Mondo Matematico e Dintorni, Vol 1, No 1-2 (2018), 53-68

La "Battaglia Gattale": uno strumento per l'apprendimento interdisciplinare di Geometria, Statistica e Probabilità, attraverso il gioco

Luciana Delli Rocili[1] Antonio Maturo[2]

[1]Istituto Comprensivo Statale Pescara 5,
Via Gioberti n. 15, Pescara
e-mail lucianadr@live.it
[2]Dipartimento di Architettura, UdA,
Viale Pindaro 42, Pescara
e-mail antomato75@gmail.com

Sunto Per mezzo di un gioco che abbiamo chiamato "Battaglia Gattale" per alcune somiglianze con il noto gioco della "Battaglia Navale" si stimolano gli studenti alla ricerca di alcune relazioni fra Statistica e Geometria che permettono di ottenere per via sperimentale risultati geometrici. Il punto di partenza è la "Legge Empirica del Caso", un ponte fra la matematica e il mondo reale, su cui si basa il metodo "Monte Carlo" e, in generale, la simulazione. Il gioco utilizza due strumenti semplici: un mazzo di carte napoletane e un dado, familiari agli studenti, e si mostra come questi strumenti permettono, con un po' di pazienza e vari esperimenti, di ottenere importanti risultati matematici. Il lavoro si conclude con alcune esperienze di assegnazione di probabilità soggettiva da parte degli studenti e il confronto di esse con le frequenze ottenute con il metodo Monte Carlo.

Parole Chiave Didattica della matematica con il gioco. Calcolo di aree. Legge Empirica del Caso. Probabilità e frequenza. Probabilità soggettiva.

1. Introduzione

L'esperienza, condotta in classe e facilmente ripetibile nelle ultime classi della scuola primaria, consiste nell'applicazione del metodo di Monte Carlo attraverso il gioco, in modo da rendere familiari ai ragazzi alcuni concetti fondamentali di probabilità, statistica e geometria ed i loro legami logici ed empirici.
Per quanto riguarda la probabilità si fa comprendere con il gioco il significato di varie impostazioni: *classica, statistica, assiomatica, soggettiva, geometrica*.
Il lavoro si svolge in due fasi. Nella prima fase ci si occupa di un evento di probabilità bassa, nella seconda di un evento di probabilità alta.

Il lavoro si basa sull'idea di proporre un apprendimento cooperativo attraverso il gioco, in linea con i seguenti principi:

- La scuola non deve insegnare i fatti, ma insegnare a pensare. (Albert Einstein)
- Se l'apprendimento avviene per "scoperta", apprendere diventa un piacere.
- La cooperazione aiuta ad affrontare nuove sfide, a risolvere problemi che da soli è difficile risolvere e l'apprendimento diventa più efficace.
- Collaborare significa diventare più sicuri, più capaci di stabilire relazioni con gli altri e di comunicare il proprio pensiero.

Gli obiettivi del lavoro sono:

- Fornire un'esperienza significativa, valorizzante per tutti, per ampliare gli apprendimenti disciplinari, trasversali e sociali (geometria, probabilità, statistica).
- Esplorare una nuova modalità per calcolare le superfici di forma irregolare, contenenti anche linee curve.
- Potenziare la capacità di pianificare esperimenti, di formulare ipotesi, di raccogliere, annotare, tabulare e verificare i risultati ottenuti.

2. Frequenza e probabilità di colpire un solo gatto

Si presenta agli studenti la sagoma di un gatto posta in un quadrato di 72 cm × 72 cm.

Figura 2.1 Sagoma di un gatto in un quadrato 72 cm × 72 cm

Si pongono agli studenti varie domande:

- Quale probabilità abbiamo di colpire l’immagine del gatto?
- Con quale frequenza si colpisce il gatto con ripetuti esperimenti?
- Qual è l’area occupata dal gatto?

In generale si pongono i seguenti quesiti:

- Come ottenere l’area di una qualsiasi figura geometrica?
- Esiste un legame fra tale area e la frequenza con cui viene colpita?

Il gatto della figura rappresenta una figura piana di area sconosciuta che occupa una piccola percentuale dell’area del rettangolo su cui è situata. In questa prima fase del lavoro il docente introduce e coordina una discussione sulla probabilità di colpire una figura piana posta su un rettangolo e che occupa meno del 15% dell’area del rettangolo.
Il rettangolo è diviso in 10 righe e 10 colonne. Ogni casella che si trova all’incrocio di una riga e una colonna è divisa a sua volta in 6 righe sottili e 6 colonne sottili, individuando così 36 micro-caselle. In totale la tavola è composta da 3600 micro-caselle. Gli studenti devono simulare il fatto di colpire a caso una delle micro-caselle.
Gli strumenti per fare tale simulazione sono semplicemente un mazzo di carte e un dado. Con il mazzo di carte viene individuata la casella e con il dado la micro-casella all’interno della casella.

Figura 2.2

Per l’organizzazione del gioco vengono impegnate due terzine di ragazzi: la *terzina di lavoro* e la *terzina di verifica*.
I tre ragazzi della terzina di lavoro si dividono i seguenti compiti:

- Un ragazzo mischia le carte e fa pescare una carta a ciascun ragazzo; poi comunica il risultato.

- Un secondo ragazzo gestisce il lancio del dado eseguito da ciascuno; poi comunica il risultato.
- Il terzo registra i risultati formando una coppia (m, n) di numeri con m numero ottenuto dalla carta e n numero ottenuto dal dado. Comunica le coppie di numeri alla terzina di verifica.

I tre ragazzi della terzina di verifica svolgono i seguenti compiti:

- Considerate due coppie consecutive di numeri ottenuti (m, n) e (p, q), il primo ragazzo individua la riga m e, al suo interno, la riga sottile n, il secondo la colonna p e, al suo interno, la colonna sottile q. Insieme individuano una micro-casella del rettangolo.
- Il terzo ragazzo mette una puntina sulla micro-casella ottenuta e dichiara che il gatto è colpito se la micro-casella è prevalentemente occupata dalla sagoma del gatto.

Ogni esperimento (o prova) si ottiene considerando 6 coppie (m, n) e ricavando da esse 5 punti. Supponiamo, ad esempio, che siano state ottenute le seguenti carte:

Figura 2.3

Da tali carte si ottengono 5 caselle grandi. La prima all’incrocio della riga 5 e colonna 1, la seconda all’incrocio della riga 1 e colonna 8, la terza dalla riga 8 e colonna 2, la quarta dalla riga 2 e colonna 10 e infine la quinta dalla riga 10 e colonna 3.
Successivamente, con 6 risultati del lancio del dado si ottengono, in maniera analoga, le micro-caselle all’interno di ciascuna casella grande.

In conclusione, per mezzo di carte e dadi, gli studenti riescono a:

- generare numeri a caso con distribuzione uniforme discreta di parametro 60 per mezzo di un mazzo di carte e un dado;
- ottenere da essi punti a caso su una tavola di legno quadrata di lato 72 cm;
- registrare il numero totale di punti generati e quanti di essi cadono nella sagoma del gatto.

Successivamente si apre una discussione sui seguenti aspetti:

- La probabilità di colpire una immagine.
- La frequenza con cui l'immagine è colpita generando punti a caso.
- La legge empirica del caso.
- Come ottenere l'area di una qualsiasi figura con il metodo di Monte Carlo.

Quindi gli studenti osserveranno:

- I legami fra geometria e probabilità.
- I legami fra probabilità e frequenza.
- I vantaggi e i limiti della legge empirica del caso.
- La generazione di punti a caso con carte e dadi.

Viene introdotto inoltre un percorso per la comprensione della probabilità soggettiva con uno strumento operativo costituito da un premio per chi riesce ad avvicinarsi maggiormente alla probabilità ottenuta con il metodo di Monte Carlo.

Gli studenti apprenderanno quindi:

- La probabilità soggettiva come valutazione ragionata per ottenere un premio.
- Il legame fra probabilità soggettiva, probabilità statistica e probabilità geometrica.

Approfondendo e generalizzando il discorso i ragazzi saranno alla fine indotti a vedere anche l'aspetto matematico più generale della probabilità, ossia:

- La probabilità come misura normalizzata, di cui la probabilità classica, quella statistica, quella geometrica e quella soggettiva sono casi particolari.

Sono stati messi al lavoro gli studenti a gruppi da 6. Ogni gruppo ha effettuato come esperimento l'estrazione di 6 carte da un mazzo e il lancio per 6 volte di un dado. Dalla prova sono stati ricavati 5 punti sulla tavola di legno e si è attribuito il valore 0 ad ogni punto fuori dal gatto e valore 1 ad ogni punto sul gatto.

3. Risultati sperimentali nel caso di un solo gatto

Di seguito sono mostrati i risultati di 6 esperimenti, che hanno permesso di generare complessivamente 30 punti a caso.

Prova 1

Carte	4	2	9	3	3	5
Dadi	4	3	1	1	5	3
Esito		0	0	0	0	1

Prova 2

Carte	10	9	5	4	1	6
Dadi	3	3	4	4	3	6
Esito		0	0	1	0	0

Prova 3

Carte	6	10	9	10	2	5
Dadi	2	4	2	6	5	5
Esito		0	0	0	0	0

Prova 4

Carte	6	1	3	3	6	1
Dadi	5	6	5	2	6	4
Esito		0	0	0	0	0

Prova 5

Carte	3	2	4	9	3	8
Dadi	3	5	1	3	4	2
Esito		0	0	0	0	0

Prova 6

Carte	8	3	5	9	3	10
Dadi	1	1	2	2	3	6
Esito		0	0	0	0	0

Su 30 punti generati il gatto è stato colpito solo due volte, con una frequenza di 2/30, ossia, di 6,7%.
I ragazzi erano scontenti per aver colpito il gatto molto raramente, per cui l'insegnante è passata alla seconda fase, con un bersaglio più ampio formato da una famiglia di gatti.

4. Frequenza e probabilità di colpire almeno un gatto di una famiglia di gatti

Nella seconda fase il docente ha introdotto e coordinato una discussione sulla probabilità di colpire una figura piana posta su un rettangolo e che occupava più del 20% dell'area del rettangolo.
Come insieme di figure piane sono state presentate agli studenti le sagome di una famigliola di gatti.

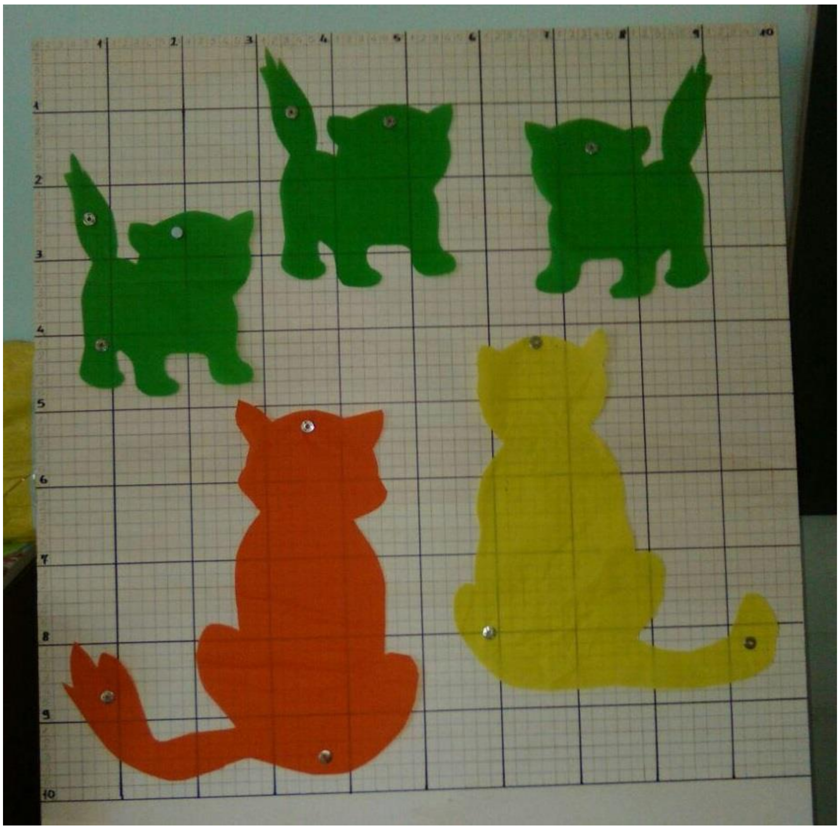

Figura 3.1 Una famiglia di gatti

Gli studenti si sono messi al lavoro con impegno.
Alcuni generavano i punti a caso, altri controllavano gli esiti e registravano i risultati.
Di seguito sono mostrati i risultati di 20 esperimenti, che hanno permesso di generare complessivamente 100 punti a caso.

Esperimento 1

Carte	9	2	9	3	10	2
Dadi	4	5	6	4	6	4
Esito		0	0	1	0	0

Esperimento 2

Carte	1	3	1	9	9	5
Dadi	6	5	4	5	2	5
Esito		0	1	1	1	1

Esperimento 3

Carte	7	5	10	2	5	3
Dadi	2	2	4	5	5	6
Esito		1	0	1	1	0

Esperimento 4

Carte	6	10	10	4	6	5
Dadi	4	6	3	1	4	3
Esito		0	0	1	0	0

Esperimento 5

Carte	8	8	1	6	8	7
Dadi	1	1	5	4	4	5
Esito		1	0	0	0	1

Esperimento 6

Carte	8	1	7	4	2	4
Dadi	2	1	4	4	3	6
Esito		0	0	1	1	1

Esperimento 7

Carte	4	7	6	3	1	8
Dadi	3	5	5	4	2	4
Esito		1	1	1	0	0

Esperimento 8

Carte	3	4	6	1	10	8
Dadi	3	6	6	6	4	1
Esito		1	0	0	0	0

Esperimento 9

Carte	6	7	10	7	3	5
Dadi	2	2	2	3	4	2
Esito		1	0	0	0	1

Esperimento 10

Carte	2	3	7	3	4	6
Dadi	5	2	4	2	1	4
Esito		0	0	0	0	0

Esperimento 11

Carte	3	5	7	1	8	4
Dadi	6	5	1	5	1	1
Esito		1	1	0	0	1

Esperimento 12

Carte	2	6	6	4	9	4
Dadi	4	2	3	2	4	6
Esito		1	0	1	1	1

Esperimento 13

Carte	5	1	8	8	1	9
Dadi	6	1	5	5	6	5
Esito		0	0	1	0	1

Esperimento 14

Carte	3	4	7	8	9	9
Dadi	4	2	3	5	2	5
Esito		1	0	0	0	1

Esperimento 15

Carte	6	8	10	10	6	10
Dadi	1	3	1	4	2	4
Esito		0	0	0	0	0

Esperimento 16

Carte	4	7	9	7	5	7
Dadi	4	1	2	3	1	6
Esito		0	0	1	1	0

Esperimento 17

Carte	3	5	10	2	5	10
Dadi	4	4	1	5	1	3
Esito		1	0	0	1	0

Esperimento 18

Carte	4	6	9	1	1	6
Dadi	6	3	5	2	6	2
Esito		0	0	1	0	0

Esperimento 19

Carte	6	8	1	2	3	2
Dadi	2	4	4	4	3	5
Esito		0	0	0	0	1

Esperimento 20

Carte	1	4	10	10	2	6
Dadi	6	5	4	3	6	6
Esito		0	0	0	1	0

Su 100 punti generati la famiglia di gatti è stata colpita 38 volte, con una frequenza di 38/100, ossia, di 38%.
I ragazzi erano contenti per aver colpito con una certa frequenza la famiglia di gatti, per cui l'insegnante ha potuto illustrare efficacemente le relazioni fra le aree, la probabilità e la frequenza.

5. Il calcolo delle aree e delle probabilità a partire dalle frequenze

Si calcola l'area totale della tavola:

$$\text{Area Totale} = 72 \text{ cm} \times 72 \text{ cm} = 5184 \text{ cm}^2. \qquad (5.1)$$

Se G è l'evento "Viene colpito il gatto singolo", la probabilità p(G) che l'evento G si verifichi è:

$$p(G) = \text{Area}(G)/\text{Area Totale} = \text{Area}(G) / 5184. \qquad (5.2)$$

La frequenza (relativa) f(G) dell'evento G è

$$f(G) = \text{n° successi} / \text{n° prove}. \qquad (5.3)$$

Se si ritiene che il numero di prove sia sufficientemente elevato, per la Legge Empirica del Caso, p(G) è molto vicino a f(G) e nella pratica si considera spesso f(G) = p(G).

Nel nostro caso sono state effettuate 30 prove ed è risultato f(G) = 2/30 = 1/15. Applicando la Legge Empirica del Caso, dalla formula (5.2) si ottiene:

$$\text{Area}(G) = 5184 / 15 \text{ cm}^2 = 345{,}6 \text{ cm}^2 \qquad (5.4)$$

ossia l'area di G è uguale a quella di un quadrato di lato $\sqrt{345{,}6} = 18{,}59$ cm.

Analogamente, se F è l'evento "Viene colpito almeno un gatto della famiglia", la probabilità p(F) che l'evento F si verifichi è:

$$p(F) = \text{Area}(F)/\text{Area Totale} = \text{Area}(F) / 5184. \qquad (5.5)$$

Nel nostro caso la frequenza relativa è f(F) = 0,38. Essendo state effettuate 100 prove sembra una buona approssimazione porre p(F) = f(F). Allora si ottiene:

$$\text{Area}(F) = 5184 \times 0{,}38 \text{ cm}^2 = 1969{,}92 \text{ cm}^2 \qquad (5.6)$$

ossia l'area di F è uguale a quella di un quadrato di lato $\sqrt{1969{,}92} = 44{,}78$ cm.

6. Probabilità soggettiva, statistica e geometrica

La probabilità soggettiva di un evento E, diffusa da Bruno de Finetti, è basata sullo strumento operativo della scommessa, con una puntata S e una vincita V che si ottiene se si verifica l'evento E. La probabilità soggettiva di E è il rapporto p = S/V.

Alcuni esperimenti condotti in classe hanno mostrato come atteggiamenti di estrema prudenza o estremo ottimismo hanno portato a valutazioni anomale.
Successivamente abbiamo provato lo strumento operativo della gratificazione con una vincita per ottenere che i ragazzi si abituassero ad esprimere correttamente la probabilità soggettiva, ossia coerentemente con le loro informazioni.

Figura 6.1

Prima di effettuare gli esperimenti descritti nel precedente paragrafo, gli studenti sono stati invitati ad indicare, soggettivamente, la probabilità di colpire la famiglia di gatti. Sono stati messi in palio dei premi da attribuire a quelli che avevano dato una valutazione di probabilità più vicina alla probabilità statistica risultante dal metodo di Monte Carlo.

Di seguito mostriamo il quadro delle valutazioni di probabilità degli alunni e il confronto con la probabilità statistica. Per comodità i dati sono moltiplicati per 100. Ad es. 67 indica la probabilità di 0,67.

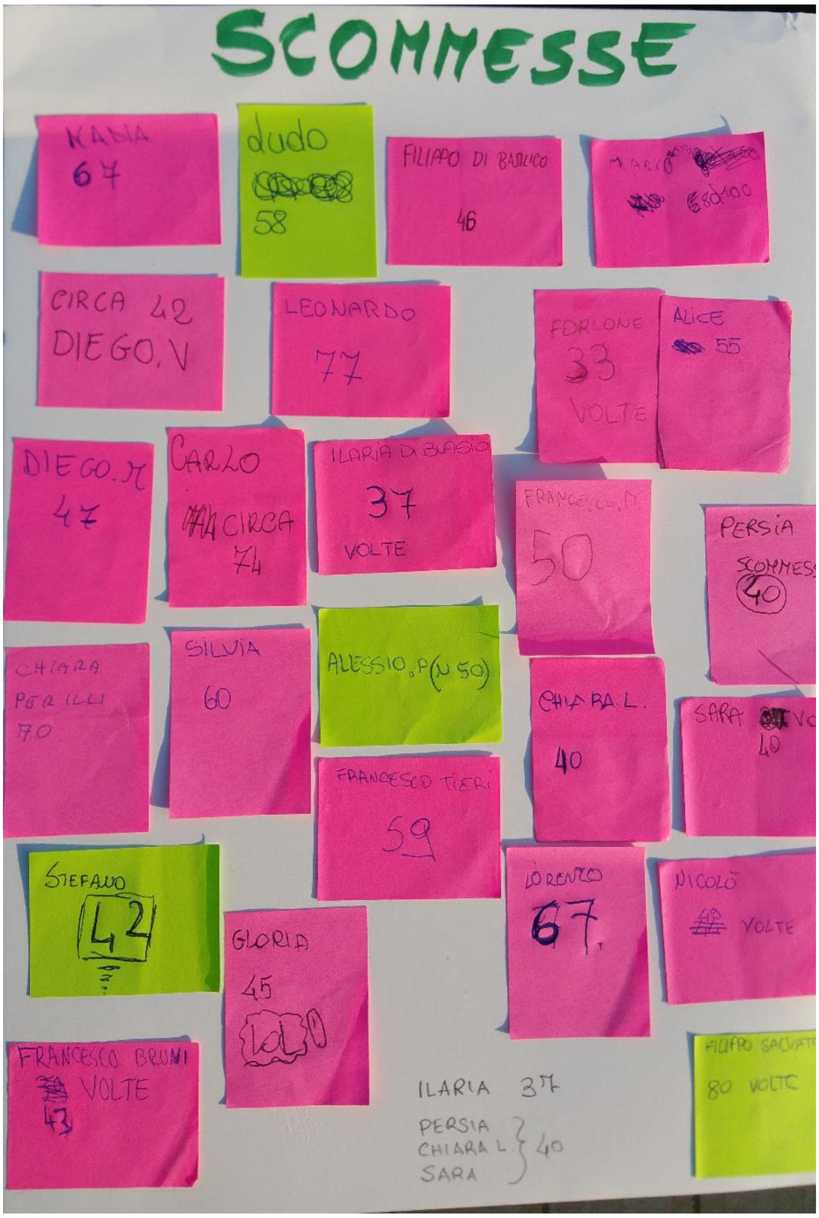

Figura 6.2

La distribuzione delle probabilità soggettive valutate dai ragazzi è la seguente:

100 × prob	33	37	40	42	43	45	46	47	49	50	55	58	59	60	67	70	74	77	80
n. ragazzi	1	1	3	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	2
cumulativa	1	2	5	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18	20	21	22	23	25

Tabella 6.1

La frequenza statistica è risultata uguale a 38/100. Su 25 bambini che hanno indicato una probabilità:

- 4 (in giallo) hanno commesso un errore inferiore a 0,03 (indicando una probabilità soggettiva da 0,36 a 0,40);
- 4 (in verde) hanno commesso un errore da 0,03 a 0,06 (indicando una probabilità soggettiva da 0,32 a 0,44);
- 3 (in azzurro) hanno commesso un errore da 0,07 a 0,09 (indicando una probabilità soggettiva da 0,29 a 0,47);
- 4 (in bianco) hanno commesso un errore da 0,11 a 0,17 (indicando una probabilità soggettiva da 0,49 a 0,55);
- 10 (in rosso) hanno commesso un errore non inferiore a 0,20, (indicando una probabilità soggettiva da 0,58 a 0,80).

La mediana dei valori di probabilità soggettiva indicati risulta essere 0,50, per cui i ragazzi hanno mediamente sovrastimato di 0,50% - 38% = 12% dell'area totale della tavola, l'area della famiglia di gatti.

7. Conclusioni e prospettive di ricerca

La "battaglia gattale" è risultata essere un utile strumento per riflettere sulle relazioni fra mondo matematico e mondo empirico. Il collegamento fra geometria e statistica, l'una basata su rigorose dimostrazioni matematiche, l'altra sui fatti che si verificano nel mondo reale, in situazione di incertezza e aleatorietà, risulta molto stimolante. Si scopre che si può fare matematica rigorosa anche con un approccio sperimentale! I risultati sembrano ottimi e soprattutto in casi di situazioni complesse (ricerca di aree e volumi di figure con frontiere non definite da equazioni semplici o note) l'approccio sperimentale risulta più efficace di quello analitico.

Importante la semplicità e la famigliarità degli strumenti adottati. Un mazzo di carte napoletane e un dado appaiono essere strumenti sufficienti per molti lavori sperimentali nella ricerca di risultati matematici. Tutto ciò grazie alla sorprendente "legge empirica del caso" che crea un ponte fra la matematica deduttiva e la realtà empirica e alle leggi dei grandi numeri (Castelnuovo, 1970; Calot, 1967).

Per un uso intensivo del metodo Montecarlo per la simulazione e la crittografia dei messaggi è necessario generare numeri a caso con il computer (Knuth, 1973; Cera, Maturo, 1990, 1991; Maturo, 1989, 1990; Maturo, Piscione, 1990; Rizzi, 1971; 1982; 1987).

Un aspetto di un certo rilievo è anche la ricerca della portata, i limiti e l'applicabilità della probabilità soggettiva. Alcune delle questioni collegate sono state discusse nel paragrafo 5, altre sono state esaminate in vari lavori, ad es. (de Finetti, 1970; Scozzafava, 1996, 2001; Coletti, Scozzafava, 2002; Delli Rocili, Maturo 2013a, 2013b, 2015; Maturo, 2008). L'assegnazione di probabilità soggettiva è una maniera di sintetizzare le varie informazioni. Essa è l'unica strada quando non si hanno informazioni sufficienti o strumenti analitici adatti per matematizzare le nostre informazioni. Può tuttavia essere influenzata da opinioni personali, aspetti psicologici o altro. Se tali aspetti sono rilevanti, più che una probabilità soggettiva si può trovare una utilità (Von Neumann, Morgenstern, 1944; Luce, Raiffa, 1957, Lindley, 1990). Un'importante linea di ricerca è come minimizzare tali aspetti, in modo da avere probabilità coerenti. Importante è anche il controllo delle competenze acquisite con quesiti e test opportuni. Un'analisi critica è riportata in (Maturo, F., 2015).

Bibliografia

Calot G., (1967), *Cours de calcul des probabilities*, Dunod, Paris.

Castelnuovo G., (1970), *Calcolo delle Probabilità*, Zanichelli, Bologna.

Cera N., Maturo A., (1990), Generazione di numeri pseudocasuali per mezzo di relazioni di ricorrenza su campi di Galois, *Periodico di Matematiche*, 2, 1990, 33-56.

Cera N., Maturo A., (1991), Confronto fra alcuni generatori di numeri pseudocasuali, *Periodico di matematiche*, 2, 1991, 38-64.

Coletti G., Scozzafava R., (2002), *Probabilistic Logic in a Coherent Setting*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

De Finetti B., (1970), *Teoria delle Probabilità*, Einaudi, Torino

Delli Rocili L., Maturo A., (2013a), Logica del certo e dell'incerto per la scuola primaria, *Science & Philosophy*, 1 (1), 37-58.

Delli Rocili L., Maturo A., (2013b), Probabilità e Statistica nella scuola primaria: esperienze didattiche e proposte, *Science & Philosophy*, 1 (2), 49-78.

Delli Rocili L., Maturo A., (2015). Interdisciplinarità, logica dell'incerto e logica fuzzy nella scuola primaria. *Science & Philosophy*, 3(2), pp.11-26.

Knuth, D.E. (1973). The art of computer programming. *Volume 2. Seminumerical Algorithms*, Addison-Wesley, London.

Lindley D. V., (1990), *La logica della decisione*, Il Saggiatore, Milano.

Luce R.D., Raiffa H., (1957), *Games and Decisions*, Wiley, New York.

Maturo A., (2008), La moderna visione interdisciplinare di Geometria, Logica e Probabilità in Bruno de Finetti**,** *Ratio Sociologica*, 2, 2008, pp. 39-62.

Maturo, A., (1989), *Numeri Pseudocasuali*, Libreria dell'Università Editrice, Pescara.

Maturo, A., (1990), Numeri pseudocasuali ottenuti a partire da successioni in algebre finite su Zm, *Ratio Mathematica*, 1, 1990, 103-120

Maturo A., Piscione A., (1990), Probabilità e Statistica con il calcolatore: problematiche di carattere logico operativo, *Metron*, 1, 1990, 509-532.

Maturo, F. (2015). Quesiti e test di probabilità e statistica: un'analisi critica. *Science & Philosophy*, 3(1), pp. 61-72.

Rizzi A., (1971), Su un metodo per la generazione di sequenze di simboli binari pseudocasuali, *Metron*, Vol. XXIX, N. 1-2

Rizzi A., (1982), Generazione di simboli binari pseudocasuali mediante polinomi primitivi, *Statistica*, N. 2.

Rizzi A., (1987), Alcune considerazioni sulla crittografia, in "*Atti SPRC'87*", 101-118.

Scozzafava R., (1996), *La probabilità soggettiva e le sue applicazioni*, Zanichelli, Bologna.

Scozzafava R., (2001), *Incertezza e probabilità. Significato, valutazione, applicazioni della probabilità soggettiva*, Zanichelli, Bologna.

Von Neumann J., Morgenstern O., (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.