. Dopo aver estratto una pallina bianca, ci sono tre situazioni possibili, indicate dallo schema seguente:

Nella borsa	Fuori dalla borsa
B_1	B_2
B_2	B_1
N	B_2

Due delle tre situazioni possibili prevedono che resti nella borsa una pallina bianca. Di conseguenza la probabilità di estrarre una pallina bianca è $p = \frac{2}{3}$

Nota: l'esercizio si presta per essere risolto anche con un diagramma ad albero per sottolineare la presenza della probabilità condizionata.

L'uovo sodo

Un uovo deve cuocere in 9 minuti. Come si può contare questo tempo servendosi di due clessidre da 5 minuti e da 7 minuti?

Soluzione: Si fanno partire le due clessidre piene. Dopo 5 minuti, una delle due è vuota. A questo punto, si mette l'uovo nell'acqua. Due minuti dopo la seconda clessidra è vuota. La si capovolge. Dopo 7 minuti è vuota e l'uovo è cotto; alternativamente si possono far partire entrambe le clessidre e, contemporaneamente, mettere l'uovo nell'acqua. Dopo 5 minuti si gira la clessidra piccola. Due minuti dopo (quando la clessidra grande sarà vuota), la si gira ancora una volta.

Una partita a dadi

Si gioca con due dadi e si vince un euro se esce 9 come somma del punteggio dei due dadi, si perde un euro se esce come somma 7. Non si vince e non si perde nulla se escono altri numeri. Può essere conveniente partecipare a questo gioco?

Soluzione: ad ogni lancio il numero di casi possibili è 36, mentre le coppie di numeri con somma 9 sono quattro:

$$(3,6)\ \ (4,5)\ \ (5,4)\ \ (6,3)$$

La probabilità che esca 9 è quindi:

$$p_9 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Le coppie di numeri possibili con somma 7 sono sei:

$$(1,6)\ \ (2,5)\ \ (3,4)\ \ (4,3)\ \ (5,2)\ \ (6,1)$$

Quindi la probabilità che esca 7 è:

$$p_7 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Poiché le due probabilità non sono uguali, il gioco non è equo ed è preferibile non giocare. Infatti la speranza matematica è negativa dato che la perdita è maggiore della vincita $\left({}^{6}\!/_{36} > {}^{4}\!/_{36}\right)$.

Fanti e cavalieri

Il conte di Settebagni vuole organizzare un proprio esercito di fanti e cavalieri. Vuole spendere 255.000 ducati per i soldati a cavallo, a ognuno dei quali vuole dare 8 ducati e mezzo e li vuole pagare per sei mesi. Vuole invece spendere 45.000 ducati per i soldati a piedi, a ognuno dei quali vuole dare due ducati e mezzo, pagandoli per sei mesi. Si chiede quanti fanti potrebbe arruolare e quanti cavalieri?

Soluzione: se ogni soldato a cavallo percepisce 8 ducati e mezzo al mese, per sei mesi, il conte spenderebbe per ciascuno: $\left(8 + \frac{1}{2}\right) * 6 = 51 \text{ ducati}$.Se i soldati a cavallo fossero 1000, spenderebbe: $51\text{ducati} * 1000 = 51.000 \text{ ducati}$. Se vuole spendere 255.000 ducati, cioè 5 volte 51.000, avrà 5.000 soldati a cavallo. Per i soldati a piedi, se fossero 1000, avrebbe una spesa, nei primi sei mesi previsti, di:

$$\left(2 + \frac{1}{2}\right) * 6 * 1000 = 15.000 \text{ ducati}$$

Ma, volendo spendere 45.000 ducati, cioè tre volte tanto, avrà:

$$1000 * 3 = 3.000 \text{ soldati a piedi}$$

Pertanto il conte della contea di Settebagni può disporre, per sei mesi, di un esercito costituito da 3.000 fanti e 5.000 cavalieri.

Calcoli curiosi

1. Inserite nella calcolatrice un numero di tre cifre (per esempio 174);
2. Ripetetelo, ottenendo 174.174;
3. Dividete questo numero per 7;
4. Dividete il risultato per 11;
5. Dividete ancora per 13.

Si ottiene il numero che avete scelto all'inizio. Sapete giustificare il perché?

Soluzione: $13 * 11 * 7 = 1001$. Se si moltiplica un numero di tre cifre abc per 1001, il risultato è: abcabc, perché moltiplicando abc per 1000, si ottiene: a b c 0 0 0, a cui bisogna poi sommare ancora abc per moltiplicarlo per 1001. In termini formali:

$$\text{abc} * 13 * 11 * 7 = \text{abc} * 1001 = \text{abc} * (1000 + 1) =$$

$$\text{abc} * 1000 + \text{abc} = \text{abc000} + \text{abc} = \text{abcabc}$$

Ancora calcoli curiosi

Ai matematici piace generalizzare. Supponiamo di partire da un numero di quattro cifre, per esempio 6848. Per cosa bisogna moltiplicarlo per ottenere $6848\ 6848$? E per un numero di cinque cifre, per esempio 35.768 , per ottenere $35768\ 35768$?

Soluzione: il procedimento è del tutto simile a quello indicato per il numero di tre cifre. Per un numero di quattro cifre lo si può fare in due passi: 1) Moltiplicare prima per 73; 2) poi per 137 perché $73 * 137 = 10.001$. Difatti, se indichiamo con abcd un numero di quattro cifre, avremo:

$$\text{abcd} * 73 * 137 = \text{abcd} * 10.001 = \text{abcd} * (10.000 + 1) = \text{abcd} * 10.000 + \text{abcd}$$
$$= \text{abcd0000} + \text{abcd} = \text{abcd abcd}$$

Generalizzando, quindi, per un numero di cinque cifre basta moltiplicare il numero assegnato per 100.001.

Un uomo politico onesto

Ad un congresso erano riuniti 100 uomini politici. Ognuno di loro era o corrotto o onesto. Si conoscono i due seguenti fatti:

1. Almeno uno dei politici era onesto;
2. Presi due politici qualsiasi, almeno uno dei due era corrotto.

Si può determinare da questi due fatti quanti erano i politici onesti e quanti i corrotti?

Soluzione: Supponiamo che almeno una persona è onesta. Scegliamo a caso una persona onesta, il cui nome, diciamo è Frank. Ora scegliamo un altro dei 99 rimanenti; lo chiameremo John. Dal secondo dato del problema, almeno una dei due, Frank o John, è corrotto. Dato che Frank non è corrotto, deve esserlo John. E poiché John rappresenta arbitrariamente ognuna delle 99 rimanenti persone, ognuna di loro deve essere corrotto. Quindi la risposta è "una persona è onesta e 99 sono corrotte".

Altro modo di dimostrarlo: L'affermazione che, date due persone qualsiasi, almeno una di loro è corrotta, è equivalente all'affermazione che date due persone qualsiasi, non sono entrambe oneste. In altre parole, non ci sono due persone oneste. Ciò significa che, al massimo, una è onesta. Inoltre (dalla prima condizione) almeno uno dei due è onesto. Dunque c'è esattamente una persona onesta. Quale prova preferite?

Partita a tre

Tre giocatori convengono che ad ogni partita il perdente raddoppi il denaro degli altri due. Dopo tre partite perse nell'ordine, la prima dal primo giocatore, la seconda partita dal secondo e la terza dal terzo, chiudono il gioco avendo ognuno 24 franchi. Quanto denaro aveva ognuno di essi all'inizio?

Soluzione: Alla fine, ogni giocatore aveva 24 franchi: 24 24 24

Prima di quest'ultima partita, i due giocatori vincenti avevano la metà di denaro, mentre il perdente aveva 24 franchi in più: 12 12 48

Prima della seconda partita, persa dal secondo giocatore, il primo e il terzo avevano la metà e quindi il secondo 30 franchi in più: 6 42 24

E prima di questa partita, il secondo e il terzo avevano la metà e quindi il primo aveva 33 franchi in più che ha dovuto distribuire agli altri due: 39 21 12

All'inizio del gioco, quindi, le somme in possesso di ciascun giocatore erano:

39, 21, 12 franchi

E per concludere … un test Invalsi

Come già sottolineato, nell'insegnamento della matematica bisognerebbe privilegiare il ragionamento rifuggendo dall'applicazione meccanica di formule e lasciando ampio spazio alla creatività. In fondo, una formula è la sintesi finale di un ragionamento e spesso la sua applicazione pura e semplice maschera il ragionamento ad essa sotteso. In quest'ottica si analizzano, di seguito, alcune domande poste nelle prove Invalsi e se ne presentano ipotesi di soluzioni.

Cereali e frutta

Su una confezione da 250 g di cereali e frutta secca sono riportate le seguenti informazioni:

Zucchero	47,5 g
Proteine	20 g
Amido	155 g
Grassi	3,8 g
Fibre	11,3 g
Sale	2,5 g
Altro	9,9 g

Qual è la percentuale di fibre presenti nella confezione?

a) 4,52 % b) 0,11 % c) 31,30 % d) 22,12 %

Rispondere al quesito ipotizzando di non avere a disposizione alcuno strumento di calcolo

Soluzione: Dalla tabella si deduce facilmente che in una confezione di 500 g = 250g × 2 ci sarebbero 11,3 g × 2 = 22,6 g di fibre. Quindi poiché 100 è un quinto di 500 in 100 g di frutta secca e cereali sarebbero contenuti un quinto di 22,6 g; tale valore è un po' meno di 5 e un po' più di 4 quindi la risposta è la A. Il problema non è stato risolto semplicemente pigiando i tasti di una calcolatrice che i ragazzi fanno quasi automaticamente in maniera acritica; la risoluzione non ha richiesto l'uso della calcolatrice e questo è servito anche a rafforzare il calcolo mentale. In questo caso il calcolo mentale contribuisce anche all'acquisizione consapevole del concetto di percentuale, la qual cosa non avverrebbe applicando semplicemente delle formule imparate a memoria.

5. Conclusioni

"*…la mente non ha bisogno, come un vaso, di essere riempita, ma, come legna da ardere, ha bisogno solo di una scintilla che la accenda, che vi infonda l'impulso alla ricerca e il desiderio della verità*" (Plutarco, Moralia, De audiendo)

Il ragionamento matematico ha una sua complessità; vanno, quindi, individuate le strategie più opportune affinché nell'alunno si attivino quei processi cognitivi che lo rendano possibile. L'apprendimento della matematica pertanto, non può essere basato sulla manipolazione di simboli e affidato ad una trasmissione cattedratica del sapere, bensì deve fondarsi sulla costruzione di concetti attraverso itinerari che, partendo dall'attività ludica, vedano l'alunno impegnato attivamente in esperienze significative che gli facciano comprendere come la matematica sia parte della realtà che lo circonda. Sono proprio queste esperienze a sollecitare la sua capacità di analisi e di intuizione, la sua curiosità e la sua fantasia consentendogli di:

1) Fare esperienza;
2) Riflettere su quanto ha esperito;
3) Memorizzare l'esperienza fatta;
4) Riutilizzare l'esperienza in situazioni che riconosce in qualche modo analoghe alle precedenti.

In poche parole di mettere in atto le sue competenze!!

Poiché l'ambiente di apprendimento è di fondamentale importanza, compito del docente deve essere quello di creare un'atmosfera che incoraggi alla partecipazione attiva degli alunni secondo le proprie capacità, nell'accettazione delle diversità e riconoscendo nell'errore un'occasione importante di ulteriore apprendimento. Tutto ciò può essere garantito da una didattica laboratoriale in quanto essa consente agli studenti di fare esperienze dirette, di agire in prima persona, di mettere in pratica i concetti appresi. Poiché le attività vengono, inoltre, svolte in gruppo, tutti gli alunni devono interagire con gli altri, devono cooperare e devono rispettare gli accordi presi collegialmente. Le più recenti norme legislative relative alla riforma della scuola fanno più volte riferimento al laboratorio inteso come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta ed esperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati e a confrontarli con le ipotesi formulate, ovvero come una "modalità di lavoro che incoraggia la sperimentazione e la progettualità". La didattica laboratoriale trova le sue origini già nei principi pedagogici di Comenius e Pestalozzi, ma il suo sviluppo si deve a Dewey che addirittura fondò a Chicago una scuola laboratorio per attuare le sue idee di scuola attiva. Storicamente il problema del metodo didattico è stato in alcune epoche esaltato (Comenius, Pestalozzi, Herbart) in altre sottovalutato (idealisti italiani). Nel tempo sono stati proposti vari metodi: globale, naturale, direttivo, razionale, lavoro di gruppo, ricerca guidata, studio individuale, lezione cattedratica, Problem solving, Mastery learning ecc. Tutti gli studi hanno, però, messo in evidenza che è praticamente impossibile teorizzare uno o più metodi che abbiano una validità universale. La scuola e i docenti, primi fra tutti, devono trovare le strategie per motivare i giovani e spingerli a frequentare la scuola con lo stesso interesse con cui frequentano le altre associazioni o gruppi di amici. Come fare? Quale strategia usare? Come si fa a superare l'attuale situazione di difficoltà nella quale gli alunni sono in massima parte demotivati e disinteressati allo studio? Bisogna trovare la strategia giusta, o con parole ricorrenti frequentemente in ambito scolastico, il giusto metodo didattico, cioè l'insieme delle strategie che i docenti adottano per la realizzazione del progetto didattico, ricordando che la scelta di un particolare metodo non si può imporre a priori ma è un fatto del tutto personale. La fisionomia professionale che si impone oggi deve essere, quindi, quella del docente ricercatore, fisionomia peraltro, già introdotta, oltre che da tanta letteratura pedagogica e didattica, anche nei testi ministeriali, dove si fa riferimento all'insegnante riflessivo e ricercatore, critico e creativo, metacognitivo, riflessivo, relazionale (legge n. 30/2000 sul riordino dei cicli scolastici). Tali termini dovrebbero significare, da un lato, consapevolezza delle proprie scelte metodologiche in ragione anche della opzione teorica e dei modelli di riferimento, dall'altro la scelta consapevole dell'insegnante di stare nella complessità e di educare nella e per la complessità e, in questa direzione, di assumere la responsabilità di co-costruire il cambiamento attraverso la propria professionalità e la propria formazione.

Concludiamo queste brevi considerazioni riportando le parole che Jules Michelet pronunciò in occasione dell'apertura del Corso di matematica presso il Collège de France nel lontano 29 dicembre 1842: «Devo ringraziare le persone compiacenti che raccolgono le mie lezioni, …. Da me a voi …, tutto può dirsi. Sembra che uno solo parli, qui: errore, anche voi parlate. Io agisco e voi reagite, io insegno e voi m'insegnate…", per, poi, salutarvi ricordando i

10 COMANDAMENTI PER L'INSEGNANTE DI G. POLYA (1971)

1. Abbi interesse per la tua materia.
2. Conosci la tua materia.
3. Conosci i modi secondo i quali si impara: il migliore modo per imparare una cosa è scoprirla da soli.
4. Cerca di leggere sul viso degli studenti, cerca di capire le loro aspettative e le loro difficoltà; mettiti al loro posto.
5. Dai loro non soltanto informazioni, ma anche sapere come, attitudini mentali, abitudine al lavoro metodico (non dare solo definizioni, teoremi, dimostrazioni di teoremi; fornisci anche metodi e strumenti)
6. Fai loro imparare ad indovinare.
7. Fai loro imparare a dimostrare.

8. Cerca quegli aspetti del problema in questione che possono essere utili per problemi futuri, cerca di mettere in evidenza lo schema generale che sta dietro la situazione concreta presente.
9. Non rilevare subito il tuo segreto, fallo indovinare dagli studenti prima di dirlo, fai loro scoprire da soli quando è possibile
10. Suggeriscilo, non forzarlo.

Bibliografia

Alcuino di York (2005), Giochi matematici alla corte di Carlo Magno, Problemi per rendere acuta la mente dei giovani, ETS, Pisa

Bachmakov M. (2008), La matematica del Club Olimpico Kangourou, Edizioni Kangourou Italia (Tradizione a cura di B. Mastracchio)

Boyer C., (1976), Storia della Matematica, ISEDI, Milano.

D’Amore B. (2001), Elementi di didattica della matematica, Pitagora, Bologna

De Finetti B. (1967), Il saper vedere in matematica, Loescher

Devlin K. (2000), Dove va la matematica, Bollati Boringhieri, Torino

Frabetti C. (2016), La matematica della natura, la natura della matematica, Hachette

Gardner M. (2001), Enigmi e giochi matematici, trad. it. Rizzoli

Lucchetti R. (2001), Di duelli, scacchi e dilemmi, La teoria matematica dei giochi, Paravia

Moscovich I. (2016), Matemagica, Rizzoli, Milano (Traduzione Mauro Gaffo)

Stabler E. (1990), Il pensiero matematico, Universale scientifica Boringhieri, Torino

Peiretti F. (2012), Matematica per gioco, Longanesi e C., Milano

PISA (2012), Problem Solving Framework in PISA 2012, OECD Pub. 2013

Polya G. (1967), Come risolvere i problemi di matematica, Feltrinelli, Milano

Polya G. (1971), La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi, Feltrinelli, Milano (nuova edizione UTET Università di Torino, 2016)