Mondo Matematico e Dintorni, Vol 1, No 1-2 (2018), 17-28

Sull'acquisizione delle prime abilità aritmetiche per un avvio alla razionalità anche in presenza di disturbi cognitivi

Domenico Lenzi[1] Roberta Lenzi[2]

[1]Università del Salento Lecce,
Dipartimento di Matematica e Fisica,
Via per Arnesano, 73100, Lecce, Italia
domenico.lenzi@unisalento.it
[2]Gioia Mathesis, Lecce
Via Palmieri, 73100, Lecce, Italia
lrobi.len@gmail.com

Sunto

In questo articolo riprendiamo – in maniera indipendente e ampliandole – alcune questioni da noi già affrontate in precedenza (si veda Lenzi-Lenzi, 2015 e 2016). Tra l'altro, nel secondo intervento viene descritta l'attività svolta con una bambina di nove anni (4ª elementare) che era stata diagnosticata come gravemente discalculica e bisognosa di assistenza in matematica.
In particolare, qui dedichiamo una speciale attenzione alla *percezione analitica*, che provvede a utilizzare – quando sia necessario – ogni elemento delle informazioni che si ricevono attraverso gli organi sensoriali. Essa deve attivarsi non in contrapposizione, bensì in sinergia con la *percezione globale*, che gestisce la maggior parte degli apprendimenti e delle notizie che si acquisiscono. Nei riguardi di quest'ultima la percezione analitica svolge un controllo importante e un filtro nevralgico.
Come vedremo, la percezione analitica è essenziale per l'avvio per tempo a una razionalità che consenta di andare incontro ai "perché" dei bambini, i quali sono ansiosi non solo di apprendere, ma anche di comprendere il perché dei fatti e il senso delle cose.
Perciò è importante cercare di attivare al più presto questo importante strumento cognitivo, soprattutto in presenza di disturbi dell'apprendimento, ponendo in essere procedure che siano utili per tutti; programmando percorsi – che in parte si potranno desumere da quanto esporremo – volti alla comprensione dei primi elementi di aritmetica. Questi non dovranno essere trattati in termini mnemonici, ma impostando piccoli ragionamenti che aiutino a capire come essi si evolvano, avviando i bambini – non solo quelli con disturbi di apprendimento – a muovere i primi passi verso la percezione analitica e la razionalità.

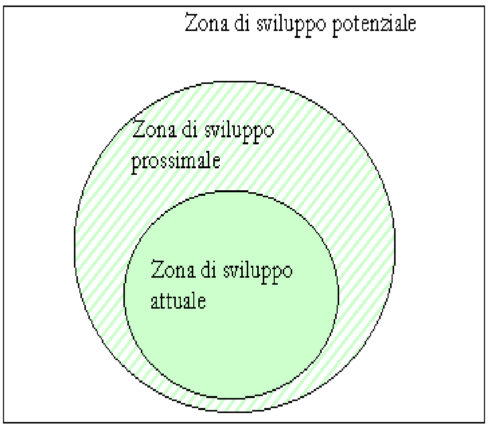
Parole chiave: Primi elementi di aritmetica. Percezione analitica. Disturbi cognitivi.

1. Introduzione

I disturbi cognitivi sono un problema preoccupante sul piano sociale. Da un po' di tempo l'attenzione si è focalizzata sempre più sull'autismo, le cui cause non sono ancora state determinate. Tuttavia spesso si è gareggiato nel cercare di darne le spiegazioni più astruse, tra cui quella che ha fatto esplodere il controverso caso No-Vax.
Secondo studi recenti, nell'autismo sarebbe implicato un eccesso di connessioni neuronali che finiscono col rendere difficile la selettività percettiva; in conseguenza del fatto che nei soggetti autistici l'attenzione è sovrastimolata.
In realtà, se stimoliamo troppo i nostri bimbi, se li ingozziamo di informazioni di ogni genere – senza un coordinamento, senza una seria analisi di quello che gli si propina – non solo li avviamo a una sorta di "obesità informativa", ma aumentiamo il loro senso di privazione in termini di razionalità. E da questo punto di vista l'abbandonarli al loro smartphone o di fronte alla televisione ne accresce le difficoltà. Non tanto perché ciò susciti in essi un senso di mancanza d'affetto, ma perché può portali a pensare che non gli vengano date le giuste spiegazioni in quanto non sono in grado di comprenderle. Donde l'insorgere di frustrazioni e di una rinuncia alla comunicatività per il fatto di sentirsi, a torto, incapaci di capire. E questo accentua i problemi non solo di chi ha difficoltà di tipo cognitivo, ma anche dei cosiddetti bambini normali. Per contrastare ciò è essenziale promuovere una didattica volta ad attivare in modo ragionato i primi elementi di aritmetica, che avvieranno alla percezione analitica e alla razionalità.

2. Aspetti teorici e considerazioni generali

Spesso l'insegnamento della matematica si riduce a un'accozzaglia di modi di dire e di fare, talora incomprensibili, caratterizzati dall' "impara e fai così". L'attitudine alla matematica che è in noi – ma che affiora in modo diverso dal nostro DNA – a volte permette ad alcuni di disimpegnarsi in modo dignitoso con essa; però per molti altri questa appare come un supplizio. Da ciò deriva la necessità di impostazioni didattiche più concrete e meglio coordinate, da cui far scaturire in modo chiaro i concetti fondamentali della disciplina.



E per un buon percorso didattico sono cruciali gli insegnamenti di Lev Vygotskij, con la sua Zona di Sviluppo Prossimale, che è un ampliamento della Zona di Sviluppo Attuale (si veda la figura accanto), la quale si identifica con il bagaglio di conoscenze a cui una nuova nozione può aderire attraverso la Zona di Sviluppo Prossimale, che fa parte della Zona di Sviluppo Potenziale, che esprime le capacità non ancora attivate di una persona.
Per un bambino l'uso sistematico delle dita può costituire un fondamentale punto di partenza per l'avvio all'aritmetica già a partire dai tre anni, quando egli incomincia a indicare la sua età con pollice, indice e medio di una mano. Però sarebbe opportuno intervenire già prima, per dare sostegno a una naturale tendenza verso il numero tipica di

ogni bimbo che incominci a prendere coscienza di sé e di ciò che lo circonda, attivando capacità di cui ogni individuo è dotato grazie alla sua "memoria di specie".
Ma allora è naturale chiedersi perché le potenzialità aritmetiche non si rivelino altrettanto agevolmente in ogni essere umano, così come accade per quella del parlare.
Ebbene, il percorso evolutivo della matematica è iniziato abbastanza recentemente, appena a 40-50 mila anni fa; ma ci sono studiosi che fanno risalire le prime vere attività aritmetiche all'avvento del periodo neolitico (circa diecimila anni prima di Cristo). E ciò fa capire perché in molti individui ci possano essere delle difficoltà nell'approccio alla matematica. Infatti, all'età di circa un anno, il bimbo si solleva sulle gambe, in accordo con l'avvento dell'H. erectus due o tre milioni di anni fa; mentre il linguaggio orale ha un percorso preparatorio che si completa all'età di circa due anni, corrispondentemente alla comparsa delle prime forme di linguaggio (alcune centinaia di migliaia di anni fa) fino a circa 50 mila anni fa (De Mauro, 1995). Onde queste abilità, per la loro antica comparsa, non hanno bisogno di insegnamenti diretti, poiché gli esempi stimolanti dovuti all'inserimento in una comunità umana sono decisivi. Invece le abilità aritmetiche, per essere attivate, hanno bisogno di interventi particolari, che sarebbe bene porre in essere ben prima di quanto avvenga ora, con pratiche didattiche in grado di sollecitare quella parte di matematica che è patrimonio di ogni individuo.
In fatto di matematica, qualcuno potrebbe obbiettare che non c'è tutta questa fretta di tediare i bambini con cose che poi apprenderanno facilmente; tuttavia, pur prescindendo dalla loro ansia di imparare, sappiamo che quel "facilmente" non vale per tutti. Anzi, se non si interviene al più presto, molte abilità che non sono state attivate per tempo saranno poi difficili da recuperare, come nel caso degli analfabeti adulti.

3. Sulla percezione

In una prima accezione, la percezione[1] possiamo considerarla come una sorta di immagine che si accende nel nostro cervello e innesca quel processo che elabora le informazioni da noi acquisite tramite i nostri sensi. Più precisamente, essa è il modo in cui quell'immagine viene prima trattata e "accomodata" utilizzando quanto già conosciamo [e non a caso Jean Piaget (*1896-1980*) chiama "accomodamento" tale fase]; poi quell'immagine, una volta interpretata, viene adattata e fatta coesistere con le nostre conoscenze pregresse ["adattamento", secondo il Piaget].
Molti anni prima di Piaget lo psicologo Hermann Helmholtz (1821-1894) aveva chiamato l'accomodamento e l'adattamento rispettivamente "stadio analitico" [poiché la nostra mente cerca, per quanto le è possibile, di analizzare l'informazione recepita] e "stadio sintetico" [in cui l'informazione ricevuta si integra con le vecchie conoscenze]. Però la fase analitica spesso risulta carente, non essendo stata sufficientemente attivata.
Qualche anno fa una bambina, a cui erano stati mostrati l'indice e il medio di una mano, disse che quelle dita indicavano il *tre*. Avendole ribattuto che si trattava del *due*, la piccola rispose che lei il *due* lo indicava col pollice e l'indice. Quella bimba era stata privata della possibilità di utilizzare gli aspetti analitici della percezione numerica, facendole pensare che un numero si indicasse come nel gioco delle carte, dove ci si tocca il naso, un orecchio

[1] Da "percepire" nel senso di andare oltre ciò che si acquisisce: il recepire ["cepire", da "capere"].

o si fa l'occhiolino per far capire al proprio compagno che si è in possesso di una certa carta.

La carenza di abilità analitiche fa sì che spesso nel trattare ciò che abbiamo recepito entrino in gioco situazioni evidenziate dagli studi sulla "psicologia della forma" ("gestalt"), secondo cui noi tendiamo a una organizzazione globale di ciò che ci appare, come se si volesse ridurre a una sorta di forma unitaria l'immagine ricevuta. Una forma che però a volte risulta incompleta, o si acquisisce come tale (per distrazione o a causa di altri inconvenienti). In tal caso interviene il cosiddetto fenomeno della *chiusura* (nel senso di completamento di quanto è stato acquisito) sulla base delle nostre cognizioni e delle nostre esperienze. Però è chiaro che un uso acritico della chiusura può essere fonte di errori e di pericoli, se non si coltiva anche l'abilità di esaminare un messaggio in modo analitico. Infatti a volte il destinatario coglie solo parte dell'informazione che gli viene trasmessa, tralasciando particolari importanti; oppure tralasciando aspetti che, trascurati a livello cosciente, possono essere adattati in maniera dannosa a livello inconscio, come succede con la pubblicità.

La predisposizione a una percezione globale – essendo innata – la si ritrova non solo negli adulti, ma anche nei bambini, nei quali si attiva automaticamente, portandoli a esaminare la natura che li circonda in modo globale, nel suo insieme, sincreticamente; donde anche la locuzione *percezione sincretica*. L'inclinazione dei bambini verso la percezione globale – uno dei due pilastri fondamentali della conoscenza – ha indotto in alcuni studiosi l'errore secondo cui anche l'approccio alla lettura debba essere di tipo sincretico (*metodo globale*), presentando ogni parola nella sua interezza, come se fosse un marchio ideografico; mal interpretando il fatto che la chiusura facilita una lettura più rapida, che avviene con piccoli salti di lettere e di parole. Tale tendenza è legata a un atteggiamento di fronte a ciò che leggiamo, che per ragioni di brevità e di minor dispendio – che è un fatto naturale in ogni individuo – noi cerchiamo di *catturare* nella sua interezza attraverso alcuni elementi peculiari che colpiscono più di altri la nostra osservazione. Ma ciò vale per chi sa già leggere e non per un avviamento alla lettura.

D'altro canto, la tendenza a una percezione di tipo globale, che in molti casi risulta utile, in altri – come si è accennato – è fonte di abbagli ed errori, in adulti e bambini. La piccola a cui erano stati mostrati l'indice e il medio applicò il criterio della chiusura aggiungendo automaticamente il pollice a un'immagine che lei non conosceva; e la trasformò in un'altra a lei ben nota, però sbagliando.

Bisogna dire che in merito all'educazione all'analiticità J. Piaget ha svolto un ruolo negativo, dando un'interpretazione inadeguata ai suoi esperimenti, non capendo che alcune risposte dei bambini erano frutto di semplici misconcezioni dovute al fatto che essi interpretavano i termini "più" e "meno" sulla base di confronti spaziali, dato che nessuno aveva fatto capire loro che potessero essere legati a confronti di tipo numerico espressi mediante dei conteggi.

Purtroppo, le misconcezioni in fatto di aritmetica notate da Piaget, ma non ravvisate come tali, lo hanno indotto ad affermare che i bambini prima dei 6-7 anni d'età non acquisiscono il Principio di Conservazione delle Quantità discrete. E ciò ha portato molte nazioni a dare inizio alla scuola dell'obbligo dopo i sei anni.

A proposito di misconcezioni, Bruno D'Amore ha giustamente scritto (si veda D'Amore, 2008): «Le *misconcezioni* si possono interpretare come concezioni momentanee non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica. […] Chiamarle *errori* è troppo semplicistico e banale; […] si tratta, invece, di dare gli strumenti per l'elaborazione critica».

4. L'utilità di un avvio precoce ai primi elementi di aritmetica

Per l'avvio ai primi elementi di aritmetica è importante iniziare quanto prima. In attesa dell'ingresso nella Scuola dell'Infanzia, nel bambino si può incominciare ad attivare la scansione *uno-due* sia in famiglia che negli asili nido.
A conferma della possibilità di promuovere nei piccoli abilità di tipo aritmetico già nel corso della prima infanzia, ricordiamo un episodio accaduto con una bimba di 2 anni e qualche mese, che non sapeva di avere due guance, due orecchie e perché indicasse la sua età con l'indice e il medio. Dopo una brevissima attività pratica le fu domandato quanti occhietti avesse. In tal caso si può pensare che ella già conoscesse la risposta, avendola appresa dalla mamma o da altri. Fatto sta che lei agitò in successione le sue palpebre, dando proprio l'impressione che contasse, poi esclamò: «Due!» Le cose si sono svolte con le stesse modalità con altre bimbe che avevano quasi due anni e mezzo.
Nel Piceno un tempo c'era una filastrocca che di fatto aiutava a distinguere la singolarità dalla duplicità di alcune componenti del corpo umano, toccandole mentre venivano pronunciate: *Orecchio bello e suo fratello, occhio bello e suo fratello, guancia bella e sua sorella, nasì, bucchì, scucchi* (mento)*, cuti-cuti-chì*; e si solleticava il pancino del bimbo; e ciò lo aiutava a ricordare l'attività svolta.
In definitiva, si può approfittare della presenza nel corpo umano di parti accoppiate e facilmente individuabili (orecchie, occhi, guance, mani …) affinché a poco a poco i bambini ne possano comprendere l'aspetto aritmetico. Perciò si comincerà a contare le due orecchie (una e due orecchie!). Poi il conteggio si ripeterà scambiandole. Inoltre, si premerà sul primo orecchio affinché il bimbo avverta che, nonostante lo scambio, si è terminato ancora con *due*; il che contribuisce ad avviarlo al Principio di Indifferenza nella scelta degli oggetti che si contano.
Quindi si proseguirà, con le stesse modalità, con occhi, guance, mani … Per passare, una volta che il bambino sarà sul seggiolone, al conteggio di oggetti che rientrino nella sua esperienza. Poi, a poco a poco, la scansione si estenderà al *tre*.
Si raccomanda, prima dei tre anni di età, di non aver fretta di andare oltre, affinché la scansione *uno-due-tre* si stabilizzi e il bambino ne comprenda l'uso nell'ambito dei conteggi, al di là della semplice filastrocca. Non importa conoscere i *numerali* da uno a dieci o forse più (magari anche in inglese, come alcuni genitori o insegnanti vantano), se non si conosce il significato del contare. Naturalmente, dopo che il bimbo avrà contato tre oggetti, verrà sollecitato a osservare che ricontandoli più volte – cambiando il modo di sceglierli – il conteggio termina sempre sul *tre*. Inoltre è essenziale fargli capire che per rappresentare il *due* o il *tre* non importa quali dita si usino.
Da interventi siffatti nel bambino si può sviluppare nell'immediato – in modo ragionato, con l'aiuto dei genitori e degli insegnanti – la comprensione di nuove nozioni aritmetiche. In particolare a tre/quattro anni, rimanendo nell'ambito di una mano, egli sarà avviato alla comprensione delle prime piccole addizioni e sottrazioni – nel senso del mettere insieme e del togliere; quest'ultimo concetto intimamente legato al "quanto manca" – che gli si farà svolgere esaltando soprattutto il *più uno* e il *meno uno* (o *una*).
In definitiva, con uno, due e tre dita (o palline, o caramelle …) più una si arriva a quattro dita. Se l'ultima la togliamo, ritorniamo a tre dita. Dando così le prime avvisaglie del contare a ritroso.
Qui di seguito i primi numeri naturali sono stati inseriti in una canzoncina, che

inizialmente sarà bene usare in forma ridotta; limitandola ai numeri da *uno* a *cinque*, onde favorirne l'acquisizione stabile sia in forma crescente che in forma decrescente. Per semplicità, dei nomi numerici (i *numerali*) è stata usata solo un'abbreviazione che aiuta a individuarli più agevolmente[2]. Al di sotto della prima riga della filastrocca, sono state riportate le note musicali che consigliamo di usare (*do re mi fa sol* per la prima riga; *sol fa mi re do* per la seconda). Quelle note riguardano, nella stessa successione, anche la sesta e la settima riga. La parte musicale potrà essere completata a piacere dall'insegnante usando una delle tante cantilene per bambini.

La canzone del contare (ridotta)

Un due tre qua cin spe__gni il lu__mi__cin
do re mi fa sol sol fa mi re do
e po_trai ve_der cin qua tre due un

grappoli di stelle che si accendono nel ciel
sembrano fiammelle che risplendono per te

Un due tre qua cin cin qua tre due un
un due tre qua cin cin qua tre due un

balla conta e canta com'è bello se cantiam
balla conta e canta la canzone del contar

la canzone del contar
la canzone del contar

L'espediente musicale favorisce l'acquisizione da parte degli alunni dei numeri naturali da uno a *dieci*, che essi dovranno arrivare a recitare senza salti e trasposizioni. Inoltre, la collocazione dei numeri in due blocchi – per i quali la scala musicale viene usata una volta "in salita" e una volta "in discesa" – serve a favorire l'acquisizione della loro posizione reciproca nella cantilena, fino a possederla in forma automatica; avendo percezione immediata del fatto che tre viene prima di cinque, mentre quattro viene prima di nove …, senza necessità di percorrere la cantilena. Si tenga presente che generalmente non è facile stabilire automaticamente la posizione reciproca di due elementi rispetto alla loro collocazione in un ordinamento – pur conoscendolo – senza percorrerlo via via, magari parzialmente. Per esempio, chi sa dire immediatamente – se non è pratico di musica – quale delle due note *la* o *fa* viene prima nella scala musicale?
In seguito la seconda riga sarà sostituita così: *e po_trai ve_der sei set o no diè.*
Intorno ai quattro anni il bimbo, a poco a poco, potrà anche essere stimolato ad automatizzare il riconoscimento di tre dita (oltre che di due) – comunque esse si presentino – o di tre cose qualsiasi, usando sempre conteggi ripetuti. Il riconoscimento in blocco di due o di tre oggetti è considerato un fatto naturale ed essenziale, poiché – come per tutti gli automatismi (di cui, comunque, in matematica si debbono far comprendere le ragioni) – evita successive distrazioni.
Gli automatismi sono ausili fondamentali per l'apprendimento, poiché consentono di andare oltre situazioni già consolidate, facendo sì che l'attenzione si concentri su attività importanti, che è bene non subiscano distrazioni. Per esempio, nello svolgere

[2] Come nel caso della filastrocca geografica *ma-con-gran-pena-le-re-ca-giù*, che individua i vari gruppi montuosi in cui si suddividono le Alpi: Marittime, Cozie, Graie, Pennine ...

un'addizione in colonna è opportuno non essere distolti dalla necessità di "costruirsi" – pur sapendo come fare – le somme entro il nove richieste nell'esecuzione dell'operazione; che debbono intervenire in maniera automatica, per evitare errori, come può essere il non tener conto di un riporto. Ma è importante che questi automatismi siano acquisiti prendendo coscienza delle ragioni che sono alla loro base.
Ovviamente, il lavoro con le dita continuerà a essere affiancato da un'attività con oggetti di uso spontaneo per un bambino di quell'età: bicchieri di carta, posate, caramelle, palline …; rimanendo sempre all'interno del numero *cinque* (*infra-cinque*). Poi, nel periodo che va dai quattro ai cinque anni, l'attività svolta precedentemente si estenderà alle dita delle due mani, rimanendo nell'ambito del *dieci* (*infra-dieci*). Ci sono insegnanti che affermano che a quattro o cinque anni i loro bambini sanno spingersi fino a cento e più. Ma questi hanno veramente capito cosa significhi contare? E poi, anche solo *due* o *tre* bambini che siano in difficoltà rappresentano l'*otto-dodici* per cento in una classe di 25 alunni. Non possiamo permetterci queste percentuali di fallimento.
Rispetto a quanto è stato detto, si andrà oltre solo in presenza di richieste esplicite di qualche bambino; ma si spiegherà che, essendo le cose un po' difficili, si potrà capire meglio in seguito.

5. I principi di Indifferenza e di Conservazione, l'appello numerico

Riprendendo cose già dette fugacemente, ribadiamo che affinché un bambino possa far suo il criterio del contare per confronti di tipo quantitativo, evitando errate considerazioni di tipo spaziale, non basta che impari correttamente la cantilena dei numeri, sappia recitarla e sappia usarla in un conteggio. Ma è necessario che egli prenda coscienza – al di là del *due* e del *tre*, attraverso alcune esperienze limitate a casi che impegnino numeri molto piccoli – che contando in vario modo un gruppo di oggetti si perviene sempre allo stesso risultato finale, indipendentemente dalla scelta degli oggetti che via via si contano (Principio di Indifferenza nei conteggi); onde quel risultato può essere visto come una sorta di marchio, un ***marcatore numerico*** – come dicono alcuni insegnanti – immutabile per il gruppo di oggetti esaminati, rispetto al modo in cui si scelgono via via gli elementi per contarli.
Il Principio di Indifferenza costituisce uno snodo nevralgico per l'acquisizione di molte proprietà aritmetiche, quali la commutativa e l'associativa dell'addizione (e di altre ancora); ma pure per l'acquisizione del Principio di Conservazione delle Quantità discrete. Infatti, il conteggio di un gruppo di oggetti stabilisce per ciascuno di essi una specie di nome numerico; onde quel nome rimane invariato, insieme al marcatore, anche rispetto a collocazioni spaziali diverse degli oggetti. Così come il nome dei componenti di un gruppo resta invariato insieme all'ultimo che sia stato assegnato, a prescindere dal fatto che essi siano più o meno distanti tra loro. E ciò esprime, appunto, il Principio di Conservazione delle quantità discrete.
Un espediente che innanzitutto consente di imparare nel giusto ordine la sequenza dei numeri che entrano in gioco nel conteggio degli alunni di una classe è l'appello numerico. Esso si basa sul fatto che ciascun alunno memorizzi il numero con cui è indicato sul registro: il suo *nome numerico*. Inoltre, chi ha un nome diverso da *uno*, dovrà imparare anche il nome numerico precedente. Quindi, al momento dell'appello, l'alunno denominato ***uno*** pronuncerà quel nome ad alta voce; dopodiché ogni altro bambino dirà

il proprio nome numerico non appena avrà ascoltato quello precedente.
Così a poco a poco, giorno dopo giorno, gli alunni impareranno nel giusto ordine i nomi numerici relativi ai componenti della loro classe. E si sottolineerà che a ogni numero pronunciato sono stati contati tutti gli alunni che fino ad allora hanno pronunciato il loro nome. Perciò l'ultimo di questi esprime la loro quantità complessiva, il loro *numero*. Trascorso qualche tempo, l'appello sarà fatto da un bambino, che chiamerà i suoi compagni coi rispettivi nomi numerici, pronunciandoli via via secondo l'ordine naturale. E sarà interessante accertare quando tutti gli alunni riusciranno a conoscere – nel giusto ordine – i numeri coinvolti. Anche così prenderanno coscienza del Principio di Conservazione delle Quantità discrete, poiché lo svolgimento dell'appello resta lo stesso anche se si svolge in corridoio o in cortile.
In seguito sarà opportuno che l'appello numerico venga effettuato anche a ritroso, confermando il fatto che quando a un certo numero di oggetti se ne sottrae uno, per sapere quanti sono rimasti non occorre ricontarli, ma basta tornare indietro di un numero. Ovviamente, nella prima attuazione dell'*appello a ritroso*, ogni bambino dovrà conoscere il nome numerico che viene dopo il suo.

6. L'addizione e la sottrazione

Nei primi approcci con l'addizione gli addendi sono rappresentati dalle dita delle mani, che vengono mostrate contemporaneamente: un addendo per le dita di una mano e uno per quelle dell'altra, a prescindere da come le mani vengano scelte (e si dice che il risultato è dato dal numero totale di dita mostrate). Però, quando le dita si sostituiscono con due gruppi di palline (o altri oggetti), generalmente gli addendi vengono presentati l'uno dopo l'altro. E si dirà anche ora che il risultato si ottiene immaginando – come per le dita – di fare un tutt'uno (l'unione!) dei due gruppi di palline, contando poi quante sono le palline in totale. Tuttavia è opportuno che i gruppi di palline che esprimono i due addendi abbiano colore diverso – pur precisando che si prescinde dal colore – onde rimanga presente la percezione visiva dei due addendi in gioco. Ciò consente di conseguire diversi obbiettivi.

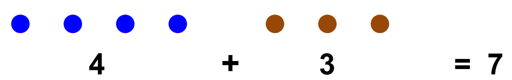


Fig. 1

Il primo è la presa di coscienza del fatto che avremmo potuto prendere e contare prima le 3 palline marrone e poi le 4 blu (Principio di Indifferenza, donde la *proprietà commutativa*); poiché in entrambi i casi avremmo avuto le stesse palline e il risultato sarebbe stato lo stesso. Il secondo obbiettivo è che, sapendo che le palline blu sono 4, per avere il risultato è inutile contarle di nuovo; perciò il conteggio proseguirà sulle tre palline marroni (si veda Fig. 2). Il che corrisponde ad aggiungere tre volte una nuova pallina: tre volte il "più uno"!

Fig. 2

Alcuni insegnanti, poiché i bambini ormai conoscono la filastrocca dei numeri, presentano l'addizione direttamente, dicendo: "il quattro in testa e poi nella filastrocca si va avanti di tre numeri". Ma è chiaro che saltare le fasi precedenti pregiudica una presa di coscienza efficace del significato dell'addizione; non facendo capire il perché di quel *quattro in testa e poi* … Inoltre così diventa difficile da capire il perché della proprietà commutativa.

In Fig. 3 si può notare che i numeri posti al di sotto delle palline blu servono a dare loro un nome, ma allo stesso tempo le contano, a partire dalla prima pallina blu di sinistra.

•---•---•---•---•---•---•---•---•---•---•---•---•---• …

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 …

Fig. 3 – La linea dei numeri

Infatti, per esempio, dalla pallina **1** alla pallina **4** si denominano e si contano *quattro* palline. Perciò, per calcolare **4**+**3**, basta partire dal **4** (il quattro in testa!) – che sulla linea corrisponde ad aver fissato *quattro* palline blu – e prenderne altre *tre*, contandole di seguito al **4**. Allora il fatto che si arrivi a **7** ci dice subito che abbiamo preso in tutto, contandole, *sette* palline; quindi **7** è il risultato di **4**+**3**. Così l'approccio insiemistico rimane salvo: si è semplicemente evoluto evidenziando un nuovo aspetto dell'addizione.

Quanto detto riguarda l'addizione come operazione *binaria*; dato che si sono utilizzati solo due numeri. Ma – tornando all'aspetto insiemistico – all'alunno si farà capire che potremmo considerare anche più di due numeri, in corrispondenza di più gruppi di palline: per esempio, **4** palline blu, **1** rosa, **2** verdi e **3** marrone. Non importa in quale ordine, dato che alla fine le palline sono sempre le stesse[3] (si veda Fig. 4). Onde abbiamo un'addizione che estende quella binaria, dato che utilizza più di due numeri.

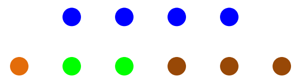


Fig. 4

Le cose dette vanno evidenziate con la massima attenzione e con esempi che chiamino in causa numeri piccoli, onde ognuno di questi sia visivamente espresso tramite palline.

Quindi quelle palline di colore diverso si scambino di posizione e si aggreghino in vario modo. Perciò ciascuna delle scritture che seguono corrisponde complessivamente al raggruppamento di palline di Fig. 4, onde esse danno sempre lo stesso risultato: il numero totale di palline! Le parentesi indicano che prima sono state aggregate le palline che corrispondono ai numeri che esse racchiudono.

$$\mathbf{4}+\mathbf{1}+\mathbf{2}+3 = \mathbf{2}+3+\mathbf{4}+\mathbf{1} = (\mathbf{4}+\mathbf{1}) + (\mathbf{2}+3) = (\mathbf{4}+\mathbf{1}+\mathbf{2}) + 3$$

Quindi gli alunni possono riesaminare l'operazione di sottrazione, che generalmente viene vista come un togliere, un levare. Ma – al di là dell'uso delle dita – la precedente fig. 1 ci mostra che le *quattro* palline blu sono quelle che, se le togliessimo, mancherebbero alle *tre* marroni per riottenere le *sette* complessive. L'operare in termini di complementazione è altrettanto frequente che l'operare nel senso del togliere. Si pensi a come generalmente un negoziante dà *il resto* manualmente.

Il complemento a 10 facilita il calcolo delle sottrazioni. Infatti, per ricavare 43-8 non occorre – secondo la procedura del prestito – sottrarre una decina del 43, aggiungerla al 3 e sottrarre 8; ma l'8 si sottrae direttamente da quella decina, considerando il

[3] Chiaramente, qui entra tacitamente in gioco il principio di indifferenza dato che non importa come le palline si scelgano per contarle.

complemento di 8 a 10; poi il risultato 2 si aggiunge all'unità 3 (rimasta intatta). Cosa che facciamo quando, avendo 43 euro, ne dobbiamo dare 8 a qualcuno. Infatti, gli daremo 10 euro (una decina di euro!), ricevendo indietro 2 euro che si aggiungono ai 3 euro che già avevamo insieme ai residui 30 euro. Così, comunque, si è calcolata la differenza 13-8; ma senza usare uno *strano prestito*. Il che riduce drasticamente le difficoltà legate alla procedura di sottrazione in colonna, poiché evita di dover ricordare i risultati delle sottrazioni relative ai prestiti.
Per quel che riguarda la complementazione, si pensi anche ad addizioni come 7+4. Questa spesso si svolge aggiungendo a 7 la parte di 4 che manca per raggiungere 10; dopodiché a 10 si aggiunge la parte residua di 4. Cioè: $7+4 = (7+3) + 1 = 10+1 = 11$.
Facciamo presente che quando i due addendi di un'addizione sono compresi tra *cinque* e *nove*, per rappresentarli si può far ricorso a una convenzione[4] facile da comprendere. Precisamente, mostrando le dita di una mano, se il pollice è chiuso gli attribuiamo il valore *cinque*; in tal caso, quando esso è accompagnato dal mignolo e via via dalle altre dita fino all'indice, avremo i numeri dal *sei* al *nove*: *cinque* aumentato del numero delle altre dita mostrate. In tal caso la mano chiusa rappresenta il *cinque*. Nelle due illustrazioni qui sotto, a sinistra è rappresentato il *sei*, a destra il *sette*; onde insieme esse mostrano il numero *tredici*: 5+5 (i due pollici chiusi) e 1+2 (le altre dita).

Anche per questo è consigliabile abituare gli alunni a indicare il *quattro* ripiegando il mignolo. Poiché, con questa convenzione, la vecchia rappresentazione del *quattro* – data dalle dita che vanno dall'indice al mignolo – ci dà il *nove*.
Una volta compresa la rappresentazione decimale, con la convenzione fatta si possono rappresentare tutti i numeri compresi tra 1 e 99. Precisamente, si userà la mano sinistra per indicare le decine e la mano destra per indicare le unità. In particolare, la sola mano sinistra chiusa – tenendo l'altra abbassata, che perciò indica la cifra zero – rappresenta il cinquanta, mentre la sola mano destra chiusa indica il cinque.
Intorno ai quattro/cinque anni, sarà bene avviare i bambini anche al riconoscimento delle cifre numeriche. Essi potranno esercitarsi a realizzare materialmente accostamenti di fiammiferi che rappresentino le cifre **1**, **2, 3, 4** e **5** secondo quanto viene mostrato nella Tavola A riportata qui sotto. In seguito saranno sollecitati a familiarizzare con le forme riguardanti **6**, **7**, **8** e **9** (si veda la tavola B), facendogli notare che pure queste altre cifre vengono rappresentate usando un numero di fiammiferi corrispondente alla quantità che esprimono. E si può notare che, in relazione alle cifre che vanno dal **5** al **9**, compaiono gruppi di cinque fiammiferi colorati in rosso. Essi sono assimilabili alle cinque dita di una mano; perciò il numero di fiammiferi di ciascuna figura si ottiene addizionando a **5** il numero di fiammiferi *bianchi* presenti nella figura stessa. Nel *nove* i fiammiferi bianchi sono stati posti nella posizione dei fiammiferi del **4** al fine di facilitarne il riconoscimento, poiché a volte i bambini sono portati a confondere le cifre **6** e **9**. L'uso della Tavola B aiuta a scongiurare questo pericolo, poiché al segno **9** corrispondono più fiammiferi. Ovviamente, la cifra nulla si rappresenta come un piatto vuoto: O. Quanto è stato illustrato

[4] L'alunno ormai dovrebbe essersi abituato alle convenzioni, sia di linguaggio (parole di significato diverso dall'usuale e modi di dire caratteristici), sia operative (significato dei colori semaforici, ecc.).

finora è importante per bambini d'ogni tipo, con o senza difficoltà, poiché li abitua a poco a poco a ragionare in termini aritmetici.

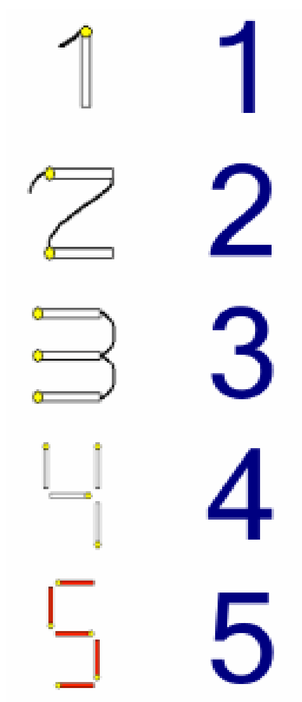


Tavola A

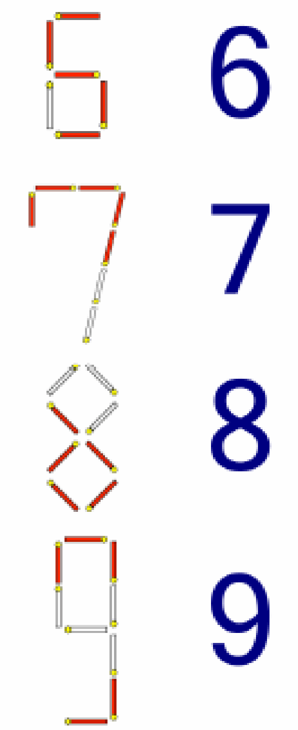
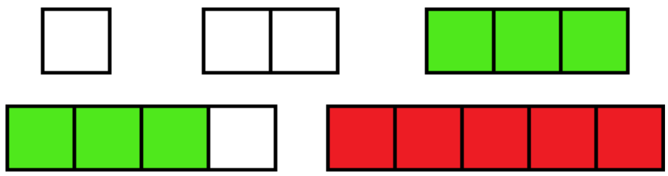


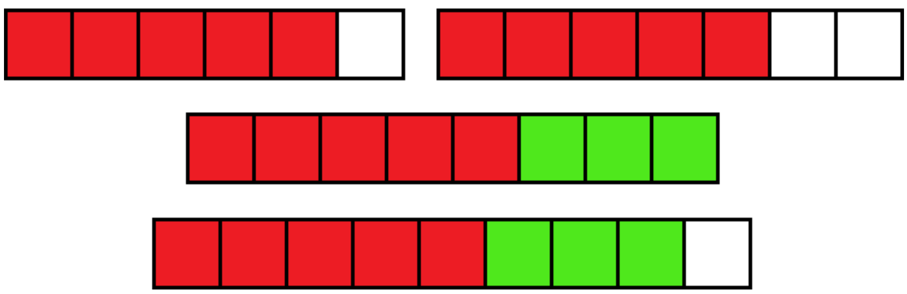
Tavola B

7. I listelli colorati

Per facilitare l'acquisizione delle tabelline dell'addizione e della sottrazione sono molto utili i cinque listelli riportati qui sotto. I quali, opportunamente ingranditi, possono essere consegnati agli alunni in forma cartacea.



Poi, in un'attività laboratoriale, dagli stessi alunni possono essere realizzati i listelli situati qui di seguito, che rappresentano i numeri dal sei al nove.



Questi possono sostituire gli inutili numeri in colore; che, essendo privi di suddivisioni,

creano agli alunni inutili difficoltà mnemoniche.
I listelli si rivelano utilissimi per favorire l'automatizzazione della somma di due numeri il cui valore vada dal *cinque* al *nove*, poiché le parti rosse corrispondono a 10 (5+5); onde basterà sommare le rimanenti parti (per la somma 7 + 8 = 15 si veda Fig. 5).

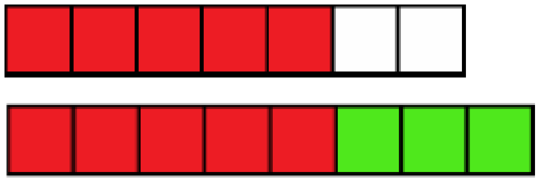


Fig. 5 – la somma 7 + 8 = 15

Per facilitare l'automatizzazione del complemento a 10 gli alunni si possono esercitare, anche col listello situato in Fig. 6. Per esempio, per calcolare il complemento di 7 a 10, basta ripiegare leggermente il listello lungo il tratto di divisione che a sinistra individua il *sette* e a destra il *tre*. In questo listello non si usa il colore verde poiché le quantità di quadretti ricavabili dalla parte bianca dovrebbero già essere agevolmente percepibili.

Fig. 6

Bibliografia

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7, 2, 33-115.

D'Amore B. (2008). Le basi della didattica della matematica. *Scuola Italiana Moderna*. 116, n° 6, 41- 45. www.lascuola.**it**/webapp/Download/08SIM/G006.pdf.

De Mauro T. (1995). L'origine del linguaggio (un'intervista a Sara Fortuna), *Rai Educational*. http://www.emsf.rai.it/articoli/articoli.asp?d=40

Lenzi D., Lenzi R. (2015). Francesca e la sua discalculia. *Matematicamente.it Magazine*. www.matematicamente.it/magazine/24aprile2015/222.Lenzi-Francesca-Discalculia.pdf

Lenzi D., Lenzi R. (2016). From Homo Abilis to Homo Rationalis through Analitic Perception and Mathematics. *Science & Philosophy*, vol. 4 (2), pp. 19-28.

Piaget J., Szeminska A. (1968). *La genesi del numero nel bambino*. La Nuova Italia, Firenze.