Mondo Matematico e Dintorni, Vol 1, No 1-2 (2018), 41-52

Geometria sul geopiano: attività laboratoriali per scoprire la formula di Pick

Bruno Iannamorelli[1]

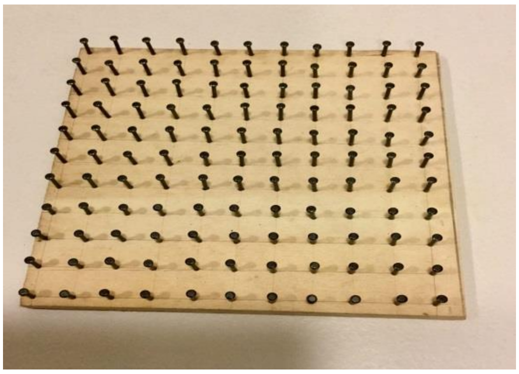
[1]Università degli Studi dell'Aquila,
Dipartimento di Scienze Umane,
Viale Nizza, 2, 67100, L'Aquila, Italy
jannab@tiscali.it

Sunto
Il geopiano viene utilizzato per costruire facilmente figure geometriche disponendo opportunamente gli elastici colorati intorno a chiodini conficcati su una tavoletta e ben presto si scoprono le formule per calcolare l'area di un rettangolo o di un triangolo rettangolo. Il passo successivo è la scoperta degli invarianti nel calcolo di queste aree per generalizzare le formule appena trovate al calcolo dell'area di un triangolo qualsiasi o di un parallelogramma. L'attività laboratoriale continua con il calcolo delle aree di figure insolite e per scoprire gradualmente il teorema di Pick. Si cerca sempre di evitare di imporre procedure con le regole stimolando invece i … perché.

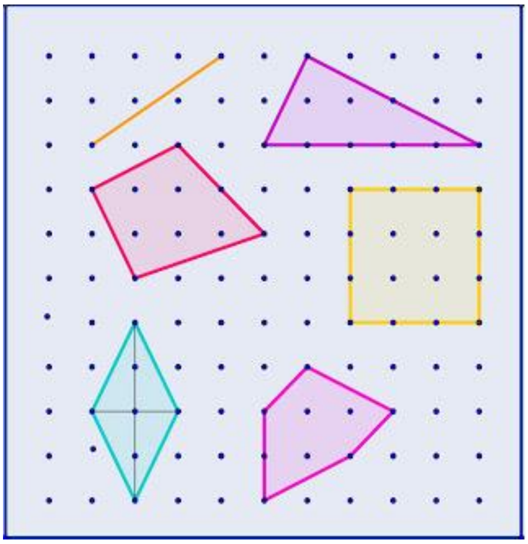
Parole chiave: geopiano, area di una superficie piana, teorema di Pick.

1. La geometria sul geopiano

Il geopiano è uno stumento didattico introdotto nelle scuole dal matematico egiziano Caleb Gattegno nel 1950 e abbastanza diffuso nella Scuola Primaria italiana. Può essere realizzato facilmente disegnando una griglia con maglie quadrate (3cm x 3cm) su una tavoletta di multistrato (40cm x 40cm o anche altre dimensioni) e piantando un chiodino a testa tonda su ogni nodo della griglia.



Con elastici colorati fatti passare intorno ai chiodini vengono rappresentate tante figure geometriche come rettangoli o triangoli, ma anche inusuali concave o convesse. Esistono alcune limitazioni: non si possono rappresentare cerchi o triangoli equilateri e altri poligoni regolari.



Sul geopiano ovviamente l'unità di area è un quadretto della griglia e, quindi, scoprire il modello aritmetico per calcolare l'area di un rettangolo (A = b x h) è semplicissimo: si tratta di una scorciatoia che permette di evitare il conteggio di tutti i quadretti contenuti nella figura. Risulta semplice anche il passaggio al triangolo rettangolo: $A = \frac{b\ x\ h}{2}$ e una bella attività laboratoriale è la scoperta del modello per calcolare l'area di un triangolo qualunque.

1.1. A caccia di invarianti

Si parte da un triangolo rettangolo, per esempio, di area 4 (fig.1)

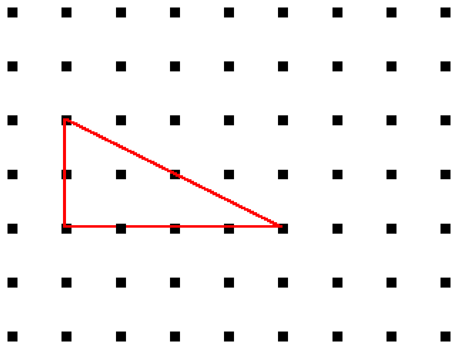


Fig. 1

… e poi si modifica la figura muovendo l'elastico ottenendo il triangolo non più rettangolo di fig. 2.

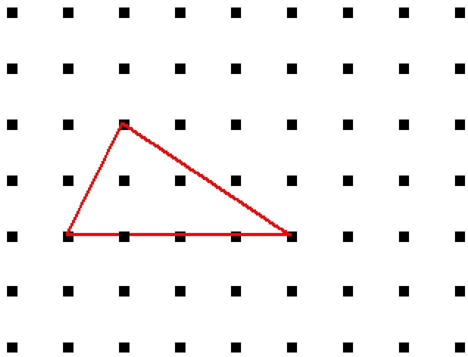


Fig. 2

Come si calcola l'area di questo secondo triangolo?
Una risposta può consistere nel racchiudere, con un elastico, il triangolo in un rettangolo di area 8 e da tale numero si sottrae l'area dei due triangoli rettangoli di area 1 e 3.

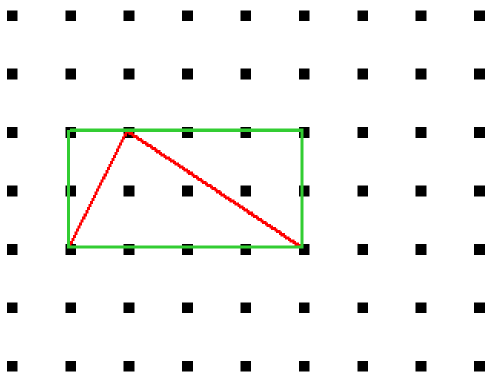


Fig. 3

Oppure, si può scomporre il triangolo in due triangoli rettangoli di aree 1 e 3, semplicemente collocando un elastico come in fig. 4

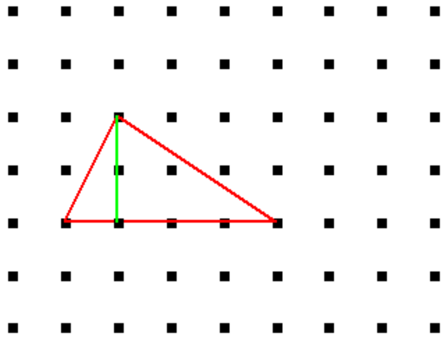


Fig. 4

In entrambi i casi l'area del triangolo di fig. 2 è sempre 4.
Si continua così spostando ancora l'elastico per ottenere i triangoli di fig. 5.

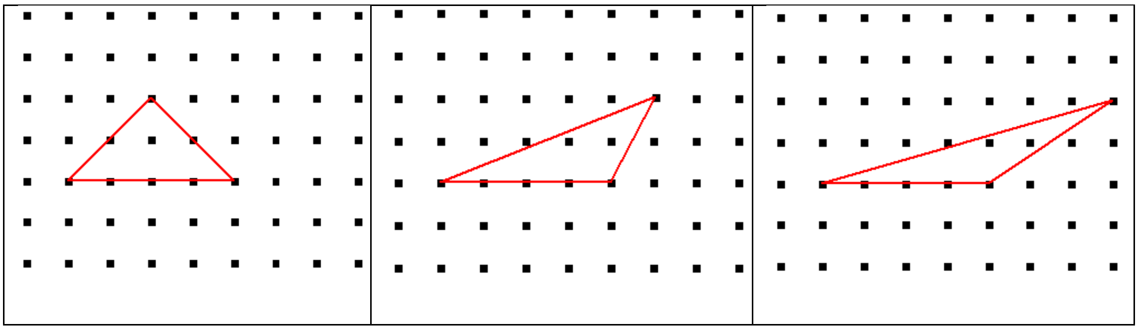
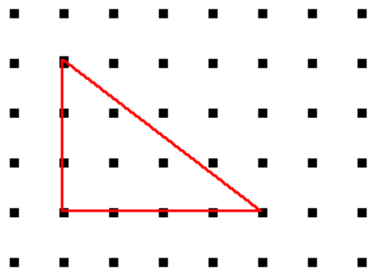


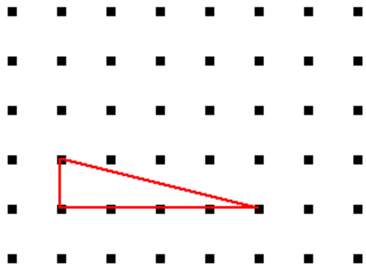
Fig. 5

Con le tecniche usate in precedenza si trova che l'area di questi nuovi triangoli è sempre 4.
In conclusione si scopre che l'area non varia se il vertice libero di muoversi viene spostato sempre sulla stessa riga di chiodi.
Se l'elastico viene posizionato intorno a un chiodo di una riga superiore …



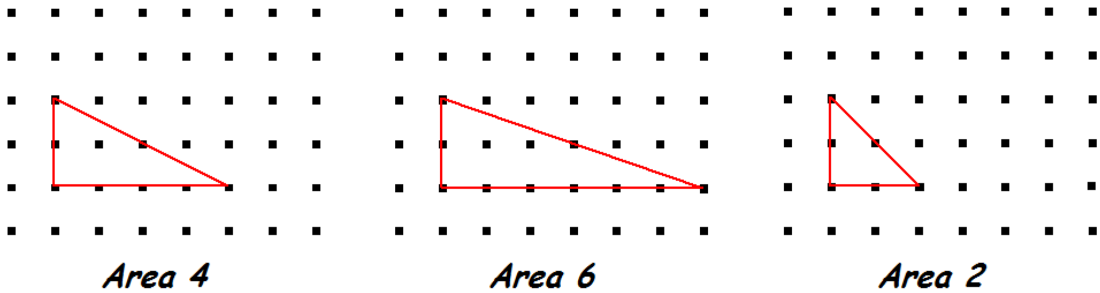
L'area è maggiore di 4.

Se, invece, l'elastico viene spostato sulla riga inferiore …



L'area è minore di 4.

Un invariante per il calcolo dell'area è la distanza tra la riga di chiodi che contiene i due vertici fissi e quella, ad essa parallela, che contiene il vertice libero: questa distanza si chiama altezza del triangolo relativa al lato di questo individuato dai due vertici fissi.
Ritornando al nostro triangolo di partenza di area 4, spostiamo uno dei due vertici fissi:



L'area diventa maggiore o minore di 4.

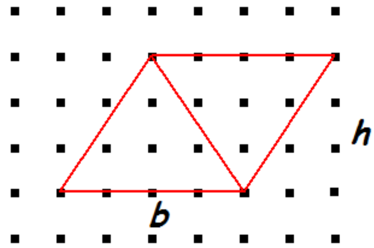
Si scopre così un altro invariante per il calcolo dell'area di un triangolo: è la distanza tra i due vertici che inizialmente erano stati vincolati sulla stessa riga di chiodi e tale distanza si chiama base del triangolo.
Finalmente arriviamo al modello aritmetico per calcolare l'area di un triangolo:

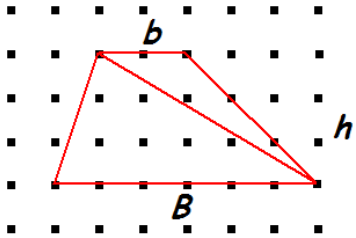
$$A = \frac{b \ x \ h}{2},$$

avendo indicato con b la base e con h l'altezza ad essa relativa.
Si potrebbe obiettare che questo percorso lungo e faticoso "ci ha fatto perdere tempo!". La mia risposta è quella data da Emma Castelnuovo: "Lasciate ai ragazzi il tempo di perdere tempo".

1.2. Alla scoperta di altri modelli

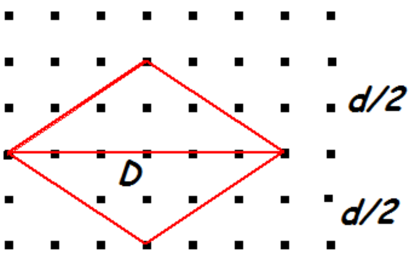
Non si tratta di tempo "perso", ma di tempo guadagnato. Infatti, una volta che il bambino ha scoperto il modello aritmetico per calcolare l'area del triangolo riesce a scoprire da solo i modelli aritmetici per calcolare l'area del parallelogrammo, del trapezio, del rombo o dell'aquilone semplicemente considerando queste figure formate da due triangoli:

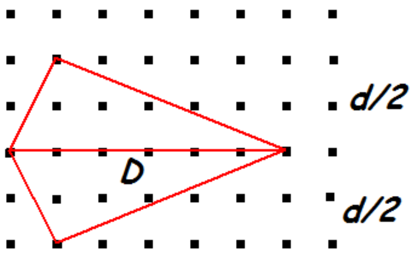




$$A = \frac{b\ x\ h}{2} + \frac{b\ x\ h}{2} = b\ x\ h$$

$$A = \frac{B\ x\ h}{2} + \frac{b\ x\ h}{2} = \frac{(B+b)\ x\ h}{2}$$





$$A = \frac{1}{2}\left(D\ x\ \frac{d}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(D\ x\ \frac{d}{2}\right) = D\ x\ \frac{d}{2}$$

1.3. L’area di un poligono qualunque sul geopiano

La scoperta del modello per calcolare l’area di un rettangolo e di un triangolo avente un lato su una riga orizzontale o verticale è sufficiente per calcolare l’area di qualunque altro poligono rappresentato con un elastico sul geopiano: basta imparare a scomporre la figura in rettangoli e triangoli così fatti.

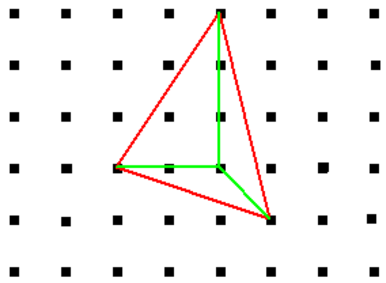


Fig. 6

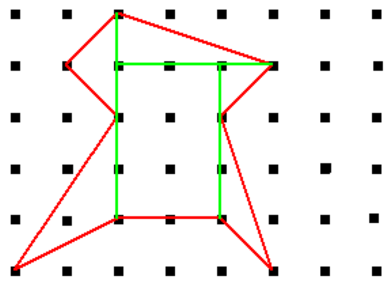
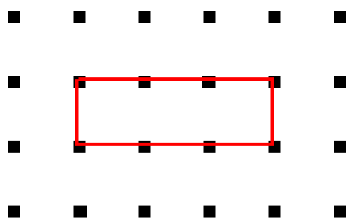


Fig. 7

Nel triangolo di fig. 6 il modello aritmetico per calcolarne l'area non è applicabile in quanto come base si potrebbe scegliere uno dei tre lati, ma la sua misura necessita dell'applicazione del teorema di Pitagora, sconosciuto nella Scuola Primaria e il calcolo dell'altezza relativa a uno di questi lati risulta difficile anche per ragazzi che frequentano le Scuole Secondarie. Invece, il calcolo dell'area delle due figure rappresentate sul geopiano si risolve facilmente scomponendole in triangoli (o anche rettangoli) e sommando le aree di questi.

2. Avvio alla scoperta del teorema di Pick

Se il poligono rappresentato sul geopiano è molto grande e complesso diventa laborioso calcolare le aree di tutti i triangoli e rettangoli che lo compongono. In questi casi è opportuno chiedersi se esiste una via più semplice per calcolare rapidamente l'area del poligono.
Proviamo a scoprire se l'area di un poligono sul geopiano è in qualche modo dipendente dal numero di chiodi che si trovano sull'elastico che delimita il contorno del poligono stesso.
1° passo:
Consideriamo un poligono molto semplice:

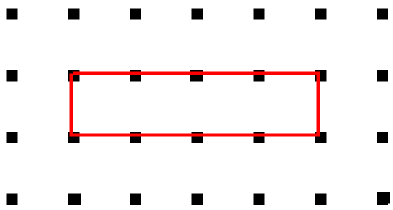


La sua area è 3. Il numero di chiodi sul suo contorno è 8. Cerchiamo un legame tra il numero 3 e il numero 8 ponendo il quesito agli alunni di una classe quarta o quinta Primaria o anche di una prima di Scuola Secondaria. Si raccolgono le varie ipotesi proposte, per esempio:

a. "3 è uguale a 8 meno 5" che, in generale, fornisce la formula: $\boldsymbol{A = C - 5}$ (avendo indicato con $\boldsymbol{A}$ l'area e con $\boldsymbol{C}$ il numero di chiodi sul contorno).

b. "3 è uguale alla quarta parte di 8 più 1" che, in generale, fornisce la formula: ***A = C/4 + 1.***
c. "3 è uguale alla metà di 8 meno 1" che, in generale, fornisce la formula: ***A = C/2 – 1.***

Applichiamo queste tre ipotesi a un altro rettangolo di area 4 con 10 chiodi sul contorno:



L'ipotesi (a) salta perché $4 \neq 10 - 5$: l'area non è uguale al numero di chiodi sul contorno del rettangolo meno 5.
L'ipotesi (b) non regge perché $4 \neq 10/4 + 1$: l'area non è uguale alla quarta parte del numero di chiodi sul contorno del rettangolo più 1.
L'ipotesi (c) resiste, infatti $4 = 10/2 - 1$: l'area è uguale alla metà del numero di chiodi sul contorno meno 1.
Si può continuare a considerare rettangoli di altezza 1 e base qualunque sul geopiano e, in ogni caso, l'ipotesi (c) risulta vera. Ma … se si aumenta l'altezza?
Basta considerare il rettangolo di fig. 8:

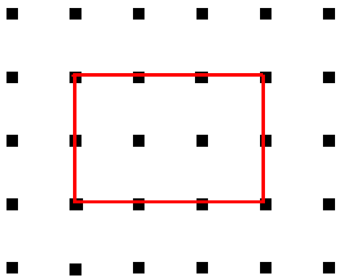


Fig. 8

La sua area è 6 e sul contorno ci sono 10 chiodi. L'ipotesi (c) non è più vera: l'area 6 non è uguale alla metà del numero di chiodi sul contorno meno 1.
A qualcuno verrà sicuramente in mente di modificare l'ipotesi (c) aggiungendo i due chiodi (*I*) interni al rettangolo per arrivare alla formula:

$$A = I + \frac{C}{2} - 1$$

L'area di un poligono sul geopiano è data dal numero *I* di chiodi interni ad esso più la metà del numero $\frac{C}{2}$ di chiodi sul suo contorno meno 1.

L'ipotesi così modificata viene testata da ogni alunno su un rettangolo rappresentato sul proprio geopiano: funziona sempre!

A questo punto, se i bambini sono abituati alla didattica laboratoriale, andranno a testare l'ipotesi trovata su poligoni diversi dai rettangoli. Proveranno ad applicarla a quei poligoni di cui hanno calcolato l'area con le faticose triangolazioni. Anche in questi casi funziona sempre ad eccezione di quei poligoni che presentano buchi al loro interno. Ma … allora abbiamo scoperto una formula!
In verità si tratta di una formula scoperta nel 1899 da Georg Pick ed è diventata un teorema che porta il suo nome in quanto l'Autore ne ha dimostrato la validità per ogni poligono rappresentato su un reticolato.
Non si ha la pretesa di aver scoperto il teorema di Pick con questa attività, ma si tratta di una bella scoperta argomentata e sicuramente utile a stimolare la fantasia e la curiosità dei bambini.
Nella Scuola Secondaria di primo grado si può completare l'argomentazione del teorema di Pick partendo da un rettangolo modificandolo con semplici spostamenti dell'elastico che lo contorna. Nelle figure che si ottengono cambia il numero di chiodi, si modifica la formula, ma l'area cambia allo stesso modo [Barra, M., Castelnuovo, E. (1976) pp. 28-30].
Nella Scuola Secondaria di secondo grado si può cercare una dimostrazione del teorema navigando sul web o consultando gli articoli [Bagni, G. (1996)], [Lenzi, D. (2004)].

3. Conclusioni e prospettive didattiche

Coloro che hanno avuto la pazienza di arrivare in fondo nella lettura di questo lavoro avranno compreso l'essenza della mia esposizione, ma voglio qui riassumerla in alcuni punti:

1. Le formule matematiche in generale e in particolare, nel nostro caso, quelle utili per calcolare l'area di alcune figure geometriche piane sono un punto di arrivo e non un punto di partenza. Bisogna dare al bambino l'illusione di essere stato il primo a scoprire la formula per calcolare l'area del triangolo.

2. I triangoli non devono essere visti soltanto disegnati sul libro o sulla lavagna, ma bisogna farli muovere con gli elastici su un geopiano o sulla schermo di una LIM utilizzando un software di geometria dinamica. I bambini, ma anche i ragazzi, devono individuare cosa cambia e cosa resta invariato nel movimento di una figura: lo studio degli invarianti è fondamentale in matematica, e non solo, perché aiuta ad osservare … a riflettere.

3. Presentare triangoli, anche sul geopiano, in posizioni tali da non poter calcolare né la lunghezza di un lato, da prendere come base, né la relativa altezza serve a smentire che l'area del triangolo è: "base per altezza diviso due". Questa è solo

una formula, non unica tra l'altro, che viene utilizzata per calcolare l'area del triangolo.

4. La formula di Pick è di una semplicità impressionante, ma se viene scritta su una lavagna e poi si chiede di applicarla serve solo ad alimentare l'idea che la matematica è una magia. Navigando sul webb ho trovato che una maestra l'ha utilizzata per far calcolare ai bambini l'area della Sardegna disegnata su un foglio a quadretti. Questo passa come "compito di realtà", ma è basato su un difetto di fondo: la formula di Pick è stata imposta. Immagino l'obiezione di quella maestra: "Ai bambini piace tanto quella formula. Si divertono ad applicarla". La mia risposta è drastica: la matematica non è un insieme di regole da memorizzare per applicarle al momento opportuno. Per fortuna, questo non è solo il mio pensiero, ma è quello che è scritto nelle Indicazioni Nazionali del 2012 (pag. 60). Aggiungerei soltanto che la matematica è esattamente l'opposto della magia perché ogni contenuto ha una sua giustificazione. Purtroppo nella pratica didattica si preferisce presentare oggetti come pi greco o i numeri fissi dei poligoni o la "prova del nove" come se fossero conigli tratti dal cilindro di un prestigiatore. Si sappia, però, che queste imposizioni magiche sono ormai vietate dalla legge scolastica.

5. L'insegnante che volesse sperimentare in laboratorio con la propria classe il lavoro da me proposto avrà modo di constatare il miglioramento dei risultati nelle fatidiche prove Invalsi dove spesso si trovano situazioni geometriche non usuali. Potrebbe, inoltre, proseguire il lavoro facendo scoprire l'impossibilità di utilizzare la formula di Pick non solo per i poligoni che presentano buchi, ma anche per i poligoni intrecciati (fig. 9). Se questi poligoni non si intrecciano in un chiodo del geopiano diventa impossibile calcolarne l'area anche con le triangolazioni (fig. 10).

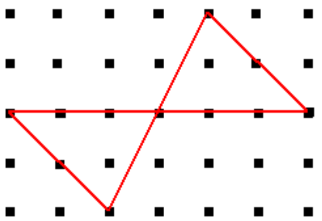


Fig. 9

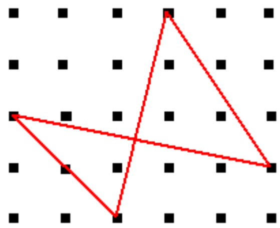


Fig. 10

6. Prospettare problemi difficili che non hanno soluzione non fa divertire i bambini anzi li disorienta, ma li fa crescere. "I ragazzi crescono se devono affrontare problemi difficili. Sono questi che fanno acquisire lo spirito di ricerca e l'attitudine all'osservazione", [D'Amore B, (a cura di). (1990), pag.33-39], queste parole di Emma Castelnuovo mi tornano spesso alla mente e sono state il timone della mia didattica.

Chi era Georg Pick

Nato a Vienna il 10 agosto 1859, fu matematico e accademico di professione, buon musicista per passione. Nel 1910 sponsorizzò Einstein per l'attribuzione di una cattedra all'Università di Praga. Il suo teorema sul calcolo dell'area dei poligoni costruiti su un reticolo regolare di punti fu pubblicato a Praga nel 1899 nell'articolo Geometrisches zur Zahlenlehre (La Geometria per la teoria dei Numeri)**.** In questo articolo Pick riportò il testo di una sua conferenza tenuta presso la Società Matematica Tedesca di Praga iniziando con queste parole: "… è necessaria una formula per calcolare l'area dei poligoni tracciati in un reticolo rimasta fino ad oggi inosservata a dispetto, come si potrà vedere, della sua semplicità". Il reticolo utilizzato da Pick era più generale del nostro geopiano perché era formato da "due sistemi di rette parallele equidistanti nel piano", ma i due sistemi di rette non erano perpendicolari come avviene sul geopiano. Le maglie di questo piano sono parallelogrammi e non quadrati. Pick sceglie come unità di area il triangolo metà di una maglia a forma di parallelogramma e, pertanto, la formula che dimostra è

$$A = 2I + C - 2,$$

dove I indica sempre il numero di chiodi interni al poligono reticolare e C è il numero di chiodi sul suo contorno.

Pick terminò i suoi giorni in un campo di concentramento nazista. Fu deportato a Terezin, una cittadina fortificata situata nell'attuale repubblica Ceca, dove furono sgombrati i circa 7000 abitanti per contenere 70000 ebrei. Si trattava di intellettuali, docenti universitari, artisti ai quali fu lasciata una relativa libertà di operare nel proprio campo. Tuttavia la sorte dei deportati fu la stessa di quella che vigeva negli altri campi e molti finirono nei forni di Auschwitz-Birkenau. Quando Pick arrivò a Terezin aveva 83 anni, resistette appena due settimane e morì il 26 luglio 1942.

Bibliografia

Bagni G. T., (1996). Geometria e Teoria dei Numeri nell'opera di Georg Pick: un'esperienza didattica. Bollettino dei docenti di matematica n.33. Bellinzona.

Barra M., Castelnuovo E., (1976). Matematica nella realtà. Torino: Boringhieri.

D'Amore B. (a cura di), (1990). Matematica: gioco ed apprendimento. Bologna: Apeiron Ed.

Jannamorelli B., (2010). Abbasso la matematica: regole e formule addio! Torre de'Nolfi: Qualevita

Lenzi D., (2004). Una semplice dimostrazione del teorema di Pick. Intervento al 3° Convegno Nazionale ADT, Ferrandina.